DEZ. 22

HEYCIAO :)

ANBEI SIND MEIN LÖSUNGSVORSCHLAG

FÜR DIE BASISPRÜFUNG : WINTER 19

DIE HABE ICH DAMALS WÄHREND MEINER EIGENEN LERNPHASE GESCHRIEBEN.

ICH KANN ALSO WEDER FÜR VOLLSTÄNDIGKEIT, NOCH RICHTIGKEIT GARANTIEREN UND BIN UM VERBESSERUNGEN SEHR DANKBAR :)

DIE BEWEISAUFGABE HABE ICH JEWEILS WEGGELASSEN

(ZU UNWAHRSCHEINLICH, DASS NOCHMALS EINE SEHR ÄHNLICHE AUFGABE KOMMT)

jamatter@student.ethz.ch

Basisprüfung Lineare Algebra

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Datum	Dienstag, 29. Januar 2019	

1	2	3	4	5	6	Total
6 P	6 P	6 P	6 P	6 P	6 P	36 P

Wichtige Hinweise:

- *Dieses Deckblatt darf erst auf Anweisung des Assistenten umgeblättert werden!*
- Bitte füllen Sie zuerst dieses Deckblatt aus.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und verstauen Sie es in Ihrer Tasche.
- Legen Sie Ihre **Legi** auf den Tisch.
- Prüfungsdauer: **120 Minuten**.
- Erlaubte Hilfsmittel: **Keine**.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet (jeweils 6 Punkte).
- Begründen Sie Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert! Davon ausgenommen ist nur Aufgabe 6 (Multiple-Choice-Aufgabe).
- Tragen Sie die Lösung von Aufgabe 6 (Multiple-Choice-Aufgabe) auf dem Extrablatt (letzte Seite dieser Prüfung) ein.
- Beginnen Sie jede der sechs Aufgaben auf einer neuen Seite und schreiben Sie Ihren Namen auf **alle** Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Versuchen Sie, Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen, und arbeiten Sie sorgfältig.

Viel Erfolg!

Notenskala: Die maximal erreichbare Punktzahl ist 36. Für die Note 6.00 benötigen Sie mindestens 34 und für die Note 4.00 mindestens 17 Punkte.

1. [6 Punkte] In dieser Aufgabe betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von A.

b) [1 Punkt] Bestimmen Sie eine orthonormierte Basis zu A aus den Eigenvektoren.

c) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Matrix

$$e^A = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

2. [6 Punkte] Gegeben seien

$$A = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) [1 Punkt] Geben Sie die Normalgleichungen für die Matrix A und den Vektor b an.

b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwerte von A.

Hinweis: Die Singulärwerte enthalten keine Wurzeleinträge. Dies gilt auch für die Matrizen U und V in Teilaufgabe **c**). Falls Sie sich bei **b)** verrechnet haben, können Sie bei **c)** mit den Werten 2 und 1 rechnen.

c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von A an, also $A = U\Sigma V^\top$, wobei $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

d) [1 Punkt] Bestimmen Sie ein x sodass $\|Ax - b\|_2 = \min_{v\in\mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2$ gilt.

3. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & \beta & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [1.5 Punkte] Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

Im Folgenden seien α und β nun wie in Teilaufgabe **a)**.

b) [3.5 Punkte] Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

Hinweis: Leider lässt sich hier $\sqrt{2}$ nicht vermeiden...

c) [1 Punkt] Berechnen Sie $|\det(A)|$.

Siehe nächstes Blatt!

4. [6 Punkte] Sei $\mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad strikt kleiner als 3. Im Folgenden betrachten wir die Mengen

$$\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathcal{P}_3,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{x-1, x+1, x^2-1\} \subseteq \mathcal{P}_3$$

sowie die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, die für alle $p \in \mathcal{P}_3$, $x \in \mathbb{R}$ durch

$$[\mathcal{F}(p)](x) = p(x) - \left(\int_0^1 y\, p'(y)\,\mathrm{d}y\right) \cdot x$$

gegeben ist (wobei p' hier wie gewohnt die Ableitung von p bezeichnet).

a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F, durch die $\mathcal{F}$ beschrieben wird, wenn wir die Basis $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{P}_3$ verwenden.

c) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathcal{P}_3$ ist.

d) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T für den Basiswechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$ (T überführt also Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_2$ in Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_1$).

