DEZ. 24

HEY CIAO :)

IN DIESEM DOKUMENT BEFINDEN SICH DIE WICHTIGSTEN 'KOCHREZEPTE' / ABLÄUFE FÜR TYPISCHE AUFGABEN DER VORLESUNG 'LINEARE ALGEBRA' VON PROF. GRADINARU. DAS GANZE IST BEWUSST EHER UNMATHEMATISCH UND KURZ GEHALTEN (WIR SIND JA ENGINEERS :)) UND MACHT DEFINITIV MEHR SINN, WENN IHR JEWEILS SELBER BEISPIELE LÖST, UND DIE 'REZEPTE' HIER ERGÄNZT.

ES SOLL ALS ERGÄNZUNG ZUR THEORIE DIENEN (NICHT ALS ERSATZ).

ICH KANN WEDER FÜR VOLLSTÄNDIGKEIT, NOCH RICHTIGKEIT GARANTIEREN UND BIN UM VERBESSERUNGEN SEHR DANKBAR :)

jamatter@student.ethz.ch

→ BSP: 1-4

GAUSSVERFAHREN :

GEGEBEN : EIN LGS

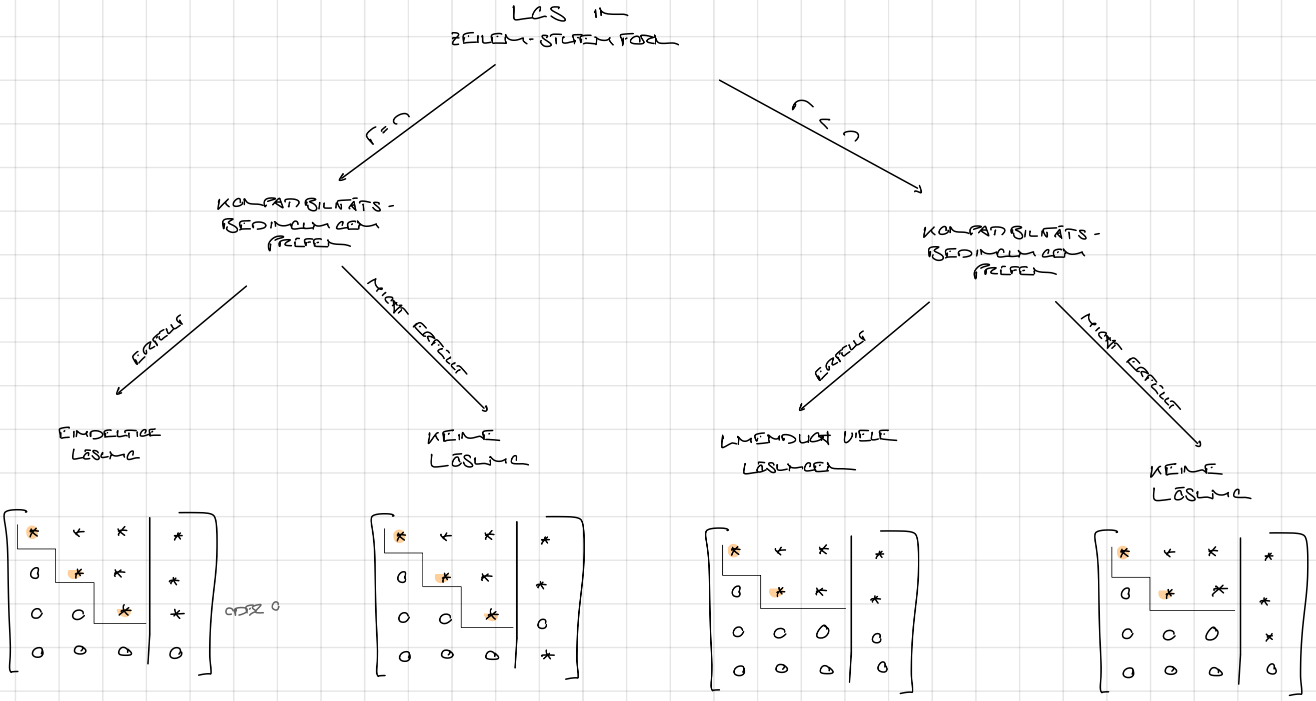
ZIEL : LGS IM ZSF BRINGEN UND ANSCHLIESSEND LGS DURCH RÜCKWÄRTSEINSETZEN LÖSEN.

STEP 1 STEP 2

ERLAUBTE OPERATIONEN :

- VERTAUSCHEN VON ZEILEN (ODER SPALTEN)
- VIELFACHES EINER ZEILE / SPALTE ZU EINER ANDEREN ZEILE / SPALTE ADDIEREN.

MÖGLICHE LÖSUNGEN :



ZEILEN STUFEN FORM (ZSF)

ZB : $A = \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow$

- DIMENSION = $m \times n$ = 3×4
- RANG (A) = r = # PIVOTS = 2
- DEFEKT = # FREIE VARIABLEN = $n - r$ = 2
- # KOMPATIBILITÄTSBEDINGUNGEN = $m - r$ = 1
  (IN DIESEM BSP ERFÜLLT)

LINEARKOMBINATION

Definition 2.2.0.1. Lineare Kombination

Eine *lineare Kombination* der Elemente $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eines lineares Raumes V ist

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n \ \in V\,,$$

mit den Skalaren $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Falls für einen Element $b \in V$ gilt

$$b = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n \ \in V\,,$$

mit geeignet gewählten Skalaren $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dann sagt man: b *lässt sich als lineare Kombination von* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *darstellen.*

ZB : $p_1(t) = 1 + t + 3t^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 3 \cdot t^2 \in \mathcal{P}_3$

$p_1(t)$ IST EINE LINEARKOMBINATION ALS DEN (BASIS)VEKTOREN $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$

$p_1(t)$ HAT DIE KOORDINATEN $p_1(t) \xrightarrow{L_B} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

REIHENFOLGE FREI,
ABER KONSISTENT!

SPAN

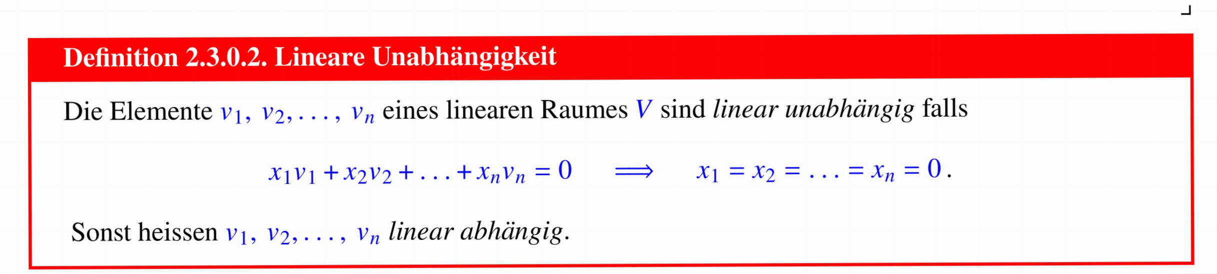
DIE MENGE ALLER MÖGLICHEN LINEARKOMBINATIONEN NENNT MAN DEN SPAN.

