BEWEIS 1: SEIEN $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ k- PAARWEISE VERSCHIEDENE EIGENWERTE DER MATRIX A UND SEIEN $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ ZUGEHÖRIGE EIGENVEKTORE.

ZZ: DIE EIGENVEKTORE $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ SIND LINEAR UNABHÄNGIG.

LINEARE UNABHÄNGIGKEIT :

EINE MENGE VON VEKTOREN $V^{(1)}, V^{(2)}, \dots V^{(n)}$ HEISST LINEAR UNABHÄNGIG, FALLS ALS

$$\alpha_1 V^{(1)} + \alpha_2 V^{(2)} + \dots + \alpha_n V^{(n)} = 0$$

FOLGT, DASS ALLE KOEFFIZIENTEN $\alpha_i = 0$ $i = 1, \dots n$. (EINZIGE LÖSUNG!)

BEWEIS PER INDUKTION :

PRÄMISSE/ANNAHME : ALS $\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i u^{(i)} = 0$ FOLGT DASS $\alpha_i = 0$ $i = 1, \dots k-1$

INDUKTIONSVERANKERUNG : $k = 1$. DA $u^{(1)} \neq 0$ (PER DEFINITION VON EIGENVEKTOREN)

IST DIE BEHAUPTUNG FÜR $k = 1$ ERFÜLLT. $\left[u^{(1)} \alpha_1 = 0 \iff \alpha_1 = 0 \right]$ ✓

INDUKTIONSSCHRITT : $k-1 \longrightarrow k$:
$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u^{(i)} = 0$$

$$\iff A \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u^{(i)} = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A u^{(i)} = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i u^{(i)} = 0 \qquad (2)$$

$$\iff \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_k u^{(i)} = 0 \qquad (1)$$

$\longrightarrow$ (1) - (2) : $\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (\lambda_k - \lambda_i) u^{(i)} = 0$

$\longrightarrow$ FÜR $i < k$ GILT $\lambda_k - \lambda_i \neq 0$ LAUT AUFGABE, ALSO MUSS $\alpha_1, \dots \alpha_{k-1} = 0$ (LAUT PRÄMISSE)

$\longrightarrow$ ALSO SIND $u^{(1)}, \dots u^{(k-1)}$ LINEAR UNABHÄNGIG UND ES BLEIBT $\alpha_k u^{(k)} = 0$

$\longrightarrow$ ALSO IST AUCH $\alpha_k = 0$ UND u^{k} LINEAR UNABHÄNGIG (NACH DEFINITION VON EIGENVEKTOREN $\neq 0$)

$\Longrightarrow$ ALLE $u^{(1)}, \dots u^{(k)}$ SIND LINEAR UNABHÄNGIG. $\square$

BEWEIS 2 : (EXPECTED) (TEIL 1)

ZZ: ALLE EIGENWERTE VON (HERMIT-) SYMMETRISCHEN MATRIZEN SIND REELL :

SEI $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ MIT $A^H = A$, ZEIGE DASS $\lambda_i \in \mathbb{R} \ \forall i$

START : SEIEN λ UND μ EIGENWERTE VON A UND u BZW. v ZUGEHÖRIGE EIGENVEKTOREN.

DANN GILT (PER DEFINITION) : $A u = \lambda u$ (1)

UND : $A v = \mu v$ (2)

ALS $v^H \cdot (1)$: $v^H A u = v^H \lambda u = \lambda v^H u$ (3)

DA $A = A^H$ (DEFINITION HERMIT-SYMMETRIE): $v^H A^H u = (A v)^H u = (\mu v)^H u = \bar{\mu} v^H u = \lambda v^H u$ (4)

$\Longrightarrow$ SOMIT IST (FÜR BELIEBIGE λ, μ, v, u) : $\bar{\mu} v^H u = \lambda v^H u$ (4)

$\rightsquigarrow$ WIR WÄHLEN ALSO $\lambda = \mu$ UND $u = v$

UND ERHALTEN ALS (4) : $\bar{\lambda} u^H u = \lambda u^H u$ (5)

PER DEFINITION : $\bar{\lambda} \|u\|_2^2 = \lambda \|u\|_2^2$ (6)

DA $u \neq 0$ (DA EIGENVEKTOR) $\Longrightarrow$ $\|u\|_2^2 \neq 0$

UND SOMIT $\bar{\lambda} = \lambda \Longrightarrow \underline{\underline{\lambda \overset{!}{\in} \mathbb{R}}}$ $\square$

GILT FÜR EINEN BELIEBIGEN EIGENWERT EINER (HERMIT-) SYMMETRISCHEN MATRIX.

