Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prüfungsvorbereitungskurs Lineare Algebra

Übungen

Janick Matter

HS24

1 Vorwort

In diesem Dokumente findet Ihr viele Beispiele (und die Lösungen) zu jedem 'wichtigen' Thema aus der "Linearen Algebra" Vorlesung von Prof. Gradinaru des Herbstsemesters HS24 - aus welchem auch einige Abbildungen oder Definitionen stammen. Einige der Beispiele sind noch aus den HS22 & HS23 und behandeln Themen, die im HS24 nicht oder nicht gleich ausführlich behandelt wurden, welche ich aber der Vollständigkeit halber im Dokument gelassen habe (speziell markiert mit einem Sternchen *). Die Beispiele sind teilweise neu, aus meinen Übungsstunden oder aus alten Prüfungen. Es sollte also von Allem und für Alle etwas dabei sein.
Ich möchte gleich hier darauf hinweisen (wie auch mündlich während der PVK), dass die Notation (aufgrund der verschiedenen Jahre/Skripte der Vorlesung) nicht immer konsistent mit derjenigen Notation im Skript von Professor Gradinaru ist, und ich versuchen werde, dies baldmöglichst zu beheben. Es sollte jedoch den Konzepten der Aufgaben nicht gross im Weg stehen.
Ausserdem habe ich in einem separaten Kapitel noch einige Beweise angefügt, welche in HS22 von Studenten gewünscht wurden.
Leider kann ich nicht für die Richtigkeit der Aufgaben garantiern und bin für gespottete Typos oder Anregungen immer sehr dankbar. Die neuste Version des Skriptes (siehe 2) findet Ihr immer auf meiner Webseite n.ethz.ch/ jamatter/ - oder via QR code unten.

Ich wünsche euch alles Gute für eure Prüfungen ;)

jamatter@student.ethz.ch

2 Überarbeitungen

- 5.1.2025: Initial version HS24
- 14.1.2025:
  - Fehler in Beispiel 12 behoben
  - Rendering Problem bei Beispiel 39 behoben

Contents

3 Beispiele

Beispiel 3.1, Teil 1 - Gauss 1

LÖSE FOLGENDES LGS.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

WIE VIELE LÖSUNGEN GIBT ES?

---

1) WIR SCHREIBEN ZUERST IN MATRIX FORM

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}$$

2) JETZT 'VERGESSEN' WIR DEN X - VEKTOR UND SCHREIBEN:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

3) JETZT STARTEN WIR MIT DEM EIGENTLICHEN RECHNEN:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{II - 2I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{III - I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

KEINE WEITEREN SCHRITTE NÖTIG

ZSF :)

WIR ERHALTEN ALS ZSF ALSO:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

RÜCKWÄRTSEINSETZEN: III: $1 \cdot x_3 = -2 \implies \underline{\underline{x_3 = -2}}$

II: $-2 \cdot x_2 - 3x_3 = -8$

$\iff -2 \cdot x_2 + 6 = -8$

$\iff \underline{\underline{x_2 = 7}}$

I: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$

$\iff x_1 + 7 - 4 = 4$

$\iff \underline{\underline{x_1 = 1}}$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 7 \\ x_3 &= -2 \end{aligned}$$

FERTIG :)

(EINDEUTIGE LÖSUNG)

Beispiel 3.2, Teil 1 - Gauss 2

LÖSE FOLGENDES LGS.

WIE VIELE LÖSUNGEN GIBT ES?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 6 & 12 \end{array}\right]$$

⤳ WIR VERSUCHEN ZU GAUSSEN...

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - I \end{array} \leadsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

KB

KOMPATIBILITÄTSBEDINGUNG <u>NICHT</u> ERFÜLLT!

DAS WÜRDE BEDEUTEN, DASS

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \neq -2$$

$\Longrightarrow$ STIMMT SICHER NICHT

$\Longrightarrow$ NICHT LÖSBAR!

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \emptyset = \{\}}}$$

LEERE MENGE

Beispiel 3.3, Teil 1 - Gauss 3

LÖSE FOLGENDES LGS : $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$ MIT $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \end{bmatrix}$; $\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

WIR SCHREIBEN WIEDER ALS : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{array}\right]$

PIVOT - ELEMENTE

ZSF :)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{II - 2I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{III - 2I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{III - 2II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

DIESE ZEILE IST KOMISCH..
→ NÄCHSTE SEITE :)

⇝ DIE III IST IMMER ERFÜLLT : $0 \cdot x_1 + 0\, x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$

ES GIBT ALSO UNENDLICH VIELE LÖSUNGEN. WAS NUN ?

→ WIR FÜHREN FÜR x_3 EINEN BELIEBIGEN PARAMETER $t \in \mathbb{R}$ EIN.

JETZT GILT : $\underline{\underline{x_3 = t}}$

DURCH RÜCKWÄRTSEINSETZEN ERHALTEN WIR : $\underline{\underline{x_2 = 1 - 2t}}$

$\underline{\underline{x_1 = 3t - 2}}$

$$\longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 3t - 2 \\ 1 - 2t \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\}}}$$

DARSTELLUNG VON LÖSUNGSMENGEN.

Beispiel 3.4, Teil 1 - LGS Lösbarkeit,Parameter

(Fallunterscheidung) Wir haben hier ein LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + a^2x_3 &= 2 \\ ax_1 + x_2 + a^2x_3 &= 2 \\ a^2x_1 + ax_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Frage: Für welche Werte von a hat das LGS eine, keine, unendlich viele Lösungen?

ZUERST IM MATRIXSCHREIBWEISE:

$\cancel{II - \tfrac{1}{a} I}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 2 \\ a & 1 & a^2 & 2 \\ a^2 & a & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[II - aI]{III - a^2 I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 2 \\ 0 & 1-a^2 & a^2(1-a) & 2(1-a) \\ 0 & a(1-a^2) & 1-a^4 & 2(1-a^2) \end{array}\right] \xrightarrow{III - aII} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 2 \\ 0 & 1-a^2 & a^2(1-a) & 2(1-a) \\ 0 & 0 & 1-a^3 & 2(1-a) \end{array}\right]$$

ZSF :)

→ FALLUNTERSCHEIDUNG:

FALL $a = 0$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Longrightarrow \underline{x_1 = x_2 = x_3 = 2}$$

RANG$(A) = 3 = n$ EINDEUTIGE LÖSUNG :)

FALL $a \neq 0$: · FALL $a = 1$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2 FREIE PARAMETER

$x_3 = t \in \mathbb{R}$

$x_2 = s \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ RÜCKWÄRTS EINSETZEN: $x_1 = 2 - t - s$

$$\Longrightarrow \underline{\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 2-t-s \\ s \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t, s \in \mathbb{R} \right\}}$$

· FALL $a = -1$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

1 FREIER PARAMETER

$\Longrightarrow x_2 = t \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ RÜCKWÄRTSEINSETZEN:

III: $\underline{x_3 = 2}$

I: $x_1 = t$

$1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 1 x_3 = 2$

$1 \cdot x_1 - 1 \cdot t + 1 \cdot 2 = 2$

$\underline{\underline{x_1 = t}}$

$$\Longrightarrow \underline{\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}}$$

Beispiel 3.4, Teil 2 - LGS Lösbarkeit,Parameter

FALL $a \neq 0$ ABER $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 0\}$

POLYNOMDIVISION :) $(1-a^3) = (1-a) \cdot x$

$\Longrightarrow$ DIREKT RÜCKWÄRTSEINSETZEN:

$$\text{III}: \quad \underline{\underline{x_3}} = \frac{2(1-a)}{(1-a^3)} = \frac{2\cancel{(1-a)}}{\cancel{(1-a)}(a^2+a+1)} = \underline{\underline{\frac{2}{a^2+a+1}}}$$

$$\text{II}: \quad (1-a^2)x_2 + a^2(1-a)x_3 = 2(1-a)$$

$$\dots \Longrightarrow \underline{\underline{x_2 = \frac{2}{a^2+a+1}}}$$

$$\text{I}: \quad 2 - a x_2 - a^2 x_3 = 2$$

$$\Longrightarrow \dots \Longrightarrow \underline{\underline{x_1 = \frac{2}{a^2+a+1}}}$$

Beispiel 3.5, Teil 1 - Basics

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 4 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \text{NICHT DEFINIERT!}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 20 & 5 \\ 17 & 44 & 15 \\ 27 & 68 & 25 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = \underline{\underline{11}}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T = \text{NICHT DEFINIERT!} \quad (\text{DIMENSIONSFEHLER } ↯)$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \text{NICHT DEFINIERT!} \quad (\text{DIMENSIONSFEHLER } ↯)$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)^T = \longrightarrow \text{KEINE DIVISION ;)}$$

Beispiel 3.6, Teil 1 -Kommutator

BERECHNE $[A, B]$ MIT

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

VARIANTE 1: BERECHNE $A \cdot B - B \cdot A$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-5 & 0 \\ 0 & -5+6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6-5 & 0 \\ 0 & -5+6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{= 0}}$$

VARIANTE 2: · BERECHNE $\underset{A^{-1}}{A} \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = I_2$

· NUTZE FOLGENDE EIGENSCHAFT AUS: $A \cdot B = I \iff \underline{\underline{B = A^{-1}}}$

$$\Longrightarrow A \cdot B = A \cdot A^{-1} = A^{-1} A$$

$$\Longleftrightarrow \underline{\underline{A^{-1} A - A A^{-1} = 0}}$$

Beispiel 3.7, Teil 1 - Linear unabhängige Spalten

ZEIGEN SIE, DASS $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ $\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

LINEAR UNABHÄNGIG SIND.

FAST FORWARD:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{III} - 2\text{I}]{\text{II} + 1\text{I}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} - 2\text{II}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

↳ VOLLER RANG.

$r = 3 = n$

$\Longrightarrow$ LINEAR UNABHÄNGIGE SPALTEN (VEKTOREN)

ABER WARUM?

EIGENTLICH SOLLEN WIR ZEIGEN:

$$x_1 \cdot \vec{a} + x_2 \vec{b} + x_3 \vec{c} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$x_1 \cdot 1 - 3x_2 + 0 = 0$

ALSO EINGESETZT:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

LÖSUNGSVEKTOR ÄNDERT SICH HIER NIE...

ALSO REICHT ES $r = n = 3$ DAMIT $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ GILT :)

Beispiel 3.8, Teil 1 - Inverse

BERECHNE DIE INVERSE VON $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

START :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}^{3\times 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{= I_3} \xrightarrow[\text{III} - 2\text{I}]{\text{II} + \text{I}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} - 2\text{II}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\cdot \text{III}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II} - \text{III}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{I} + 3\text{II}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{I_3}}} \underbrace{\begin{bmatrix} -8 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}^{-1}\ (3\times 3)}$$

DONE :)

Beispiel 3.9, Teil 1 - Inverse 2

BERECHNE DIE INVERSE VON $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3}\right] \xrightarrow{I \rightleftarrows III} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right] \xrightarrow[III - 2I]{II - I} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{matrix}\right]$$

$$\xrightarrow{III - \frac{1}{3}II} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-5}{3} \end{matrix}\right] \xrightarrow[3\,III]{\frac{1}{3}II} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 3 & -1 & -5 \end{matrix}\right] \xrightarrow{II - \frac{2}{3}III} \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -5 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right]$$

BERECHNE DIE INVERSE VON

(DIAGONALMATRIX)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}I,\ \frac{1}{\pi}II,\ \frac{1}{-3}III} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-3} \end{bmatrix} = B^{-1}$$

BERECHNE DIE INVERSE VON

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & \pi & 7 & 13 \\ 0 & 10 & 2e & 20 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 4 & 13 & 6 \\ 0 & 5 & e & 10 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lightning}$$

ES EXISTIERT KEINE INVERSE

$\iff \det(C) = 0$

BERECHNE DIE INVERSE VON

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & \pi & 7 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 4 & 13 & 6 \\ 0 & 5 & e & 10 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lightning}$$

ES EXISTIERT KEINE INVERSE

$\iff \det(D) = 0$

Beispiel 3.10, Teil 1 - Invertierbar?

SEI $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & \beta & 2\alpha \\ \alpha & 2\alpha & \beta^2 \end{bmatrix}$. FÜR WELCHE $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ IST A SINGULÄR?

$\underline{B}$ IST SINGULÄR. $\iff$ $\underline{B}$ IST NICHT INVERTIERBAR. $\iff$ $\underline{A}\,\underline{x} = 0$ HAT UNENDLICH VIELE LÖSUNGEN. $\iff$ RANG$(B) < n$

FÜR WELCHE $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ IST $\underline{B}$ SINGULÄR? $\iff$ FÜR WELCHE $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ IST RANG$(B) < n$?

$\longrightarrow$ WIR BRINGEN $\underline{B}$ AUF DIE ZSF UM DEN RANG(B) ZU BESTIMMEN.

ZSF :)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & \beta & 2\alpha \\ \alpha & 2\alpha & \beta^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{III} - \alpha\text{I}]{\text{II} - 2\text{I}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & (\beta-4) & 0 \\ 0 & 0 & (\beta^2-\alpha^2) \end{bmatrix} \overset{3.\text{BINOM.}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & (\beta-4) & 0 \\ 0 & 0 & (\beta+\alpha)(\beta-\alpha) \end{bmatrix}$$

"ODER"

$$\Longrightarrow \quad \text{RANG}(B) < 3 = n \quad \Longleftrightarrow \quad (\beta-4) = 0 \quad \vee \quad (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$\underline{\underline{\beta = 4}}$ ODER $\underline{\underline{\beta = \pm\alpha}}$

Beispiel 3.11, Teil 1 - LGS mit PLR-Zerlegung

LÖSE DAS LGS $Ax = b$ MIT HILFE DER PLR-ZERLEGUNG NACH x.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{bmatrix} \quad ; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -7 & 8 \end{array}\right]$$

$II - 3\,I$

$III - (-1)\,I$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -8 & 5 \end{array}\right]$$

$III - (-2)\,II$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{}_{\underline{\underline{P}}} \qquad \underbrace{}_{\underline{\underline{L}}} \qquad \underbrace{}_{\underline{\underline{R}}}$$

HIER IST $\underline{c}$ DIE UNBEKANNTE.

$\rightsquigarrow$ WIR LÖSEN JETZT $\underline{\underline{L}}\,\underline{c} = \underline{\underline{P}}\,\underline{b}$ NACH $\underline{c}$ AUF:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$\Longrightarrow$ $\underline{\underline{c_1 = 1}}$; $\underline{\underline{c_2 = -3}}$; $\underline{\underline{c_3 = -3}}$

$\Longrightarrow$ ALSO : $\underline{\underline{\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}}}$

HIER IST $\underline{x}$ DIE UNBEKANNTE :)

$\rightsquigarrow$ JETZT LÖSEN WIR $\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{c}$ NACH $\underline{x}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

$\Longrightarrow$ $\underline{\underline{\underline{x} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}}$

FINITO :)

Beispiel 3.12, Teil 1 - LGS mit PLR-Zerlegung 2

ZERLEGE DIE MATRIX $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \\ 6 & 18 & 5 \end{bmatrix}$ PLR $(PA = LR)$,

UND LÖSE DAMIT DAS LGS $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

I_n (FÜHRE P) I_n (FÜHRE L) A (FÜHRE R)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & 18 & 5 \end{array}\right] \quad I \leftrightarrow II$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & 18 & 5 \end{array}\right] \quad III - \frac{6}{4} I$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{4} & 0 & 1 & 0 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \quad III - \frac{15}{6} II$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{4} & \frac{15}{6} & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad\quad}_{\underline{P}} \quad \underbrace{\qquad\quad}_{\underline{L}} \quad \underbrace{\qquad\quad}_{\underline{R}}$$

CHECK : $PA = LR \iff \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 18 & -1 \end{bmatrix} \overset{\checkmark}{=} \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 18 & -1 \end{bmatrix}$

LÖSE $\rightsquigarrow$ WIR LÖSEN JETZT $\underline{L}\,\underline{c} = \underline{P}\,\underline{b}$ NACH $\underline{c}$ AUF :

HIER IST $\underline{c}$ DIE UNBEKANNTE.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{6}{4} & \frac{15}{6} & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$\Longrightarrow$ $\underline{\underline{c_1 = 2}}$; $\underline{\underline{c_2 = 1}}$; $\underline{\underline{c_3 = \frac{-5}{2}}}$

$\Longrightarrow$ ALSO : $\underline{\underline{\underline{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{-5}{2} \end{bmatrix}}}$

Beispiel 3.12, Teil 2 - LGS mit PLR-Zerlegung 2

HIER IST $\underline{x}$ DIE UNBEKANNTE :)

$\rightsquigarrow$ JETZT LÖSEN WIR $\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{c}$ NACH $\underline{x}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{5}{2} \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{x} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -\frac{7}{24} \\ -\frac{1}{12} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}}}$$

FINITO :)

Beispiel 3.13, Teil 1 - PLR-Zerlegung

BESTIMME DIE $\underline{\underline{P}}$, $\underline{\underline{L}}$, $\underline{\underline{R}}$ MATRIZEN VON $\underline{\underline{B}}$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 7 & 6 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ SODASS $\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{B}}$

START : 1)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

I_n (FUTURE P) $\quad$ I_n (FUTURE L) $\quad$ B (FUTURE R)

2) GAUSS ALGORITHMUS*

HIER SOLL KEINE 0 SEIN!

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

VERTAUSCHEN AUCH MIT DER 'P'-MATRIX

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

$III - 1 \cdot I$

KOEFFIZIENT BEZGL. SUBSTRAKTION IM 'L' MATRIX NOTIEREN

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -9 & -8 \end{array}\right]$$

$III + 9\,II = III - (-9)\,II$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -9 & 1 & 0 & 0 & -35 \end{array}\right]$$

$\underline{\underline{P}}$ $\quad$ $\underline{\underline{L}}$ $\quad$ $\underline{\underline{R}}$

DIE R-MATRIX IST JETZT IN DER ZSF, WIR SIND FERTIG :)

Beispiel 3.14, Teil 1 - Orthogonale Matrix

ZEIGE DASS A ORTHOGONAL IST.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

VARIANTE 1: MATRIZEN MULTIPLIZIEREN : $A^T A \stackrel{?}{=} I_n$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}}_{A^T} = I \quad \checkmark$$

VARIANTE 2 : BETRAGSQUADRAT BERECHNEN : ORTHOGONAL FALLS :

$$\begin{cases} \|a_1\|_2 = \|a_2\|_2 = 1 \\ a_1 \perp a_2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \|a_1\|_2 &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 \\ \|a_2\|_2 &= \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \\ \langle a_1, a_2 \rangle &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \checkmark$$

Beispiel 3.15, Teil 1 - Orthogonale Vektoren

Beispiel 64. Sei

$$B = \{b^{(1)} = 1, b^{(2)} = x, b^{(3)} = 5x^2 - 3\} \tag{4.83}$$

Frage:

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren aus B orthogonal sind, bezüglich

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) \cdot x^2 \, dx \tag{4.84}$$

(SYMMETRIE)

- $< b^{(1)}, b^{(2)} > = < 1, x > = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot 1 \, dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_{-1}^{1} = \underline{\underline{0}}$
- $< b^{(1)}, b^{(3)} > = < 1, 5x^2 - 3 > = \int_{-1}^{1} 5x^4 - 3x^2 \, dx = \Big[x^5 - x^3 \Big|_{-1}^{1} = \underline{\underline{0}}$
- $< b^{(2)}, b^{(3)} > = < x, 5x^2 - 3 > = \int_{-1}^{1} 5x^5 - 3x^3 \, dx = \underline{\underline{0}}$

SYMMETRIE

$\rightarrow$ ALLE VEKTOREN SIND ORTHOGONAL :)

Beispiel 3.16, Teil 1 - Spiegelung an Ebene

SEI $\underline{n} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

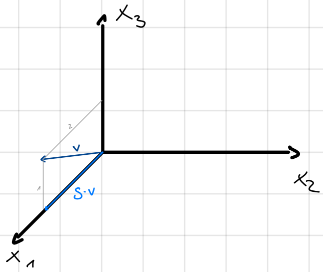
WELCHE MATRIX SPIEGELT AN DER EBENE MIT NORMALENVEKTOR $\underline{n}$?

- $\|n\|^2 = n^T n = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$
- $n n^T = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow \quad H = I - \frac{2 n n^T}{n^T n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{25} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -7 & -24 \\ -24 & 7 \end{bmatrix}}}$$

Beispiel 3.17, Teil 1 - Spiegelung und Drehung



SEI $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

FINDE EINE SPIEGELUNGSMATRIX $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, SO DASS $S \cdot v$ AUF DER x_1-ACHSE ZU LIEGEN KOMMT.

$$n = v - \|v\| \cdot \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\sqrt{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S = I_3 - \frac{2\, n \cdot n^T}{n^T \cdot n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{(2-\sqrt{5})^2+1} \left(\begin{bmatrix} 2-\sqrt{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-\sqrt{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{(2-\sqrt{5})^2+1} \begin{bmatrix} (2-\sqrt{5})^2 & 0 & 2-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2-\sqrt{5} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

= ... OK, DIE ZAHLEN SIND NICHT SO SCHÖN

ABER PRINZIP MUSS KLAR SEIN!

→ ÜBERPRÜFE AUF PYTHON!

$$= \begin{bmatrix} 0.8944 & 0 & 0.4472 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.4472 & 0 & -0.8944 \end{bmatrix}$$

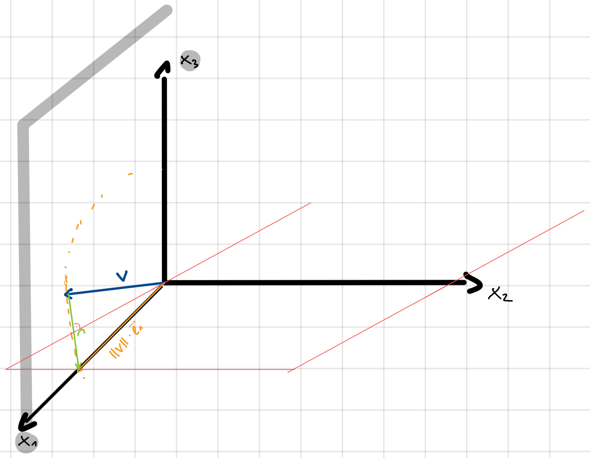
$$\Longrightarrow S \cdot v = \begin{bmatrix} 0.8944 & 0 & 0.4472 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.4472 & 0 & -0.8944 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2361 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ STIMMT ALSO :)

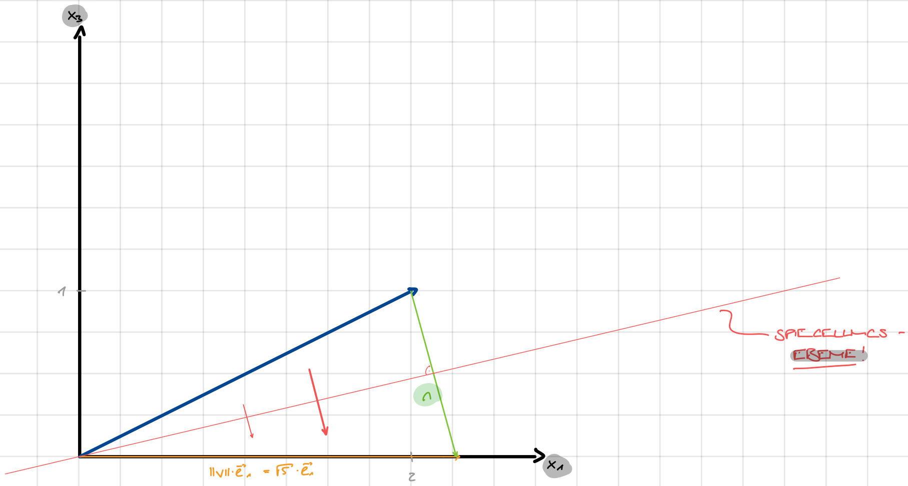
Beispiel 3.17, Teil 2 - Spiegelung und Drehung

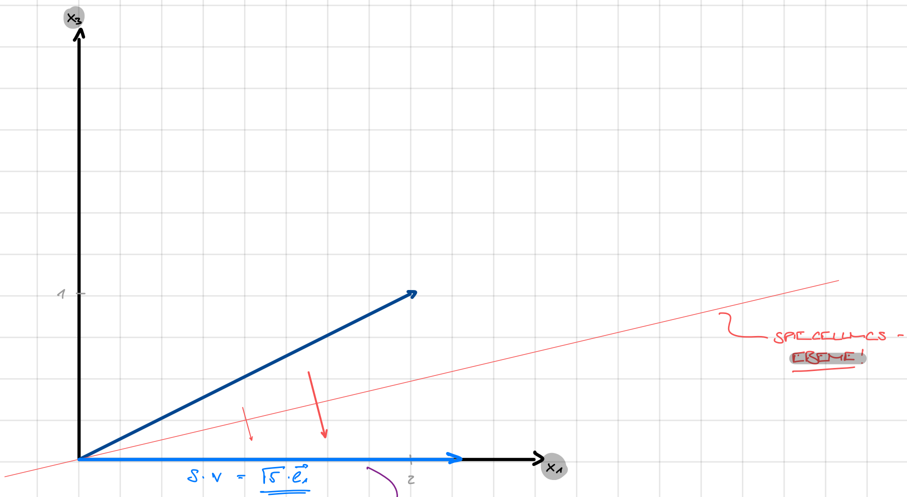
GRAPHISCHE ÜBERSICHT zum Beispiel:

(Householder - Spiegelung)



Vereinfachte Skizze in 2D ...