ZB. $\mathcal{P}_3 = \text{SPAN}\{1, t, t^2\}$

ODER AUCH $\mathcal{P}_3 = \text{SPAN}\{7, 3+t, 3t + 7t^2\}$ ~ ABER WARUM?:)

BSP : 7

LINEARE UNABHÄNGIGKEIT



Definition 2.3.0.2. Lineare Unabhängigkeit

Die Elemente $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eines linearen Raumes V sind *linear unabhängig* falls

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n = 0 \implies x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 .$$

Sonst heissen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *linear abhängig*.

LINEARE UNABHÄNGIGKEIT VON SPALTEN ZEIGEN :

1) GAUSSE DIE MATRIX A (EIGENTLICH $Ax = 0$)

2) ZEIGE DASS SIE VOLLEN RANG $r = n \leq m$ HAT
(ALSO n PIVOTELEMENTE)

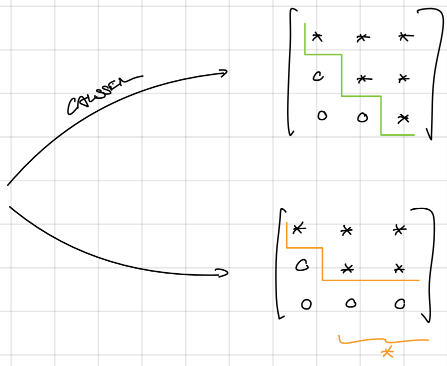
→ DIEJENIGEN SPALTEN MIT PIVOTELEMENTE SIND LINEAR UNABHÄNGIG

TYPISCHE AUFGABE :

↝ SIND ALLE/WELCHE SPALTEN LINEAR UNABHÄNGIG ? (3 FÄLLE)

$m < n$: $A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times3}$ → SICHER NICHT ALLE LIN. UNABHÄNGIG (DA $m < n$)

$m = n$: $B = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$



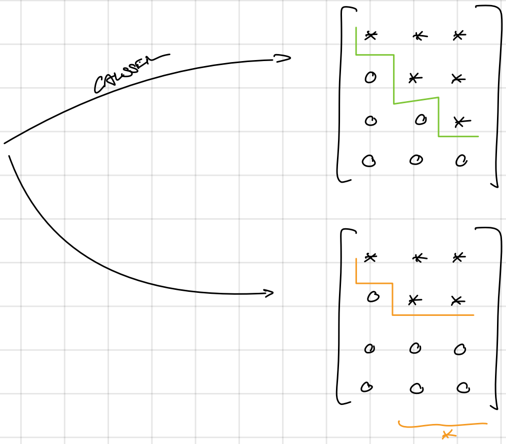
RANG (B) = $r = 3 = n \leq m = 3$

⟹ ALLE SPALTEN LIN. UNABHÄNGIG :)

RANG (B) = $r \neq n$

⟹ NICHT LIN. UNABHÄNGIGE SPALTEN *

$m > n$: $C = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times3}$



RANG (B) = $r = 3 = n \leq m = 3$

⟹ ALLE SPALTEN LIN. UNABHÄNGIG :)

RANG (B) = $r \neq n$

⟹ NICHT LIN. UNABHÄNGIGE SPALTEN *

→ PRÜFUNGEN A4

LINEARE UNABHÄNGIGKEIT VON POLYNOMEN ZEIGEN :

1) BILDE DIE (KONSISTENTEN) KOORDINATEN VEKTOREN ALLER POLYNOME BEZÜGLICH EINER BASIS (MONOMIALBASIS)

$$\text{ZB.} \quad p_1(x) \xrightarrow{k_B} \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

SPALTEN VEKTOREN

2) SCHREIBE ALLE SPALTEN IN EINE MATRIX UND GAUSSE DIE MATRIX.

3) ZEIGE DASS SIE VOLLEN RANG $r = n$ HAT (ALSO n PIVOTELEMENTE)

→ DIEJENIGEN SPALTEN MIT PIVOTELEMENTE SIND LINEAR UNABHÄNGIG

LINEARE UNABHÄNGIGKEIT VON FUNKTIONEN ZEIGEN :

GEGEBEN : k FUNKTIONEN $f_1(x), f_2(x) \dots f_k(x)$

FÜR ALLE x

ZIEL : $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f(x) + \dots + \alpha_k f_k(x) \equiv 0 \implies \alpha_i \overset{!}{=} 0 \quad \forall i$

"MÖGLICHST EINFACH" (MINDESTENS)

1) FINDE k PUNKTE $x_1, x_2, \dots x_k$ UND BILDE LGS IN MATRIX FORM MIT k GLEICHUNGEN

$$A\underline{\alpha} = 0$$

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_k(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_k(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_k) & f_2(x_k) & \cdots & f_k(x_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = 0$$

2) PRÜFE A WIE BEKANNT AUF LINEARE UNABHÄNGIGKEIT (GAUSSEN)

→ BSP : 5

RECHNEN MIT MATRIZEN :

→ AB KAP. 1.3 IM SKRIPT

ADDITION : $\left(\underline{\underline{A}}^{m \times n} \pm \underline{\underline{B}}^{m \times n} = C^{m \times n} \right)$ (ELEMENTWEISE)

SKALARE MULTIPLIKATION : $\left(\alpha \cdot \underline{\underline{A}}^{m \times n} = C^{m \times n} \right)$ (ELEMENTWEISE)

VEKTOREN IM $\mathbb{R}^n$: $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

→ BETRAG $\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{R}$

→ RICHTUNG [NORMIERTER VEKTOR] $\hat{v} = \frac{v}{\|v\|_2} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$ MIT $\|\hat{v}\|_2 \overset{!}{=} 1$

"KLASSISCHES" SKALARPRODUKT : $\langle v_1 , v_2 \rangle = \begin{bmatrix} * \\ * \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} * \\ * \\ \vdots \end{bmatrix} = \_\_\_ \in \mathbb{R}$ $\left(= 0 \iff v_1 \perp v_2 \right)$

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$

↳ **WINKELBEZIEHUNGEN** :

$$\sphericalangle (v_1, v_2) := \begin{cases} \arccos \left[\frac{\langle v_1 , v_2 \rangle}{|v_1| \cdot |v_2|} \right] & , 0 \notin \{ v_1 , v_2 \} \\ \frac{\pi}{2} & , 0 \in \{ v_1 , v_2 \} \end{cases}$$

"KLASSISCHES" KREUZPRODUKT : $\underbrace{\begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^3} \times \underbrace{\begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^3} = \_\_\_\_\_\_\_\_$ (ORTHOGONALITÄT !)

