DEZ. 22

HEJCIAO :)

ANBEI SIND MEIN LÖSUNGSVORSCHLAG FÜR DIE BASISPRÜFUNG : WINTER 20

DIE HABE ICH DAMALS WÄHREND MEINER EIGENEN LERNPHASE GESCHRIEBEN.

ICH KANN ALSO WEDER FÜR VOLLSTÄNDIGKEIT, NOCH RICHTIGKEIT GARANTIEREN UND BIN UM VERBESSERUNGEN SEHR DANKBAR :)

DIE BEWEISAUFGABE HABE ICH JEWEILS WEGGELASSEN
(ZU UNWAHRSCHEINLICH, DASS NOCHMALS EINE SEHR ÄHNLICHE AUFGABE KOMMT)

jamatter@student.ethz.ch

Basisprüfung Lineare Algebra

Datum	Freitag, 24. Januar 2020	Note

1	2	3	4	5	Total	Bonus	
6 P	6 P	6 P	6 P	6 P	30 P	Übungen	Anz. Blätter

Auf die Aufgaben dürfen Sie erst auf Anweisung des Assistenten umblättern! Sie können die Hinweise jedoch jetzt durchlesen.

Allgemeine Hinweise:

- Diese Prüfung ist **anonymisiert**: Bitte tragen Sie auf den abgegebenen Blättern jeweils nur Ihre Initialen und Ihre Matrikel-Nummer ein (**nicht** Ihren vollständigen Namen).
- Kleben Sie das Etikett mit Ihren Initialen und Ihrer Matrikel-Nummer oben auf dem grossen leeren Feld auf.
- Prüfungsdauer: **120 Minuten**.
- Erlaubte Hilfsmittel: **Keine**.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet (jeweils 6 Punkte).
- Begründen Sie Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!
  Hinweis: In dieser Prüfung gibt es **keine** Multiple-Choice-Aufgabe.

- Beginnen Sie jede der fünf Aufgaben auf einer neuen Seite und schreiben Sie Ihre Initialen und Matrikel-Nummer auf **alle** Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Versuchen Sie, Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen, und arbeiten Sie sorgfältig.

Vor dem Start der Prüfung:

- Ein Etikett mit Ihren Initialen und Matrikel-Nummer sollte auf dem Couvert sein und ein zweites Etikett auf der vordersten Seite der Prüfungsaufgaben.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und verstauen Sie es in Ihrer Tasche.
- Legen Sie Ihre **Legi** auf den Tisch.
- Legen Sie genug leere Blätter auf dem Tisch bereit, sodass Sie nicht mehr zur Tasche greifen müssen.

Am Ende der Prüfung:

- Geben Sie die Prüfungsaufgaben und auch Ihre Antworten gemeinsam in das Couvert.
- Kleben Sie das leere Etikett auf die Lasche des Couverts, sodass das Couvert versiegelt ist, und unterschreiben Sie auf das Etikett. (Benutzen Sie *nicht* die Kleblasche des Couverts.)
- Warten Sie bis alle Prüfungen gezählt sind.

Bei Fragen und Unklarheiten fragen Sie die anwesenden Assistenten.

Viel Erfolg!

Notenskala: Die maximal erreichbare Punktzahl ist 30. Für die Note 6.00 benötigen Sie mindestens 28 und für die Note 4.00 mindestens 14 Punkte.

Bitte wenden!

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

2. [6 Punkte]

a) Finden Sie die Eigenwerte und entsprechende Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

3. [6 Punkte] Sei die Matrix A gegeben durch ihre Singularwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Was sind die Dimensionen, der Rang und die 2-Norm der Matrix A?

b) Schreiben Sie A als Summe von Rang-1-Matrizen.

c) Geben Sie orthonormale Basen von Kern(A) und Bild(A) an.

d) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $Ax = b$ mit

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

4. **[6 Punkte]** Seien $\mathcal{G} = \mathrm{span}\{1, t^2\}$ und $\mathcal{U} = \mathrm{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \quad \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{U} \\ x(t) &\longmapsto t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t), \end{aligned}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t)$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben bezüglich der Monomialbasis in den beiden Räumen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{U}$?