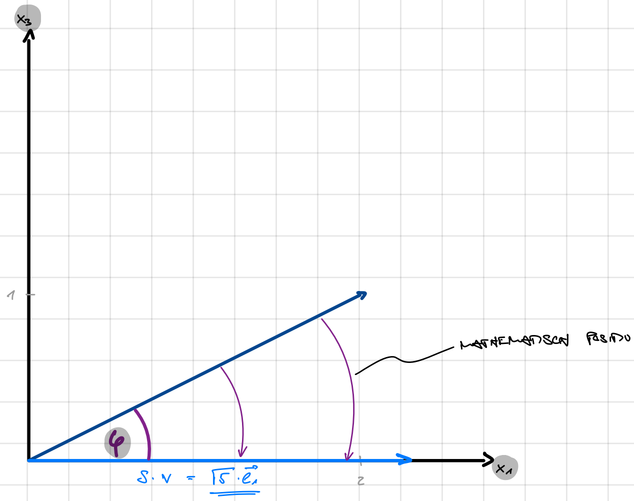
okay,

ABER: Können wir diesen Vektor $S \cdot v$ auch anders erreichen?

→ answer on next slide ...

Beispiel 3.17, Teil 3 - Spiegelung und Drehung

DA :) Wir wollten v auch (in der x_1x_3-Ebene um den Winkel φ) rotieren!



→ Die zugehörige Rotationsmatrix lautet: (siehe Skript)

$$R_y(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

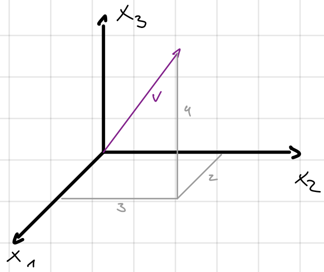
mit $\varphi = 2 \cdot \operatorname{asin}\left(\dfrac{\frac{\|n\|_2}{2}}{\|v\|_2}\right) = 2 \cdot \operatorname{asin}\left(\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{5})^2+1}}{\sqrt{5}}\right) = \underline{\underline{26.6^\circ}}$ (aus der Skizze ablesen)

$$\Longrightarrow \quad R(\varphi) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0.8944 & 0 & 0.4472 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.4472 & 0 & 0.8944 \end{bmatrix}}}$$

Aber wieso eigentlich gerade diese $R(\varphi)$-Matrix?
Und wie würde das in höheren Dimensionen aussehen?

→ Zusatz Downloads dieser Woche (Theorie Slides vom letzten Jahr...)

Beispiel 3.18, Teil 1 - Rotation und Determinante



Sei $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Finde eine Rotationsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $A \cdot v$ auf der $x_1 x_2$-Ebene zu liegen kommt.

$\longrightarrow$ **<u>und</u>** berechne die Determinante von A

Bemerkung: Wir müssen in der $x_1 x_3$ (oder $x_2 x_3$) Ebene drehen!

$$\rightsquigarrow \quad R_y(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Beispiel Geometrie ... $\quad \varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{4}{2}\right) \mathrel{\hat{=}} 63.4^\circ$

$$\Longrightarrow \quad R_y(\varphi \mathrel{\hat{=}} 63.4^\circ) = \begin{bmatrix} 0.447 & 0 & 0.894 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.894 & 0 & 0.447 \end{bmatrix}$$

$$\det(R(\varphi \mathrel{\hat{=}} 63.4^\circ)) = +\,0.447\left(\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.447 \end{bmatrix}\right)\right) \underbrace{-\,0 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.894 & 0.447 \end{bmatrix}\right)}_{=0} +\,0.894 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.894 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 0.447 \cdot 0.447 + 0.894 \cdot 0.894$$

$$= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi$$

$$\det(R(\varphi \mathrel{\hat{=}} 63.4^\circ)) = 1$$

Berechnung durch Leibniz-Formel: Aber ist die $\det(R(\varphi)) = 1$ Zufall?

Beispiel 3.19, Teil 1 - QR mit Givens

BESTIMMEN SIE DIE QR-ZERLEGUNG VON A.

WIR SCHAUEN UNS ZUERST DIE ERSTE SPALTE AN :) → WIR DREHEN IN DER $(1-i)$ - EBENE

1. SPALTE HIER.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ WIR WOLLEN a_{21} ZU NULL BRINGEN :

$$\boxed{c = \frac{a_{ii}}{\omega} \qquad s = \frac{a_{ji}}{\omega} \qquad \omega := \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}}$$

MIT : $i = 2$, $j = 1$

WIR DREHEN IN DER $(1-2)$ - EBENE. $\Longrightarrow \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = G_{12}$

$\longrightarrow$ WIR BESTIMMEN G_{12}

$$\rightsquigarrow \quad \omega := \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \quad ; \quad c = \frac{a_{11}}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad s = \frac{a_{21}}{\omega} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

$$\Longrightarrow \quad G_{12} := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad G_{12} \cdot A = R \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 2 \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}_{= R}$$

$$G_{12} \cdot A = R \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{G_{12}^{-1} \cdot G_{12}}_{= I} \cdot A = \underbrace{G_{12}^{-1}}_{= G_{12}^T} \cdot R$$

$$A = \underbrace{G_{12}^T}_{:= Q} R = Q \cdot R$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = G_{12}^T$$

Beispiel 3.20, Teil 1 - QR mit Givens 3x3

SEI $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. BERECHNE DIE QR-ZERLEGUNG VON A VIA GIVENS.

---

1) UNS STÖRT $a_{21} = 1$. WIR WOLLEN $\underset{ij}{a_{21}} \overset{!}{=} 0$ FÜR ZSF.

$$r = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$s = \frac{a_{21}}{r} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$c = \frac{a_{11}}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$r := \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ij}^2} \qquad s = \frac{a_{ij}}{r} \qquad c = \frac{a_{ii}}{r}$$

ROTATIONSMATRIX (IN 1-2 EBENE) ↝

$$G_{12} := \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ANGEWENDET:

$$G_{12} \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{8}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

AGAIN 1) UNS STÖRT $a_{32} = 1$. WIR WOLLEN $\underset{ij}{a_{32}} \overset{!}{=} 0$ FÜR ZSF.

$$r = \sqrt{a_{22}^2 + a_{32}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{30}{25}}$$

$$s = \frac{a_{32}}{r} = \frac{1}{\sqrt{\frac{30}{25}}} = \sqrt{\frac{25}{30}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$c = \frac{a_{22}}{r} = \frac{\sqrt{\frac{1}{5}}}{\sqrt{\frac{30}{25}}} = \sqrt{\frac{5}{30}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

$$r := \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ij}^2} \qquad s = \frac{a_{ij}}{r} \qquad c = \frac{a_{ii}}{r}$$

Beispiel 3.20, Teil 2 - QR mit Givens 3x3

ROTATIONS-MATRIX (IN 1-2 EBENE) $\rightsquigarrow$ $G_{32} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{5}{6}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{5}{6}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \end{bmatrix}$

ANWENDEN:

$$G_{32} \cdot G_{12} \cdot A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{5}{6}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{5}{6}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \end{bmatrix}}_{G_{32}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{8}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{G_{12} \cdot A} \overset{\text{TR}}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} 2.24 & 3.58 & 0.45 \\ 0 & 1.10 & 3.10 \\ 0 & 0 & 0.41 \end{bmatrix}}_{\Rightarrow R}$$

SOMIT IST UNSERE R MATRIX $R = \begin{bmatrix} 2.24 & 3.58 & 0.45 \\ 0 & 1.10 & 3.10 \\ 0 & 0 & 0.41 \end{bmatrix}$

UND Q IST JETZT DURCH UMFORMEN: $G_{32} \cdot G_{12} \cdot A = R$

$$\Longleftrightarrow \quad A = G_{12}^{-1} \cdot G_{32}^{-1} \cdot R$$

$$\Longleftrightarrow \quad A = \underbrace{G_{12}^{T} \cdot G_{32}^{T}}_{=Q} \cdot R$$

$$\Longleftrightarrow \quad A = Q \cdot R$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.89 & -0.18 & 0.41 \\ 0.45 & 0.365 & -0.82 \\ 0 & 0.913 & 0.408 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.24 & 3.58 & 0.45 \\ 0 & 1.10 & 3.10 \\ 0 & 0 & 0.41 \end{bmatrix}$$

Beispiel 3.21, Teil 1 - QR mit Householder

BESTIMME DIE QR-ZERLEGUNG VON $\underline{A}$ VIA HOUSEHOLDER-SPIEGELUNGEN.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 8 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$
$$\qquad\quad a_1$$

$$\underline{v}_1 = \underline{a}_1 - \|\underline{a}_1\| \underline{e}_1$$
$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} - \sqrt{6^2 + 8^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad H_1 = I - \frac{2 v_1 v_1^T}{v_1^T v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{80} \begin{bmatrix} 16 & -32 \\ -32 & 64 \end{bmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix}}}$$

ORTHOGONALE MATRIX :)

$$H_1 \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{48}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} = R}}$$

$$\longrightarrow \quad H_1 A = R \iff \underbrace{H_1^{-1} H_1}_{=I} A = \underbrace{H_1^{-1}}_{=H_1^T} R$$

ORTHOGONAL :)

$$\iff A = \underbrace{H_1^T}_{:=Q} R$$

$$\underline{\underline{Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} = H_1^T}}$$

Beispiel 3.22, Teil 1 - QR mit Householder 3x3

BERECHNE DIE QR-ZERLEGUNG VIA HOUSEHOLDER VON $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

x_1

$v_1 = x_1$ (AB DER HAUPTDIAGONALE) $- \|x_1\| \, e_1 = \begin{bmatrix} -1.24 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$H_1 = I - 2 \frac{v_1 v_1^T}{v_1^T v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{\begin{bmatrix} -1.24 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.24 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}^T}{\begin{bmatrix} -1.24 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1.24 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.45 & 0.89 & 0 \\ 0.89 & -0.45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad H_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 2.24 & 4.92 & 0.89 \\ 0 & 0.89 & -0.45 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

x_2

ANALOG: $\quad v_2 = x_2 - \|x_2\| \, e_1 = \begin{bmatrix} 0.89 \\ 2 \end{bmatrix} - 2.19 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1.30 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$H_2' = I - \frac{v_2 v_2^T}{v_2^T v_2} = \begin{bmatrix} 0.41 & 0.913 \\ 0.913 & -0.41 \end{bmatrix}$$

AUF DIMENSION ERGÄNZEN.

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.41 & 0.913 \\ 0 & 0.913 & -0.41 \end{bmatrix}$$

Beispiel 3.22, Teil 2 - QR mit Householder 3x3

$$\rightsquigarrow \underbrace{H_2 \cdot H_1}_{= Q^T} \cdot A = \begin{bmatrix} 2.24 & 4.92 & 0.89 \\ 0 & 2.19 & 0.73 \\ 0 & 0 & -0.82 \end{bmatrix} = \underline{\underline{R}}$$

$$\Longrightarrow \text{Also} \quad Q = H_1^T \cdot H_2^T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0.45 & 0.37 & 0.82 \\ 0.89 & -0.18 & -0.41 \\ 0 & 0.91 & -0.41 \end{bmatrix}}}$$

BASISPRÜFUNG_SOMMER_2019_A1 JAWATTER

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\langle a^{(1)}, a^{(2)} \rangle = 8 - 16 + 8 = 0$$

$$\langle a^{(1)}, a^{(3)} \rangle = 4 + 28 - 32 = 0$$

$$\langle a^{(2)}, a^{(3)} \rangle = 32 - 28 - 4 = 0$$

$$\langle a^{(i)}, a^{(j)} \rangle = 0 \quad \forall_{i,j}$$

$\Longleftrightarrow$ STEHEN ORTHOGONAL ZUEINANDER.

SPALTENVEKTOREN ORTHOGONAL $\not\Longrightarrow$ MATRIX ORTHOGONAL

NICHT DIREKT... $\|\cdot\| \overset{!}{=} 1$ ...

⚠

Beispiel 3.23, Teil 2 - Basisprüfung SO19 Orthogonalität

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

b) VARIANTE 1 (LINEAR)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 7 & 0 \\ 8 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{III} - 8\text{I}]{\text{II} - 4\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & -36 & -9 & 0 \\ 0 & -63 & -36 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{III} - \frac{63}{36}\text{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & -36 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \text{VOLLER RANG } (r = 3)$$

$*$: SICHER NICHT $= 0$! $\left(* = \frac{-216}{?}\right)$

$\Longrightarrow$ $Ax = 0$ HAT NUR TRIVIALE LÖSUNG $x = 0$

$\Longrightarrow$ ALLE SPALTEN SIND LINEAR UNABHÄNGIG.

Definition 2.3.0.2. Lineare Unabhängigkeit

Die Elemente $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eines linearen Raumes V sind *linear unabhängig*, falls

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0\,.$$

Sonst heissen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *linear abhängig*.

VARIANTE 2

ALLE SPALTEN SIND ORTHOGONAL $\Longrightarrow$ ALLE SPALTEN SIND LINEAR UNABHÄNGIG.

$\cancel{\Longleftarrow}$

Satz 4.2.0.15. Orthogonale Vektoren sind linear unabhängig

Seien $e_1, e_2, \ldots, e_n$ Einheitsvektoren in einem linearen Raum V mit einer Norm $\|\cdot\|$, die aus dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ kommt.
Falls die Einheitsvektoren $e_1, e_2, \ldots, e_n$ paarweise orthogonal sind, so sind sie auch linear unabhängig.

Beispiel 3.23, Teil 3 - Basisprüfung SO19 Orthogonalität

c) A HAT DA BEREITS ORTHOGONALE SPALTENVEKTOREN.

⟶ ABER, DIE EUKLIDISCHEN NORMEN SIND (NOCH) UNGLEICH 1 :/

⟶ ALSO IST A (NOCH) NICHT ORTHOGONAL! SONST WÄRE DIE QR-ZERLEGUNG ZU EASY :)

⟶ WIR NORMIEREN DIE SPALTENVEKTOREN EINZELN ... UND MULTIPLIZIEREN DIE JEWEILIGEN EINHEITSVEKTOREN DER IDENTITÄTSMATRIX DAMIT.

$$\|a^{(1)}\|_2 = \sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} = 9$$

$$\|a^{(2)}\|_2 = \sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2} = 9$$

$$\|a^{(3)}\|_2 = \sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2} = 9$$

DIESE NORMEN MÜSSEN NICHT ZWINGEND ALLE $= 9$ SEIN...

$$\longrightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{bmatrix}}} = \underline{\underline{\frac{1}{9}A}}$$

$$\longrightarrow \quad R = 9 \cdot I_3 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}}$$

Beispiel 3.24, Teil 1 - Basisprüfung W20 Orthogonalität 2

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

a) $\langle a_1, a_2 \rangle \overset{?}{=} 0 \quad = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 1 + 0 = 0$ ✓

$\langle a_1, a_3 \rangle \overset{?}{=} 0$

$\langle a_1, a_4 \rangle \overset{?}{=} 0$ ANALOG :)

$\langle a_2, a_3 \rangle \overset{?}{=} 0$

$\langle a_2, a_4 \rangle \overset{?}{=} 0$

$\langle a_3, a_4 \rangle \overset{?}{=} 0$

SPALTENVEKTOREN ORTHOGONAL $\not\Rightarrow$ MATRIX ORTHOGONAL

NICHT DIREKT... $\|\cdot\| \overset{!}{=} 1$ ..

a) GENERELL : 1) SPALTENVEKTOREN ALS MATRIX SCHREIBEN

2) GAUSSEN ($Ax = 0 \overset{?}{\Longleftrightarrow} x \overset{!}{=} 0$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\text{IV}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\underset{\text{III}-\text{I}}{\sim}}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \underset{\text{IV}-\text{II}}{\overset{\text{III}-2\text{II}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{IV}-\text{III}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ VOLLER RANG

$\longrightarrow$ $Ax = 0$ HAT NUR TRIVIALE LÖSUNG $x \overset{!}{=} 0$.

$\Longrightarrow$ LINEAR UNABHÄNGIGE SPALTEN !

Beispiel 3.24, Teil 2 - Basisprüfung W20 Orthogonalität 2

1. [**6 Punkte**] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

c) A HAT JA BEREITS ORTHOGONALE SPALTENVEKTOREN.

⟶ <u>ABER</u>, DIE EUKLIDISCHEN NORMEN SIND (NOCH) UNGLEICH 1 :/

⟹ ALSO IST A (NOCH) NICHT ORTHOGONAL! SONST WÄRE DIE QR-ZERLEGUNG ZU EASY :)

⟹ WIR NORMIEREN DIE SPALTENVEKTOREN EINZELN ... UND MULTIPLIZIEREN DIE JEWEILIGEN EINHEITSVEKTOREN DER IDENTITÄTSMATRIX DAMIT.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{=A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{R}$$

MIT
$\|a_1\| = 2$
$\|a_2\| = \sqrt{2}$
$\|a_3\| = \sqrt{2}$
$\|a_4\| = 2$

FINITO :)

Beispiel 3.25, Teil 1 - Unterraum

SEI $U = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^{4\times 1} : \underline{x} = \begin{bmatrix} x_3 - x_4 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ MIT } x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$

IST U EIN UNTERRAUM VOM REELLEM VEKTORRAUM $\mathbb{R}^4$?

$\rightsquigarrow$ NEHMEN WIR $\alpha \in \mathbb{R}$, $\underline{x} \in U$ BELIEBIG.

$$\alpha \cdot \underline{x} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} x_3 - x_4 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_3 - \alpha x_4 \\ \alpha x_3 + \alpha x_4 \\ \alpha x_3 \\ \alpha x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t_3 - t_4 \\ t_3 + t_4 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} \in U, \quad \text{WOBEI} \quad \begin{aligned} t_3 &:= \alpha x_3 \\ t_4 &:= \alpha x_4 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ NEHMEN WIR $\underline{x}, \underline{y} \in U$ BEIDE BELIEBIG.

$$\underline{x} + \underline{y} = \begin{bmatrix} x_3 - x_4 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_3 - y_4 \\ y_3 + y_4 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x_3 + y_3) - (x_4 + y_4) \\ (x_3 + y_3) + (x_4 + y_4) \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_3 - h_4 \\ h_3 + h_4 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} \in U$$

WOBEI $h_3 := x_3 + y_3$, $h_4 := x_4 + y_4$

$\Longrightarrow$ SOMIT IST U EIN UNTERRAUM VOM $\mathbb{R}^4$.

Beispiel 3.26, Teil 1 - Unterraum 2

SEI $U = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}, \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

IST U EIN UNTERRAUM VON $\mathbb{R}^3$?

---

1) SEIEN $v, w \in U$.

SO FOLGT:

$$v + w = \begin{bmatrix} 2v_1 \\ 2v_1 + v_2 + v_3 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2w_1 \\ 2w_1 + w_2 + w_3 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2v_1 + 2w_1 \\ 2v_1 + v_2 + v_3 + 2w_1 + w_2 + w_3 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(v_1 + w_1) \\ 2(v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) + (v_3 + w_3) \\ (v_2 + w_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t_1 \\ 2t_1 + t_2 + t_3 \\ t_2 \end{bmatrix} \in U$$

MIT
$t_1 := v_1 + w_1$
$t_2 := v_2 + w_2$
$t_3 := v_3 + w_3$

2) SEI $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in U$.

SO GILT:

$$\alpha \cdot v = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 2v_1 \\ 2v_1 + v_2 + v_3 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha v_1 \\ 2\alpha v_1 + \alpha v_2 + \alpha v_3 \\ \alpha v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r_1 \\ 2r_1 + r_2 + r_3 \\ r_2 \end{bmatrix} \in U$$

MIT
$r_1 := \alpha v_1$
$r_2 := \alpha v_2$
$r_3 := \alpha v_3$

AUS 1) UND 2) FOLGT: U IST EIN GÜLTIGER UNTERRAUM VON $\mathbb{R}^3$.

Beispiel 3.27, Teil 1 - Unterraum 3

SEI $Z = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;:\; x = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ 1 \end{bmatrix} \;,\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

IST Z EIN UNTERRAUM VON $\mathbb{R}^3$?

---

2) SEI $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in Z$.

SO GILT :

$$\alpha \cdot v = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 2v_1 \\ 2v_1 + v_2 + v_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha v_1 \\ 2\alpha v_1 + \alpha v_2 + \alpha v_3 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r_1 \\ 2r_1 + r_2 + r_3 \\ \alpha \end{bmatrix} \notin Z$$

FÜR $\alpha \neq 1$

MIT
$r_1 := \alpha v_1$
$r_2 := \alpha v_2$
$r_3 := \alpha v_3$

$\longrightarrow$ SOMIT IST Z KEIN GÜLTIGER UNTERRAUM VON $\mathbb{R}^3$.

Beispiel 3.28, Teil 1 - Erzeugendensystem oder Basis?

WIR HABEN GESAGT: $\mathbb{R}^3 \stackrel{?}{=} \text{SPAN}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$ (JA. BASIS)

ABER GILT AUCH $\mathbb{R}^3 \stackrel{?}{=} \text{SPAN}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$? (JA. BASIS)

UND WAS IST MIT: $\mathbb{R}^3 \stackrel{?}{=} \text{SPAN}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$? (JA. ERZEUGENDENSYSTEM)

UND WAS IST MIT: $\mathbb{R}^3 \stackrel{?}{=} \text{SPAN}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$? (NEIN. DIM. ZU KLEIN)

→ NICHT ERZEUGEND

UND WAS IST MIT: $\mathbb{R}^3 \stackrel{?}{=} \text{SPAN}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 4.5 \end{bmatrix}, 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5/2 \\ 9/2 \end{bmatrix} \right\}$? (NEIN. NICHT ERZEUGEND)

UND WAS IST MIT: $\mathbb{R}^3 \stackrel{?}{=} \text{SPAN}\left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$?