MATRIXMULTIPLIKATION : $\left(\underline{\underline{A}}^{m \times n} \cdot \underline{\underline{B}}^{n \times p} = C^{m \times p} \right)$

- DEFINIERT FALLS $n = n$
- PRODUKT $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$

→ ALLGEMEIN <u>NICHT</u> $A \cdot B \neq B \cdot A$

↳ WEITERE REGELN : SKRIPT 3.1.2.5

TRANSPONIEREN : $\left(\mathbb{R}^{2 \times 3} \right)^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$

BZW. A^H FALLS $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$

↝ SOLLTE KLAR SEIN :)

→ BSP: 9.10

MATRIX - INVERSE A^{-1}

→ AB KAP. 1.4 & 1.5 IM SKRIPT

DIE INVERSE A^{-1} VON $A^{n \times n}$ EXISTIERT (EINDEUTIG) FALLS: (ÄQUIVALENTE AUSSAGEN)

- $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$
- $\det(A) \neq 0$
- $\{0\} \overset{!}{\notin} \text{spec}(A)$ (0 IST KEIN EW VON A)
- ALLE SPALTEN VON A SIND LINEAR UNABHÄNGIG
- $Ax = 0$ HAT NUR $x = 0$ ALS LÖSUNG.
- $\text{RANG}(A^{n \times n}) = n$
- DIE ZEILEN- (UND SPALTEN-) VEKTOREN VON A BILDEN EINE BASIS VON $\mathbb{R}^n$
- DIE LINEARE ABBILDUNG $\mathcal{A}$, DIE DURCH A BESCHRIEBEN WIRD, IST BIJEKTIV

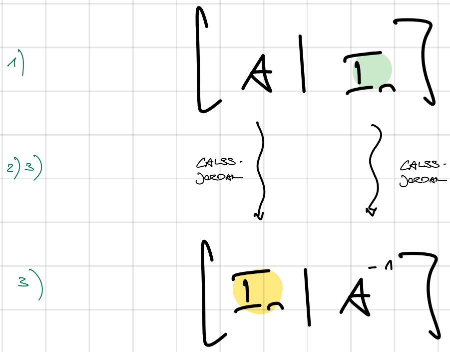
BERECHNUNG DER INVERSE :

1) SCHREIBE $A^{n \times n}$ UND DIE EINHEITSMATRIX I_n NEBENEINANDER $[A \mid I_n]$

2) GAUSSE (-JORDAN) DIE MATRIX A SOLANGE 'RAUF UND RUNTER', BIS AUS DER MATRIX A DIE EINHEITSMATRIX ENTSTEHT.

3) WENDE ALLE GAUSS SCHRITTE VON 2) AUCH AUF I_n AN.

↳ WENN AUS $A \xrightarrow{\text{GAUSS-JORDAN}} I_n$ WIRD, WIRD AUS $I_n \xrightarrow{\text{GAUSS-JORDAN}} A^{-1}$



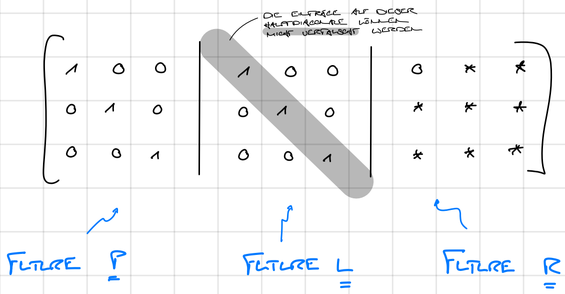
→ BSP. 11 - 13

LU - ZERLEGUNG AKA LR / PLU / PLR

ZIEL : $PA = L\overset{R}{U}$ ⟺ $A = P^{-1}LU = P^{T}LU$

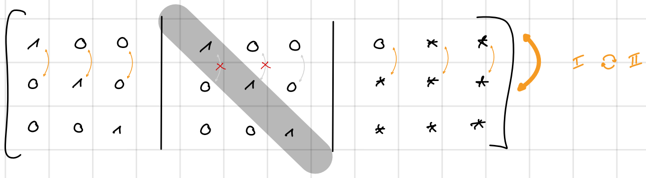
: EFFIZIENTE ALTERNATIVE ZUM LÖSEN VON LGS $Ax = b$ BEI IMMER WECHSELNDEN VEKTOR b

1) $$(I_n) \,|\, (I_n) \,|\, (A)$$


DIE EINTRÄGE AUF DIESER HAUPTDIAGONALE KÖNNEN NICHT VERFÄLSCHT WERDEN

2) FÜHRE GAUSS-SCHRITTE AUF DIE MATRIX A ALS : BEZÜGLICH SUBTRAKTION

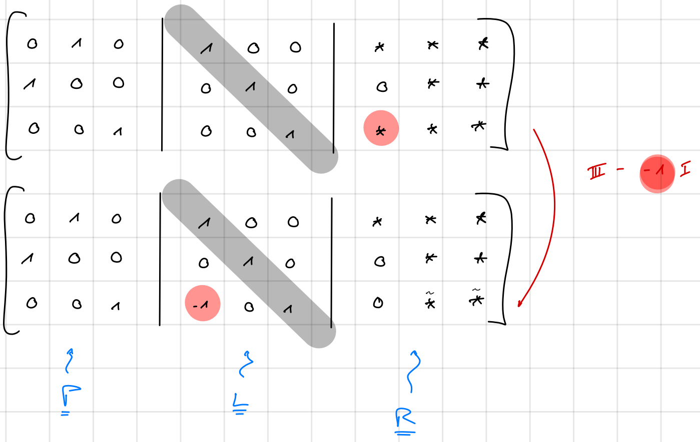
2.1) VORGEHEN BEI ZEILEN VERTAUSCHEN*



2.2) VORGEHEN BEI ZEILEN SUBTRAKTION

→ GAUSS-SCHRITTE IMMER BEZÜGLICH SUBTRAKTION ANGEBEN BEI PLR-ZERLEGUNG.

$III + I \Longrightarrow III - (-1) \cdot I$



3) LÖSE ZUERST $Lc = Pb$ (NACH DEM HILFSVEKTOR c)

3.1) UND DANACH $Rx = c$ (NACH DEM UNBEKANNTEN VEKTOR x)

⟹ $x =$ ____

* ERGÄNZUNGEN AUF NÄCHSTER SEITE.

ERGÄNZUNGEN ZUR PLR-ZERLEGUNG :

2.1) VORGEHEN BEI ZEILEN VERTAUSCHEN

↝ IN DER MITTE DER ZERLEGUNG

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & * \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & \tilde{*} & \tilde{*} \end{array}\right] \quad \text{III} \circlearrowleft \text{II}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \tilde{*} & \tilde{*} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bullet & * \end{array}\right]$$

$A = LU$: OHNE VERTAUSCHEN VON ZEILEN ERHÄLT MAN DIE LU-ZERLEGUNG.

II : ORTHOGONALITÄT / QR (GIVENS, HOUSEHOLDER) → BSP: 14 - 22

- **ORTHOGONALE VEKTOREN** : · SKALARPRODUKT = 0

  KANN JE NACH VEKTORRAUM WEIRD SEIN :)

  (FÜR ORTHONORMAL ZUSÄTZLICH: NORM $\overset{!}{=} 1$)

ORTHOGONALE VEKTOREN $\Longrightarrow$ LINEAR UNABHÄNGIGE VEKTOREN

$\cancel{\Longleftarrow}$

↳ SIEHE ZB: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

- **ORTHOGONALE MATRIZEN** : · $A^TA = I$ (ODER:)

  · ALLE SPALTEN ORTHOGONAL ZUEINANDER UND ALLE SPALTEN NORM = 1. (ODER ZEILEN)

  WIRD OFT VERGESSEN :)

  SIND:
  - INVERTIERBAR $n \times n$
    ↳ VOLLER RANG (ZB: $r = n$)
    $\det(A) = \{1, -1\}$
  - DREHMATRIZEN, SPIEGELUNGSMATRIZEN, ...
    PERMUTATIONSMATRIX
  - LÄNGEN UND WINKELTREU (1)

- FALLS A, B ORTHOGONAL $\Longrightarrow$ $A^{-1} = A^T$

  $\Longrightarrow$ AB ORTHOGONAL

(1)
- $|v| = |A \cdot v|$ LÄNGEN-INVARIANZ
- $\sphericalangle(A \cdot v, A \cdot w) = \sphericalangle(v, w)$ WINKEL-INVARIANZ
- UND $\langle v, w \rangle = \langle A \cdot v, A w \rangle$ SKALARPRODUKT-INVARIANZ

↳ ORTHONORMALE MATRIZEN 'GIBT ES NICHT' (NICHT DEFINIERT)

⟶ BSP: 19, 20

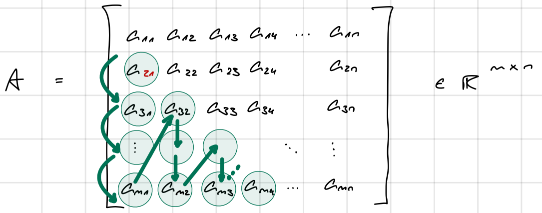
• QR - ZERLEGUNG: $A = QR$

ORTHOGONAL!