c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von $\mathcal{G}$ beziehungsweise $\mathcal{U}$ sind, wobei

$$p_1(t) = 1 - t^2, \qquad p_2(t) = 1 + t^2\,,$$

und

$$q_1(t) = t - t^3, \qquad q_2(t) = t + t^3\,.$$

d) Welches ist die neue Matrix B, durch die $\mathcal{A}$ nach dem Basiswechsel in die neuen Basen $\{p_1, p_2\}$ und $\{q_1, q_2\}$ aus Teilaufgabe **c**) beschrieben wird?

5. **[6 Punkte]** Seien $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ beliebig, und $I_m \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $I_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Identitätsmatrizen.

a) Berechnen Sie

$$\begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & \lambda I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & \lambda I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}.$$

b) Verwenden Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe **a**) und Determinanten, um zu zeigen, dass AB und BA dieselben nicht-nullen Eigenwerte mit derselben Multiplizität haben.

BASISPRÜFUNG : W20

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

a)

$\langle a_1, a_2 \rangle \overset{?}{=} 0 \qquad = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix} = -1 + 0 + 1 + 0 = 0$ ✓

$\langle a_1, a_3 \rangle \overset{?}{=} 0$

$\langle a_1, a_4 \rangle \overset{?}{=} 0$ AMAZOG :)

$\langle a_2, a_3 \rangle \overset{?}{=} 0$

$\langle a_2, a_4 \rangle \overset{?}{=} 0$

$\langle a_3, a_4 \rangle \overset{?}{=} 0$

SPALTENVEKTOREN ORTHOGONAL $\not\Rightarrow$ MATRIX ORTHOGONAL

NICHT DIREKT.. $\|\cdot\| \overset{!}{=} 1$ ..

⚠

a) GENERELL :

1) SPALTENVEKTOREN ALS MATRIX SCHREIBEN

2) GAUSSEN $\left(Ax = 0 \overset{?}{\Longleftrightarrow} x \overset{!}{=} 0 \right)$

3) VOLLER RANG ?

JA : MATRIX HAT VOLLER RANG
$\Longrightarrow$ SPALTENVEKTOREN SIND LINEAR UNABHÄNGIG.

NEIN : $\Longrightarrow$ SPALTENVEKTOREN SIND NICHT LINEAR UNABHÄNGIG.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{III}-\text{I},\ \text{IV}-\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-\text{II}]{\text{III}-2\text{II}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{IV}-\text{III}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ VOLLER RANG

$\longrightarrow$ $Ax = 0$ HAT NUR TRIVIALE LÖSUNG $x \overset{!}{=} 0$.

$\Longrightarrow$ LINEAR UNABHÄNGIGE SPALTEN !

BASISPRÜFUNG : W20

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

c) A HAT JA BEREITS ORTHOGONALE SPALTENVEKTOREN.

⟶ ABER, DIE EUKLIDISCHEN NORMEN SIND (NOCH) UNGLEICH 1 :/

⟹ ALSO IST A (NOCH) NICHT ORTHOGONAL! SONST WÄRE DIE QR-ZERLEGUNG ZU EASY :)

⟹ WIR NORMIEREN DIE SPALTENVEKTOREN EINZELN ... UND MULTIPLIZIEREN DIE JEWEILIGEN EINHEITSVEKTOREN DER IDENTITÄTSMATRIX DAMIT.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{=A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{R}$$

MIT

$\|a_1\| = 2$

$\|a_2\| = \sqrt{2}$

$\|a_3\| = \sqrt{2}$

$\|a_4\| = 2$

FINITO :)

AUFGABE 2

BERECHNE DIE EIGENWERTE (EW) VON $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

1) EW BESTIMMEN : $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$ LÖSEN

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & 0-\lambda \end{bmatrix} \right) \overset{!}{=} 0$$