SCHWIERIG ZU SEHEN ...
LET'S TALK ABOUT IT :)

IN DIESEM FALL BILDET

$$\text{SPAN}\left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \stackrel{\checkmark}{=} \mathbb{R}^3, \text{ DA}$$

$$\text{RANG}\left(\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 & 15 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 18 & 2 & 40 \\ 1 & 11 & 3 & 21 & 14 & 10 \end{bmatrix} \right) = \underline{\underline{3}}$$

Beispiel 3.29, Teil 1 - Erzeugendensystem, Basis

$\longrightarrow$ BILDEN DIE DREI VEKTOREN $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

EIN ERZEUGENDENSYSTEM VON $\mathbb{R}^2$?

BILDEN v_1, v_2, v_3 EINE BASIS VON $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{RANG } [v_1, v_2, v_3] = 2$$

DIMENSION VON $\mathbb{R}^2$ IST 2

$\Longrightarrow$ MAN DARF NUR 2 BASISVEKTOREN HABEN.

$\Longrightarrow$ v_1, v_2, v_3 BILDEN EIN ERZEUGENDENSYSTEM VON $\mathbb{R}^2$.

$\Longrightarrow$ v_1, v_2, v_3 BILDEN <u>KEINE</u> BASIS VON $\mathbb{R}^2$

(DA MEHR ALS 2 VEKTORE IM $\mathbb{R}^2$ LIN. ABHÄNGIG SIND.)

$$\text{ZB:} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(LIN. ABHÄNGIG)}$$

BEMERKUNG: BASISVEKTORE MÜSSEN LIN. UNABHÄNGIG SEIN!

$$\text{ZB.} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

BESITZT NUR DIE TRIVIALE LÖSUNG $\underline{x} = 0$.

$\Longrightarrow$ LIN. UNABHÄNGIG.

$\{v_1, v_2\}$ WÜRDE ALSO EINE BASIS VON $\mathbb{R}^2$ BILDEN :)

Beispiel 3.30, Teil 1 - Gültige Basis?

IST $\mathcal{L} := \{ 7+3t^2,\ 1-\frac{5}{2}t + e^2t^2,\ 5t-2t^2 \}$ ÜBERHAUPT EINE GÜLTIGE BASIS VON $\mathcal{P}_3$?

BEMERKUNG VOR DEM START: $\dim(\mathcal{P}_3) = 3 \quad : \quad \mathcal{P}_3 = \text{SPAN}\{1, t, t^2\} \implies \dim(\mathcal{P}_3) = 3$

$\dim(\mathcal{L}) = 3$ (ANZAHL ANGEBLICHER BASISVEKTOREN)

$\longrightarrow$ WENN DIESE ANZAHL NICHT GLEICH WÄREN, KÖNNTE ES GAR KEINE GÜLTIGE BASIS VON $\mathcal{P}_3$ SEIN. (WIESO NOCHMALS ?)

(2.3.0.10 $\iff$ ES GENÜGT 3 ANDERE LIN. UNABH. VEKTOREN ZU FINDEN, WELCHE DANN EINE BASIS BILDEN WERDEN.)

1) BILDE (KONSISTENT) KOORDINATEN VON ALLEN "NEUEN" BASISVEKTOREN IN $\mathcal{L}$ BEZÜGLICH DER MONOMIALBASIS IN $\mathcal{P}_3$.

$$\mathcal{P}_3 \ni 7+3t^2 \xrightarrow{L_\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{P}_3 \ni 1-\frac{5}{2}t + e^2t^2 \xrightarrow{L_\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \\ e^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{P}_3 \ni 5t-2t^2 \xrightarrow{L_\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

2) ZEIGE, DASS DIE KOORDINATENVEKTOREN ALLE LINEAR UNABHÄNGIG SIND. (LETZTE WOCHE)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 5 & 0 \\ 3 & e^2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{GAUSS...}} \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{array}\right] \implies x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\implies$ HOMOGENES LGS HÄTTE NUR DIE TRIVIALE LÖSUNG. (2.3.0.2 ... BISSCHEN FORMALER SCHREIBEN)

$\implies$ ALLE SPALTEN LIN. UNABHÄNGIG.

Beispiel 3.31, Teil 1 - Kern, Basis von Kern, Bild

FINDE KERN, BASIS VON KERN, BILD DER MATRIX $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times3}$

KERN (A) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{IV - I} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{III - \frac{3}{2} II} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ZSF :)

RANG(A) = r = 2

FREIE VARIABLE = $n - r = 1$

$\Longrightarrow$ $x_3 = s$
$x_2 = -3s$
$x_1 = 6s - 10s = -4s$

$\Longrightarrow$ $\mathrm{KERN}(A) = \left\{ s \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}$

BASIS VON KERN (A) :

$\mathrm{BASIS\ VON\ KERN}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

BILD (A) = IMG (A)

$\rightsquigarrow$ IN DER ZSF HATTEN WIR ZWEI UNABHÄNGIGE SPALTEN (DIE MIT DEN PIVOTEN)

ZSF :)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{URSPRÜNGLICHE MATRIX: } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

DAS BILD WIRD JETZT ALS DEN <u>URSPRÜNGLICHEN</u> SPALTEN AUFGESPANNT.

$\mathrm{BILD}(A) = \mathrm{SPAN}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

Beispiel 3.32, Teil 1 - Basistransformation, Koordinatenwechsel

SEI $\boxed{p_1 := 1 + 3t + 2t^2 \quad \in \mathcal{P}_3}$

$\mathcal{P}_3$ MIT ALTER BASIS $\mathcal{B}$ UND NEUER BASIS $\tilde{\mathcal{B}}$

$\mathcal{B} := \{1, t, t^2\}$

$\tilde{\mathcal{B}} := \{1 + t + t^2, \ 2 + 2t^2, \ t + 2t^2\} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3\}$

WELCHE BASISTRANSFORMATIONS / BASISWECHSEL - MATRIX BESCHREIBT DEN BASISWECHSEL VON

$\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ ZU $\tilde{\mathcal{B}} := \{1 + t + t^2, \ 2 + 2t^2, \ t + 2t^2\} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3\}$ IM $\mathcal{P}_3$?

$\mathcal{P}_3 \ni \quad p_1 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot t + 2 \cdot t^2 \xrightarrow{k_{\mathcal{B}}} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$\mathcal{P}_3 \ni \quad p_1 = ? \cdot \tilde{b}_1 + ? \cdot \tilde{b}_2 + ? \cdot \tilde{b}_3 \xrightarrow{k_{\tilde{\mathcal{B}}}} \tilde{x} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

1) BILDE KOORDINATEN (MATRIX $\tilde{B}$) VON NEUER BASIS $\tilde{\mathcal{B}}$ BEZÜGLICH ALTER BASIS $\mathcal{B}$.

$1 + t + t^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 1 \cdot t^2 \xrightarrow{k_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$2 + 2t^2 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot t + 2 \cdot t^2 \xrightarrow{k_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$t + 2t^2 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 2 \cdot t^2 \xrightarrow{k_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Beispiel 3.32, Teil 2 - Basistransformation, Koordinatenwechsel

1) BILDE KOORDINATEN (MATRIX B) VON ALTER BASIS $\mathcal{B}$ BEZÜGLICH ALTER BASIS $\mathcal{B}$.

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \xrightarrow{L_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$t = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 \xrightarrow{L_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 \xrightarrow{L_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) ALS KOCHREZEPT:

$$\tilde{B}^{-1} B = T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\tilde{\underline{x}} = \underline{\underline{T}}\, \underline{x}} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ -3/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

KOORDINATEN IM NEUER BASIS $\tilde{\mathcal{B}}$

BASISWECHSEL - MATRIX

KOORDINATEN IM ALTER BASIS $\mathcal{B}$

Beispiel 3.33, Teil 1 - Basistransformation, Koordinatenwechsel 2

Sei $\boxed{p_2 := -1 + 1t \in \mathcal{P}_3}$

$\mathcal{P}_3$ mit alter Basis $\mathcal{B}$ und neuer Basis $\tilde{\mathcal{B}}$

$\mathcal{B} := \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$

$\tilde{\mathcal{B}} := \{1+t+t^2, 2t+2t^2, -1+t^2\} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3\}$

Welche Basistransformations / Basiswechsel - Matrix beschreibt dem Basiswechsel vom /

$\mathcal{B} := \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ zu $\tilde{\mathcal{B}} := \{1+t+t^2, 2t+2t^2, -1+t^2\} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3\}$ im $\mathcal{P}_3$?

Bemerkung: Die Koordinaten der Basisvektoren aus $\tilde{\mathcal{B}}$ bezüglich $\mathcal{B}$ ist nicht einfach ablesbar... :/
(Die Koordinaten der Basisvektoren aus $\mathcal{B}$ bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$ schon... warum?)

Lösung: Wir schreiben einfach die Koordinaten aller Basisvektoren bezüglich Monombasis auf.

$$\mathcal{P}_3 \ni p_2 := -1 + t = ?\cdot b_1 + ?\cdot b_2 + ?\cdot b_3 \xrightarrow{L_{\mathcal{B}}} x = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{P}_3 \ni p_2 = ?\cdot \tilde{b}_1 + ?\cdot \tilde{b}_2 + ?\cdot \tilde{b}_3 \xrightarrow{L_{\tilde{\mathcal{B}}}} \hat{x} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

1) Bilde Koordinaten (Matrix $\hat{B}$) von neuer Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ bezüglich ~~Matrix Basis~~ Monombasis $\mathcal{B}_{mon} = \{1, t, t^2\}$

$$1+t+t^2 = 1\cdot 1 + 1\cdot t + 1\cdot t^2 \xrightarrow{L_{mon}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2t+2t^2 = 0\cdot 1 + 2\cdot t + 2\cdot t^2 \xrightarrow{L_{mon}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$-1+t^2 = (-1)\cdot 1 + 0\cdot t + 2\cdot t^2 \xrightarrow{L_{mon}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Beispiel 3.33, Teil 2 - Basistransformation, Koordinatenwechsel 2

1) BILDE KOORDINATEN (MATRIX B) VON ALTER BASIS $\mathcal{B}$ BEZÜGLICH ~~ALTER BASIS~~ MONOMBASIS $\mathcal{B}_{mono} = \{1, t, t^2\}$

$$1 = 1\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2 \xrightarrow{h_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1+t = 1\cdot 1 + 1\cdot t + 0\cdot t^2 \xrightarrow{h_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1+t+t^2 = 1\cdot 1 + 1\cdot t + 1\cdot t^2 \xrightarrow{h_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) ALS KOCHREZEPT :

$$\tilde{B}^{-1} B = T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{\tilde{x}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{x}} = [\;\;]$$

KOORDINATEN IM NEUER BASIS $\tilde{B}$

BASISWECHSEL - MATRIX

KOORDINATEN IM ALTER BASIS B

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathcal{B}} \\
\mathcal{B} \arrow[u, bend left, "T"] \\
\mathcal{B}_{mono} \arrow[u, bend left, "S"] \\
\mathcal{P}_3 \arrow[u, bend left, "h_{mono}"]
\end{tikzcd}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = B^{-1} \cdot B_{mono} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot I_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$T\cdot x = T\cdot S\cdot x_{mono}$$

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S\cdot x_{mono}$$

$$x_{mono} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$h_{mono}$$

$$\ni \quad p_2 := -1 + 1t$$

Beispiel 3.34, Teil 1 - Basistransformation 2

→ WELCHE BASISTRANSFORMATIONSMATRIX $\underline{\underline{T}}$ BESCHREIBT DIE KOORDINATEN-TRANSFORMATION VON $\mathcal{B}$ ZU $\mathcal{N}$?

ALTE BASIS : $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$

NEUE BASIS : $\mathcal{N} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$

---

1) SCHON FAST GEGEBEN :

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{N}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

3)

$$\underbrace{B}_{\text{ALTE BASIS-MATRIX}} = \underbrace{N}_{\text{NEUE BASIS-MATRIX}} \overbrace{T}^{\text{BASISWECHSELMATRIX VOM ALT ZU NEUER BASIS}} \iff T = N^{-1} B$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{-9}{5} & -4 \\ \frac{-6}{5} & \frac{21}{5} & 8 \\ \frac{9}{5} & \frac{-19}{5} & -7 \end{bmatrix}$$

Beispiel 3.35, Teil 1 - Metrik Transformation

SEI $\mathcal{P}_3$ DER VEKTORRAUM DER POLYNOME BIS GRAD 2.

SEI $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ DIE ALTE BASIS VON $\mathcal{P}_3$

SEI $\hat{\mathcal{B}} = \{1 + x + x^2,\ 2 + 2x^2,\ x + 2x^2\}$ DIE NEUE BASIS VON $\mathcal{P}_3$

SEIEN $v_1 = 3$, $v_2 = 5 - x^2$ ZWEI VEKTOREN $(v_1, v_2 \in \mathcal{P}_3)$

SEI $\langle v, w \rangle := \int_{-5}^{5} v(x) \cdot w(x)\, dx$ EIN SKALARPRODUKT IN $\mathcal{P}_3$

$\longrightarrow$ BERECHNE $\langle v_1, v_2 \rangle$ MIT HILFE DER TRANSFORMIERTEN METRIK MATRIX $\tilde{g}$ BEZÜGLICH DER NEUEN BASIS $\hat{\mathcal{B}}$.

---

1) BERECHNE DIE BASISWECHSELMATRIX T^{-1} (VON $\overset{\text{NEU}}{\hat{\mathcal{B}}}$ ZU $\overset{\text{ALT}}{\mathcal{B}}$)

$\longrightarrow$ GENAUERE BERECHNUNG IM VORHERIGEN BEISPIEL

$$\tilde{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \tilde{\mathcal{B}}^{-1} \cdot \mathcal{B} \iff T^{-1} = \mathcal{B}^{-1} \tilde{\mathcal{B}}$$

T INVERTIEREN ... $\Longrightarrow$ $T^{-1} = \tilde{\mathcal{B}} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}}}$

(ODER EINFACH HINSCHREIBEN $\to \mathcal{B}^{-1} = I$)

2) METRIK g BEZÜGLICH ALTER BASIS BERECHNEN:

$$g = \begin{bmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b \rangle & \langle b_1, b \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \langle b_2, b_3 \rangle \\ \langle b_3, b \rangle & \langle b_3, b_2 \rangle & \langle b_3, b_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & \frac{250}{3} \\ 0 & \frac{250}{3} & 0 \\ \frac{250}{3} & 0 & 1250 \end{bmatrix}$$

SKALARPRODUKT ALS AUFGABE!

Beispiel 3.35, Teil 2 - Metrik Transformation

3) METRIK - MATRIX BEZÜGLICH NEUER BASIS AUSRECHNEN

$$\tilde{g} = \left(T^{-1}\right)^T \cdot g \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} 1510 & \frac{8560}{3} & 2750 \\ \frac{8560}{3} & \frac{17120}{3} & \frac{16000}{3} \\ 2750 & \frac{16000}{3} & \frac{15250}{3} \end{bmatrix}$$

↝ FASSEN WIR ALLES (MIT EINER SKIZZE) ZUSAMMEN:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} = \{1, x, x^2\} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dd, bend right, "T"'] \\
\mathcal{P}_3 \arrow[d, leftrightarrow] \\
\tilde{\mathcal{B}} = \{1 + x + x^2,\ 2 + 2x^2,\ x + 2x^2\} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \arrow[uu, bend right, "T^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_{-5}^{5} 3 \cdot (5 - x^2)\, dx = \underline{\underline{-100}}$$

$$v_1 \xrightarrow{l_B} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = l_B(v_1)$$

$$v_2 \xrightarrow{l_B} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = l_B(v_2)$$

$$T \cdot l_B(v_1) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{-3}{2} \end{bmatrix} \xleftarrow{l_{\tilde{B}}} v_1$$

$$T \cdot l_B(v_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \xleftarrow{l_{\tilde{B}}} v_2$$

$$\underbrace{l_{\tilde{B}}(v_1)^T \cdot \tilde{g} \cdot l_{\tilde{B}}(v_2)}_{\text{BEZÜGLICH NEUER BASIS } \tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{-3}{2} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1510 & \frac{8560}{3} & 2750 \\ \frac{8560}{3} & \frac{17120}{3} & \frac{16000}{3} \\ 2750 & \frac{16000}{3} & \frac{15250}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-100}}$$

$$= l_B^T(v_1) \cdot g \cdot l_B(v_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & \frac{250}{3} \\ 0 & \frac{250}{3} & 0 \\ \frac{250}{3} & 0 & 1250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-100}}$$

Beispiel 3.36, Teil 1 - Lineare Abbildungen, Abbildungsmatrix (bezüglich versch. Basen inkl. Komm

ZEIGE DASS $\mathcal{A}$ EINE LINEARE ABBILDUNG IST.

$$\mathcal{A} : P_3 \longrightarrow P_2$$

$$x(t) \longmapsto \frac{d}{dt} x(t)$$

SEI $B_1 = \{1, t, t^2\}$ EINE BASIS FÜR P_3 (URBILDRAUM)

SEI $B_2 = \{1, t\}$ EINE BASIS FÜR P_2 (BILDRAUM)

$\rightsquigarrow$ WIR SUCHEN DIE ABBILDUNGSMATRIX A, WELCHE DIE LINEARE ABBILDUNG $\mathcal{A}$ BEZÜGLICH DER BASEN B_1 UND B_2 DARSTELLT

SEIEN $v(t), w(t) \in P_3$, $\alpha \in \mathbb{R}$

1) ADDITIVITÄT:

$$\mathcal{A}(v+w)(t) = \mathcal{A}(v(t)+w(t)) = \frac{d}{dt}\left[v(t)+w(t)\right]$$
$$= \frac{d}{dt}\left[(a+bt+ct^2)+(d+et+ft^2)\right]$$
$$= b+e+2(c+f)t$$
$$= \frac{d}{dt}\left[(a+bt+ct^2)\right] + \frac{d}{dt}\left[(d+et+ft^2)\right]$$
$$= \frac{d}{dt}\left[v(t)\right] + \frac{d}{dt}\left[w(t)\right] = \mathcal{A}(v(t)) + \mathcal{A}(w(t)) \quad \checkmark$$

2) HOMOGENITÄT:

$$\mathcal{A}(\alpha v)(t) = \mathcal{A}(\alpha \cdot v(t)) = \frac{d}{dt}\left[\alpha v(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[\alpha(a+bt+ct^2)\right] = \alpha b + 2\alpha c t = \alpha \frac{d}{dt}\left[v(t)\right]$$
$$= \alpha \cdot \mathcal{A}(v(t)) \quad \checkmark$$

ALS 1) UND 2) FOLGT, DASS DIE ABBILDUNG LINEAR IST. :)

Beispiel 3.36, Teil 2 - Lineare Abbildungen, Abbildungsmatrix (bezüglich versch. Basen inkl. Komm

↝ WIR SUCHEN DIE ABBILDUNGSMATRIX A, WELCHE DIE LINEARE ABBILDUNG $\mathcal{A}$ BEZÜGLICH DER BASEN $\mathcal{B}_1$ UND $\mathcal{B}_2$ DARSTELLT

1) ABBILDUNG ALLER BASISVEKTORE AUS $\mathcal{B}_1$ BILDEN

2) ABBILDUNGEN ALS LINEARKOMBINATION VON BASISVEKTORE AUS $\mathcal{B}_2$ BILDEN.

⟶ KONSISTENTE KOORDINATENMATRIX BILDEN

1) 2)

$$\mathcal{A}(b_1) = \mathcal{A}(1) = \frac{d}{dt}\left[1\right] = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot t \xrightarrow{L_{\mathcal{B}_2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}(b_2) = \mathcal{A}(t) = \frac{d}{dt}\left[t\right] = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot t \xrightarrow{L_{\mathcal{B}_2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}(b_3) = \mathcal{A}(t^2) = \frac{d}{dt}\left[t^2\right] = 2t = 0\cdot 1 + 2\cdot t \xrightarrow{L_{\mathcal{B}_2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2) $$\Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ABER WOZU? UND HOW CAN WE BE SURE?

SEI $\boxed{p_1 := 1 + 3t + 2t^2 \in \mathcal{P}_3}$ EIN VEKTOR IM URBILDRAUM

ZIEL: $\mathcal{A}(p_1)$ BERECHNEN:

VARIANTE 1 (MENSCH): $\mathcal{A}(p_1) = \frac{d}{dt}\left[1 + 3t + 2t^2\right] = \underline{\underline{3 + 4t}} \in \mathcal{P}_2$

VARIANTE 2 (MASCHINE): KOORDINATEN BILDEN: $p_1 \xrightarrow{L_{\mathcal{B}_1}} x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

ABBILDUNGSMATRIX: MULTIPLIKATION VON LINKS MIT KOORDINATEN VEKTOR: $\boxed{Ax_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = x_2$

"INVERSE KOORDINATEN" → VEKTOR BILDEN: $x_2 \xrightarrow{L_{\mathcal{B}_2}^{-1}} \underline{\underline{3 + 4t}} \in \mathcal{P}_2$

Beispiel 3.36, Teil 3 - Lineare Abbildungen, Abbildungsmatrix (bezüglich versch. Basen inkl. Komm

↝ ABER WIE WERDE DIE ABBILDUNGSMATRIX B DER LINEAREN ABBILDUNG $\mathcal{A}$ BEZÜGLICH DEN BASEN

$\tilde{\mathcal{B}}_1 := \{1 + t + t^2,\ 2 + 2t^2,\ t + 2t^2\}$

$\tilde{\mathcal{B}}_2 = \{1,\ 1 - t\}$

ALS ?

$$B = W \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ -3/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$\tilde{\mathcal{B}}_1 := \{1 + t + t^2,\ 2 + 2t^2,\ t + 2t^2\}$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot \begin{bmatrix} 5/2 \\ -3/4 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\tilde{\mathcal{B}}_2 = \{1,\ 1 - t\}$

$$\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T = \tilde{B}_1^{-1} \cdot B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$W = \tilde{B}_2^{-1} B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathcal{B}}_1 \arrow[rrr, bend left, "B = W \cdot A \cdot T"] \arrow[d, shift left, "L_{\tilde{\mathcal{B}}_1}^{-1}"] & & & \tilde{\mathcal{B}}_2 \arrow[d, shift left, "L_{\tilde{\mathcal{B}}_2}^{-1}"] \\
P_3 \arrow[u, shift left, "L_{\tilde{\mathcal{B}}_1}"] \arrow[d, shift right, "L_{\mathcal{B}_1}"'] \arrow[rrr, "\mathcal{A}"] & & & P_2 \arrow[u, shift left, "L_{\tilde{\mathcal{B}}_2}"] \arrow[d, shift right, "L_{\mathcal{B}_2}"'] \\
\mathcal{B}_1 \arrow[u, shift right, "L_{\mathcal{B}_1}^{-1}"'] \arrow[rrr, bend right, "A"'] & & & \mathcal{B}_2 \arrow[u, shift right, "L_{\mathcal{B}_2}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$p_1 = 1 + 3t + 2t^2$

$$\frac{d}{dt} p_1 = 3 + 4t = L_{\mathcal{B}_2}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = L_{\tilde{\mathcal{B}}_2}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}\right)$$

$\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{B}_2 = \{1, t\}$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Sei $\mathcal{P}^k$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $< k$ für $k \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}^2$ in $\mathcal{P}^3$

$$\mathcal{F}: \quad \mathcal{P}^2 \longrightarrow \mathcal{P}^3$$
$$f(x) \longmapsto \int_0^x f(s)ds$$

BLEIBT EIN x !

SEHR HÄSSLICHE NOTATION

→ DURCH WELCHE ABBILDUNGSMATRIX $\underline{A}$ WIRD $\mathcal{F}$ BESCHRIEBEN?

IM URBILDRAUM HABEN WIR DIE BASIS $\mathcal{P}_2 = \{1, x\}$

IM BILDRAUM HABEN WIR DIE BASIS $\mathcal{P}_3 = \{1, x, x^2\}$

→ UM DIE ABBILDUNGSMATRIX A ZU FINDEN, WELCHE DIE ABBILDUNG $\mathcal{F}: X \to Y$ BESCHREIBT SUCHEN WIR DIE ABBILDUNGEN UNSERER BASISVEKTOREN ALS X.