OBERE DREIECKSMATRIX

• VIA GIVENS:

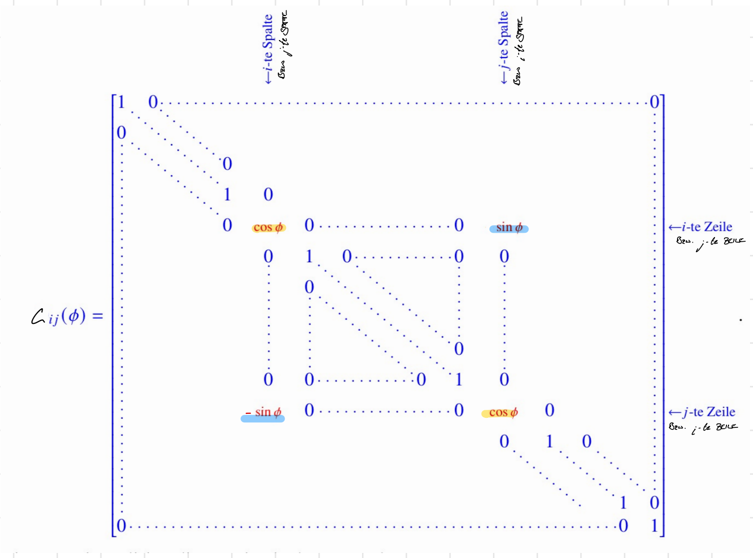
1) BESTIMME INDIZES DES STÖRENDEN ELEMENTES a_{ij}
(REIHENFOLGE BEACHTEN)



$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & a_{3n} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

2) BERECHNE $\cos\phi = \frac{a_{jj}}{r} = c$ $\sin\phi = \frac{a_{ij}}{r} = s$ $r = \sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}$ $(r \neq 0)$

3) BILDE ZU JEDEM STÖRENDEN ELEMENT EINE GIVENS-ROTATIONSMATRIX $G_{ij}^{m \times m}$



$$G_{ij}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & \vdots \\ & & 1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & \cos\phi & 0 & \cdots & 0 & \sin\phi & \\ & & & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \\ & & & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \\ & & & -\sin\phi & 0 & \cdots & 0 & \cos\phi & 0 \\ & & & & & & & 0 & 1 \quad 0 \\ \vdots & & & & & & & & \ddots \quad 1 \quad 0 \\ 0 & \cdots & & & & & & & 0 \quad 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

←i-te Spalte
Bzw. j-te Spalte
←j-te Spalte
Bzw. i-te Spalte
←i-te Zeile
Bzw. j-te Zeile
←j-te Zeile
Bzw. i-te Zeile

4) MULTIPLIZIERE $G_{ij} \cdot A = \tilde{A}$ (CHECK: $\tilde{A}$ HAT JETZT $\tilde{a}_{ij} = 0$)

5) WIEDERHOLE 1-4) BIS $\underbrace{G_k \cdots G_2 \, G_{ij}}_{:= Q^T} \cdot A = \underbrace{R}_{:= R}$ $\longleftrightarrow$ $A = G_{ij}^{-1} \cdot G_2^{-1} \cdot \ldots \cdot G_k^{-1} \cdot R$

$$= \underbrace{G_{ij}^T \cdot G_2^T \cdot \ldots \cdot G_k^T}_{} \cdot R$$

$$= Q \cdot R$$

→ BSP: 21, 22

• QR - ZERLEGUNG :

$$A = \underset{\text{ORTHOGONAL !}}{Q}\,\underset{\text{OBERE DREIECKSMATRIX}}{R}$$

• VIA HOUSEHOLDER :

1) BEARBEITE "SPALTE" FÜR "SPALTE" x_i - AB HAUPTDIAGONALE
(REIHENFOLGE BEACHTEN)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & a_{3n} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad \cdots$

ZB: $x_2 = \begin{bmatrix} a_{22} \\ a_{32} \\ \\ a_{m2} \end{bmatrix}$

"AB DER HAUPTDIAGONALEN"

2) BILDE : $\underline{v}_i = \underline{x}_i - \|x_i\|_2 \, \underline{e}_1$

3) BILDE : $H_i = I - 2 \dfrac{v_i \, v_i^T}{v_i^T v_i}$

↳ ERGÄNZE H_i FALLS NÖTIG AUF DIE DIMENSIONEN VON A.

4) $H_i A = \tilde{A}$

5) WIEDERHOLE 1 - 4) BIS $\underbrace{H_k \cdots H_2 \cdot H_1}_{:= Q^T} \cdot A = \underbrace{R}_{:= R}$ ⟷ $A = H_1^{-1} \cdot H_2^{-1} \cdot \ldots \, H_k^{-1} \cdot R$

↳ ⚠ REIHENFOLGE :)

$$= \underbrace{H_1^T \cdot H_2^T \cdot \ldots \, H_k^T}_{} \cdot R$$

$$= Q \cdot R$$

ACHTUNG : ERGÄNZE H IMMER AUF DIMENSIONEN VON A : $H = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \cdot\cdot & 0 \\ & 1 & \cdot\cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \boxed{H} & \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}}_{\text{GLEICHE DIM. WIE A.}} \Big\} \text{GLEICHE DIM. WIE A.}$

BSP: 42 - 44

QR - ZERLEGUNG : $A = QR$

ORTHOGONAL !