5. [6 Punkte] Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit $\det(A) < 0$. Zeigen Sie folgenden Aussagen:

a) [1 Punkt] Mindestens ein Eigenwert von A ist strikt negativ.

b) [2 Punkte] Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $x^\top Ax < 0$.

c) [3 Punkte] Die Aussagen in $\mathbf{a})$ und $\mathbf{b})$ gelten auch für Matrizen, die nicht symmetrisch sind.

6. [6 Punkte] Multiple-Choice: Auf dem Extrablatt “Richtig” oder “Falsch” ankreuzen.

a) [1 Punkt] Sei $n \in \mathbb{N}$ und A eine reelle $n \times n$ Matrix, die in Matlab eingegeben wurde. Folgende Befehle werden darauf eingegeben:

```
>> [Q, ~] = qr(A);
>> max(diag( abs(Q.'*Q - eye(size(Q))) )) < 1e-1
```

Kreuzen Sie ’Richtig’ an, wenn wir erwarten können, dass Matlab den logischen Wert 1 zurückgibt. Kreuzen Sie ’Falsch’ an, wenn wir erwarten können, dass Matlab den logischen Wert 0 zurückgibt.

b) [1 Punkt] Sei A eine reelle 3×3 Matrix, welche schiefsymmetrisch ist, das heisst $A^\top = -A$. Dann ist gilt $\det(A) = 0$.

c) [1 Punkt] Wir definieren die Matrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es gilt dann, dass $P^{100} = P^{21}$.

d) [1 Punkt] Sei A eine reelle 2×2 Matrix und habe die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Die characteristische Gleichung zu A lautet $x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot x + \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

e) [1 Punkt] Die LR-Zerlegung einer Matrix A liefert

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Die Determinante von A ist 14.

f) [1 Punkt] Die folgende Matrix ist gegeben,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Somit gilt $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$.

Dr. V. Gradinaru | D-ITET, D-MATL, RW Lineare Algebra | Winter 2019

Extrablatt: Aufgabe 6

Name: ____________________________

Tragen Sie auf dieses Extrablatt die Lösungen zu den “Richtig oder Falsch”-Fragen aus Aufgabe 6 ein, indem Sie das Kästchen **ankreuzen**, welches der korrekten Antwort entspricht. Tragen Sie oben Ihren Namen ein.

Bewertungsschema: Jede *korrekte* Antwort gibt einen Punkt, jedes *nicht korrekt gesetzte* Kreuz gibt einen Punkt Abzug. Für jede Teilaufgabe, für die *kein Kreuz* gemacht wurde, gibt es 0 Punkte. Die Summe der Punktzahlen für die ganze Aufgabe 6 wird, falls negativ, auf 0 aufgerundet.

Teilaufgabe	Richtig	Falsch
a)	☒	☐
b)	☒	☐
c)	☐	☒
d)	☒	☐
e)	☐	☒
f)	☒	☐

AUFGABE 1

BA WI 13 — 30.12.20

a 1)
a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(SYMMETRISCH)}$$

$$\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda)^2 + 2 + 2 - (1-\lambda) - 4(2-\lambda) - (1-\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 6 + 6\lambda = 0$$

$$(1-\lambda)\left((2-\lambda)(1-\lambda) - 6\right) = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{\lambda_1 = 1}}$$

$$2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_2 = 4}}$$

$$\underline{\underline{\lambda_3 = -1}}$$

EV zu $\lambda_1 = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -I \\ -I \end{matrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ +II \end{matrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} -2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

FREI VAR. α

EV zu $\lambda_2 = 4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ :5 \\ +II \end{matrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

FREIE VAR. α

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \overset{\alpha=1}{\Rightarrow} \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

EV zu $\lambda_3 = -1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -3I \\ -I \end{matrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

FREIE VAR.

b) DA A SYMMETRISCH IST, STEHEN DIE EIGENVEKTORE BEREITS ORTHOGONAL UND MÜSSEN NUR NOCH NORMIERT WERDEN.