ALSO $f(1)$ UND $f(x)$

$$1 \xrightarrow{L_{\mathcal{P}_2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; : \quad f(1) = \int_0^x 1 \, ds = s \Big|_0^x = \underline{\underline{x}} \xrightarrow{L_{\mathcal{P}_3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x \xrightarrow{L_{\mathcal{P}_2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; : \quad f(x) = \int_0^x s \, ds = \frac{s^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^2}{2} \xrightarrow{L_{\mathcal{P}_3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

⇝ JETZT REIHEN WIR UNSERE ERHALTENEN SPALTEN ENTSPRECHEND ZU EINER MATRIX.

⟹ DIE ABBILDUNGSMATRIX IST A, WELCHE $\mathcal{F}: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ BESCHREIBT IST:

$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}}}$$

Beispiel 3.37, Teil 2 - Basisprüfung 15 Abbildungsmatrix

↓ "GRAPHISCH" ZUM BEISPIEL VON OBEN

ZB: $f(x) = \int_0^x f(s)\,ds$

ZB: MONOMIALBASIS $\{1, x\}$

ZB MONOMIALBASIS $\{1, x, x^2\}$

ZB $3 + 5x$ $\mathcal{P}_3$

ZB: $\underline{\underline{3x + \frac{5}{2}x^2 \in \mathcal{P}_3}}$

$$
\begin{tikzcd}
\overset{\mathcal{P}_2}{\mathscr{B} : X} \arrow[rr, "\mathscr{F}"] \arrow[d, shift right, "k_{\mathscr{B}}"'] & & \overset{\mathcal{P}_3}{Y : \mathscr{C}} \arrow[d, shift right, "k_{\mathscr{C}}"'] \\
\mathbb{R}^n \arrow[u, shift right, "k_{\mathscr{B}}^{-1}"'] \arrow[rr, "\mathbf{A}"] & & \mathbb{R}^m \arrow[u, shift right, "k_{\mathscr{C}}^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

ZB: $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}}}$$

$$\mathcal{A} \cdot x$$

ZB $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5/2 \end{bmatrix}$

Beispiel 3.38, Teil 1 - Basisprüfung W18 Lineare Abbildungen

4. [6 Punkte] Seien $\mathcal{G}_3 = \text{span}\{1, t^2, t^4\}$ und $\mathcal{U}_2 = \text{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}_3$ nach $\mathcal{U}_2$:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & \mathcal{G}_3 & \longrightarrow & \mathcal{U}_2 \\ & x(t) & \longmapsto & t\,x''(t), \end{array}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}_3$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}_2$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = t\,x''(t)$.

a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) [1 Punkt] Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben, wenn wir die Monome als Basen in beiden Räumen verwenden?

c) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von $\mathcal{G}_3$ beziehungsweise $\mathcal{U}_2$ sind, wobei

$$p_1(t) = 1 + t^2, \qquad p_2(t) = 1 - t^2, \qquad p_3(t) = 1 + t^2 + t^4$$

und

$$q_1(t) = t, \qquad q_2(t) = 3\,t + 2\,t^3.$$

a) LIN. UNABHÄNGIGE ABBILDUNG FALLS : ← THEORIE VON WOCHE 06 :)

$$\text{I}: \quad A(x+y)(t) = Ax(t) + Ay(t)$$

$$\text{II}: \quad A(\alpha x)(t) = \alpha A x(t)$$

$$\text{I}: \longrightarrow A(x+y)(t) \stackrel{?}{=} Ax(t) + Ay(t)$$

$$= t\,(x+y)''(t)$$

$$= t\,x''(t) + t\,y''(t)$$

$$= Ax(t) + Ay(t) \quad \checkmark$$

ADDITIVITÄT GEZEIGT :)

$$\text{II}: \longrightarrow A(\alpha x)(t) \stackrel{?}{=} \alpha A x(t)$$

$$= t\,(\alpha x)''(t)$$

$$= \alpha\, t\, x''(t) = \alpha A x(t) \quad \checkmark$$

HOMOGENITÄT GEZEIGT :)

⟹ AUS I UND II FOLGT, DIE ABBILDUNG IST LINEAR :)

Beispiel 3.38, Teil 2 - Basisprüfung W18 Lineare Abbildungen

b) HIER SUCHEN WIR EINE MATRIX $\underline{A}$, WELCHE DIE LINEARE ABBILDUNG $\mathcal{A}$ BESCHREIBT. (BEZÜGLICH DER JEWEILIGEN MONOMIALBASEN VON G_3 NACH U_2)

$\rightsquigarrow$ ALSO WAS MACHT UNSERE ABBILDUNG $\mathcal{A}$ MIT DER MONOMIALBASIS VON G_3?

1) $\longrightarrow$ MONOMIALBASISVEKTORE VON G_3 ABBILDEN

1.1) UND ALS LINEARKOMBINATION VON MONOMIALBASISVEKTORE ALS U_2 SCHREIBEN.

2) $\longrightarrow$ MATRIXFORM :)

G HAT DIE MONOMIALBASIS $\{1, t^2, t^4\}$

U HAT DIE MONOMIALBASIS $\{t, t^3\}$

$$\underbrace{1}_{\text{BASISVEKTOREN VON } G_3} \xrightarrow{\ell_B} \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{\text{KOORDINATEN BZGL. BASIS VON } G_3} : \quad A(1) = t \cdot 0 = 0 \cdot t + 0 \cdot t^3 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$t^2 \xrightarrow{\ell_B} \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} : \quad A(t^2) = t \cdot 2 = 2 \cdot t + 0 \cdot t^3 = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$$

$$t^4 \xrightarrow{\ell_B} \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} : \quad A(t^4) = t \cdot 12 t^2 = 0 \cdot t + 12 \cdot t^3 = \begin{bmatrix}0\\12\end{bmatrix}$$

BASISVEKTOREN VON G_3 — KOORDINATEN BZGL. BASIS VON G_3 — ABBILDUNGEN DER BASISVEKTORE ALS G_3 ... — LINEARKOMBINATION ALS BASISVEKTOREN VON U_2 :) — KOORDINATEN BZGL. BASISVEKTOREN VON U_2 :)

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}}}$$

ABBILDUNGSMATRIX :)

Beispiel 3.38, Teil 3 - Basisprüfung W18 Lineare Abbildungen

c) OB $\{p_1, p_2, p_3\}$ EINE GÜLTIGE BASIS VON G IST, SEHEN WIR WIE FOLGT:

1) p_1, p_2, p_3 ALS LINEARKOMBINATION VON BASISVEKTOREN ALS G SCHREIBEN

2) MATRIXFORM AUFSTELLEN

3) GAUSSEN (IN ZSF BRINGEN) $\longrightarrow$ VOLLER RANG?

$\rightarrow$ JA: LIN. UNABHÄNGIG $\Longrightarrow$ GÜLTIGE BASIS :)

$\rightarrow$ NO: KEINE GÜLTIGE BASIS :/

$\rightsquigarrow$ ANALOG FÜR $\{q_1, q_2\}$ UND $\mathcal{U}$ ...

---

1) $\rightsquigarrow$

$$p_1 = 1 + t^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^4 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = 1 - t^2 = 1 \cdot 1 - 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^4 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_3 = 1 + t^2 + t^4 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t^2 + 1 \cdot t^4 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) 3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{II-I}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ZSF :)

DIESE MATRIX HAT VOLLEN RANG, ALSO BILDEN $\{p_1, p_2, p_3\}$ EINE BASIS VON G_3 :)

---

1) $\rightsquigarrow$

$$q_1 = t = 1 \cdot t + 0 \cdot t^3 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = 3t + 2t^3 = 3 \cdot t + 2 \cdot t^3 \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2) 3)

IST BEREITS ZSF :)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

DIESE MATRIX HAT VOLLEN RANG, ALSO BILDEN $\{q_1, q_2\}$ EINE BASIS VON $\mathcal{U}_2$:)

Beispiel 3.39, Teil 1 - Basisprüfung SO19 Lineare Abbildungen 2

4. **[6 Punkte]** Seien $\mathcal{G}_3 = \operatorname{span}\{1, t, t^2\}$ und $\mathcal{U}_3 = \operatorname{span}\{1, t, t^2\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}_3$ nach $\mathcal{U}_3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \quad \mathcal{G}_3 &\longrightarrow \mathcal{U}_3 \\ x(t) &\longmapsto x(0) + t \cdot x'(0) + \tfrac{1}{2}t^2 \cdot x''(0), \end{aligned}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}_3$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}_3$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = x(0) + t \cdot x'(0) + \frac{1}{2}t^2 \cdot x''(0)$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben bezüglich der Monomialbasis in den beiden Räumen $\mathcal{G}_3$ und $\mathcal{U}_3$?

c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2, q_3\}$ Basen von $\mathcal{G}_3$ beziehungsweise $\mathcal{U}_3$ sind, wobei

$$p_1(t) = 1 + t, \qquad p_2(t) = 1 - t, \qquad p_3(t) = 1 + t + t^2,$$

und

$$q_1(t) = t, \qquad q_2(t) = 1 + t^2, \qquad q_3(t) = 1 - t^2.$$

d) Welches ist die neue Matrix B, durch die $\mathcal{A}$ nach dem Basiswechsel in die neuen Basen $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2, q_3\}$ aus Teilaufgabe **c)** beschrieben wird?

---

a) LIN. UNABHÄNGIGE ABBILDUNG FALLS : ← THEORIE VON WOCHE 06 :)

I : $\mathcal{A}(x(t) + y(t)) = \mathcal{A}(x(t)) + \mathcal{A}(y(t))$

II : $\mathcal{A}(\alpha x(t)) = \alpha \mathcal{A}(x(t))$

I : $\longrightarrow$ $\mathcal{A}(x(t) + y(t)) = \mathcal{A}(x(t)) + \mathcal{A}(y(t))$

$= (x+y)(0) + t\,(x+y)'(0) + \frac{1}{2}t^2 (x+y)''(0)$

$= x(0) + y(0) + t\,x'(0) + t\,y'(0) + \frac{1}{2}t^2 x''(0) + \frac{1}{2}t^2 y''(0)$

$= x(0) + t\,x'(0) + \frac{1}{2}t^2 x''(0) + y(0) + t\,y'(0) + \frac{1}{2}t^2 y''(0)$

$= \mathcal{A}(x(t)) + \mathcal{A}(y(t))$ ✓ ADDITIVITÄT GEZEIGT :)

II : $\longrightarrow$ $\mathcal{A}(\alpha x(t)) \overset{?}{=} \alpha \mathcal{A}(x(t))$

$= \alpha x(0) + \alpha t\,x'(0) + \alpha \frac{1}{2}t^2 x''(0)$

$\alpha(x(0) + t\,x'(0) + \frac{1}{2}t^2 x''(0)) = \alpha \mathcal{A}(x(t))$ ✓ HOMOGENITÄT GEZEIGT :)

$\Longrightarrow$ AUS I UND II FOLGT, DIE ABBILDUNG IST LINEAR :)

Beispiel 3.39, Teil 2 - Basisprüfung SO19 Lineare Abbildungen 2

b) HIER SUCHEN WIR EINE MATRIX $\underline{A}$, WELCHE DIE LINEARE ABBILDUNG $\mathcal{A}$ BESCHREIBT. (BEZÜGLICH DER JEWEILIGEN MONOMIALBASEN VON G_3 NACH U_3)

⇝ ALSO WAS MACHT UNSERE ABBILDUNG $\mathcal{A}$ MIT DER MONOMIALBASIS VON G_3?

1) → MONOMIALBASISVEKTOREN VON G_3 ABBILDEN

1.1) UND ALS LINEARKOMBINATION VON MONOMIALBASISVEKTOREN ALS U_3 SCHREIBEN.

2) → MATRIXFORM :)

G_3 HAT DIE MONOMIALBASIS $\{1, t, t^2\}$

U_3 HAT DIE MONOMIALBASIS $\{1, t, t^2\}$

$$\mathcal{A}(\underset{x(t)=1}{1}) = \underset{x(0)=1}{1} + t \cdot \underset{x'(0)=0}{0} + \tfrac{1}{2}t^2 \cdot \underset{x''(0)=0}{0} = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \xrightarrow{h_{U_3}} \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

$$\mathcal{A}(\underset{x(t)=t}{t}) = \underset{x(0)=0}{0} \cdot t \cdot \underset{x'(0)=1}{1} + \tfrac{1}{2}t^2 \cdot \underset{x''(0)=0}{0} = t = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 \xrightarrow{h_{U_3}} \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

$$\mathcal{A}(\underset{x(t)=t^2}{t^2}) = \underset{x(0)=0}{0} + t \cdot \underset{x'(0)=0}{0} + \tfrac{1}{2}t^2 \cdot \underset{x''(0)=2}{2} = t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 \xrightarrow{h_{U_3}} \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Beispiel 3.39, Teil 3 - Basisprüfung SO19 Lineare Abbildungen 2

c) P_3 hat die Monomialbasis $\{1, t, t^2\}$

$$p_1 = 1\cdot 1 + 1\cdot t + 0\cdot t^2 \xrightarrow{h_{G_3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = 1\cdot 1 - 1\cdot t + 0\cdot t^2 \xrightarrow{h_{G_3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_3 = 1\cdot 1 + 1\cdot t + 1\cdot t^2 \xrightarrow{h_{G_3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Lineare Unabhängigkeit $\Longleftrightarrow$ $Ax = 0 \Rightarrow x \stackrel{!}{=} 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{II-I}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \longleftarrow \text{voller Rang}$$

$\Longrightarrow$ Homogenes LGS besitzt <u>nur</u> die Triviallösung.

$\Longrightarrow$ Alle Spalten sind linear unabhängig

$\Longrightarrow$ bilden eine Basis für VR

$\rightsquigarrow$ analog für q_1, q_2 und q_3 $\qquad$ U_3 hat die Monomialbasis $\{1, t, t^2\}$

$$q_1 \xrightarrow{h_{K_3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad q_2 \xrightarrow{h_{K_3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad q_3 \xrightarrow{h_{K_3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{III-I}{\overset{I \leftrightarrow II}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$\Longrightarrow$ Homogenes LGS besitzt <u>nur</u> die Triviallösung.

$\Longrightarrow$ Alle Spalten sind linear unabhängig

$\Longrightarrow$ bilden eine Basis für VR d)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\} \arrow[rr, bend left] & & D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathcal{D}_1 = \{1, t, t^2\} \arrow[dd, bend left=60, "S = D_2^{-1} \cdot D_1"] \\
\mathcal{P}_3 \arrow[u] \arrow[d] \arrow[rr, "A"] & & \mathcal{P}_3 \arrow[u] \arrow[d] \\
\mathcal{B}_2 = \{p_1, p_2, p_3\},\ B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \arrow[uu, bend left=60, "T = B_1^{-1} B_2"] \arrow[rr, bend right, "B = SAT"'] & & \mathcal{D}_2 = \{q_1, q_2, q_3\},\ D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
\end{tikzcd}$$

mit $T = B_1^{-1} \cdot B_2 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

mit $S = D_2^{-1} \cdot D_1 = D_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow B = SAT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}}$$

4. **[6 Punkte]** Seien $\mathcal{G} = \text{span}\{1, t^2\}$ und $\mathcal{U} = \text{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \quad \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{U} \\ x(t) &\longmapsto t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t), \end{aligned}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t)$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben bezüglich der Monomialbasis in den beiden Räumen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{U}$?

c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von $\mathcal{G}$ beziehungsweise $\mathcal{U}$ sind, wobei

$$p_1(t) = 1 - t^2, \qquad p_2(t) = 1 + t^2,$$

und

$$q_1(t) = t - t^3, \qquad q_2(t) = t + t^3.$$

a) LIN. UNABHÄNGIGE ABBILDUNG FALLS : ← THEORIE VON WOCHE 06 :)

I : $A(x+y)(t) = Ax(t) + Ay(t)$

II : $A(\alpha x)(t) = \alpha A x(t)$

I : → $A(x+y)(t) \overset{?}{=} Ax(t) + Ay(t)$

$= t\,(x(0) + y(0)) + t^2\,(x'(t) + y'(t))$

$= x(0)t + y(0)t + x'(t)t^2 + y'(t)t^2$

$= x(0)t + x'(t)t^2 + y(0)t + y'(t)t^2$

$\overset{\checkmark}{=} Ax(t) + Ay(t)$

✓ (EIGENSCHAFT I HABEN WIR GEZEIGT:)

II : → $A(\alpha x)(t) \overset{?}{=} \alpha A x(t)$

$= t\,(\alpha x(0)) + t^2\,(\alpha x'(t))$

$= \alpha\,(t\,x(0)) + \alpha\,(t^2 x'(t))$

$= \alpha\,(t\,x(0) + t^2 x'(t))$

✓ (EIGENSCHAFT II HABEN WIR GEZEIGT...

⟹ AUS I UND II FOLGT, DIE ABBILDUNG IST LINEAR :)

4. [**6 Punkte**] Seien $\mathcal{G} = \operatorname{span}\{1, t^2\}$ und $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \quad \mathcal{G} &\longrightarrow \quad \mathcal{U} \\ x(t) &\longmapsto t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t), \end{aligned}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t)$.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben bezüglich der Monomialbasis in den beiden Räumen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{U}$?

b) HIER SUCHEN WIR EINE MATRIX $\underline{\underline{A}}$, WELCHE DIE LINEARE ABBILDUNG $\mathcal{A}$ BESCHREIBT. (BEZÜGLICH DER JEWEILIGEN MONOMIALBASEN VON $\mathcal{G}$ NACH $\mathcal{U}$)

$\rightsquigarrow$ ALSO WAS MACHT UNSERE ABBILDUNG $\mathcal{A}$ MIT DER MONOMIALBASIS VON $\mathcal{G}$?

1) $\longrightarrow$ MONOMIALBASISVEKTOREN VON $\mathcal{G}$ ABBILDEN

1.1) UND ALS LINEARKOMBINATION VON MONOMIALBASISVEKTOREN ALS $\mathcal{U}$ SCHREIBEN.

2) $\longrightarrow$ MATRIXFORM :)

$\mathcal{G}$ HAT DIE MONOMIALBASIS $\{1, t^2\}$

$\mathcal{U}$ HAT DIE MONOMIALBASIS $\{t, t^3\}$

$$A(\underset{\substack{\uparrow \\ x(t)=1}}{1}) = t \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x(0)=1}}{1} + t^2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x'(t)=0}}{0} = t = 1 \cdot t + 0 \cdot t^3 \Longrightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

$$A(\underset{\substack{\uparrow \\ x(t)=t^2}}{t^2}) = t \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x(0)=0}}{0} + t^2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x'(t)=2t}}{2t} = 0 \cdot t + 2 \cdot t^3 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}}$$

Beispiel 3.40, Teil 3 - Basisprüfung W20 Lineare Abbildungen 3

'ALTE' BASEN :)

4. **[6 Punkte]** Seien $\mathcal{G} = \text{span}\{1, t^2\}$ und $\mathcal{U} = \text{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \quad \mathcal{G} &\longrightarrow \quad \mathcal{U} \\ x(t) &\longmapsto t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t), \end{aligned}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t)$.

c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von $\mathcal{G}$ beziehungsweise $\mathcal{U}$ sind, wobei

$$p_1(t) = 1 - t^2, \qquad p_2(t) = 1 + t^2,$$

und

$$q_1(t) = t - t^3, \qquad q_2(t) = t + t^3.$$

c) OB $\{p_1, p_2\}$ EINE GÜLTIGE BASIS VON $\mathcal{G}$ IST, SEHEN WIR WIE FOLGT:

1) p_1, p_2 ALS LINEARKOMBINATION VON BASISVEKTOREN AUS $\mathcal{G}$ SCHREIBEN

2) MATRIXFORM AUFSTELLEN

3) GAUSSEN (IN ZSF BRINGEN) ⟶ VOLLER RANG?

JA: LIN. UNABHÄNGIG ⟹ GÜLTIGE BASIS :)

NO: KEINE GÜLTIGE BASIS :/

⇝ ANALOG FÜR $\{q_1, q_2\}$ UND $\mathcal{U}$...

---

1) ⇝ $p_1 = 1 - t^2 = 1 \cdot 1 - 1 \cdot t^2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$p_2 = 1 + t^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t^2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2) 3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{II + I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ⟵ DIESE MATRIX HAT VOLLEN RANG, ALSO BILDEN $\{p_1, p_2\}$ EINE BASIS VON $\mathcal{G}$:)

---

1) $q_1 = t - t^3 = 1 \cdot t - 1 \cdot t^3 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$q_2 = t + t^3 = 1 \cdot t + 1 \cdot t^3 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2) 3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{II + I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ⟵ DIESE MATRIX HAT VOLLEN RANG, ALSO BILDEN $\{q_1, q_2\}$ EINE BASIS VON $\mathcal{U}$:)

4. [6 Punkte] Seien $\mathcal{G} = \text{span}\{1, t^2\}$ und $\mathcal{U} = \text{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume von Polynomen. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{A}: \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ x(t) & \longmapsto & t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t), \end{array}$$

das heisst, für $x \in \mathcal{G}$ ist $\mathcal{A}x \in \mathcal{U}$ gegeben durch $(\mathcal{A}x)(t) = t \cdot x(0) + t^2 \cdot x'(t)$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben bezüglich der Monomialbasis in den beiden Räumen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{U}$?

c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von $\mathcal{G}$ beziehungsweise $\mathcal{U}$ sind, wobei

$$p_1(t) = 1 - t^2, \qquad p_2(t) = 1 + t^2,$$

und

$$q_1(t) = t - t^3, \qquad q_2(t) = t + t^3.$$

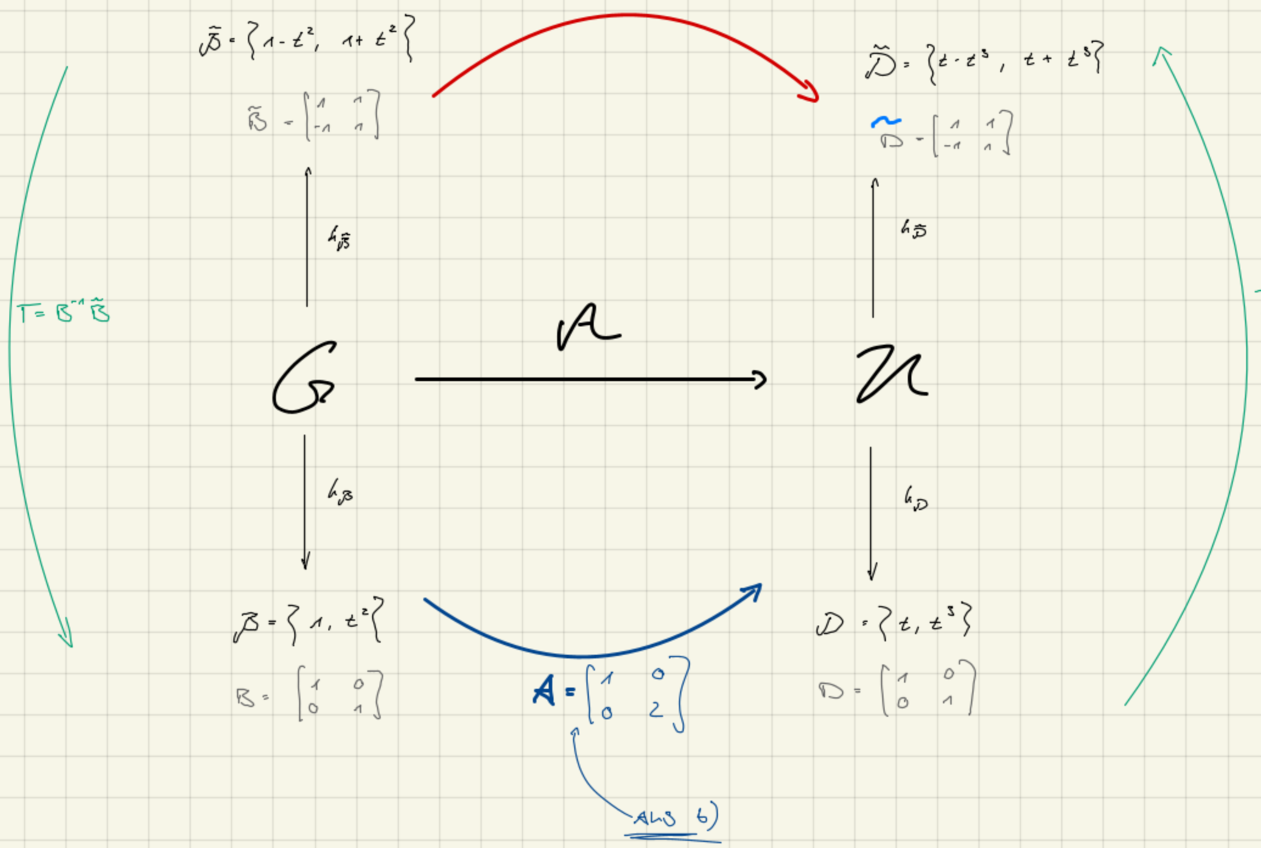
ZUSATZ- 06/07 DOKUMENT

d) Welches ist die neue Matrix B, durch die $\mathcal{A}$ nach dem Basiswechsel in die neuen Basen $\{p_1, p_2\}$ und $\{q_1, q_2\}$ aus Teilaufgabe **c)** beschrieben wird?