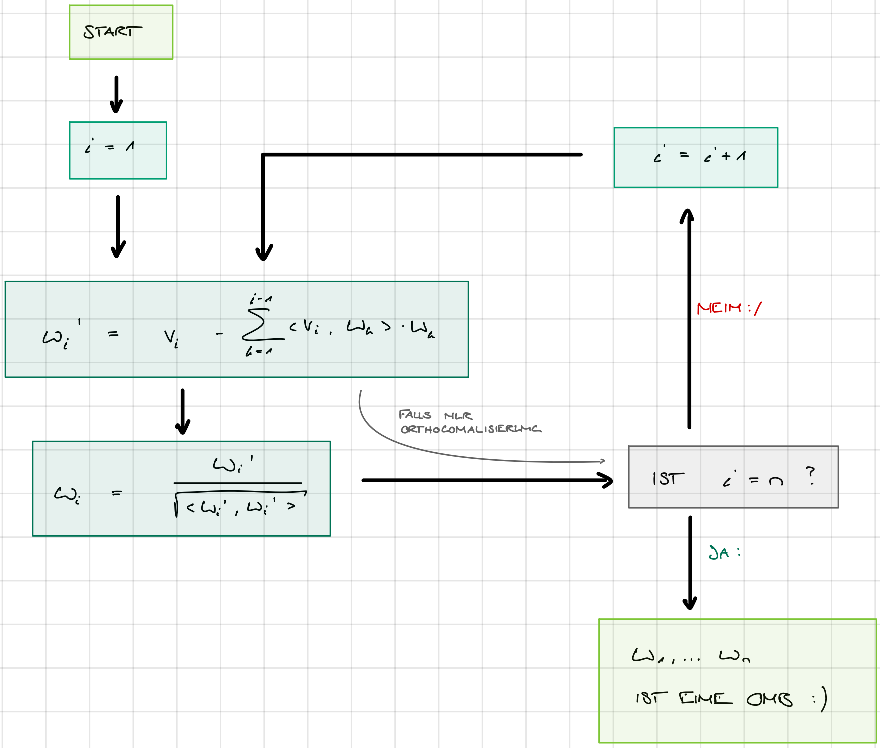
OBERE DREIECKSMATRIX

VIA GRAM-SCHMIDT :

GEGEBEN : MENGE VON LINEAR UNABHÄNGIGEN VEKTOREN $v_1, v_2, \dots v_n \in V$.

OUTPUT : ORTHONORMALBASIS ONB $w_1, w_2, \dots w_n$ VON $\text{SPAN}\{v_1, \dots v_n\}$

VERFAHREN :



1) BILDE EINE ONB MIT GRAM - SCHMIDT (AUS DEN SPALTEN VON A)

DIESE ONB WIEDER ALS MATRIX SCHREIBEN $\Longrightarrow$ $\underline{\underline{Q}}$

2) $\underline{\underline{R}} = Q^T A$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} ; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \xrightarrow{\text{GRAM-SCHMIDT}} \quad \underbrace{\text{ONB}}_{\text{ORTHONORMALBASIS}} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = Q \cdot R \quad \xrightarrow{\text{GRAM-SCHMIDT}} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$Q^T A = R = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}}$$

BSP : 23, 24

- **QR - ZERLEGUNG** : $A = QR$

ORTHOGONAL !

OBERE DREIECKSMATRIX

- **VIA 'TRICK'** :

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a^{(1)}, & a^{(2)} & ,\dots, & a^{(n)} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

GEGEBEN : MATRIX A MIT ORTHOGONALEN SPALTEN $a^{(1)},\dots,a^{(n)}$ (ABER DEREN NORM $\neq 1$)

1) REALISIERE : A IST NICHT ORTHOGONAL , ABER FAST :)

2) ALLE SPALTEN NORMIEREN : $\tilde{a}^{(i)} = \dfrac{a^{(i)}}{\|a^{(i)}\|_2}$

3) Q ALS $\tilde{a}^{(i)}$ SCHREIBEN (JETZT IST DIE MATRIX ORTHOGONAL)

4) BILDE R ALS $\|a^{(i)}\|_2 \cdot$ " DIE ZUGEHÖRIGE SPALTE IN I.

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \|a^{(1)}\|_2 & & & 0 \\ & \|a^{(2)}\|_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \|a^{(n)}\|_2 \end{bmatrix} = R$$

DIE NORMEN DER EINZELNEN SPALTEN MÜSSEN NICHT ALLE GLEICH SEIN ! :)

→ BSP: 25-27

VEKTORRÄUME / UNTERRÄUME / SKALARPRODUKTE / NORM

Definition 2.1.0.1. Vektorraum

Ein reeller *Vektorraum / linearer Raum* V ist eine Menge mit zwei Operationen:

Addition von Elementen aus V (+):

$$a, b \in V : a + b \in V,$$

Multiplikation mit Skalaren (·):

$$\alpha \in \mathbb{R}, a \in V : \alpha \cdot a \in V.$$

Zusätzlich müssen folgende Eigenschaften gelten:

1. Kommutativitätgesetz: $a + b = b + a$ für alle $a, b \in V$.
2. Assoziativitätgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c)$ für alle $a, b, c \in V$.
3. Es gibt $0 \in V$, sodass $a + 0 = a$ für alle $a \in V$ (dieses $0 \in V$ heisst Nullvektor).
4. Für jedes $a \in V$ gibt es $-a \in V$, so dass $a + (-a) = 0$.
5. Kompatibilität mit der Multiplikation mit Skalare:
   :
   $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in V$.
6. Die Addition der Skalaren ist distributiv gegen der Multiplikation mit Elementen aus V: $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta b$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in V$.
7. Neutralelement für die Multiplikation mit Skalare: $1 \cdot a = a$ für alle $a \in V$.

Ein complexer linearen Raum definiert sich ähnlich, der einzige Unterschied ist, dass die Skalare komplexe Zahlen sind.

↳ 1) ÜBERPRÜFE ALLE EIGENSCHAFTEN DER DEFINITION. (EHER UNWAHRSCHEINLICH AN EINER PRÜFUNG)

↳ OFT EINFACHER EIN GEGENBEISPIEL ZU FINDEN! ZB: $0 \notin U$

Definition 2.1.0.9. Unterraum

Sei V ein linearer Raum mit $U \subseteq V$ und $U \neq \emptyset$. Dann heisst U *Unterraum* von V falls gilt, dass:

1. Wenn $x,\ y \in U$ dann auch $x + y \in U$.
2. Wenn $\alpha \in \mathbb{R},\ x \in U$ dann auch $\alpha x \in U$.

↳ 1) ÜBERPRÜFE ALLE EIGENSCHAFTEN DER DEFINITION.

↳ OFT EINFACHER EIN GEGENBEISPIEL ZU FINDEN! ZB: $0 \notin U$

→ KEEP IN MIND:

SKALARPRODUKTE UND NORMEN KÖNNEN JE NACH VEKTORRAUM GANZ SPEZIELL DEFINIERT SEIN.

→ WENDET IMMER DIE DEFINITIONEN (IN DER AUFGABEN) AN UM ZB. VEKTOREN AUF ORTHOGONALITÄT ZU ÜBERPRÜFEN! $\langle\, ;\, \rangle \overset{?}{=} 0$

↑ NACH DEFINITION IN AUFGABE

BSP: 31

BILD / KERN / BASIS VON KERN

(VON EINER MATRIX)

SEI $A^{n \times m} = \begin{bmatrix} \wr & \wr & & \wr \\ a^{(1)}, & a^{(2)}, & \dots & a^{(n)} \\ \wr & \wr & & \wr \end{bmatrix}$

BILD (A) :

1) LÖSE A (ZSF)

2) BESTIMME LINEAR UNABHÄNGIGE SPALTEN $\{a^{(i)}, a^{(j)}, \dots\}$ DER MATRIX A
(DIE MIT DEN PIVOT-ELEMENTEN IN DER ZSF)

3) $\text{BILD}(A) = \text{span}\{a^{(i)}, a^{(j)}, \dots\}$

KERN (A) :

1) $Ax = 0$ NACH x LÖSEN (EVT. FREIE VARIABELN)

2) $\text{KERN}(A) = \underline{x}$

BEISPIEL : $\text{KERN}(A) = \{ \overbrace{s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{x\text{-VEKTOR MIT FREIEN VARIABELN } s,t \in \mathbb{R}} \} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ s+t \end{bmatrix}$

ABLESEN

BASIS VON KERN(A) :

1) BASIS VON KERN(A) ABLESEN ALS KERN(A)

$\text{BASIS VON KERN}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

→ BSP : 28 - 34

KOORDINATEN / BASIS / BASISWECHSEL

SEI V EIN VEKTORRAUM MIT DIMENSION n.

