HEJ CIAO :)

ANBEI SIND MEIN LÖSUNGSVORSCHLAG FÜR DIE BASISPRÜFUNG : SOMMER 20

DIE HABE ICH DAMALS WÄHREND MEINER EIGENEN LERNPHASE GESCHRIEBEN.

ICH KANN ALSO WEDER FÜR VOLLSTÄNDIGKEIT, NOCH RICHTIGKEIT GARANTIEREN UND BIN UM VERBESSERUNGEN SEHR DANKBAR :)

DIE BEWEISAUFGABE HABE ICH JEWEILS WEGGELASSEN (ZU UNWAHRSCHEINLICH, DASS NOCHMALS EINE SEHR ÄHNLICHE AUFGABE KOMMT)

jamatter@student.ethz.ch

Dr. V. Gradinaru D-ITET, D-MATL, RW Sommer 2020

Basisprüfung Lineare Algebra

Exam-ID:	#—EXAMID—
Initialien:	—INITIALS—
Legi:	—LEGI—
Datum	17.08.2020

1	2	3	4	5	Total	Bonus	
6 P	6 P	6 P	6 P	6 P	30 P	Übungen	Anz. Blätter

Auf die Aufgaben dürfen Sie erst auf Anweisung des Assistenten umblättern! Sie können die Hinweise jedoch jetzt durchlesen.

Allgemeine Hinweise:

- Beginnen Sie jede der fünf Aufgaben auf einer neuen Seite und schreiben Sie Ihre **Initialen** und Ihre **Matrikel-Nummer** auf **alle** Blätter (nicht ihren vollständigen Namen – diese Prüfung ist anonymisiert).
- Prüfungsdauer: **120 Minuten**.
- Erlaubte Hilfsmittel: **Keine**.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet (jeweils 6 Punkte).
- Begründen Sie Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert! Hinweis: In dieser Prüfung gibt es **keine** Multiple-Choice-Aufgabe.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Versuchen Sie, Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen, und arbeiten Sie sorgfältig.

Vor dem Start der Prüfung:

- Schalten Sie Ihr Handy aus und verstauen Sie es in Ihrer Tasche.
- Legen Sie Ihre **Legi** auf den Tisch.
- Legen Sie genug leere Blätter auf dem Tisch bereit, sodass Sie nicht mehr zur Tasche greifen müssen.
- Zusätzlich zur regulären Prüfungszeit haben Sie **10 Minuten Zeit**, sich die Prüfung in Ruhe durchzulesen. Während diesen 10 Minuten darf nicht geschrieben werden.

Am Ende der Prüfung:

- Legen Sie die Prüfungsaufgaben und auch Ihre Antworten gemeinsam in das Couvert.
- Kleben Sie das leere Etikett auf die Lasche des Couverts, sodass das Couvert versiegelt ist, und unterschreiben Sie auf das Etikett. (Benutzen Sie *nicht* die Kleblasche des Couverts.)
- Warten Sie bis alle Prüfungen gezählt sind.

Bei Fragen und Unklarheiten fragen Sie die anwesenden Assistenten.

Viel Erfolg!

Notenskala: Die maximal erreichbare Punktzahl ist 30. Für die Note 6.00 benötigen Sie mindestens 28 und für die Note 4.00 mindestens 14 Punkte.

Bitte wenden!

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

2. [6 Punkte]

a) Finden Sie die Eigenwerte und entsprechende Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

3. [6 Punkte] Sei die Matrix A gegeben durch ihre Singularwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Was sind die Dimensionen, der Rang und die 2-Norm der Matrix A?

b) Schreiben Sie A als Summe von Rang-1-Matrizen; dabei sollten nicht mehr als 16 Zahlen (=Speicherplätze) verwendet werden.

c) Geben Sie orthonormale Basen von Kern(A) und Bild(A) an.

d) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $Ax = b$ mit

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

4. [6 Punkte] Sei $\mathcal{P}^k$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $< k$ für $k \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{P}^2$ in $\mathcal{P}^3$

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & \mathcal{P}^2 & \longrightarrow & \mathcal{P}^3 \\ & f(t) & \longmapsto & \int_0^t f(s)ds \end{array}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben bezüglich der Monomialbasis in den beiden Räumen $\mathcal{P}^2$ und $\mathcal{P}^3$?

c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2\}$ und $\{q_1, q_2, q_3\}$ Basen von $\mathcal{P}^2$ beziehungsweise $\mathcal{P}^3$ sind, wobei

$$p_1(t) = 1 - t, \qquad p_2(t) = 1 + t\,,$$

und

$$q_1(t) = 1, \qquad q_2(t) = t - t^2, \qquad q_3(t) = t + t^2\,.$$

d) Welches ist die neue Matrix B, durch die $\mathcal{A}$ nach dem Basiswechsel in die neuen Basen $\{p_1, p_2\}$ und $\{q_1, q_2, q_3\}$ aus Teilaufgabe **c**) beschrieben wird?