HIER :)

SPEZIALFALL DIESER AUFGABE

$$\boxed{B = T^{-1} A T}$$



$\longrightarrow$ T ODER T^{-1} IST SEHR EINFACH ZU BESTIMMEN :)

IN DIESER AUFGABE IST T SEHR EINFACH
ZU BESTIMMEN:

$$\underline{\underline{T}} = B^{-1}\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

$\Longrightarrow$ SOMIT IST $\underline{\underline{T^{-1}}}$ =

EXPLIZIT BERECHNET
ALS REFRESHER.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{II+I}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{2}\cdot II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\overset{I-II}{\rightsquigarrow} \underline{\underline{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]}}$$

$$\underline{\underline{T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}}$$

$\rightsquigarrow$ JETZT LESEN WIR DEN GLEICHWERTIGEN PFAD

IM KOM. DIAGRAM AB, UM B ZU BESTIMMEN :)

$\widehat{=}$

$$\boxed{B = T^{-1}AT} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = B}}$$

Beispiel 3.41, Teil 1 - Verknüpfte Abbildungen

SEI $\mathcal{U} = \text{SPAN} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

$$\mathcal{A} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v(t) \longmapsto a(v) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot v(0)$$

UND SEI

$$\mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$w(t) \longmapsto b(w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot w(1)$$

ALSO MIT $v \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{A}v)(t) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot v(0) \in \mathbb{R}^2$

UND $w \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{B}w)(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot w(1) \in \mathbb{R}^3$

WIE LAUTET DIE ABBILDUNGSMATRIX H, SO DASS

$$\mathcal{H} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$v(t) \longmapsto b(a(v))$$

$$\mathcal{A}(u_1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}(u_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$v(t=0)$

$$\Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

DA $\mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \Longrightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$H \cdot v = \Big(\underbrace{\boxed{B \cdot} \big(\boxed{A}}_{:= H} \cdot v \big) \Big) \Longrightarrow H = B \cdot A \quad (\neq A \cdot B) \; !!$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 10 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}}}$$

Beispiel 3.42, Teil 1 - Gram-Schmidt & QR

SEIEN $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\in \mathbb{R}^3$

FINDE EINE ONB MITTELS GRAM-SCHMIDT UND DEM STANDARD SKALARPRODUKT/EUKLIDISCHE NORM.

$\rightsquigarrow$ ZERLEGE DIE MATRIX $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ QR. (2. SEITE)

DEFINITION :) ("LEERE SUMME")

$$w_1' = v_1 - 0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \frac{w_1'}{\sqrt{\langle w_1', w_1' \rangle}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1/3 : CHECK

$$w_2' = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 = v_2 - \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}_{=0} \cdot w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{w_2'}{\sqrt{\langle w_2', w_2' \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2/3 : CHECK

$$w_3' = v_3 - \underbrace{\langle v_3, w_1 \rangle}_{=0} w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \frac{w_3'}{\sqrt{\langle w_3', w_3' \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{(6/5)^2 + (-3/5)^2 + 0^2}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 6/5 \\ -3/5 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 6/5 \\ -3/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3/3 : CHECK !

$$\text{ONB} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Beispiel 3.42, Teil 2 - Gram-Schmidt & QR

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

Q: WIE LAUTET DIE QR-ZERLEGUNG VON $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = Q \cdot R$?

A: WIR HABEN BEREITS ALLE SPALTEN VON A ORTHONORMALISIERT

$$ONB = \left\{ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\longrightarrow$ IN MATRIX SCHREIBEN: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ (Q IST ORTHOGONAL!)

$$A = Q \cdot R$$

$$\Longleftrightarrow \quad Q^T A = R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}}$$

Beispiel 3.43, Teil 1 - Gram-Schmidt 2

BILDE ALS $\{v_1, v_2, v_3\} = \{1, x, x^2\}$ (MONOMIALBASIS VON $\mathcal{P}_3$)

EINE ONB BEZÜGLICH DEM SKALARPRODUKT :

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^{1} g(x)\, h(x)\, dx \quad \text{MIT} \quad g(x), h(x) \in \mathcal{P}_3$$

ARGUMENT KANN WEGGELASSEN WERDEN* (IST ALS HILFE GEDACHT)

DEFINITION : "LEERE SUMMEN"

$$w_1'(x) = v_1(x) - 0 = 1$$

$$w_1(x) = \frac{w_1'}{\sqrt{\langle w_1', w_1' \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dx}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1/3 : CHECK

$$w_2' = v_2 - \underbrace{\langle v_2, w_1 \rangle}_{\substack{=0 \\ \text{(SYMMETRIE)}}} w_1 = v_2 - 0 = x$$

$$w_2 = \frac{w_2'}{\sqrt{\langle w_2', w_2' \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x \cdot x \, dx}} \cdot x = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot x$$

2/3 : CHECK

$$w_3' = v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \underbrace{\langle v_3, w_2 \rangle}_{\substack{=0 \\ \text{SYMMETRIE}}} w_2 = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot w_1 = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$w_3 = \frac{w_3'}{\sqrt{\langle w_3', w_3' \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2 \, dx}} \cdot (x^2 - \tfrac{1}{3}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{45}}} (x^2 - \tfrac{1}{3}) = \frac{\sqrt{10}}{4} (3x^2 - 1)$$

3/3 : CHECK :)

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{\text{ONB} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot x, \frac{\sqrt{10}}{4} (3x^2 - 1) \right\}}}$$

FINITO :)

Beispiel 3.44, Teil 1 - Gram-Schmidt 3

Seien $p_1(t) = 1 + 2t \in P_2$

$p_2(t) = 3 - t \in P_2$

Sei $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$

Orthonormalisiere die Polynome $p_1(t), p_2(t)$ und bilde eine ONB bezüglich des gegebenen Skalarproduktes $\langle f, g\rangle$.

Tipp: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \pi$

$$\boxed{w_i' = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle v_i, w_k\rangle \cdot w_k}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{w_i = \frac{w_i'}{\sqrt{\langle w_i', w_i'\rangle}}}$$

$$w_1' = p_1 - 0 = p_1 = 1 + 2t$$

$$w_1 = \frac{w_1'}{\sqrt{\langle w_1', w_1'\rangle}} = (1+2t)\frac{1}{\left[\int_{-1}^{1}(1+2t)^2 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\right]^{1/2}}$$

$$= (1+2t)\frac{1}{\left[\int_{-1}^{1} \frac{1+4t+4t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\right]^{1/2}}$$

$$= (1+2t)\frac{1}{\left[\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt}_{\text{Tipp}} + \underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{4t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt}_{\text{Symmetrie}} + \underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{4t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt}_{*}\right]^{1/2}}$$

$$= (1+2t)\frac{1}{\left[\pi + 0 + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right]^{1/2}}$$

$$= (1+2t)\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$$

$$* \int_{-1}^{1}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

$t = \sin(u)$, $dt = \cos(u)\, du$, $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2(u)} = \cos(u)$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(u)}{\cos(u)} \cos(u)\, du$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)\, du$$

$$= \cancel{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2u)}{\cancel{2}}\, du$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} 1\, du - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u)\, du$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left[\frac{\sin(2u)}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left[\frac{\sin(\pi)}{2} - 0\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$w_2' = p_2 - \langle p_2, w_1\rangle\, w_1$$

$$= (3-t) - \left[\int_{-1}^{1}(3-t)\cdot(1+2t)\cdot\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\right] \cdot (1+2t)\cdot\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$$

$$= (3-t) - \left[\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{3+5t-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\right] \cdot (1+2t)\cdot\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$$

$$= (3-t) - \left[\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\left[\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{3}{\sqrt{1-t^2}}\, dt} + \underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{5t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt} + \underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt}\right]\right] \cdot (1+2t)\cdot\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$$

$$= (3-t) - \left[\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\left[3\pi + 0 + -2\cdot\frac{\pi}{2}\right]\right] \cdot (1+2t)\cdot\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$$

$$= (3-t) - \left[\frac{2\pi}{\sqrt{3\pi}}\right] \cdot (1+2t)\cdot\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$$

$$= (3-t) - \frac{2\cancel{\pi}}{3\cancel{\pi}}(1+2t)$$

$$= 3 - t - \frac{2}{3} - \frac{4}{3}t = \frac{7}{3} - \frac{7}{3}t$$

Beispiel 3.44, Teil 2 - Gram-Schmidt 3

$$w_2 = \frac{w_2'}{\sqrt{\langle w_2', w_2' \rangle}}$$

$$= \left(\frac{7}{3} - \frac{7}{3}t\right) \cdot \frac{1}{\left[\int_{-1}^{1} \left[\frac{7}{3} - \frac{7}{3}t\right]^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\right]^{-1/2}}$$

$$= \left(\frac{7}{3} - \frac{7}{3}t\right) \cdot \frac{1}{\left[\int_{-1}^{1} \left[\frac{49}{9} - \frac{98}{9}t + \frac{49}{9}t^2\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\right]^{-1/2}}$$

$$= \left(\frac{7}{3} - \frac{7}{3}t\right) \cdot \frac{1}{\left[\underbrace{\int_{-1}^{1} \left[\frac{49}{9}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt} + \underbrace{\int_{-1}^{1} \left[-\frac{98}{9}t\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt} + \underbrace{\int_{-1}^{1} \left[\frac{49}{9}t^2\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt}\right]^{-1/2}}$$

$$= \left(\frac{7}{3} - \frac{7}{3}t\right) \cdot \frac{1}{\left[\frac{49}{9}\pi + 0 + \frac{49}{9} \cdot \frac{\pi}{2}\right]^{-1/2}}$$

$$= \left(\frac{7}{3} - \frac{7}{3}t\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{98}{18}\pi + \frac{49}{18}\pi\right)^{-1/2}}$$

$$= \left(\frac{7}{3} - \frac{7}{3}t\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{147}{18}\pi\right)^{-1/2}}$$

$$= \left(\frac{7}{3} - \frac{7}{3}t\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{49}{6}\pi\right)^{-1/2}}$$

$$= \left(\frac{7}{3} - \frac{7}{3}t\right) \cdot \frac{1}{\frac{7}{\sqrt{6\pi}}}$$

$$= \frac{\sqrt{6\pi}}{3} - \frac{\sqrt{6\pi}}{3}t = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6\pi}}{3}(1-t)}}$$

$\Longrightarrow$ SOMIT IST DIE ONB $= \{w_1, w_2\} = \left\{(1+2t)\frac{1}{\sqrt{3\pi}},\ \frac{\sqrt{6\pi}}{3}(1-t)\right\}$

(!)

Satz 4.2.0.20. Parseval

Das Skalarprodukt in V lässt sich über das euklidischen Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ berechnen:

$$\boxed{\langle x, y\rangle = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\,.}$$

NOTATION... NAJA :)

SEI ONB $= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot x,\ \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1) \right\}$ EINE ONB VON $\mathcal{P}_3$.

SEI DAS SKALARPRODUKT $\langle g, h\rangle = \int_{-1}^{1} g(x)\,h(x)\,dx$ MIT $g(x), h(x) \in \mathcal{P}_3$

BESTIMME $\left\langle \frac{2}{\sqrt{2}},\ \sqrt{6}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$.

VARIANTE 1: DIREKT IN SKALARPRODUKT (DEFINITION) EINSETZEN.

$$\left\langle \frac{2}{\sqrt{2}},\ \sqrt{6}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\sqrt{6}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) dx = \text{LANGE RECHNUNG} \ldots = \underline{\underline{2}}$$

VARIANTE 2: SATZ VON PARSEVAL:

BSP. 24

k_{ONB}

KOORDINATEN BEZÜGLICH ONB

$$\left\langle \frac{2}{\sqrt{2}},\ \sqrt{6}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \mathrel{\hat{=}} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \underline{\underline{2}}$$

1. Gegeben seien die Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; a^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \; a^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ eine orthonormale Basis $\underline{b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}}$ bezüglich des Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

→ HABE ICH w_1, w_2, w_3 GENANNT ...

b) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung von $A = [a^{(1)} \; a^{(2)} \; a^{(3)}]$.

a) HIER WENDEN WIR EINFACH DEN ALGORITHMUS AN (THEORIE SLIDES : W09)

→ WIR SUCHEN EINE ONB $\{w_1, w_2, w_3\}$ AUS EINER MENGE <u>LINEAR UNABHÄNGIGEN</u> VEKTOREN $\{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}\}$ <u>BEZÜGLICH DEM STANDARDSKALARPRODUKT</u>.

SETZEN WIR HIER VORAUS :)

→ WIE WÜRDE MAN DAS ZEIGEN?

DEFINITION : LEERE SUMME :)

$$w_1' = a^{(1)} - 0 = a^{(1)}$$

$$\underline{\underline{w_1}} = \frac{w_1'}{\sqrt{\langle w_1', w_1' \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

$$w_2' = a^{(2)} - \langle a^{(2)}, w_1 \rangle w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}^T \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}_{=\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{w_2'}{\sqrt{\langle w_2', w_2' \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$w_3' = a^{(3)} - \langle a^{(3)}, w_1 \rangle w_1 - \langle a^{(3)}, w_2 \rangle w_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \frac{w_3'}{\sqrt{\langle w_3', w_3' \rangle}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

$$\longrightarrow \quad \text{ONB} = \{ b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)} \} = \{ w_1, w_2, w_3 \} = \underline{\underline{\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}$$

Beispiel 3.46, Teil 2 - Basisprüfung W16 QR mit Gram-Schmidt

1. Gegeben seien die Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; a^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \; a^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ eine orthonormale Basis $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ bezüglich des Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

→ HABE ICH w_1, w_2, w_3 GENANNT ...

b) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung von $A = [a^{(1)}\ a^{(2)}\ a^{(3)}]$.

b) ALS $A = QR \xLeftrightarrow{Q \text{ ORTHOGONAL}} R = Q^T A$

⇝ WIR HABEN UNS GERADE UNSER $\underline{Q}$ GEBAUT (WIR KENNEN $\underline{A}$)

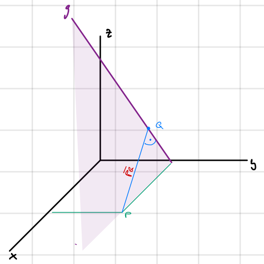
$$\longrightarrow \quad R = Q^T A = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{Q}}}{}^{T} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} & \frac{6}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}}}$$

Beispiel 3.47, Teil 1 - Orthogonale Projektion

BERECHNE DIE ORTHOGONALE PROJEKTION Q VON

$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ AUF DIE GERADE $g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

SKIZZE :



$\longrightarrow \quad \overline{PQ} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-1 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$ ← ABSTAND VON P ZUR GERADEN g FÜR BELIEBIGES t.

$\longrightarrow \quad \langle \overline{PQ}, g \rangle \overset{!}{=} 0 \quad \Longleftrightarrow$ DIESER ABSTAND VON P ZU Q SOLL SENKRECHT ZUM RICHTUNGSVEKTOR VON g STEHEN. (NICHT ZUM OFFSET)!

$\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$

$\langle \begin{bmatrix} t-1 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \rangle \overset{!}{=} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 - t + t^2 \overset{!}{=} 0$

$\Longleftrightarrow \quad \cancel{t_1 = 0}$ ← TRIVIALE LÖSUNG

$t_2 = \frac{1}{2}$

t_2 IN GERADENGLEICHUNG EINSETZEN, UM Q ZU BESTIMMEN :)

$\Longrightarrow \quad \underline{Q = g(\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}}$

Beispiel 3.48, Teil 1 - Schnittpunkt Geraden Ebenen

BERECHNE DEN SCHNITTPUNKT DER GERADEN $g = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

UND DER EBENE $E = 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -1$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

DER GERADENGLEICHUNG ENTNEHMEN WIR:

$$x_1 = 3 - t$$
$$x_2 = 4 - 2t$$
$$x_3 = t$$

$\rightsquigarrow$ DIES SETZEN WIR JETZT IN UNSERE EBENENGLEICHUNG EIN, UND BESTIMMEN t.

$$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -1 \implies 3(3-t) + 5(4-2t) - 2t = -1$$
$$\implies t = 2$$

$\rightsquigarrow$ DIESES t EINGESETZT IN UNSERE GERADENGLEICHUNG ERGIBT UNS UNSEREN SCHNITTPUNKT S.

$$S = g(2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

Beispiel 3.49, Teil 1 - Ausgleichsrechnung 1

WIR MESSEN DIE ZURÜCKGELEGTE DISTANZ EINES ZUGES INS TESSIN UND ERHALTEN FOLGENDES :

t_i	0	1	2	3	ZEIT [h]
s_i	1	3	9	14	ZURÜCKGELEGTE DISTANZ [km]

$\longrightarrow$ WIR KENNEN DEN ZUSAMMENHANG $\quad s(t) = S_A + v \cdot t$

$\rightsquigarrow$ BESTIMME S_A , v IM SINNE DER KLEINSTEN QUADRATE.

---

1) FEHLER (VEKTOR) BERECHNEN :
2) MATRIXSCHREIBWEISE
3) EINSETZEN
4) NORMALENGLEICHUNG $\quad \underline{A}^T \underline{A}\, \underline{x} = \underline{A}^T \underline{c} \quad$ LÖSEN

1) 2)

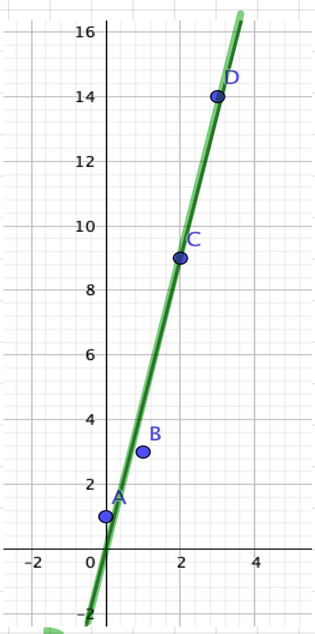
$$\left.\begin{aligned} s(t_1) - s_1 &= r_1 \\ s(t_2) - s_2 &= r_2 \\ s(t_3) - s_3 &= r_3 \\ s(t_4) - s_4 &= r_4 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} S_A + vt_1 - s_1 &= r_1 \\ S_A + vt_2 - s_2 &= r_2 \\ S_A + vt_3 - s_3 &= r_3 \\ S_A + vt_4 - s_4 &= r_4 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ 1 & t_4 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} S_A \\ v \end{bmatrix}}_{\underline{x}} - \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}}_{\underline{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix}}_{\underline{r}}$$

$s(t_i)$: 'THEORETISCHER' WERT; s_i: GEMESSENER WERT; r_i: RESIDUUM (FEHLER VEKTOR)

3)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} ; \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} S_A \\ v \end{bmatrix} ; \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}$$

GRAPHISCH :



4)

$$\underline{A}^T \underline{A}\, \underline{x} = \underline{A}^T \underline{c} \iff \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_A \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 63 \end{bmatrix}$$

$$\iff \quad \underline{\underline{\begin{aligned} S_A &= 0 \\ v &= 4.5 \end{aligned}}}$$

$\longrightarrow \quad \boxed{s(t) = 0 + 4.5\, t}$

Beispiel 3.50, Teil 1 - Ausgleichsrechnung 2

DOMINIC (YOUR UNEMPLOYED FRIEND) FÄHRT JEDE WOCHE FOLGENDE STRECKEN MIT DEM ZUG UND MISST DIE FAHRZEITEN:

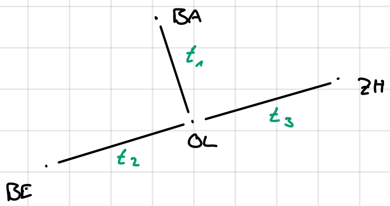
OLTEN - ZÜRICH	:	28 MIN
OLTEN - BERN	:	30 MIN
OLTEN - BASEL, SBB	:	29 MIN
ZÜRICH - BASEL, SBB	:	55 MIN
BASEL, SBB - BERN	:	56 MIN

BESTIMME DIE AUSGEGLICHENEN WERTE DER EINZELNEN FAHRZEITEN ZWISCHEN OLTEN/ZÜRICH, OLTEN/BERN, OLTEN/BASEL, SBB.

---

0) DEFINIERE DIE UNBEKANNTEN (MIT SKIZZE, ...)

MAP:



1) FEHLER (VEKTOR) BERECHNEN:

2) MATRIXSCHREIBWEISE

3) EINSETZEN

4) NORMALENGLEICHUNG $\underline{A}^T \underline{A}\, \underline{x} = \underline{A}^T \underline{c}$ LÖSEN

1) 3)

$$\left.\begin{aligned} t_3 - 28 &= r_1 \\ t_2 - 30 &= r_2 \\ t_1 - 29 &= r_3 \\ t_1 + t_3 - 55 &= r_4 \\ t_1 + t_2 - 56 &= r_5 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}}_{\underline{x}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 28 \\ 30 \\ 29 \\ 55 \\ 56 \end{pmatrix}}_{\underline{c}} = \underbrace{\underline{r}}_{\underline{r}}$$

"THEORETISCHER" WERT — "GEMESSENER" WERT — RESIDUUM

4) NORMALENGLEICHUNG: $A^T A x = A^T c$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 28 \\ 30 \\ 29 \\ 55 \\ 56 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 86 \\ 83 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} t_1 &= 27.75 \text{ MIN} \\ t_2 &= 29.125 \text{ MIN} \\ t_3 &= 27.625 \text{ MIN} \end{aligned}$$

Beispiel 3.51, Teil 1 - Ausgleichsrechnung 3

BESTIMME DIE BESTE PARABEL (IM SINNE DER KLEINSTEN QUADRATE), WELCHE DURCH DIE PUNKTE

$(-3, 10)$, $(0, 2)$, $(1, 3)$ UND $(2, 5)$ GEHT.