BEWEIS 2 : (EXPECTED) (TEIL 2)

ZZ: ALLE EIGENVEKTORE VON (HERMIT-) SYMMETRISCHEN MATRIZEN ZU VERSCHIEDENEN EIGENWERTEN SIND ORTHOGONAL ZUEINANDER .

HIERZU VERWENDEN WIR DEN 1. TEIL DIESES BEWEISES VON OBEN.

START : SEIEN λ UND μ EIGENWERTE VON A UND u BZW. v ZUGEHÖRIGE EIGENVEKTOREN.

DANN GILT (PER DEFINITION) : $A u = \lambda u$ (1)

UND : $A v = \mu v$ (2)

ALS $v^H \cdot (1)$: $v^H A u = v^H \lambda u = \lambda v^H u$ (3)

DA $A = A^H$ (DEFINITION HERMIT-SYMMETRIE): $v^H A^H u = (Av)^H u = (\mu v)^H u = \bar{\mu} v^H u = \lambda v^H u$ (4)

$\Longrightarrow$ SOMIT IST (FÜR BELIEBIGE λ, μ, v, u) : $\bar{\mu} v^H u = \lambda v^H u$ (4)

$\rightsquigarrow$ DANK DEM 1. TEIL DES BEWEISES WISSEN WIR , DASS $\bar{\mu} = \mu \overset{!}{\in} \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ SOMIT WIRD (4) ZU : $\mu v^H u = \lambda v^H u$

$\iff (\mu - \lambda) v^H u = 0$

$\rightsquigarrow$ DA $\lambda \neq \mu$ (LAUT PRÄMISSE) $\iff v^H u = 0$

$\iff \langle v, u \rangle = 0$

$\iff$ DIE (BELIEBIGEN) EIGENVEKTOREN ZU λ BZW μ $(\lambda \neq \mu)$ STEHEN ORTHOGONAL ZUEINANDER $\square$

BEWEIS 2 : (EXPECTED) (TEIL 3)

SEI A EINE QUADRATISCHE MATRIX $\in \mathbb{C}^{n \times n}$.

ZZ: FALLS $A^H = -A$ SO SIND ALLE EIGENWERTE DER MATRIX A REIN IMAGINÄR.

START: SEIEN λ UND μ EIGENWERTE VON A UND u BZW. v ZUGEHÖRIGE EIGENVEKTOREN.

DANN GILT (PER DEFINITION): $Au = \lambda u$ (1)

UND: $Av = \mu v$ (2)

ALS $v^H \cdot (1)$: $v^H A u = v^H \lambda u = \lambda v^H u$ (3)

DA $A = -A^H$ (DEFINITION HERMIT. SYMMETRIE): $v^H(-A^H)u = -v^H A^H u = -(Av)^H u = -(\mu v)^H u = -\bar{\mu} v^H u = \lambda v^H u$ (4)

$\Longrightarrow$ SOMIT IST (FÜR BELIEBIGE λ, μ, v, u): $-\bar{\mu} v^H u = \lambda v^H u$ (4)

$\rightsquigarrow$ WIR WÄHLEN ALSO $\lambda = \mu$ UND $u = v$

UND ERHALTEN AUS (4): $-\bar{\lambda} u^H u = \lambda u^H u$ (5)

PER DEFINITION: $-\bar{\lambda} \|u\|_2^2 = \lambda \|u\|_2^2$ (6)

DA $u \neq 0$ (DA EIGENVEKTOR) $\Longrightarrow$ $\|u\|_2^2 \neq 0$

UND SOMIT $-\bar{\lambda} = \lambda$ IST ZB. WAHR FÜR $\lambda = 0$... ABER NICHT NUR...

SUBSTITUTION

$\lambda := \alpha + \beta i$ (MIT $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) $-(\overline{\alpha + \beta i}) = \alpha + \beta i$

$-\alpha + \beta i = \alpha + \beta i$

$\Longleftrightarrow$ $\alpha \overset{!}{=} 0, \quad \beta \in \mathbb{R}$ (DA $\bar{\beta} = \beta$)

SOMIT $\lambda = \beta i$, STIMMT FÜR ALLE $\beta \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ ALLE λ SIND REIN IMAGINÄR $\blacksquare$

GILT FÜR EINEN BELIEBIGEN EIGENWERT