5. [6 Punkte] Seien $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\text{Bild}(A) \perp \text{Bild}(B) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^H B = 0.$$

AUFGABE 1

A1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$$

a)

$$\left.\begin{aligned} \langle a^{(1)}, a^{(2)} \rangle &= \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \\ \langle a^{(1)}, a^{(3)} \rangle &= \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \\ \langle a^{(1)}, a^{(4)} \rangle &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\ \langle a^{(2)}, a^{(3)} \rangle &= 0 \\ \langle a^{(2)}, a^{(4)} \rangle &= \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \\ \langle a^{(3)}, a^{(4)} \rangle &= -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \end{aligned}\right\}$$

ALLE ORTHOGONAL, DA SKALARPRODUKT = 0 IST.

b)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -I \\ -I \\ -I \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -2II \\ -II \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ -III \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \iff$$

LINEAR UNABHÄNGIG, DA HOMOGENES GLS NUR TRIVIALLÖSUNG HAT, A HAT VOLLEN RANG!

c) $A = QR$ MIT Q ORTHOGONAL
MIT R OBERE DREIECKSMATRIX

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} A$$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (= Q^T \cdot A)$$

REMINDER ORTHOGONALITÄT: ALLE SPALTEN STEHEN SENKRECHT/ORTHOGONAL UND HABEN DIE LÄNGE/NORM = 1. DIE INVERSE EINER ORTHOGONALEN MATRIX IST IHRE TRANSPONIERTE ($QQ^T = Q^TQ = I$)

AUFGABE 2

TSA SO 20 LINALG FEZO-SCAN 2.1.24

a 2)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$$

$$(2-\lambda)^2(4-\lambda)^{\cancel{4}} - 4 - 3(2-\lambda) - (2-\lambda) - (4-\lambda) = 0$$

$$(4 - 4\lambda + \lambda^2)(4-\lambda) - 4 - 4(2-\lambda) - (4-\lambda) = 0$$

$$\cancel{16} - 4\lambda - 16\lambda + 4\lambda^2 + 4\lambda^2 - \lambda^3 \cancel{-4} - 8 + 4\lambda - \cancel{8}^{4} + \lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 15\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + 8\lambda - 15) = 0 \qquad ; \underline{\underline{\lambda_1 = 0}}$$

$$\lambda^2 + 8\lambda - 15 = 0$$

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{-2} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_2 = 3}}$$

$$\underline{\underline{\lambda_3 = 5}}$$

EV zu $\lambda_1 = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +2\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +\mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 7/3\,\alpha \\ \frac{5}{3}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}}}$$

FREIE VAR

$$-x_1 = x_3 - 2x_2 \Rightarrow x_1 = -\alpha + \frac{10}{3}\alpha =$$

EV zu $\lambda_2 = 3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -2\mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

FREI α

EV zu $\lambda_3 = 5$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ -3\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +\mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

b) JA, DA ALLE ALGEBRAISCHEN / GEOMETRISCHEN MULTIPLITATEN ÜBEREINSTIMMEN

AUFGABE 3 BA 2020 LINALG FEZO-SCAN 26.1.21

A3

a) $\dim(A) = 4 \times 3$ bzw. $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$

$\text{Rang}(A) = 2 \;\widehat{=}\; \#\sigma > 0$

$2\text{-Norm}(A) = 2 \;\widehat{=}\;$ größtes σ

b) $$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \sigma_1 \cdot u^{(1)} \cdot v^{T(1)} + \sigma_2\, u^{(2)}\, v^{T(2)} + \dots$$

c) $$\text{ONB}(\text{Kern}(A)) = \left\{ \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{ONB}(\text{Bild}(A)) = \left\{ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

d) $$x = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T b \qquad \text{mit } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

mit $$V_r^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \Sigma_r = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad U_r = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_r = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \Sigma_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}; \quad U_r^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3/2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

AUFGABE 4 BA 2020 LINALG FE20_SCAN 2.1.24

a 4) $\mathcal{A}: P^2 \longrightarrow P^3$

$$A: f(t) \longmapsto \int_0^t f(s)\,ds$$

a)

1) $A(x+y) \overset{!}{=} A(x) + A(y)$

$$\hookrightarrow \int_0^t (x+y)(s)\,ds = \int_0^t x(s) + y(s)\,ds = \int_0^t x(s)\,ds + \int_0^t y(s)\,ds$$

2) $A(\alpha x) \overset{!}{=} \alpha A(x)$

$$\hookrightarrow \int_0^t \alpha\, x(s)\,ds = \alpha \int_0^t x(s)\,ds \implies \text{LINEARE ABB.}$$

b)

$$A(1) = \underbrace{1\cdot 1 + 0\cdot t}_{f(t)} \xrightarrow{A(t)} \int_0^t 1\,ds = 1t \longrightarrow \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$$A(t)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 0\cdot 1 + 1\cdot t \xrightarrow{A} \int_0^t s\,ds = \frac{1}{2}s^2\Big|_0^t = \frac{1}{2}t^2 \longrightarrow \begin{bmatrix}0\\0\\1/2\end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow A = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & 1/2\end{bmatrix}$$

c)

c) $p_1 = 1\cdot 1 - 1\cdot t = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

$p_2 = 1\cdot 1 + 1\cdot t = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$$\implies P = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix} \implies \text{VOLLER RANG} \implies \text{BASIS}$$

$q_1 = 1\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$q_2 = 0\cdot 1 + 1\cdot t - 1\cdot t^2 = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

$q_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

$$\implies Q = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 2\end{bmatrix} \implies \text{VOLLER RANG}$$

$\implies$ BASIS ✓

d)

a)

$$\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \arrow[r, "A\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & 1/2\end{bmatrix}"] & B_1\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \arrow[d, bend left, "S"] \\
P^2 \arrow[u, "B_1"] \arrow[d, "B_2"] \arrow[r, "\mathcal{A}"] & P^3 \arrow[u, "B_1"] \arrow[d, "B_2"] \\
B_2 \begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix} \arrow[r, "B = ?"] \arrow[uu, bend left, "T"] & \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}
\end{tikzcd}$$

$$B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}0 & 0\\3 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}$$