- ERZEUGENDENSYSTEM : MINDESTENS n LINEAR UNABHÄNGIGE VEKTOREN $\in V$.
- BASIS (MINIMALES ERZEUGENDEN-SYSTEM) : GENAU n LINEAR UNABHÄNGIGE VEKTOREN $\in V$.

↳ · EINE BASIS IST NICHT EINDEUTIG! (ES GIBT UNENDLICH VIELE FÜR DENSELBEN V) :)
· ABER ALLE HABEN DIESELBE ANZAHL BASISVEKTOREN = $\dim(V)$

→ DURCH EINEN BASISWECHSEL VERLASSEN WIR V NICHT !

KOORDINATENVEKTOR BILDEN:

1) VEKTOR EXPLIZIT ALS LINEARKOMBINATION VON BASISVEKTOREN SCHREIBEN

2) ALS KOEFFIZIENTEN (DER BASISVEKTOREN) KONSISTENT DEN KOORDINATENVEKTOR BILDEN

$$p_1(t) \xrightarrow{k_B} \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

ZEIGE DASS $\{b_1, b_2, \dots b_n\}$ EINE BASIS IST :

1) KOORDINATEN ALLER BASISVEKTOREN $\{b_1, b_2, \dots b_n\}$ KONSISTENT BEZÜGLICH ALTER / BEKANNTER BASIS BILDEN UND ZU EINER MATRIX B SCHREIBEN

OFT STANDARDBASIS $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots$:)

2) ALLE SPALTEN VON B MÜSSEN LINEAR UNABHÄNGIG SEIN FÜR EINE BASIS. (DIE DIMENSION MUSS AUCH STIMMEN)

3*) FÜR ORTHONORMALBASIS (ONB) :
· ALLE $b^{(i)}$ NORM $\overset{!}{=} 1$
· ALLE $\langle b^{(i)}, b^{(j)} \rangle \overset{!}{=} 0$ ORTHOGONAL

Basiswechselmatrix : $\mathcal{B}$: alte Basis $\tilde{\mathcal{B}}$: neue Basis

Notation nebensächlich, aber seid euch im Klaren welche die alte bzw. neue Basis ist!

1) Bestimme B und $\tilde{B}$ Matrizen als den konsistenten Koordinatenvektoren der Basisvektoren bezüglich einer gemeinsamen (oft der alten) Basis.

2) $T := \tilde{B}^{-1} B$ (von der alten Basis $\mathcal{B}$ zu $\tilde{\mathcal{B}}$)

→ T wechselt jetzt die Koordinaten von einem Vektor v bezüglich $\mathcal{B}$ zu Koordinaten bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$. (der Vektor v bleibt gleich...)

$$\tilde{x} = \overset{\text{Basiswechselmatrix von } \mathcal{B} \text{ zu } \tilde{\mathcal{B}}}{T} x$$

Koordinaten

Alternative zu 2) :

- Schreibe B und $\tilde{B}$ wie unten nebeneinander und Gauße solange, bis aus $\tilde{B}$ die Identitätsmatrix I entsteht.
- Führe alle Schritte auf beiden Matrizen aus.

→ Aus B wurde jetzt die Basiswechselmatrix T (von $\tilde{\mathcal{B}}$ zu $\mathcal{B}$)

$$\begin{tikzcd} \left[\overset{\text{neu}}{\tilde{B}} \;\middle|\; \overset{\text{alt}}{B}\right] \arrow[d, "\text{Gaußen}"] \\ \underline{\underline{\left[I \;\middle|\; \overset{\text{Basiswechsel vom alt zu neu}}{T} \right]}} \end{tikzcd}$$

Bemerkung : Falls $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ ONB, so ist T orthogonal $(T^{-1} = T^{T})$

(B und $\tilde{B}$ sind die Matrizen, mit konsistenten Koordinaten aller Basisvektoren bezüglich einer (alten) Basis als Spalten)

→ BSP : 36 - 41

ABBILDUNGSMATRIZEN / KOMMUTATIVE DIAGRAMME

GEGEBEN : ABBILDUNGSVORSCHRIFT

ZB :

$$A : P_3 \longrightarrow P_2$$

$$x(t) \longmapsto \frac{d}{dt} x(t)$$

VEKTORRAUM V_1

SEI $\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\}$ UND $\tilde{\mathcal{B}}_1 := \{1 + t + t^2, 2 + 2t^2, t + 2t^2\}$ BASEN FÜR P_3 (URBILDRAUM)

SEI $\mathcal{B}_2 = \{1, t\}$ UND $\tilde{\mathcal{B}}_2 = \{1, 1 - t\}$ BASEN FÜR P_2 (BILDRAUM)

ALTE BASEN   NEUE BASEN

VEKTORRAUM V_2

LINEARITÄT VON ABBILDUNG ZEIGEN:

I) SETZE $(x + y)(t)$ IN DIE ABBILDUNGSVORSCHRIFT EIN UND ZEIGE DURCH UMFORMEN

I : $A(x + y)(t) = Ax(t) + Ay(t)$ (ADDITIVITÄT)

II) SETZE $\alpha x(t)$ IN DIE ABBILDUNGSVORSCHRIFT EIN UND ZEIGE DURCH UMFORMEN

II : $A(\alpha x)(t) = \alpha A x(t)$ (HOMOGENITÄT)

ABBILDUNGSMATRIX BESTIMMEN : BEZÜGLICH "ALTEN" BASEN $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$

1) JEDEN BASISVEKTOR ALS $\mathcal{B}_1$ ABBILDEN (IN ABBILDUNGSVORSCHRIFT EINSETZEN)

2) ↳ DIE KOORDINATENVEKTOREN (KONSISTENT) DER RESULTATE BEZÜGLICH $\mathcal{B}_2$ BILDEN

3) DIE KOORDINATENVEKTOREN (KONSISTENT) ALS MATRIX $\underline{\underline{A}}$ SCHREIBEN :)

→ BSP : 36 - 41

KOMMUTATIVE DIAGRAMME ZEICHNEN :

1) STARTE MIT DEN BEIDEN V_1, V_2 UND $\mathcal{A}$ DAZWISCHEN (HORIZONTAL)

2) ERGÄNZE BEIDE V_1, V_2 MIT DEN JEWEILIGEN BASEN / MATRIZEN (VERTIKAL)

3) FÜGE (VERBINDE) DIE BASISWECHSELMATRIZEN / PFEILE EIN (MIT JEWEILIGEN FORMELN)

4) FÜGE ALLE ABBILDUNGSMATRIZEN IN DEN RICHTIGEN BASEN EIN (HORIZONTAL)