(DA SIE ORTHOGONAL STEHEN SIND SIE AUCH LIN. UNABHÄNGIG UND BILDEN SCHON EINE BASIS IM $\mathbb{R}^3$)

$$\text{ONB} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) $e^A = Q e^D Q^T$; DA A DIAGONALISIERT WERDEN KANN.

$$A = Q D Q^T \quad \text{MIT} \quad Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{UND} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \text{ALSO} \quad e^A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2e & \sqrt{2}e^4 & 0 \\ e & \sqrt{2}e^4 & -\sqrt{3}e^{-1} \\ e & \sqrt{2}e^4 & \sqrt{3}e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4e + 2e^4 & -2e + 2e^4 & -2e + 2e^4 \\ -2e + 2e^4 & e + 2e^4 - 3e^{-1} & e + 2e^4 - 3e^{-1} \\ -2e + 2e^4 & e + 2e^4 - 3e^{-1} & e + 2e^4 + 3e^{-1} \end{bmatrix}$$

AUFGABE 2

30.12.20

BA W1 19

A2)

a) NORMALENGLEICHUNG : $A^T A x = A^T b$

mit $A = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}$ und $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

und $A^T A = \frac{1}{225}\begin{bmatrix} -2 & 8 & 20 \\ -14 & -19 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} = \frac{1}{225}\begin{bmatrix} 468 & -324 \\ -324 & 657 \end{bmatrix}$

$$= \underline{\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 52 & -36 \\ -36 & 73 \end{bmatrix}}$$

und $A^T b = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & 8 & 20 \\ -14 & -19 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 78 \\ -129 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 26 \\ -43 \end{bmatrix}}$

b) $\det(A^T A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{52}{25} - \lambda & \frac{-36}{25} \\ \frac{-36}{25} & \frac{73}{25} - \lambda \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\left(\frac{52}{25} - \lambda\right)\left(\frac{73}{25} - \lambda\right) - \frac{36^2}{25^2} = 0$$

$$\frac{52 \cdot 73}{25^2} - \frac{52}{25}\lambda - \frac{73}{25}\lambda + \lambda^2 - \frac{36^2}{25^2} = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2} = \lambda_1 = 4$$

$$\lambda_2 = 1$$

$\longrightarrow$ $\underline{\underline{\sigma_1}} = \sqrt{\lambda_1} = \underline{\underline{2}}$

$\underline{\underline{\sigma_2}} = \sqrt{\lambda_2} = \underline{\underline{1}}$

$\longrightarrow$

c) $\underline{\underline{\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}}$; $\underline{\text{EV von } A^TA \ \lambda_1 = 4} \Rightarrow v_1$

$$\frac{1}{25}\left(\begin{bmatrix} -48 & -36 \\ -36 & -27 \end{bmatrix}\right) - \frac{3}{4}\mathrm{I}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -48 & -36 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{3}{4}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{norm}} \underline{\underline{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}}}$$

EV zu $\lambda_2 = 1 \Rightarrow v_2$

$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 27 & -36 \\ -36 & 48 \end{bmatrix}\Big) \tfrac{4}{3} \rightsquigarrow \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 27 & -36 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{4}{3}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{norm}} \underline{\underline{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}}} \qquad \left(\longrightarrow V^T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \ (= V)\right)$$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -13 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}}}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -13 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}}$$

$u_3 \perp (u_2, u_1) \Rightarrow$ Vektorprodukt / Kreuzprodukt

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{norm}} \underline{\underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}}}$$

d) $\underline{x} = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T b = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 7/10 \\ -26/10 \end{bmatrix}}}$