SARRUS...

$$\Longleftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) + \lambda \overset{!}{=} 0$$

← (NULLSTELLEN BESTIMMEN)

$$\Longleftrightarrow \lambda\left(-(1-\lambda)^2 + 1\right) \overset{!}{=} 0 \longrightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = 0}} \quad (EW_1)$$

$$\Longleftrightarrow -\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) + 1 \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow -\lambda^2 + 2\lambda \cancel{-1} \cancel{+1} \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda(-\lambda + 2) \overset{!}{=} 0 \implies \underline{\underline{\lambda_2 = 0}} \quad (EW_2)$$

$$\implies \underline{\underline{\lambda_3 = 2}} \quad (EW_3)$$

WIR BEMERKEN : $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$

DER EW 0 KOMMT ZWEI MAL VOR.

⟹ SEINE ALGEBRAISCHE MULTIPLIZITÄT (AM) IST GLEICH 2

$\lambda_3 = 2$ KOMMT NUR 1 MAL VOR

⟹ SEINE ALGEBRAISCHE MULTIPLIZITÄT (AM) IST GLEICH 1

⟹ UNSERE 3 EIGENWERTE VON A SIND $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2$.

Definition 7.2.0.16. Algebraische Multiplizität (AM)

Die *algebraische Multiplizität* (auch *algebraische Vielfachheit* genannt) zeigt uns, wie oft λ unter den Nullstellen der charakteristischen Gleichung vorkommt.

AUFGABE 2

BASISPRÜFUNG – WINTER – 20

Berechne die Eigenvektoren (EV) der zugehörigen EW von $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Für alle Eigenwerte berechnen

Eigenvektor zu λ_i (beliebiger EW) finden : $(A - \lambda_i I)x = 0$ lösen

$\rightsquigarrow$ EV$_1$ zu EW$_1$: $\lambda_1 = 0$

$$(A - \lambda_1 I)x \overset{!}{=} 0 \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{III - 2I}{\overset{II + I}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_2 , x_3 freie Variable : $s, t \in \mathbb{R}$

$$x = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\boxed{x = \begin{bmatrix} s \\ s \\ t \end{bmatrix}}}_{EV_1} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Diesen Span nennt man den Eigenraum zu $\lambda_1 (=\lambda_2) = 0$

$$\Longrightarrow E_0 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\longrightarrow$ Die Dimension vom Eigenraum ist gleich der geometrischen Multiplizität (GM).

$\Longrightarrow$ Also GM von λ_1 ist 2

$\longrightarrow$ Da EW$_1$ = EW$_2$ $(\lambda_1 = 0 = \lambda_2)$ haben sie auch den selben Eigenvektor !

$\rightsquigarrow$ EV$_3$ zu EW$_3$: $\lambda_3 = 2$

$$(A - \lambda_3 I)x \overset{!}{=} 0 \iff \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{III + 2I}{\overset{II - I}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \underbrace{\boxed{x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{2}s \\ s \end{bmatrix}}}_{EV_3} \longrightarrow \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$x_3 = s \in \mathbb{R}$ freie Variable

Eigenraum zu λ_3 $(=2)$:

$$E_2 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

$\Longrightarrow$ GM von λ_3 ist gleich 1

AUFGABE 2.b)

„LÄSST SICH A DIAGONALISIEREN? BEGRÜNDE. (BERECHNE $S^{-1}DS = A$)"

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

JA, SI, OUI, YES!