→ KONKRETES BEISPIEL AUF FOLGENDEN SEITEN

$$B \cdot x = W \cdot A \cdot T \cdot x$$

$\tilde{B}_1 := \{1 + t + t^2,\ 2 + 2t^2,\ t + 2t^2\}$

$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\tilde{B}_2 = \{1,\ 1-t\}$

$\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{B}_1 \arrow[rr, bend left] \arrow[dd, bend right=60, "T"'] \arrow[d, shift left, "L_{\tilde{B}_1}^{-1}"] & & \tilde{B}_2 \arrow[d, shift left, "L_{\tilde{B}_2}^{-1}"] \arrow[dd, bend left=30, "W^{-1}"] \\
V_3 \arrow[u, "L_{\tilde{B}_1}"] \arrow[d, "L_{B_1}"'] \arrow[rr, "\mathcal{A}"] & & V_2 \arrow[u, "L_{\tilde{B}_2}"] \arrow[d, "L_{B_2}"'] \\
B_1 \arrow[rr, bend right, "A"'] \arrow[u, shift right, "L_{B_1}^{-1}"'] \arrow[uu, bend left=30, "T^{-1}"] & & B_2 \arrow[u, shift right, "L_{B_2}^{-1}"'] \arrow[uu, bend right=60, "W"']
\end{tikzcd}$$

$T = B^{-1} \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$W = \tilde{B}_2^{-1} B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$B_1 = \{1, t, t^2\}$

$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B_2 = \{1, t\}$

$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ABBILDUNGSMATRIX BESTIMMEN : BEZÜGLICH "NEUEN" BASEN $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2$

OPTION 1 : SELBES VERFAHREN, WIE ZUR BESTIMMUNG DER ABBILDUNGSMATRIX BEZÜGLICH "ALTEN" BASEN ... WHATS OLD/NEW ANYWAYS...

OPTION 2 : KOMMUTATIVES DIAGRAM ABLESEN ...

→ REIHENFOLGE DER MATRIZEN KONTERINTUITIV !

$$B = W \cdot A \cdot T \neq T \cdot A \cdot W$$

LIN. ABB.

ZB:

$$\mathcal{A} : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$$

$$x(t) \longmapsto \frac{d}{dt} x(t)$$

SEI $\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\}$ UND $\tilde{\mathcal{B}}_1 := \{1+t+t^2, 2+2t^2, t+2t^2\}$ BASEN FÜR $\mathcal{P}_3$ (URBILDRAUM) VEKTORRAUM V_1

SEI $\mathcal{B}_2 = \{1, t\}$ UND $\tilde{\mathcal{B}}_2 = \{1, 1-t\}$ BASEN FÜR $\mathcal{P}_2$ (BILDRAUM) VEKTORRAUM V_2

ALTE BASEN NEUE BASEN

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_3 \arrow[rrr, "\mathcal{A}", "\frac{d}{dt}{[\cdot]}"'] & & & \mathcal{P}_2
\end{tikzcd}$$

BASEL

$$\begin{tikzcd}
P_3 \arrow[rrr, "A"] \arrow[d, shift right, "L_{\mathcal{B}_1}"'] & & & P_2 \arrow[d, shift right, "L_{\mathcal{B}_2}"'] \\
\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\} \arrow[u, shift right, "L_{\mathcal{B}_1}^{-1}"'] & & & \mathcal{B}_2 = \{1, t\} \arrow[u, shift right, "L_{\mathcal{B}_2}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ABB. MATRIX

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_3 \arrow[rr, "\mathcal{A}"] \arrow[d, shift right, "L_{\mathcal{B}_1}"'] & & \mathcal{P}_2 \arrow[d, shift right, "L_{\mathcal{B}_2}"'] \\
\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\} \arrow[u, shift right, "L_{\mathcal{B}_1}^{-1}"'] \arrow[rr, bend right, "A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}"'] & & \mathcal{B}_2 = \{1, t\} \arrow[u, shift right, "L_{\mathcal{B}_2}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

BASEN-
WECHSEL

$\tilde{\mathcal{B}}_1 := \{1 + t + t^2, 2 + 2t^2, t + 2t^2\}$

$\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\}$

$\mathcal{B}_2 = \{1, t\}$

$$\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \arrow[dd, bend right=60, "T = B^{-1}\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}"'] \arrow[d, shift left, "L_{\tilde{\mathcal{B}}_1}^{-1}"] & \\
\mathcal{P}_3 \arrow[u, shift left, "L_{\tilde{\mathcal{B}}_1}"] \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[d, shift right, "L_{\mathcal{B}_1}"'] & \mathcal{P}_2 \arrow[d, shift right, "L_{\mathcal{B}_2}"'] \\
B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \arrow[u, shift right, "L_{\mathcal{B}_1}^{-1}"'] \arrow[uu, bend left=40, "T^{-1}"] \arrow[r, bend right, "A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}"'] & B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \arrow[u, shift right, "L_{\mathcal{B}_2}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

BASENWECHSEL

$$\tilde{\mathcal{B}}_1 := \{ 1 + t + t^2 , \; 2 + 2t^2 , \; t + 2t^2 \}$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_2 = \{ 1 , \; 1 - t \}$$

$$\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathcal{B}}_1 \arrow[d, gray, shift left, "L_{\tilde{\mathcal{B}}_1}^{-1}"] \arrow[dd, bend right=50, "T"'] & & \tilde{\mathcal{B}}_2 \arrow[d, gray, shift left, "L_{\tilde{\mathcal{B}}_2}^{-1}"] \arrow[dd, gray, bend left=20, "S^{-1}"] \\
V_3 \arrow[u, shift left, "L_{\tilde{\mathcal{B}}_1}"] \arrow[d, "L_{\mathcal{B}_1}"'] \arrow[rr, "\mathcal{A}"] & & V_2 \arrow[u, shift left, "L_{\tilde{\mathcal{B}}_2}"] \arrow[d, "L_{\mathcal{B}_2}"'] \\
\mathcal{B}_1 \arrow[u, gray, shift right, "L_{\mathcal{B}_1}^{-1}"'] \arrow[uu, gray, bend left=20, "T^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "A"'] & & \mathcal{B}_2 \arrow[u, gray, shift right, "L_{\mathcal{B}_2}^{-1}"'] \arrow[uu, bend right=50, "S"']
\end{tikzcd}$$

$$T = B^{-1} \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S = \tilde{B}_2^{-1} B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_1 = \{ 1 , t , t^2 \}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{ 1 , t \}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

KOMMU-TATIVITÄT oder so :)

$$B \cdot x = W \cdot A \cdot T \cdot x$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\tilde{\mathcal{B}}_1 := \{1+t+t^2,\ 2+2t^2,\ t+2t^2\} \arrow[rr, bend left, "B \cdot x = W \cdot A \cdot T \cdot x"] \arrow[dd, bend right=60, "T"'] \arrow[d, shift left, gray, "L_{\tilde{B}_1}^{-1}"] & & \tilde{\mathcal{B}}_2 = \{1,\ 1-t\} \arrow[d, shift left, gray, "L_{\tilde{B}_2}^{-1}"] \arrow[dd, bend left=30, gray, "W^{-1}"] \\
V_3 \arrow[u, shift left, "L_{\tilde{B}_1}"] \arrow[d, shift right, "L_{B_1}"'] \arrow[rr, "\mathcal{A}"] & & V_2 \arrow[u, shift left, "L_{\tilde{B}_2}"] \arrow[d, shift right, "L_{B_2}"'] \\
\mathcal{B}_1 = \{1,\ t,\ t^2\} \arrow[u, shift right, gray, "L_{B_1}^{-1}"'] \arrow[uu, bend left=30, gray, "T^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "A"'] & & \mathcal{B}_2 = \{1,\ t\} \arrow[u, shift right, gray, "L_{B_2}^{-1}"'] \arrow[uu, bend right=60, "W"']
\end{tikzcd}$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = B^{-1} \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