AUFGABE 3

BA WI 19

30.12.20

A3)

a)

$$\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha\\2\\\beta\end{bmatrix}\overset{!}{=}0 \;\rightarrow\; 2+2\beta=0 \;\Rightarrow\; \underline{\beta=-1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha\\2\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}\overset{!}{=}0}_{\langle a_2,a_3\rangle \overset{!}{=} 0 \text{, DA ORTHOGONAL.}} \;\rightarrow\; 2\alpha-5=0 \;\rightarrow\; \underline{\underline{\alpha=\tfrac{5}{2}}}$$

b) A WIRD ORTHOGONAL, WENN WIR DIE SPALTEN NOCH NORMIEREN ($\hat{=}$ Q)

DIE R-MATRIX WIRD DANN EINE DIAGONALMATRIX MIT DEN NORMEN AUF DER HAUPTDIAGONALEN.

$$Q=\begin{bmatrix}0 & \frac{5/2}{\|a_2\|} & \frac{2}{\|a_3\|}\\ 1/\sqrt{5} & \frac{2}{\|a_2\|} & \frac{-2}{\|a_3\|}\\ 2/\sqrt{5} & \frac{-1}{\|a_2\|} & \frac{1}{\|a_3\|}\end{bmatrix}$$

$\|a_1\|$ $\|a_2\|$ $\|a_3\|$

$$\underline{\underline{R=D=\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{5}\cdot 6}{4} & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}}}$$

c) $\det(A)=\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}\cdot 6}{4}\cdot 3=\underline{\underline{\frac{45}{2}}}$

↳ DIE DETERMINANTE IST DAS PRODUKT AUS DEN EINTRÄGEN DER DIAGONALMATRIX D (BZW. R) DER QR-ZERLEGUNG.

AUFGABE 4

LINALG WS19 BA A4

A4)

$B_1 = \{1, x, x^3\}$

$B_2 = \{x-1, x+1, x^2-1\}$

a) 1) $F(s+t) \stackrel{?}{=} F(s) + F(t)$

$\hookrightarrow = (s+t)(x) - \left(\int_0^1 y\,(s+t)'(y)\,dy\right) x$

$= s(x) + t(x) - \left(\int_0^1 y\, s'(y) + t'(y)\right) x$

$= s(x) - \left(\int_0^1 s'(y) y\, dy\right) x + t(x) - \left(\int_0^1 y\, t'(y)\,dy\right) x$

$\quad F(s) \qquad + \qquad F(t)$ ✓

2) $F(\alpha x) \stackrel{?}{=} \alpha F(x)$

$\hookrightarrow = \alpha p(x) - \left(\int_0^1 y\, \alpha p'(y)\, dy\right) x$

$= \alpha \left(p(x) - \left(\int_0^1 y\, p'(y)\, dy\right) x \right)$ ✓

b) $F(1) = \underbrace{1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2}_{p(x)} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F} 1 - \left(\int_0^1 y \cdot 0 \cdot dy\right) \cdot x$

$1 - 0 = 1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$F(x) = \underbrace{0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2}_{p(x)} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F} x - \left(\int_0^1 y \cdot 1 \cdot dy\right) x$

$x - \left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1\right) x$

$x - \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} x \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$F(x^2) = \underbrace{0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2}_{p(x)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F} x^2 - \left(\int_0^1 y \cdot 2y \cdot dy\right) x$

$x^2 - \left(\frac{2}{3} y^3 \Big|_0^1\right) x$

$x^2 - \frac{2}{3} x \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) B_2

$b_1 = x - 1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$b_2 = x + 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ => LIN? LIN.ABHÄNGIG?

$b_3 = x^2 - 1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ → volles Rang => Basis

a)

$$\begin{tikzcd}
B_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \arrow[r, "F"] & B_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
B_3 \arrow[r] \arrow[d] & B_3 \arrow[d] \\
B_2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \arrow[uu, bend left, "T^{-1}"] \arrow[r] & B_2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{tikzcd}$$

$$T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \underline{T}$$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$