ABER WARUM? :)

EIGENVEKTOREN (SCHON BERECHNET)

$S := \begin{bmatrix} EV_1 & EV_2 & EV_3 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}}_{D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} = D = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ WEIL ALLE ALGEBRAISCHEN MIT DEN JEWEILIGEN GEOMETRISCHEN MULTIPLIZITÄTEN ÜBEREINSTIMMEN :)

$\lambda_1 = 0$: AM VON λ_1 WAR 2 $\hat{=}$ GM VON λ_1 WAR AUCH 2

$\lambda_3 = 2$: AM VON λ_3 WAR 1 $\hat{=}$ GM VON λ_3 WAR AUCH 1

Satz 7.2.0.26. Verhältnis zwischen GM und AM entscheidet ob diagonalisierbar oder nicht

Wenn die Matrix $\mathbf{A}$ *ein Eigenwert besitzt dessen geometrische Multiplizität strikt kleiner als die algebraische Multiplizität ist, dann ist die Matrix nicht diagonalisierbar.*
Wenn für alle Eigenwerte die geometrische Multiplizität gleich der algebraischer Multiplizität ist, dann ist die Matrix diagonalisierbar.

!

↳ NUR DANN :)

AUFGABE 3

BASISPRÜFUNG – WINTER 20

3. [6 Punkte] Sei die Matrix A gegeben durch ihre Singularwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Was sind die Dimensionen, der Rang und die 2-Norm der Matrix A?

b) Schreiben Sie A als Summe von Rang-1-Matrizen.

c) Geben Sie orthonormale Basen von Kern(A) und Bild(A) an.

d) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $Ax = b$ mit

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

a) $\rightarrow$ DIM(A) = DIM(Σ) = $\underline{4 \times 3}$

$\rightarrow$ RANG(A) = # SINGULÄRWERTE > 0 $\Longrightarrow$ RANG$(A) = \underline{2}$

$\rightarrow$ 2-NORM(A) = GRÖSSTER SINGULÄRWERT $= \sigma_1 = \underline{2}$

"ABLESEN"

b) $\rightarrow$ $A = \sigma_1 \cdot u_1$ (SPALTE) $\cdot\, v_1^T$ (ZEILE) $+$ $\sigma_2 \cdot u_2$ (SPALTE) $+$ v_2^T (ZEILE) $+ \dots$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + 0$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

c) $\rightarrow$ BILD(A) = SPAN $\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}$

$\rightarrow$ KERN(A) = SPAN $\left\{ \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

AUFGABE 3 BASISPRÜFUNG – WINTER 20

3. [6 Punkte] Sei die Matrix A gegeben durch ihre Singularwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

U_r Σ_r V_r^T

a) Was sind die Dimensionen, der Rang und die 2-Norm der Matrix A?

b) Schreiben Sie A als Summe von Rang-1-Matrizen.

c) Geben Sie orthonormale Basen von Kern(A) und Bild(A) an.

d) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $Ax = b$ mit

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

d) $\Longrightarrow$ ALSO BERECHNE $x = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T b$

MIT

$$\Sigma_r = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \Sigma_r^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_r^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow V_r = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U_r = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow U_r^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{x}} = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T b = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}}}$$

AUFGABE 4 :

BASISPRÜFUNG – WINTER 20

4. [6 Punkte] Seien $\mathcal{G} = \text{span}\{1, t^2\}$ und $\mathcal{U} = \text{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \quad \mathcal{G} &\longrightarrow \quad \mathcal{U} \\ x(t) &\longmapsto t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t), \end{aligned}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t)$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben bezüglich der Monomialbasis in den beiden Räumen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{U}$?

c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von $\mathcal{G}$ beziehungsweise $\mathcal{U}$ sind, wobei

$$p_1(t) = 1 - t^2, \qquad p_2(t) = 1 + t^2,$$

und

$$q_1(t) = t - t^3, \qquad q_2(t) = t + t^3.$$

---

a) LIN. UNABHÄNGIGE ABBILDUNG FALLS : ← THEORIE VON WOCHE 06 :)

$$\text{I}: \quad A(x+y)(t) = Ax(t) + Ay(t)$$

$$\text{II}: \quad A(\alpha x)(t) = \alpha A x(t)$$

$$\text{I}: \longrightarrow A(x+y)(t) \overset{?}{=} Ax(t) + Ay(t)$$

$$= t\,(x(0) + y(0)) + t^2\,(x'(t) + y'(t))$$

$$= x(0)\,t + y(0)\,t + x'(t)\,t^2 + y'(t)\,t^2$$

$$= x(0)\,t + x'(t)\,t^2 + y(0)\,t + y'(t)\,t^2$$

$$\overset{\checkmark}{=} A\,x(t) + A\,y(t)$$

✓ (EIGENSCHAFT I HABEN WIR GEZEIGT :)