ANDERST FORMULIERT: SUCHE a, b, d SO DASS $f(x) = ax^2 + bx + d$ "BESTMÖGLICH"

DURCH DIE PUNKTE $(-3, 10)$, $(0, 2)$, $(1, 3)$ UND $(2, 5)$ GEHT.

$$\left.\begin{aligned} f(-3) &- 10 = r_1 \\ f(0) &- 2 = r_2 \\ f(1) &- 3 = r_3 \\ f(2) &- 5 = r_4 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\underset{=}{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix}}_{\underline{x}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\underline{c}} = \underbrace{\underline{r}}_{\underline{r}}$$

1) ÜBERPRÜFE :)

$$\underbrace{\underset{=}{A}}_{\underset{=}{A}} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} -0.91 & 0.41 & -0.03 & 0.05 \\ 0 & 0 & -0.85 & -0.53 \\ -0.1 & -0.36 & -0.49 & 0.79 \\ -0.4 & -0.84 & 0.19 & -0.32 \end{bmatrix}}_{\underset{=}{Q}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -9.90 & 1.82 & -1.41 \\ 0 & -3.27 & -0.79 \\ 0 & 0 & -1.18 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}}_{\underset{=}{R}}$$

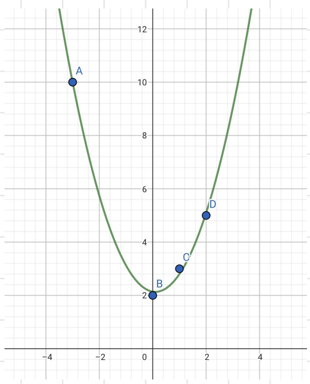
$\boxed{} \hat{=} R_0$

2) $\underline{d} = \underset{=}{Q}^T \underline{c} = \begin{bmatrix} -0.91 & 0.41 & -0.03 & 0.05 \\ 0 & 0 & -0.85 & -0.53 \\ -0.1 & -0.36 & -0.49 & 0.7 \\ -0.4 & -0.84 & 0.19 & -0.32 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -11.41 \\ -1.15 \\ -2.51 \end{matrix}} \\ 0.26 \end{bmatrix}$

$\boxed{} \hat{=} d_0$

3) $R_0 x = d_0$ LÖSEN ERGIBT: $\underline{x} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix}}} \hat{=} \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0.82 \\ -0.16 \\ 2.14 \end{bmatrix}}} \Longrightarrow \underline{\underline{f(x) = 0.82x^2 - 0.16x + 2.14}}$

GRAPHISCH:



Beispiel 3.52, Teil 1 - Ausgleichsrechnung 4

9. Bakterienkultur [12 Punkte]
Wir betrachten eine Bakterienkultur, welche exponentiell mit der Zeit wächst. Während eines Vormittags wurde ausgehend von einem Bakterium stündlich die Anzahl Bakterien in der Kultur erfasst. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

Uhrzeit:	07:00	08:00	09:00	10:00	11:00
Anzahl:	1	4	32	128	1'024

(35)

SCHRITT 0 : EXPONENTIALFUNKTION AUFSCHREIBEN !

ACHTUNG : HIER GIBT ES MEHR ALS EINE VARIANTE !

→ HIER WERDEN FOLGENDE 2 VERWENDET UND VERGLICHEN :

VARIANTE 1 : $f(t) = n \cdot e^{\gamma t}$

VARIANTE 2 : $f(t) = n \cdot 2^{\gamma t}$

→ TIPP : DIE DATEN (UND DER FAKT, DASS IHR KEINEN TR HABEN WERDET) SPRECHEN EINDEUTIG FÜR VARIANTE 2 !

VARIANTE 1 :

$$f(t) = n \cdot e^{\gamma t}$$

$$\ln[f(t)] = \ln[n \cdot e^{\gamma t}] = \underbrace{\ln[n]}_{:=q} + \underbrace{\gamma}_{:=m} t$$

ACHTUNG : ALLE DATEN (# BAKTERIEN) MÜSSEN ZUERST IN ln( ) UMGERECHNET WERDEN

TIPP : · REFERENZZEIT FÜR 1. MESSUNG AUF 0 SETZEN → EINFACHERE BERECHNUNG !

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ln(1) \\ \ln(4) \\ \ln(32) \\ \ln(128) \\ \ln(1024) \end{bmatrix}}_{:=C} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{:=A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix}}_{:=x}$$

VARIANTE 2 :

$$f(t) = n \cdot 2^{\gamma t}$$

$$\log_2[f(t)] = \log_2[n \cdot 2^{\gamma t}] = \underbrace{\log_2[n]}_{:=q} + \underbrace{\gamma}_{:=m} t$$

ACHTUNG : ALLE DATEN (# BAKTERIEN) MÜSSEN ZUERST IN $\log_2$( ) UMGERECHNET WERDEN

TIPP : · REFERENZZEIT FÜR 1. MESSUNG AUF 0 SETZEN → EINFACHERE BERECHNUNG !

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}}_{:=C} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{:=A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix}}_{:=x}$$

EINFACHER :)

Beispiel 3.52, Teil 2 - Ausgleichsrechnung 4

NORMALENGLEICHUNG LÖSEN:

$$A^T A x = A^T c$$

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \approx 50.5997 \\ \approx 16.64 \end{bmatrix}$$

GAUSSEN

$$\begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \approx 1.733 \\ \approx -0.1386 \end{bmatrix}$$

RÜCKSUBSTITUTION...

$$m = \gamma$$

$$q = \ln[N_0] \iff N_0 = e^{-0.1386}$$

$$\longrightarrow \underline{\underline{f(t) = e^{-0.1386} e^{1.733 t}}}$$

NORMALENGLEICHUNG LÖSEN:

$$A^T A x = A^T c$$

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73 \\ 24 \end{bmatrix}$$

GAUSSEN

$$\begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ -1/5 \end{bmatrix}$$

RÜCKSUBSTITUTION...

$$m = \gamma$$

$$q = \log_2[N_0] \iff N_0 = 2^{-1/5}$$

$$\longrightarrow \underline{\underline{f(t) = 2^{-1/5} \, 2^{\frac{5}{2} t}}}$$

$$\frac{f(t_2)}{f(t_1)} \overset{!}{=} 2$$

$$\iff \frac{\cancel{2^{-1/5}} \, 2^{\frac{5}{2} t_2}}{\cancel{2^{-1/5}} \, 2^{\frac{5}{2} t_1}} \overset{!}{=} 2$$

$$2^{\frac{5}{2}(t_2 - t_1)} \overset{!}{=} 2 \qquad \Big\rangle \log_2(\;)$$

$$\frac{5}{2}(t_2 - t_1) \overset{!}{=} 1$$

$$\underline{\underline{t_2 - t_1 = \frac{2}{5}}} \qquad \text{(STUNDEN)}$$

Beispiel 3.53, Teil 1 - Determinante

Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Berechne die Determinante (1x mit Sarrus, 1x mit Laplace)

Sarrus:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} \overset{+}{0} & \overset{+}{1} & \overset{+}{2} & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ \underset{-}{1} & \underset{-}{1} & \underset{-}{0} & 1 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow 0\cdot2\cdot0 + 1\cdot1\cdot1 + 2\cdot3\cdot1 - 1\cdot2\cdot2 - 1\cdot1\cdot0 - 0\cdot3\cdot1 = \underline{\underline{3}}$$

Laplace:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Wähle Zeile / Spalte mit vielen Nullen!

$$" \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} "$$

$$\longrightarrow +1\cdot \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 1\cdot \det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 0\cdot \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow +1\cdot(-3) - 1\cdot(-6) + 0$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{3}} = \det(A)$$

"Schachbrett" :)

Beispiel 3.54, Teil 1 - Eigenwerte

SEI $A := \begin{pmatrix} \pi & i & 3 & \sqrt{5} \\ 0 & 7 & e & b \\ 0 & 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ MIT $a, b \in \mathbb{R}$. BESTIMME DIE EIGENWERTE VON A.

FÜR WELCHE WERTE VON $a, b \in \mathbb{R}$ EXISTIERT A^{-1} ?

$\lambda_1 = \pi$

$\lambda_2 = 7$

$\lambda_3 = a - 1$

$\lambda_4 = 1$

$\cancel{\lambda_5 =}$

A^{-1} EXISTIERT FALLS $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ UND $b \in \mathbb{R}$

A HAT DANN VOLLEN RANG $\iff$ A IST INVERTIERBAR $\iff$ $\det(A) \neq 0$ $\iff$ $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ EXISTIERT

Beispiel 3.55, Teil 1 - Basisprüfung W20 Eigenwerte Eigenvektore

BERECHNE DIE EIGENWERTE (EW) VON $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{1) EW BESTIMMEN : } \det(A-\lambda I) \overset{!}{=} 0 \text{ LÖSEN}}$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & 0-\lambda \end{bmatrix} \right) \overset{!}{=} 0$$

SARRUS...

$\Longleftrightarrow \quad (1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) + \lambda \overset{!}{=} 0$ ⟵ (NULLSTELLEN BESTIMMEN)

$\Longleftrightarrow \quad \lambda\left(-(1-\lambda)^2 + 1\right) \overset{!}{=} 0 \quad \longrightarrow \quad \underline{\underline{\lambda_1 = 0}}$ (EW_1)

$\Longleftrightarrow \quad -(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 1 \overset{!}{=} 0$

$\Longleftrightarrow \quad -\lambda^2 + 2\lambda \cancel{-1} \cancel{+1} \overset{!}{=} 0$

$\Longleftrightarrow \quad \lambda(-\lambda + 2) \overset{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\lambda_2 = 0}}$ (EW_2)

$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{\lambda_3 = 2}}$ (EW_3)

WIR BEMERKEN : $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$

DER EW 0 KOMMT ZWEI MAL VOR.

$\Longrightarrow$ SEINE ALGEBRAISCHE MULTIPLIZITÄT (AM) IST GLEICH 2

$\lambda_3 = 2$ KOMMT NUR 1 MAL VOR

$\Longrightarrow$ SEINE ALGEBRAISCHE MULTIPLIZITÄT (AM) IST GLEICH 1

$\Longrightarrow$ UNSERE 3 EIGENWERTE VON A SIND $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2$.

Definition 7.2.0.16. Algebraische Multiplizität (AM)

Die *algebraische Multiplizität* (auch *algebraische Vielfachheit* genannt) zeigt uns, wie oft λ unter den Nullstellen der charakteristischen Gleichung vorkommt.

Beispiel 3.55, Teil 2 - Basisprüfung W20 Eigenwerte Eigenvektore

BERECHNE DIE EIGENVEKTORE (EV) DER ZUGEHÖRIGEN EW VON $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

FÜR ALLE EIGENWERTE BERECHNEN

(BELIEBIGER EW)

EIGENVEKTOR ZU λ_i FINDEN: $(A - \lambda_i I)x = 0$ LÖSEN

EV₁ ZU EW₁: $\lambda_1 = 0$

$$(A - \lambda_1 I)x \overset{!}{=} 0 \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{III-2I}{\overset{II+I}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_2, x_3 FREIE VARIABLE: $s, t \in \mathbb{R}$

$$x = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x = \begin{bmatrix} s \\ s \\ t \end{bmatrix}} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

EV₁

DIESEN SPAN NENNT MAN DEN EIGENRAUM ZU λ_1 $(+\lambda_2)$. $= 0$

$$\Longrightarrow E_0 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

→ DIE DIMENSION VOM EIGENRAUM IST GLEICH DER GEOMETRISCHEN MULTIPLIZITÄT (GM).

⟹ ALSO GM VON λ_1 IST 2

→ DA EW₁ = EW₂ $(\lambda_1 = 0 = \lambda_2)$ HABEN SIE AUCH DEN SELBEN EIGENVEKTOR !

EV₃ ZU EW₃: $\lambda_3 = 2$

$$(A - \lambda_3 I)x \overset{!}{=} 0 \iff \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{III+2I}{\overset{II-I}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \boxed{x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}s \\ -\frac{1}{2}s \\ s \end{bmatrix}} \Longrightarrow \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$x_3 = s \in \mathbb{R}$ FREIE VARIABLE

EV₃

EIGENRAUM ZU $\lambda_3 = 2$:

$$E_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

⟹ GM VON λ_3 IST GLEICH 1

"LÄSST SICH A DIAGONALISIEREN?"

BEGRÜNDE. (BERECHNE $S^{-1}DS = A$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

JA, SI, OUI, YES! ABER WARUM?:)

EIGENVEKTORE (SCHON BERECHNET)

$S := [EV_1 \; EV_2 \; EV_3]$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}}_{D := diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} = D = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ WEIL ALLE ALGEBRAISCHEN MIT DEN JEWEILIGEN GEOMETRISCHEN MULTIPLIZITÄTEN ÜBEREINSTIMMEN :)

$\underline{\lambda_1 = 0}$: AM VON λ_1 WAR 2 $\widehat{=}$ GM VON λ_1 WAR AUCH 2

$\underline{\lambda_3 = 2}$: AM VON λ_3 WAR 1 $\widehat{=}$ GM VON λ_3 WAR AUCH 1

Satz 7.2.0.26. Verhältnis zwischen GM und AM entscheidet ob diagonalisierbar oder nicht

Wenn die Matrix $\mathbf{A}$ *ein Eigenwert besitzt dessen geometrische Multiplizität strikt kleiner als die algebraische Multiplizität ist, dann ist die Matrix nicht diagonalisierbar.*
Wenn für alle Eigenwerte die geometrische Multiplizität gleich der algebraischer Multiplizität ist, dann ist die Matrix diagonalisierbar.

$\hookrightarrow$ NUR DANN :)

Beispiel 3.56, Teil 1 - Mixed Topics

SEI $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

a) ZEIGE EXPLIZIT, DASS ALLE SPALTEN VON A LIN. UNABHÄNGIG SIND.

b) IST DIE MATRIX A INVERTIERBAR? BEGRÜNDE

c) BERECHNE DIE EIGENWERTE VON A

d) BERECHNE DIE ZUGEHÖRIGEN EIGENVEKTORE VON A

e) IST A DIAGONALISIERBAR? BEGRÜNDE

f) BESTIMME MIT GRAM SCHMIDT EINE ORTHONORMALE BASIS ZU JEDEM EIGENRAUM.

g) BERECHNE A^{2022}. (SYMBOLISCH)

Beispiel 3.56, Teil 2 - Mixed Topics

a) LINEAR UNABHÄNGIGE SPALTEN $\iff$ $Ax = 0$ HAT NUR $x = 0$ ALS TRIVIALE LÖSUNG.

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{III \leftrightarrow I}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{III - 2I}{\overset{II - I}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \overset{III + II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$\longrightarrow$ VOLLER RANG

$\Longrightarrow$ $Ax = 0$ HAT NUR DIE TRIVIALE LÖSUNG $x = 0$ ALS LÖSUNG

$\Longrightarrow$ LINEAR UNABHÄNGIGE SPALTEN

b) (LAUT SATZ 2.8 IM STOFFER-BUCH p. 31)

$A^{n \times n}$ IST INVERTIERBAR $\iff$ LGS $Ax = 0$ HAT NUR DIE TRIVIALE LÖSUNG $x = 0$ ALS LÖSUNG

$\Longrightarrow$ SOMIT IST A INVERTIERBAR

Beispiel 3.56, Teil 3 - Mixed Topics

c) EIGENWERTE : $\det(A-\lambda I) \overset{!}{=} 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (2-\lambda)^3 + 1 + 1 - 3(2-\lambda) = 0$$

SEHE ICH NICHT DIREKT VON HIER...

(MEISTENS FUNKTIONIERT DAS SCHON SO :)

a_{21} ALS 'PIVOT' BENUTZEN

$$\Longleftrightarrow \quad \det\begin{bmatrix} 0 & 1-(2-\lambda)^2 & 1-(2-\lambda) \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-(2-\lambda) & 1-\lambda \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0$$

LAPLACE

$$\Longleftrightarrow \quad (-1)\cdot\det\begin{bmatrix} 1-(2-\lambda)^2 & 1-(2-\lambda) \\ 1-(2-\lambda) & 1-\lambda \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\det\begin{bmatrix} 1-\lambda^2+4\lambda-4 & -1+\lambda \\ -1+\lambda & 1-\lambda \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0$$

1.+ 2. SPALTE

$$\Longleftrightarrow \quad -\det\begin{bmatrix} -\lambda^2+5\lambda-4 & -1+\lambda \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (-\lambda^2+5\lambda-4)(1-\lambda) \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\lambda-4)(1-\lambda)(1-\lambda) \overset{!}{=} 0$$

$\lambda_1 = 4$ AM $(\lambda_1) = 1$

$\lambda_2 \; (= \lambda_3) = 1$ AM $(\lambda_2) = 2$

d) DA DIE MATRIX A SYMMETRISCH IST, STEHEN DIE EIGENRÄUME ZU DEN EIGENWERTEN ORTHOGONAL ZUEINANDER.

FALLS DIE $\dim(E_{\lambda_i}) > 1$ KÖNNEN/SOLLTEN WIR DIE BASIS ZU DIESEN EIGENRAUM NOCH NORMIEREN (MIT GRAM-SCHMIDT, ...)

EV ZU $\lambda_1 = 4$: $(A - \lambda_1 I)x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{II+2I}{\underset{III-I}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \overset{III+II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = s \in \mathbb{R}$
FREIE VARIABEL

$$\Longrightarrow E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \end{bmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

NORMIERTER EIGENVEKTOR $\Longrightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\dim(E_1) = 1$ = GEOMETRISCHE MULTIPLIZITÄT VON $\lambda_1 = 4$

EV ZU $\lambda_2 (= \lambda_3) = 1$: $(A - \lambda_2 I)x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{II-I}{\underset{III-I}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -t-s \\ s \\ t \end{bmatrix}, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$x_2 = s$, $x_3 = t$
FREIE VARIABELN

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\dim(E_1) = 2$ = GEOMETRISCHE MULTIPLIZITÄT VON $\lambda_2 = 1$

ACHTUNG!

OBWOHL DIE MATRIX A SYMMETRISCH WAR, STEHEN $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ UND $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ NICHT SENKRECHT ZUEINANDER!

DA: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$

DIESE BEIDEN VEKTOREN MÜSSEN DERT NOCH MIT GRAM-SCHMIDT ORTHOGONALISIERT WERDEN, DAMIT DIE MATRIX T IN DER DIAGONALISIERUNG VON $A = TDT^{-1}$ ORTHOGONAL WÄRE.

BEIDE: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ UND $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ STEHEN ABER ORTHOGONAL ZU $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

e) JA (A IST DIAGONALISIERBAR), DA ALLE ALGEBRAISCHEN MIT DEN JEWEILS GEOMETRISCHEN MULTIPLIZITÄTEN ÜBEREINSTIMMEN. //

↪ NICHT GEFRAGT, ABER DIE DIAGONALISIERUNG WÜRDE WIE FOLGT AUSSEHEN:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \implies T^{-1} = \text{INVERSE GANZ NORMAL BERECHNEN} \ldots^{(*)} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\implies A = TDT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(*): HÄTTEN WIR $T^{(2)}$ UND $T^{(3)}$ ZUERST ZU EINER ONB GEBRACHT, UND DEN NORMIERTEN $T^{(1)}$ EINGESETZT, WÄRE T ORTHOGONAL GEWESEN UND SOMIT $T^{-1} = T^{T}$.

↳ TEILAUFGABE f)

Beispiel 3.56, Teil 6 - Mixed Topics

f)

$$E_4 = \text{SPAN}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{:= v_1} \right\} \longrightarrow \quad w_1' = v_1$$

$$w_1 = \frac{w_1'}{\sqrt{\langle w_1', w_1' \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \text{SPAN}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} \right\} \longrightarrow \quad w_1' = v_1$$

$$w_1 = \frac{w_1}{\|w_1'\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2' = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{w_2'}{\sqrt{\langle w_2', w_2' \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ONB}(\lambda_1 = 4) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{ONB}(\lambda_2 (= \lambda_3) = 1) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \longleftarrow \text{ÜBERPRÜFE:} \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = 0 \quad \checkmark$$

ORTHOGONAL

⇝ WÜRDE MAN JETZT DIE T MATRIX ALS DEN ONB-VEKTOREN DER JEWEILIGEN EIGENRÄUME 'BAUEN', SO WÄRE T ORTHOGONAL $(T^{-1} = T^T)$

g)

$$A^{2022} = (TDT^{-1})^{2022} = T D^{2022} T^{-1}$$

STEHEN LASSEN :)

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^{2022} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}}$$

LÖSE FOLGENDES ENTKOPPELTES SYSTEM LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1. ORDNUNG:

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = a_1 u_1(t) \\ \dot{u}_2(t) = a_2 u_2(t) \end{cases}$$

$$\text{MIT} \quad u(0) = \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} \qquad \text{(ANFANGSBEDINGUNGEN)}$$

DURCH EINSETZEN SIEHT MAN, DASS FOLGENDES EINE LÖSUNG IST: (MEHR DAZU IN ANALYSIS!)

$$\underline{\begin{aligned} u_1(t) &= e^{a_1 t} u_1(0) \\ u_2(t) &= e^{a_2 t} u_2(0) \end{aligned}}$$

ABER WARUM?:

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = a_1 u_1(t) \\ \dot{u}_2(t) = a_2 u_2(t) \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix}}_{:= \dot{u}(t)} = \boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}}_{:= A}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}}_{:= u(t)}$$

$$\implies \dot{u}(t) = A\, u(t)$$

$$\iff u(t) = \boxed{e^{At}}\, u(0)$$

DA A EINE DIAGONALMATRIX IST $\implies e^{At} = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_n t} \end{bmatrix}$

$$\iff u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & 0 \\ 0 & e^{a_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\iff \underline{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} u_1(0) \\ e^{a_2 t} u_2(0) \end{bmatrix}}$$

Beispiel 3.58, Teil 1 - ODE 1. Ordnung 2

LÖSE FOLGENDES GEKOPPELTES SYSTEM LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1. ORDNUNG :

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) = 6u_1(t) + 2u_2(t) \\ u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} \end{cases} \quad \text{(ANFANGSBEDINGUNGEN)}$$

---

1) MATRIXFORM :

$$\dot{\underline{u}}(t) = \underline{A}\,\underline{u}(t) \iff \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix}}_{:= \dot{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}}_{:= A} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}}_{:= u}$$

THEORIE

ALS $\dot{u} = Au \iff \dot{u} = (SDS^{-1})u$

$\iff S^{-1}\dot{u} = DS^{-1}u$ SUBSTITUTION : $v := S^{-1}u$ $\iff u = Sv$

$\iff \dot{v}(t) = D\,v(t)$

$\overset{\text{BSP 1)}}{\Longrightarrow} v(t) = e^{Dt}\,v(0)$

$\overset{\text{RÜCKSUBST.}}{\iff} S^{-1}u(t) = e^{Dt}\,S^{-1}u(0)$

$\overset{\text{T}}{\iff} \underline{u(t) = S\,e^{Dt}\,S^{-1}\,u(0)}$

$S\,e^{Dt}\,S^{-1} = e^{At}$

2) EIGENWERTE BERECHNEN : $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 \iff \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 6 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) \overset{!}{=} 0$

$\iff (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 \overset{!}{=} 0$

$\iff \lambda^2 - 3\lambda - 4 \overset{!}{=} 0$

$\implies \lambda_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \implies \underline{\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -1}$

Beispiel 3.58, Teil 2 - ODE 1. Ordnung 2

2) Eigenvektoren berechnen:

$\underline{EV_1 \text{ zu } \lambda_1 = 4}$:

$$(A - 4I)\, x \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II + 2I} \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rückwärtseinsetzen $\Longrightarrow$ $x_2 = t$, $x_1 = \frac{1}{3} t$ $\Longrightarrow$ $\underline{E_4 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}}$

$\underline{EV_2 \text{ zu } \lambda_2 = -1}$:

$$(A + 1I)\, x \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II - 3I} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rückwärtseinsetzen $\Longrightarrow$ $x_2 = t$, $x_1 = \frac{-1}{2} t$ $\Longrightarrow$ $\underline{E_{-1} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}}$

$$\Longrightarrow \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} s^{(1)} & s^{(2)} \end{array}$$

$$u(t) = C_1 \cdot e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 \cdot e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3) $$\boxed{u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} s^{(1)} + C_2 e^{\lambda_2 t} s^{(2)}}$$

$$u = Sv \quad \Leftrightarrow \quad u(0) = S\, v(0) \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Mit Gauss: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 10 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{array}{l} C_1 = 2 \\ C_2 = -2 \end{array}$

$$\longrightarrow \quad \underline{u(t) = 2\, e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 2\, e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

Beispiel 3.58, Teil 3 - ODE 1. Ordnung 2

4) Zusatz: $u(0) = \, ?$ damit $\lim\limits_{t \to \infty} u(t) = 0$

Damit $\lim\limits_{t \to \infty} u(t) = 0$ muss $c_1 \overset{!}{=} 0$ sein

Da $\lim\limits_{t \to \infty} c_1 e^{4t} = \pm\infty$ und $\lim\limits_{t \to \infty} c_2 e^{-t} = 0$

$\Longrightarrow \quad v(0) \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

$$\longrightarrow \quad u(0) = S\,v(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

2. [6 Punkte] Gegeben sei das Differentialgleichungssystem erster Ordnung $\dot{y} = A\,y$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A IST SYMMETRISCH !

a) [2.5 Punkte] Bestimmen Sie eine Transformationsmatrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$.

b) [2 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{y} = A\,y$, indem Sie die neuen Variablen $x(t) = T^{-1}y(t)$ einführen.