$$\text{II}: \longrightarrow A(\alpha x)(t) \overset{?}{=} \alpha A x(t)$$

$$= t\,(\alpha x(0)) + t^2\,(\alpha x'(t))$$

$$= \alpha\,(t\,x(0)) + \alpha\,(t^2 x'(t))$$

$$= \alpha\,(t\,x(0) + t^2 x'(t))$$

✓ (EIGENSCHAFT II HABEN WIR GEZEIGT...

⟹ AUS I UND II FOLGT, DIE ABBILDUNG IST LINEAR :)

4. [**6 Punkte**] Seien $\mathcal{G} = \operatorname{span}\{1, t^2\}$ und $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{U}$:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ & x(t) & \longmapsto & t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t), \end{array}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t)$.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben bezüglich der Monomialbasis in den beiden Räumen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{U}$?

b) HIER SUCHEN WIR EINE MATRIX $\underline{A}$, WELCHE DIE LINEARE ABBILDUNG $\mathcal{A}$ BESCHREIBT. (BEZÜGLICH DER JEWEILIGEN MONOMIALBASEN VON $\mathcal{G}$ NACH $\mathcal{U}$)

$\rightsquigarrow$ ALSO WAS MACHT UNSERE ABBILDUNG $\mathcal{A}$ MIT DER MONOMIALBASIS VON $\mathcal{G}$?

1) $\longrightarrow$ MONOMIALBASISVEKTOREN VON $\mathcal{G}$ ABBILDEN

1.1) UND ALS LINEARKOMBINATION VON MONOMIALBASISVEKTOREN ALS $\mathcal{U}$ SCHREIBEN.

2) $\longrightarrow$ MATRIXFORM :)

$\mathcal{G}$ HAT DIE MONOMIALBASIS $\{1, t^2\}$

$\mathcal{U}$ HAT DIE MONOMIALBASIS $\{t, t^3\}$

$$\mathcal{A}(\underbrace{1}_{x(t)=1}) = t \cdot \underbrace{1}_{x(0)=1} + t^2 \cdot \underbrace{0}_{x'(t)=0} = t = 1 \cdot t + 0 \cdot t^3 \Longrightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

$$\mathcal{A}(\underbrace{t^2}_{x(t)=t^2}) = t \cdot \underbrace{0}_{x(0)=0} + t^2 \cdot \underbrace{2t}_{x'(t)=2t} = 0 \cdot t + 2 \cdot t^3 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}}$$

BASISPRÜFUNG – WINTER_20 'ALTE' BASEN :)

4. **[6 Punkte]** Seien $\mathcal{G} = \text{span}\{1, t^2\}$ und $\mathcal{U} = \text{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \quad \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{U} \\ x(t) &\longmapsto t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t), \end{aligned}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t)$.

c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von $\mathcal{G}$ beziehungsweise $\mathcal{U}$ sind, wobei

$$p_1(t) = 1 - t^2, \qquad p_2(t) = 1 + t^2,$$

und

$$q_1(t) = t - t^3, \qquad q_2(t) = t + t^3.$$

c) OB $\{p_1, p_2\}$ EINE GÜLTIGE BASIS VON $\mathcal{G}$ IST, SEHEN WIR WIE FOLGT:

1) p_1, p_2 ALS LINEARKOMBINATION VON BASISVEKTOREN AUS $\mathcal{G}$ SCHREIBEN

2) MATRIXFORM AUFSTELLEN

3) GAUSSEN (IN ZSF BRINGEN) $\longrightarrow$ VOLLER RANG ?