Hinweis: Für $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\dot{z} = az$ gegeben durch $z(t) = c\,e^{at}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Zum Beispiel gilt für $a = -2$: Die Differentialgleichung $\dot{z} = -2z$ hat die Lösung $z(t) = c\,e^{-2t}$, wobei die Konstante c aus der Anfangsbedingung $z(0) = c$ bestimmt werden kann.

c) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{y} = A\,y$ zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

---

a) AUF: DIAGONALISIERE A. (THEORIE W11)

1) EW VON A BESTIMMEN :

$$\det(A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow (-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) + 0 + 0 - 0 - (-\lambda) - (-\lambda) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^2 + \lambda + 2 \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{MIT } \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_3 = 2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\lambda_1 = -1}, \quad \underline{\lambda_2 = 0}, \quad \underline{\lambda_3 = 2} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

(OFT AUFSTEIGEND ANGEGEBEN ...)

a. 2) ZUGEHÖRIGE EIGENVEKTORE BESTIMMEN: DURCH LÖSEN VON $(A-\lambda_i I)x = 0$

EV₁ zu $\lambda_1 = 0$: $(A - 0I)x = 0$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{III-II}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -s \end{array} \Longrightarrow EV_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

NORMIEREN!

EV₂ zu $\lambda_2 = -1$: $(A + 1I)x = 0$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{II-I}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{III-II}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \in \mathbb{R} \\ x_2 = -s \\ x_1 = -x_2 = s \end{array} \Longrightarrow EV_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

NORMIEREN!

EV₃ zu $\lambda_3 = 2$: $(A - 2I)x = 0$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{II+2I}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{III+II}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \in \mathbb{R} \\ x_2 = 2x_3 = 2s \\ x_1 = x_3 = s \end{array} \Longrightarrow EV_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

NORMIEREN!

$$\Longrightarrow T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = T^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Satz 7.3.0.1. Symmetrische Matrizen haben reele Eigenwerte und orthgonale Eigenvektoren

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (bzw. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$) eine symmetrische (bzw. Hermite-symmetrische) Matrix. Dann sind alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ reell und alle Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ sind orthogonal.

⟶ DA WIR SIE SOGAR NORMIERT HABEN, IST JETZT T ORTHOGONAL :)

$$\Longrightarrow T^{-1} = T^T$$

Beispiel 3.59, Teil 3 - Basisprüfung W18 Diagonalisieren

a)

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = TDT^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}_{T^{-1}}}$$

$$T^{(1)} \quad T^{(2)} \quad T^{(3)}$$

b) [2 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{y} = A\,y$, indem Sie die neuen Variablen $x(t) = T^{-1}y(t)$ einführen.

Hinweis: Für $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\dot{z} = az$ gegeben durch $z(t) = c\,e^{at}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Zum Beispiel gilt für $a = -2$: Die Differentialgleichung $\dot{z} = -2z$ hat die Lösung $z(t) = c\,e^{-2t}$, wobei die Konstante c aus der Anfangsbedingung $z(0) = c$ bestimmt werden kann.

b) SUBSTITUTION 'GANZE' HERLEITUNG LA 11/12)

SUBSTITUTION:

$x := T^{-1}y \iff y = Tx$

$$\dot{y} = Ay \iff \dot{y} = TDT^{-1}y$$

$$\iff \dot{x} = Dx \xRightarrow{\text{DIAGONAL MATRIX}} \dot{x}_i(t) = \lambda_i x_i(t)$$

$$\xRightarrow{\text{TIPP}} x_i(t) = e^{\lambda_i t} \cdot c_i$$

$$\xRightarrow{\text{SUBST.}} y(t) = Tx$$

$$y(t) = \boxed{\underline{T}^{(1)} e^{\lambda_1 t} \cdot c_1 + \underline{T}^{(2)} e^{\lambda_2 t} \cdot c_2 + \underline{T}^{(3)} e^{\lambda_3 t} \cdot c_3} \quad ..$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot e^{(-1)t} \cdot c_1 + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{1}_{= e^{0t} = 1} \cdot c_2 + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} e^{2t} c_3}$$

Beispiel 3.59, Teil 5 - Basisprüfung W18 Diagonalisieren

c) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{y} = A\,y$ zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

c) BESTIMME $x(0)$ ALS $y(0) = T\,x(0) = T \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow$ MATRIXFORM:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{array}\right] \underset{III-I}{\overset{II+I}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{6}} & 3 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{2}} & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{III+2II}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{6}} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{6}{\sqrt{6}} & 5 \end{array}\right]$$

$\Longrightarrow$ III: $\underline{\underline{c_3 = \frac{5\cdot\sqrt{6}}{6}}}$

$\Longrightarrow$ II: $\frac{1}{\sqrt{2}} c_2 + \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{6} = 3 \Longrightarrow \underline{\underline{c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}}}$

$\Longrightarrow$ I: $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{6} = 1 \Longrightarrow \underline{\underline{c_1 = \frac{-\sqrt{3}}{3}}}$

$\longrightarrow$ IN DIE ALLGEMEINE LÖSUNG VON b) EINSETZEN :)

$$\boxed{\Longrightarrow y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot e^{(-1)t} \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{1}_{= e^{0t} = 1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} e^{2t} \frac{5\cdot\sqrt{6}}{6}}$$

Beispiel 3.60, Teil 1 - Fouriermatrix

SEI $S := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ EINE ZIRKULANTE MATRIX.

DIAGONALISIERE S ORTHOGONAL.

BESTIMME DIE FOURIERMATRIX.

Definition 7.5.0.1. Zirkulante Matrix

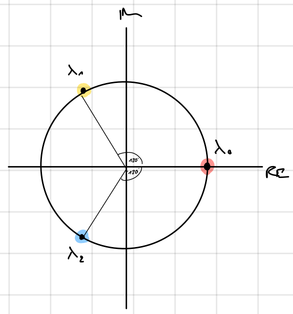
Eine Matrix mit folgender Struktur:

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \ddots & c_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & \cdots\ c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}$$

heiss zirkulante Matrix (oder einfach nur ein Zirkulant).

DIE EIGENWERTE VON S :

$$\det(S - \lambda I) \doteq 0 \iff \left\{ \begin{aligned} \lambda_0 &= e^{2\pi i \cdot \frac{0}{3}} = 1 \\ \lambda_1 &= e^{2\pi i \cdot \frac{1}{3}} \\ \lambda_2 &= e^{2\pi i \cdot \frac{2}{3}} \end{aligned} \right.$$



EV zu λ_0 : $(S - \underbrace{1}_{\lambda_0 = 1} \cdot I)\, x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{III+I}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{III+II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow x = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \end{bmatrix} \Longrightarrow \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$x_3 = s \in \mathbb{R}$

bzw. $\operatorname{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

EV zu λ_1 : $(S - e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot I)\, x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -e^{\frac{2\pi i}{3}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\frac{2\pi i}{3}} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \end{array}\right] \overset{\cdots}{\rightsquigarrow} \quad x = \begin{bmatrix} s \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ s \cdot e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ s \end{bmatrix} \overset{s := e^{\frac{-2\pi i}{3}}}{\Longrightarrow} \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-\frac{4\pi i}{3}} \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ e^{+\frac{2\pi i}{3}} \\ e^{2 \cdot \frac{2\pi i}{3}} \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1^0 \\ \lambda_1^1 \\ \lambda_1^2 \end{bmatrix} \right\}$$

Beispiel 3.60, Teil 2 - Fouriermatrix

EV zu λ_2 : $\left(S - e^{-\frac{2\pi i}{3}} \cdot I\right) x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -e^{-\frac{2\pi i}{3}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\frac{2\pi i}{3}} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -e^{-\frac{2\pi i}{3}} & 0 \end{array}\right] \ldots \rightsquigarrow \qquad x = \begin{bmatrix} s \cdot e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ s \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ s \end{bmatrix} \xrightarrow{s := e^{\frac{2\pi i}{3}}} \text{SPAN}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{bmatrix}\right\} = \text{SPAN}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ e^{2\cdot\left(\frac{2\pi i}{3}\right)} \end{bmatrix}\right\} = \text{SPAN}\left\{\begin{bmatrix} \lambda_2^0 \\ \lambda_2^1 \\ \lambda_2^2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\underline{V} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{+\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & e^{2\cdot\frac{2\pi i}{3}} & e^{2\cdot\left(\frac{2\pi i}{3}\right)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0^0 & \lambda_1^0 & \lambda_2^0 \\ \lambda_0^1 & \lambda_1^1 & \lambda_2^1 \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

SPALTEN BILDEN ORTHOGONALE BASIS IN $\mathbb{R}^3$ (FOURIERBASIS)

$\Longrightarrow$ WIR KÖNNEN SIE NORMIEREN FÜR UNITÄRE MATRIX U

$$\underline{U} := \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{+\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & e^{2\cdot\frac{2\pi i}{3}} & e^{2\cdot\left(\frac{2\pi i}{3}\right)} \end{bmatrix}$$

$$S = V D V^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{+\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & e^{2\cdot\frac{2\pi i}{3}} & e^{2\cdot\left(\frac{2\pi i}{3}\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2\pi i \cdot \frac{0}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \cdot \frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i \cdot \frac{2}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} & e^{-2\cdot\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & e^{+\frac{\pi i}{3}} & e^{-2\cdot\left(\frac{2\pi i}{3}\right)} \end{bmatrix}$$

$$= U D U^H$$

$\lambda_k = \omega^{-k}$ (zB. $\lambda_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}\cdot 1} = \omega^{-1} \Longleftrightarrow \omega = e^{-\frac{2\pi i}{3}\cdot 1}$)

Definition 7.5.0.5. Fourier Matrix

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}^H = \begin{bmatrix} \omega^{0\cdot 0} & \omega^{1\cdot 0} & \cdots & \omega^{(n-1)\cdot 0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^{0\cdot k} & \omega^{1\cdot k} & \cdots & \omega^{(n-1)\cdot k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^{0\cdot(n-1)} & \omega^{1\cdot(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Definition 7.5.0.6. Diskrete Fourier Transformation

Die Abbildung

$$\mathscr{F}_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \ \mathscr{F}_n(\mathbf{y}) = \mathbf{F}\mathbf{y}$$

heisst die diskrete Fourier Transformation (DFT).

Beispiel 3.61, Teil 1 - Schur-Zerlegung 1

BERECHNE DIE SCHUR-ZERLEGUNG DER MATRIX $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

---

1) EW BERECHNEN : $\det(A - \lambda I) \doteq 0$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \doteq 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right) \doteq 0$$

$$(5-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) \doteq 0$$

$$\underline{\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 5}} \;, \quad \underline{\underline{\lambda_3 = 3}}$$

$Am(5) = 2$

$Am(3) = 1$

2) EV BERECHNEN : $\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 5}$: $(A - 5I)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5-5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5-5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{III+II}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\lambda_1 = \lambda_2} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\underline{\lambda_3 = 3}$: $(A - 3I)x = 0$

NORMIERE!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5-3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5-3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x = \begin{pmatrix} s \\ -s \\ s \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\lambda_3} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$Gm(5) = 1 \neq 2$

$Gm(3) = 1$

PROBLEM : $Am(5) \neq Gm(5)$ $\Rightarrow$ SOMIT IST DIE MATRIX NICHT DIAGONALISIERBAR!

ABER : WIR KÖNNEN DIE SCHUR-ZERLEGUNG BERECHNEN.

AUFSTEIGEND, BIS GM = 2 = AM

$$(A - 5I)^{2} x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \underset{\text{III} - \text{I}}{\overset{\text{II} + \text{I}}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{SPAN}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\omega_i' = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle v_i , \omega_k \rangle \cdot \omega_k}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\omega_i = \frac{\omega_i'}{\sqrt{\langle \omega_i', \omega_i' \rangle}}}$$

$$\omega_1' = v_1 - 0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_1'}{\sqrt{\langle \omega_1', \omega_1' \rangle}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2' = v_2 - \langle v_2 , \omega_1 \rangle \, \omega_1 = v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_2'}{\sqrt{\langle \omega_2', \omega_2' \rangle}} = v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_3' = v_3 - \langle v_3 , \omega_1 \rangle \, \omega_1 - \langle v_3 , \omega_2 \rangle \, \omega_2 =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_3'}{\sqrt{\langle \omega_3', \omega_3' \rangle}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Berechne die Schur-Zerlegung der Matrix $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 7 \end{bmatrix}$. Tipp $\lambda_1 = 2$.

---

1) EW berechnen: $\det(A - \lambda I) \doteq 0$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \doteq 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} -2-\lambda & 1 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ -7 & 2 & 7-\lambda \end{bmatrix} \right) \doteq 0$$

$$(-2-\lambda)(1-\lambda)(7-\lambda) + 7 + 12 - (-7)(1-\lambda)\cdot 3 + 2\cdot(-2-\lambda) - (7-\lambda)\cdot 2 \doteq 0$$

$$(-2 + 2\lambda - \lambda + \lambda^2)(7-\lambda) + 19 - (-21 + 21\lambda) - 4 - 2\lambda - 14 + 2\lambda \doteq 0$$

$$-14 + 2\lambda + 14\lambda - 2\lambda^2 - 7\lambda + \lambda^2 + 7\lambda^2 - \lambda^3 + 19 + 21 - 21\lambda - 18 \doteq 0$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 \doteq 0$$

Tipp: $\lambda_1 = 2$: (Polynomdivision)

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 : (\lambda - 2) = -\lambda^2 + 4\lambda - 4$$

$$\begin{aligned} &-(-\lambda^3 + 2\lambda^2) \\ &\quad 4\lambda^2 - 12\lambda + 8 \\ &\quad -(4\lambda^2 - 8\lambda) \\ &\qquad -4\lambda + 8 \\ &\qquad -(-4\lambda + 8) \\ &\qquad\qquad 0 \end{aligned}$$

$\underline{\lambda_1 = 2}$

Mitternachtsformel: $-\lambda^2 + 4\lambda - 4$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - (4\cdot(-1)\cdot(-4))}}{-2} = \begin{matrix} \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 2 \end{matrix}$$

Eigenwerte: $\underline{\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2}}$ $\qquad$ $Am(2) = 3$

Beispiel 3.62, Teil 2 - Schur-Zerlegung 2

2) EV bestimmen: $(A - \lambda_1 I)x = 0$

$$\Leftrightarrow (A - 2I)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right] \overset{II + \frac{1}{2} I}{\underset{III - \frac{7}{4} I}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow x = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$x_3 = s \in \mathbb{R}$

$gn(2) = 1 \neq 3$

bzw. $\text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Matrix nicht diagonalisierbar :(}}$

In dieser Wahl seid ihr frei!
$\longrightarrow$ deshalb ist die Schur-Zerlegung jedoch nicht eindeutig!

Aber:

1) Ergänze $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ zu einer linear unabhängigen Basis. (hier von $\mathbb{R}^3$)

zB: $\mathbb{R}^3 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \Longrightarrow V_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Es lohnt sich die Standardbasis zu wählen.

Schritt 1

2) Berechne $V_1^{-1} A V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

3) $A_2 := \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow$ A_2 hat immer noch die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$\Longrightarrow$ wir berechnen die zugehörigen Eigenvektoren:

$$(A_2 - 2I)x = 0$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow x = \begin{bmatrix} 2s \\ -s \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

bzw. $\text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

Ergänzen auf $\mathbb{R}^3$: $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ Dann müssen wir hier aber auch in die entsprechende Basis/Dimension ergänzen.

Beispiel 3.62, Teil 3 - Schur-Zerlegung 2

$e_2 \longrightarrow$ ALSO IN 2. DIM. EINGEBEN.

$$V_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{2} & 0 \\ 1 & \boxed{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_2^{-1} A V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}}$$

DREIECKS-MATRIX :)

$\longrightarrow$ ABER: V_2 IST NOCH NICHT ORTHOGONAL :(

$$w_i' = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle v_i, w_k \rangle \cdot w_k$$

$$\downarrow$$

$$w_i = \frac{w_i'}{\sqrt{\langle w_i', w_i' \rangle}}$$

GRAM-SCHMIDT: (SPALTEN VON V_2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$w_1' = v_1 - 0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \frac{w_1'}{\sqrt{\langle w_1', w_1' \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w_2' = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{w_2'}{\sqrt{\langle w_2', w_2' \rangle}} = \frac{3}{\sqrt{42}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$w_3' = v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2 = \ldots =$$

$$w_3 = \frac{w_3'}{\sqrt{\langle w_3', w_3' \rangle}} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{21} \\ \frac{2}{21} \\ \frac{14}{21} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{42}} & -\frac{8}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}} & \frac{2}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{42}} & \frac{14}{21} \end{bmatrix}$$

Beispiel 3.62, Teil 4 - Schur-Zerlegung 2

$$T = U^{-1} A U = U^H A U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{-8}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}} & \frac{2}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-4}{\sqrt{42}} & \frac{14}{21} \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{-8}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}} & \frac{2}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-4}{\sqrt{42}} & \frac{14}{21} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{42}} & \frac{58\cdot\sqrt{3}}{21} \\ 0 & 2 & -\frac{6\cdot\sqrt{42}}{7} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}}$$

Schur-Zerlegung von A.

$$\Longrightarrow A = \overbrace{U T U^H}^{\text{Schur-Zerlegung von } A.} \quad \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{-8}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}} & \frac{2}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-4}{\sqrt{42}} & \frac{14}{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{42}} & \frac{58\cdot\sqrt{3}}{21} \\ 0 & 2 & -\frac{6\cdot\sqrt{42}}{7} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{-8}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}} & \frac{2}{21} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-4}{\sqrt{42}} & \frac{14}{21} \end{bmatrix}^H}}$$

Beispiel 3.63, Teil 1 - Quadratische Form

SEI $x^T A^{3\times3} x = 2\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3\right)$

WIE LAUTET DIE SYMMETRISCHE MATRIX $A^{3\times3}$ MIT DIESER QUADRATISCHEN FORM?

A IST SYMMETRISCH, ALSO $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$ UND $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

ALSO ALLGEMEIN: $x^T A x = a x_1^2 + d x_2^2 + f x_3^2 + 2b\, x_1x_2 + 2c\, x_1x_3 + 2 \cdot e \cdot x_2x_3$

$\rightsquigarrow$ KOEFFIZIENTENVGL. MIT $G(x) = 2\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3\right)$

$= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$

$$\Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ZUSATZ: DA A SYMMETRISCH IST:

A s.p.d. $\Longleftrightarrow \lambda_i > 0 \quad \forall_i$

$\Longleftrightarrow$ ALLE EW STRIKT POSITIV

ODER ALLE PIVOTE NACH GAUSSEN > 0 SIND. (7.4.0.6)

Beispiel 3.64, Teil 1 - Ellipsen

BESTIMME DIE BEIDEN HALBACHSEN DER ELLIPSE, DIE ENTSTEHT, WENN WIR DIE QUADRATISCHE FORM VON A MIT $x_3 = 1$ SCHNEIDEN.

$$x^T A x = Q(x) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$$

$$x^T A x = Q(x) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 \overset{!}{=} 1$$

BEMERKUNG: ALS DER QUADRATISCHEN FORM KÖNNEN WIR MITTELS KOEFF VGL. A BESTIMMEN (SERIE 11.3) (VGL. BEISPIEL 1 HELTE)

0) MATRIX A BESTIMMEN

KOEFFIZIENTEN VERGLEICH. $\Longrightarrow$ $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

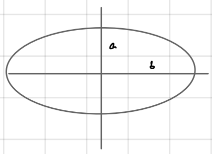
1) EIGENWERTE VON A BESTIMMEN

$$\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 1$$

DIE LÄNGEN DER HALBACHSEN SIND:

$$\boxed{a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = 1}$$



Beispiel 3.64, Teil 2 - Ellipsen

SKIZZIERE DIE ELLIPSE VON OBEN.

2) ZUGEHÖRIGE EV BESTIMMEN

UND NORMIEREN $\left(\frac{v_i}{\|v_i\|}\right)$

↳ (DANN IST S ORTHOGONAL)

$\Longrightarrow S^{-1} = S^T$

$(A - \lambda_i I)\,\underline{x} = 0$ NACH $\underline{x}$ GAUSSEN / LÖSEN

LÖSEN: $\Longrightarrow$ ZB:

$EV_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$EV_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

NORMIERTE EV

$$\Longrightarrow A = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}_{U^T = U^{-1}}$$

3) HIER WECHSELN WIR DAS KOORDINATENSYSTEM MIT EINER SUBSTITUTION

SUBSTITUTION: $\quad v := U^{-1} x = U^T x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$

4) EINSETZEN IN URSPRÜNGLICHE QUADRATISCHE FORM / GL:

$$\Longrightarrow 1 = x^T A x = x^T U D U^T x = v^T D v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$= 9v_1^2 + v_2^2$$

$$= \frac{v_1^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{v_2^2}{(1)^2} = 1$$

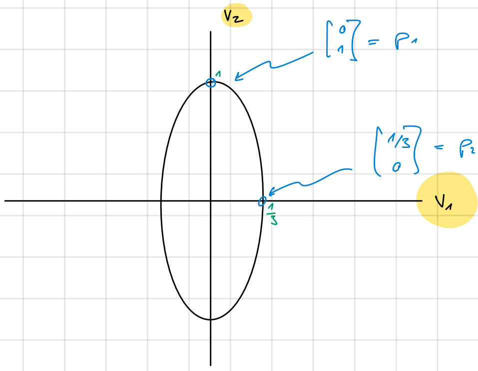
BEMERKUNG: LÄNGE DER HALBACHSEN HÄTTE HIER AUCH MIT KOEFF.VGL. BESTIMMT WERDEN KÖNNEN.

Jede Ellipse lässt sich in einem geeigneten Koordinatensystem durch eine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Beispiel 3.64, Teil 3 - Ellipsen

$$\frac{v_1^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{v_2^2}{(1)^2} = 1 \iff$$



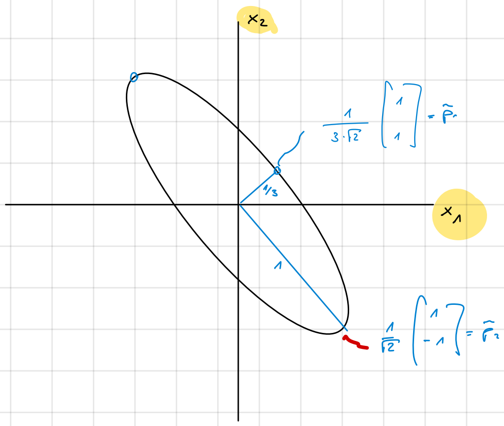
ABER WIR "WOLLEN" DIE ELLIPSE JA IN DEN X-KOORDINATEN ZEICHNEN ...