JA: LIN. UNABHÄNGIG $\Longrightarrow$ GÜLTIGE BASIS :)

NO: KEINE GÜLTIGE BASIS :/

$\rightsquigarrow$ ANALOG FÜR $\{q_1, q_2\}$ UND $\mathcal{U}$ ...

---

1) $\rightsquigarrow$ $p_1 = 1 - t^2 = 1 \cdot 1 - 1 \cdot t^2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$p_2 = 1 + t^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t^2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2) 3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{II + I}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

DIESE MATRIX HAT VOLLEN RANG, ALSO BILDEN $\{p_1, p_2\}$ EINE BASIS VON $\mathcal{G}$:)

---

1) $q_1 = t - t^3 = 1 \cdot t - 1 \cdot t^3 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$q_2 = t + t^3 = 1 \cdot t + 1 \cdot t^3 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2) 3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{II + I}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

DIESE MATRIX HAT VOLLEN RANG, ALSO BILDEN $\{q_1, q_2\}$ EINE BASIS VON $\mathcal{U}$:)

4. **[6 Punkte]** Seien $\mathcal{G} = \operatorname{span}\{1, t^2\}$ und $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}: \quad \mathcal{G} &\longrightarrow \quad \mathcal{U}\\ x(t) &\longmapsto \quad t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t),\end{aligned}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t)$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben bezüglich der Monomialbasis in den beiden Räumen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{U}$?

c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von $\mathcal{G}$ beziehungsweise $\mathcal{U}$ sind, wobei

$$p_1(t) = 1 - t^2, \qquad p_2(t) = 1 + t^2\,,$$

und

$$q_1(t) = t - t^3, \qquad q_2(t) = t + t^3\,.$$

d) Welches ist die neue Matrix B, durch die $\mathcal{A}$ nach dem Basiswechsel in die neuen Basen $\{p_1, p_2\}$ und $\{q_1, q_2\}$ aus Teilaufgabe **c)** beschrieben wird?

SPEZIALFALL DIESER AUFGABE

$$\boxed{B = T^{-1} A T}$$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathcal{B}} = \{1-t^2,\ 1+t^2\} \arrow[rr, bend left] \arrow[dd, bend right, "T = B^{-1}\tilde{B}"'] & & \tilde{\mathcal{D}} = \{t-t^3,\ t+t^3\} \\
\mathcal{G} \arrow[u, "h_{\tilde{\mathcal{B}}}"] \arrow[rr, "\mathcal{A}"] \arrow[d, "h_{\mathcal{B}}"] & & \mathcal{U} \arrow[u, "h_{\tilde{\mathcal{D}}}"'] \arrow[d, "h_{\mathcal{D}}"'] \\
\mathcal{B} = \{1,\ t^2\} \arrow[rr, bend right] & & \mathcal{D} = \{t,\ t^3\} \arrow[uu, bend right, "T^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\tilde{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

AUS b)

→ T ODER T^{-1} IST SEHR EINFACH ZU BESTIMMEN :)

BASISPRÜFUNG _ WINTER _ 20

IN DIESER AUFGABE IST T SEHR EINFACH ZU BESTIMMEN :

$$\underline{\underline{T}} = B^{-1}\tilde{B} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}}}$$

$\longrightarrow$ SOMIT IST $\underline{\underline{T^{-1}}}$ =

EXPLIZIT BERECHNET ALS REFRESHER.

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\-1&1&0&1\end{array}\right] \overset{II+I}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&2&1&1\end{array}\right] \overset{\frac{1}{2}\cdot II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\overset{I-II}{\rightsquigarrow} \underline{\underline{\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right]}}$$

$$\underline{\underline{T^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}}}$$

$\rightsquigarrow$ JETZT LESEN WIR DEN GLEICHWERTIGEN PFAD IM KOM. DIAGRAM AB, UM B ZU BESTIMMEN :)

$\longrightarrow \;\hat{=}$

$$\boxed{B = T^{-1}AT} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{= \begin{bmatrix}\frac{3}{2}&\frac{-1}{2}\\\frac{-1}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix} = B}}$$