$\Longrightarrow$ RÜCKSUBSTITUTION

$v := U^T x \iff x_i = U v_i$

$\Longrightarrow \quad \tilde{p}_1 = U \cdot p_1 = \underline{\underline{\frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$

$\Longrightarrow \quad \tilde{p}_2 = U p_2 = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}}$



Beispiel 3.65, Teil 1 - SVD 1

BERECHNE DIE SVD VON $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix} = U \Sigma V^T$

1) $A^TA = \begin{bmatrix}10 & 20\\ 20 & 40\end{bmatrix} \longleftarrow$ SYMMETRISCH λ REELL $\Longrightarrow$ ORTHOGONALE EV.

2) EIGENWERTE: $\det(A^TA - \lambda I) \overset{!}{=} 0 \iff \det\begin{pmatrix}10-\lambda & 20\\ 20 & 40-\lambda\end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$

$$\iff \lambda_1 = 50, \quad \lambda_2 = 0$$

EIGENVEKTOR (NORMIERT) ZU $\lambda_1 = 50$:

$$(A^TA - \lambda_1 I)x = 0 \iff \left[\begin{array}{cc|c}10-50 & 20 & 0\\ 20 & 40-50 & 0\end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c}-40 & 20 & 0\\ 20 & -10 & 0\end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c}-40 & 20 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow E_{50} = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\} \longrightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$(A^TA - \lambda_2 I)x = 0 \iff \left[\begin{array}{cc|c}10 & 20 & 0\\ 20 & 40 & 0\end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c}10 & 20 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \longrightarrow E_0 = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right\} \longrightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow V = \frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix} \Longrightarrow V^{-1} = V^T = \frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

3) $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{50} > 0$ (DAS IST DER EINZIGE SINGULÄRWERT, > 0)

$\longrightarrow \Sigma = \begin{bmatrix}\sqrt{50} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \longleftarrow$ Σ HAT DIE SELBEN DIMENSIONEN WIE A.

4) $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow$ JETZT BRAUCHEN WIR NOCH EINEN ORTHOGONALEN VEKTOR ZU u_1: (VERSCHIEDENE VARIANTEN)

WIR SEHEN: $u_2 = \begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$ IST ORTHOGONAL ZU u_1 ($\langle u_1, u_2\rangle = 0$)

$$\longrightarrow U = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

Beispiel 3.66, Teil 1 - SVD 2 Substituition

: BERECHNE DIE SVD VON $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(*) DA $n = 3 > 1 = m$ IST, SUBSTITUIEREN WIR ZUERST $A_1 := A^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

1) $A_1^T A_1 = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$

2) . $\det(A_1^T A_1 - \lambda I) \overset{!}{=} 0 \iff \lambda_1 = 9$

. $(A_1^T A - \lambda_1 I)\, x = 0 \iff E_9 = \operatorname{span}\{[s], s \in \mathbb{R}\}$

$\Longrightarrow v_1 = [1]$

NORMIERT !

$\Longrightarrow \underline{\underline{V_1^T = [1]}}$

3) $\underline{\underline{\sigma_1}} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}} > 0$

$\Longrightarrow \underline{\underline{\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}$ SELBE DIMENSIONEN WIE A_1

4) $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A_1 v_1$

$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1] = \underline{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$

DIE MATRIX U_1 SOLL ABER 3x3 SEIN!

HIER WIRDS ETWAS TRICKY ... DIE MATRIX U SOLL JA ORTHOGONAL SEIN :
ALSO KÖNNEN WIR EINEN VEKTOR u_2 INTELLIGENT RATEN, UND DANACH DAS KREUZPRODUKT VON $u_1 \times u_2 = u_3$ AUSNUTZEN $(u_1 \perp u_2 \perp u_3)$.

WIR SEHEN : $\tilde{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ BZW $\underline{\underline{u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$ $\Longrightarrow \langle u_1 ; u_2 \rangle = 0$

SOMIT IST $u_3 = u_1 \times u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ BZW $\underline{\underline{u_3 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}}}$

Beispiel 3.66, Teil 2 - SVD 2 Substituition

$\longrightarrow$ SOMIT IST $A_1 = U_1 \Sigma_1 V_1^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot [1]$

$\Longrightarrow$ SOMIT IST $\underline{\underline{A}} = V_1 \Sigma_1^T U_1^T = \underline{\underline{[1] \cdot [3 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}}}$

Beispiel 3.67, Teil 1 - SVD 3 Vergleich

BEISPIEL : BERECHNE DIE SVD VON $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

(*) DA $n = 3 > 1 = m$ IST, SUBSTITUIEREN WIR ZUERST $A_1 := A^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

1) $A_1^T A_1 = \begin{bmatrix} 49 \end{bmatrix}$

2) · $\det(A_1^T A_1 - \lambda I) \overset{!}{=} 0 \iff \lambda_1 = 7$

· $(A_1^T A_1 - \lambda_1 I)x = 0 \implies E_7 = \text{span}\{[s], s \in \mathbb{R}\}$

$\underline{v_1} = [1]$

↑ NORMIERT !

$\implies \underline{\underline{V_1}}^T = [1]$

---

1) $A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 12 \\ 6 & 9 & 18 \\ 12 & 18 & 36 \end{bmatrix}$

2) · $\det(A^T A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$

$\iff \det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 6 & 12 \\ 6 & 9-\lambda & 18 \\ 12 & 18 & 36-\lambda \end{bmatrix} \right) \overset{!}{=} 0$

$\iff (4-\lambda)(9-\lambda)(36-\lambda) + 6 \cdot 18 \cdot 12 + 12 \cdot 6 \cdot 18$
$- 12 \cdot (9-\lambda) \cdot 12 - 18 \cdot 18 \cdot (4-\lambda) - (36-\lambda) \cdot 6 \cdot 6 \overset{!}{=} 0$

$\iff$ ....

$\iff \lambda^2 - 49\lambda$

$\iff \lambda_1 = 49$
$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

· $(A^T A - \lambda_1 I)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -45 & 6 & 12 & 0 \\ 6 & -40 & 18 & 0 \\ 12 & 18 & -13 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[s \in \mathbb{R}]{\cdots} x = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}s \\ \frac{1}{2}s \\ s \end{bmatrix} \xrightarrow[\|\cdot\|_2 \overset{!}{=} 1]{s=1} \underline{\underline{\frac{6}{7} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

· $(A^T A - \lambda_2 I)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 12 & 0 \\ 6 & 9 & 18 & 0 \\ 12 & 18 & 36 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[s, t \in \mathbb{R}]{\cdots} x = \begin{bmatrix} \frac{-2}{3}s - 3t \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{BASIS FÜR EIGENRAUM}]{s, t \text{ SEPARIERT}} E_0 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\xrightarrow{\|\cdot\|_2 \overset{!}{=} 1} \underline{\underline{\frac{3}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

Beispiel 3.67, Teil 2 - SVD 3 Vergleich

3) $\sigma_1 = \sqrt{49} = 7 > 0$

$$\longrightarrow \quad \Sigma_1 = \underline{\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

SELBE DIMENSIONEN WIE A_1

4) $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A_1 V_1$

$$= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot [1] = \underline{\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}}$$

DIE MATRIX $\underline{u}_1$ SOLL ABER 3x3 SEIN!

HIER WIRDS ETWAS TRICKY ...

DIE MATRIX u SOLL JA ORTHOGONAL SEIN :

ALSO KÖNNEN WIR EINEN VEKTOR u_2 INTELLIGENT RATEN, UND DANACH DAS KREUZPRODUKT VON $\underline{u}_1 \times \underline{u}_2 = \underline{u}_3$ AUSNUTZEN $(\underline{u}_1 \perp \underline{u}_2 \perp \underline{u}_3)$.

WIR SEHEN : $\tilde{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ BZW $\underline{u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}$

$$\Longrightarrow \langle u_1 ; u_2 \rangle = 0$$

SOMIT IST $u_3 = u_1 \times u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -15 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{BZW} \quad \underline{\underline{u_3 = \frac{1}{7 \cdot \sqrt{5}} \begin{bmatrix} -15 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}}}$$

MIT ETWAS ÜBUNG FUNKTIONIERT DAS SOGAR SCHNELL.

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{-6}{\sqrt{13}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{\sqrt{13}} & 0 \\ \frac{6}{7} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \Longrightarrow V^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{-6}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} & 0 \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

3) $\sigma_1 = \sqrt{49} = 7 > 0$

$$\longrightarrow \quad \underline{\Sigma = [7 \quad 0 \quad 0]}$$

SELBE DIMENSIONEN WIE A

4) $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A \, V_i$ $\qquad i = 1$

$$\underline{u} = \frac{1}{7} [2 \quad 3 \quad 6] \; \frac{6}{7} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = [1]$$

$\longrightarrow$ SOMIT IST $A_1 = U_1 \Sigma_1 V_1^T$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & 0 & \frac{-15}{7\cdot\sqrt{5}} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{7\cdot\sqrt{5}} \\ \frac{6}{7} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{7\cdot\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [1]$$

$\Longrightarrow$ SOMIT IST $A = A_1^T = (U_1 \Sigma_1 V_1^T)^T$

$$= V_1 \Sigma_1^T U_1^T$$

$$= [1] \cdot [7 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-15}{7\cdot\sqrt{5}} & \frac{2}{7\cdot\sqrt{5}} & \frac{4}{7\cdot\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ SOMIT IST A

$$= [1] \cdot [7 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{-6}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} & 0 \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

Beispiel 3.68, Teil 1 - Basisprüfung W20 SVD Ablesen

(!) PRÜFUNG_W20

3. [6 Punkte] Sei die Matrix A gegeben durch ihre Singularwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Was sind die Dimensionen, der Rang und die 2-Norm der Matrix A?

b) Schreiben Sie A als Summe von Rang-1-Matrizen.

c) Geben Sie orthonormale Basen von Kern(A) und Bild(A) an.

d) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $Ax = b$ mit

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

a) $\rightarrow$ DIM(A) = DIM(Σ) = $\underline{4 \times 3}$

$\rightarrow$ RANG(A) = # SINGULÄRWERTE > 0 $\Longrightarrow$ RANG(A) = $\underline{2}$

$\rightarrow$ 2-NORM(A) = GRÖSSTER SINGULÄRWERT = $\sigma_1 = \underline{2}$

"ABLESEN"

b) $\rightarrow$ $A = \sigma_1 \cdot u_1$ (SPALTE) $\cdot\, v_1^T$ (ZEILE) $+\ \sigma_2 \cdot u_2$ (SPALTE) $+\ v_2^T$ (ZEILE) $+ \dots$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + 0$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

c) $\rightarrow$ BILD(A) = $\mathrm{SPAN}\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}$

$\rightarrow$ KERN(A) = $\mathrm{SPAN}\left\{ \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

Beispiel 3.68, Teil 2 - Basisprüfung W20 SVD Ablesen

3. [**6 Punkte**] Sei die Matrix A gegeben durch ihre Singularwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit

U_r $\quad \Sigma_r$ $\quad V_r^T$

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Was sind die Dimensionen, der Rang und die 2-Norm der Matrix A?

b) Schreiben Sie A als Summe von Rang-1-Matrizen.

c) Geben Sie orthonormale Basen von Kern(A) und Bild(A) an.

d) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $Ax = b$ mit

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

d) $\Longrightarrow$ ALSO BERECHNE $x = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T b$

MIT $\Sigma_r = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \Sigma_r^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$V_r^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow V_r = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$U_r = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow U_r^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{x}} = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T b = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}}}$$

Beispiel 3.69, Teil 1 - Jordanblöcke 1 *

Bestimme die Eigenwerte, und ihre algebraischen, sowie geometrischen Multiplizitäten von A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

---

1) Unterteile die Matrix in Jordan Blöcke:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Wie oft kommt jeder Eigenwert (auf der Diagonalen) vor.

$\lambda_1 = 1 \Longrightarrow Am(\lambda_1) = 3$

$\lambda_2 = 2 \Longrightarrow Am(\lambda_2) = 1$

$\lambda_3 = 3 \Longrightarrow Am(\lambda_3) = 2$

2) Bestimme die Anzahl 'Kästchen' pro Eigenwert $\Longrightarrow$ geometrische Multiplizität.

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{2} & 0 & 0 \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 & \boxed{3} & 0 \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

zB: "Es gibt nur $\boxed{\text{1 Kästchen}}$ für alle $\lambda_1 = 1$"

$\Longrightarrow Gm(\lambda_1) = 1$

Analog: $\Longrightarrow Gm(\lambda_2) = 1$

$Gm(\lambda_3) = 2$

Beispiel 3.70, Teil 1 - Jordanblöcke 2 *

GIB DIE JORDANMATRIX $\underline{J}$ DER MATRIX A AN.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

---

1) EIGENWERTE BERECHNEN

2) AM UND GM BERECHNEN

3) NUR FALLS NÖTIG: DIMENSIONEN DER 'GENERALISED EIGENSPACES' BERECHNEN

BLOCKMATRIZEN BEACHTEN $\Longrightarrow A = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A) = \det B_1 \cdot \det B_4 - 0$

1) $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$

$$\Longleftrightarrow \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 5-\lambda \end{bmatrix} \cdot \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow (16 - 8\lambda + \lambda^2) \cdot (2-\lambda)(4-\lambda) \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow (4-\lambda)^2 (2-\lambda)(4-\lambda) \overset{!}{=} 0$$

$\Longrightarrow$ $\lambda_1 = 2$ MIT $AM(\lambda_1) = 1$

$\lambda_2 = 4$ MIT $\underline{AM(\lambda_2) = 3}$

SAGT UNS WIE OFT DER EV IM J VORKOMMT.

2) GM BERECHNEN:

$\underline{\text{FÜR } \lambda_2 = 4:}$ $(A - \lambda_2 I)x = 0$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 3-4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5-4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{DANACH: } III + \frac{1}{2} II]{\text{ZUERST: } II - I} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2 FREIE VARIABEL $\Longrightarrow$ $\underline{GM(\lambda_2) = 2}$

$= \dim(\text{KERN}(A - \lambda_2 I)) = 2$

$\Longrightarrow$ ES GIBT ALSO 2 JORDAN BLÖCKE FÜR $\lambda_2 = 4$.

(FÜR $\lambda_1 = 2$ SOWIESO NUR 1 JORDAN BLOCK)

$$\Longrightarrow \text{ZB:} \quad J_A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

4 Beweise HS22

In diesem Kapitel findet Ihr die Beweise, welche Professor Gradinaru gegen Ende HS22 in der Linearen Algebra (ITET und RW) Vorlesung erwähnte, welche prüfungsrelevant sein könnten. Die Beweise wurden im Rahmen des Linearen Algebra PVK HS22 verfasst, sollen aber keine Garantie geben, dass wirklich diese an der Prüfung geprüft werden müssen. Die Liste an Beweisen kann in künftigen PVK/Semestern ergänzt werden. Es kann sich auf jeden Fall lohnen weitere Beweise anzuschauen, insbesondere für zukünftige Semester und Prüfungen.

Beweis 3.1, Teil 1 - Verschiedene Eigenwerte haben linear unabhängige Eigenvektore

SEIEN $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ k - PAARWEISE VERSCHIEDENE EIGENWERTE DER MATRIX A

UND SEIEN $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ ZUGEHÖRIGE EIGENVEKTORE.

ZZ: DIE EIGENVEKTORE $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ SIND LINEAR UNABHÄNGIG.

LINEARE UNABHÄNGIGKEIT :

EINE MENGE VON VEKTOREN $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots v^{(n)}$ HEISST LINEAR UNABHÄNGIG, FALLS AUS

$$\alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \dots + \alpha_n v^{(n)} = 0$$

FOLGT, DASS ALLE KOEFFIZIENTEN $\alpha_i = 0$ $i = 1, \dots n$. (EINZIGE LÖSUNG!)

BEWEIS PER INDUKTION :

PRÄMISSE/ANNAHME : AUS $\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i u^{(i)} = 0$ FOLGT DASS $\alpha_i = 0$ $i = 1, \dots k-1$

INDUKTIONSVERANKERUNG : $k = 1$. DA $u^{(1)} \neq 0$ (PER DEFINITION VON EIGENVEKTOREN)

IST DIE BEHAUPTUNG FÜR $k = 1$ ERFÜLLT. $\left[u^{(1)} \alpha_1 = 0 \iff \alpha_1 = 0 \right]$ ✓

INDUKTIONSSCHRITT : $k-1 \longrightarrow k$: $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u^{(i)} = 0$

$$\iff A \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u^{(i)} = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_k u^{(i)} = 0 \qquad (1)$$

$$\iff \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A u^{(i)} = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i u^{(i)} = 0 \qquad (2)$$

$\longrightarrow$ (1) - (2) : $\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (\lambda_k - \lambda_i) u^{(i)} = 0$

$\longrightarrow$ FÜR $i < k$ GILT $\lambda_k - \lambda_i \neq 0$ LAUT AUFGABE, ALSO MUSS $\alpha_1, \dots \alpha_{k-1} = 0$ (LAUT PRÄMISSE)

$\longrightarrow$ ALSO SIND $u^{(1)}, \dots u^{(k-1)}$ LINEAR UNABHÄNGIG UND ES BLEIBT $\alpha_k u^{(k)} = 0$

$\longrightarrow$ ALSO IST AUCH $\alpha_k = 0$ UND u^k LINEAR UNABHÄNGIG (NACH DEFINITION VON EIGENVEKTOREN $\neq 0$)

$\Longrightarrow$ ALLE $u^{(1)}, \dots u^{(k)}$ SIND LINEAR UNABHÄNGIG. $\square$

Beweis 3.2, Teil 1 - Eigenwerte von Hermit-Symmetrischen Matrizen sind Reell

ZZ: ALLE EIGENWERTE VON (HERMIT-) SYMMETRISCHEN MATRIZEN SIND REELL:

SEI $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ MIT $A^H = A$, ZEIGE DASS $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $\forall i$

START: SEIEN λ UND μ EIGENWERTE VON A UND u BZW. v ZUGEHÖRIGE EIGENVEKTOREN.

DANN GILT (PER DEFINITION): $Au = \lambda u$ (1)

UND: $Av = \mu v$ (2)

ALS $v^H \cdot (1)$: $v^H A u = v^H \lambda u = \lambda v^H u$ (3)

DA $A = A^H$ (DEFINITION HERMIT-SYMMETRIE): $v^H A^H u = (Av)^H u = = (\mu v)^H u = \bar{\mu} v^H u = \lambda v^H u$ (4)

$\Longrightarrow$ SOMIT IST (FÜR BELIEBIGE λ, μ, v, u): $\bar{\mu} v^H u = \lambda v^H u$ (4)

$\rightsquigarrow$ WIR <u>WÄHLEN</u> ALSO $\lambda = \mu$ UND $u = v$

UND ERHALTEN AUS (4): $\bar{\lambda} u^H u = \lambda u^H u$ (5)

PER DEFINITION: $\bar{\lambda} \|u\|_2^2 = \lambda \|u\|_2^2$ (6)

DA $u \neq 0$ (DA EIGENVEKTOR) $\Longrightarrow$ $\|u\|_2^2 \neq 0$

UND SOMIT $\bar{\lambda} = \lambda \Longrightarrow \underline{\underline{\lambda \overset{!}{\in} \mathbb{R}}}$ $\square$

GILT FÜR EINEN BELIEBIGEN EIGENWERT EINER (HERMIT-) SYMMETRISCHEN MATRIX.

Beweis 3.3, Teil 1 - Eigenvektore von Hermit- Symmetrischen Matrizen sind orthogonal zueinander

ZZ: ALLE EIGENVEKTORE VON (HERMIT-) SYMMETRISCHEN MATRIZEN ZU VERSCHIEDENEN EIGENWERTEN SIND ORTHOGONAL ZUEINANDER.

HIERZU VERWENDEN WIR DEN 1. TEIL DIESES BEWEISES VON OBEN.

START: SEIEN λ UND μ EIGENWERTE VON A UND u BZW. v ZUGEHÖRIGE EIGENVEKTOREN.

DANN GILT (PER DEFINITION): $\quad Au = \lambda u \quad (1)$

UND: $\quad Av = \mu v \quad (2)$

ALS $v^H \cdot (1)$: $\quad v^H A u = v^H \lambda u = \lambda v^H u \quad (3)$

DA $A = A^H$ (DEFINITION HERMIT-SYMMETRIE): $\quad v^H A^H u = (Av)^H u = = (\mu v)^H u = \bar{\mu} v^H u = \lambda v^H u \quad (4)$

$\Longrightarrow$ SOMIT IST (FÜR BELIEBIGE λ, μ, v, u): $\quad \bar{\mu} v^H u = \lambda v^H u \quad (4)$

$\rightsquigarrow$ DANK DEM 1. TEIL DES BEWEISES WISSEN WIR, DASS $\bar{\mu} = \mu \overset{!}{\in} \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ SOMIT WIRD (4) ZU: $\quad \mu v^H u = \lambda v^H u$

$\Longleftrightarrow \quad (\mu - \lambda) v^H u = 0$

$\rightsquigarrow$ DA $\lambda \neq \mu$ (LAUT PRÄMISSE) $\quad \Longleftrightarrow \quad v^H u = 0$

$\Longleftrightarrow \quad \langle v, u \rangle = 0$

$\Longleftrightarrow$ DIE (BELIEBIGEN) EIGENVEKTOREN ZU λ BZW μ $(\lambda \neq \mu)$ STEHEN ORTHOGONAL ZUEINANDER $\square$

Beweis 3.4, Teil 1 - Eigenwerte von (Hermit-) Schiefsymmetrischen Matrizen sind rein imaginär

SEI A EINE QUADRATISCHE MATRIX $\in \mathbb{C}^{n \times n}$.

ZZ: FALLS $A^H = -A$ SO SIND ALLE EIGENWERTE DER MATRIX A REIN IMAGINÄR.

START: SEIEN λ UND μ EIGENWERTE VON A UND u BZW. v ZUGEHÖRIGE EIGENVEKTOREN.

DANN GILT (PER DEFINITION): $\quad Au = \lambda u \quad (1)$

UND: $\quad Av = \mu v \quad (2)$

ALSO $v^H \cdot (1)$: $\quad v^H A u = v^H \lambda u = \lambda v^H u \quad (3)$

DA $A = -A^H$ (DEFINITION HERMIT-SYMMETRIE): $\quad v^H(-A^H)u = -v^H A^H u = -(Av)^H u = -(\mu v)^H u = -\bar{\mu} v^H u = \lambda v^H u \quad (4)$

$\Longrightarrow$ SOMIT IST (FÜR BELIEBIGE λ, μ, v, u): $\quad -\bar{\mu} v^H u = \lambda v^H u \quad (4)$

WIR WÄHLEN ALSO $\quad \lambda = \mu \quad$ UND $\quad u = v$

UND ERHALTEN AUS (4): $\quad -\bar{\lambda} u^H u = \lambda u^H u \quad (5)$

PER DEFINITION: $\quad -\bar{\lambda} \|u\|_2^2 = \lambda \|u\|_2^2 \quad (6)$

DA $u \neq 0$ (DA EIGENVEKTOR) $\Longrightarrow \quad \|u\|_2^2 \neq 0$

UND SOMIT $\quad -\bar{\lambda} = \lambda \quad$ IST ZB. WAHR FÜR $\lambda = 0$ ... ABER NICHT NUR ...

SUBSTITUTION

$\lambda := \alpha + \beta i$ (MIT $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) $\quad -(\overline{\alpha + \beta i}) = \alpha + \beta i$

$$-\alpha + \beta i = \alpha + \beta i$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\alpha \stackrel{!}{=} 0, \quad \beta \in \mathbb{R}} \quad (\text{DA } \bar{\beta} = \beta)$$

SOMIT $\underline{\underline{\lambda = \beta i}}$, STIMMT FÜR ALLE $\beta \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ ALLE λ SIND REIN IMAGINÄR ■

GILT FÜR EINEN BELIEBIGEN EIGENWERT