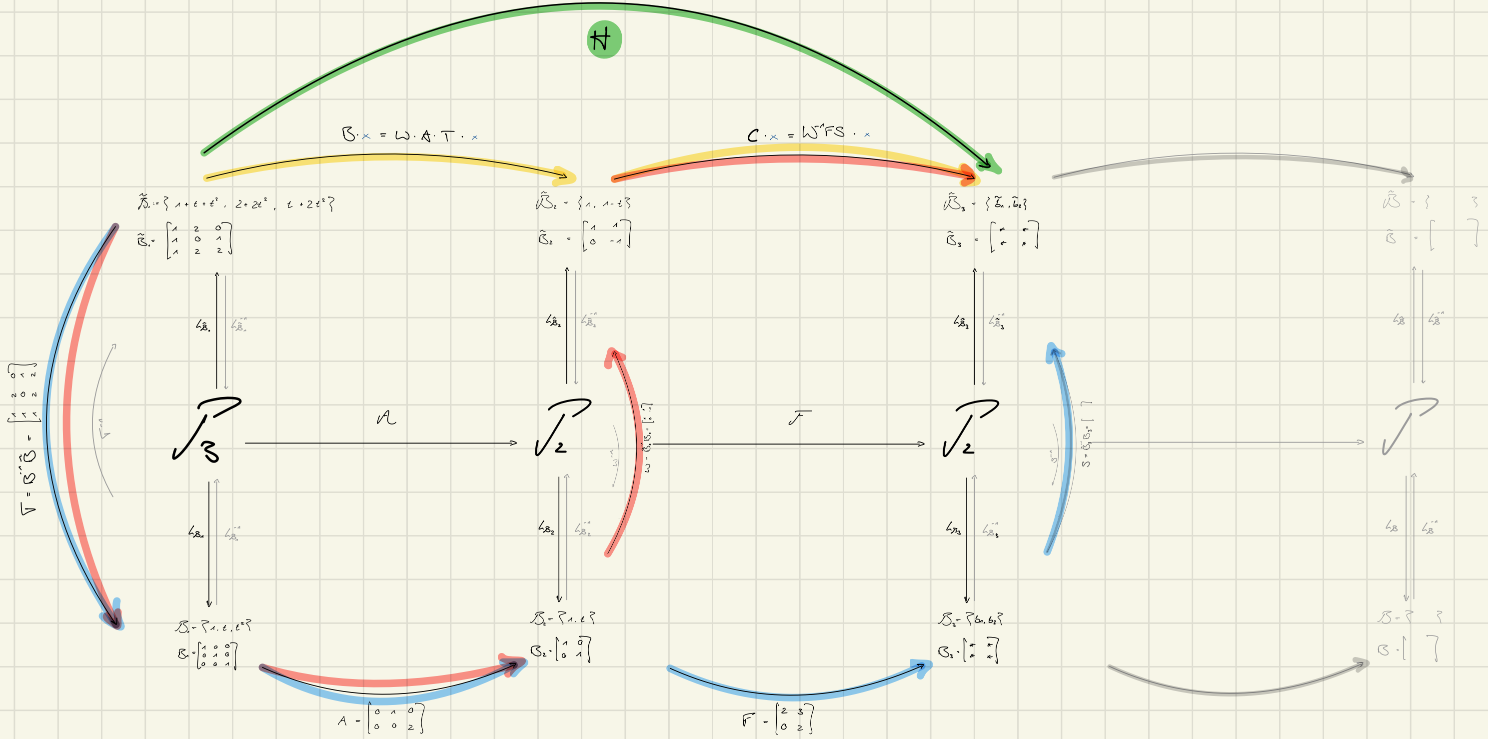
$$W = \tilde{B}_2^{-1} B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

VERKNÜPFTE LIN. ABBILDUNGEN

$\mathcal{H} = \mathcal{F} \circ \mathcal{A} = \mathcal{F}(\mathcal{A}(x(t))) : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$

$H = C \cdot B = S \cdot F \cdot A \cdot T = C \cdot W \cdot A \cdot T$



→ BSP: 49 - 52

AUSGLEICHSRECHNUNG

GEGEBEN: m FEHLERGLEICHUNGEN MIT n UNBEKANNTEN
(ÜBERBESTIMMTES LGS $\Longleftrightarrow m > n$)

BESTMÖGLICHES x VON $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c} = \underline{r}$:

1) FEHLER (VEKTOR) DEFINIEREN / BERECHNEN: r_i = EXAKTER/TABELLENWERT − 'GEMESSENER WERT'

HÄNGT VON UNBEKANNTEN AB :)

2) SCHREIBE TABELLE / SKIZZE / ... IN FOLGENDE FORM: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c} = \underline{r}$

3) SETZE WERTE IN MATRIX EIN

NORMALENGLEICHUNG

$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^T \underline{c}$ NACH x LÖSEN

MIT QR-MATRIX

$\rightsquigarrow$ FALLS $A = QR = Q \cdot \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$

1) $\underline{\underline{R}} := \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (QR-ZERLEGUNG VON A, ...)

2) $\underline{d} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} := \underline{\underline{Q}}^T \underline{c}$ (BERECHNE d)

3) $\underline{\underline{R_0}}\,\underline{x} = d_0$ (NACH x LÖSEN)

(BSP. P. 145 SKRIPT)

MIT SVD

SKRIPT P. 196

$\rightsquigarrow$ FALLS $A = U \Sigma V^T$

1) DEFINIERE U_r, Σ_r, V_r^T

$$= \begin{bmatrix} \underbrace{U_r}_{\text{ENTHÄLT DIE ERSTEN } r \text{ SPALTEN}} & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$$

ENTHÄLT DIE ERSTEN r ZEILEN

2) BERECHNE $x = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T b$

→ BSP. 53

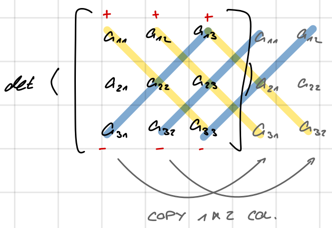
DETERMINANTEN : $(2\times 2,\ 3\times 3,\ n\times n)$

HIER WERDEN WIR EVT. ETWAS ABKÜRZEN...

2x2 :

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11}$$

3x3 : REGEL VON SARRUS



$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right) = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

nxn : ENTWICKLUNGSSATZ VON LAPLACE (GEHT FÜR ALLE QUADRATISCHEN MATRIZEN)

FORMAL : $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$ MIT $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: ENTWICKLUNG NACH DER j-TEN SPALTE.

ODER : $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$ MIT $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: ENTWICKLUNG NACH DER i-TEN ZEILE.

→ MAN DARF EINE DETERMINANTE NACH EINER BELIEBIGEN ZEILE ODER SPALTE (VORZUGSWEISE MIT VIELEN NULLEN) ENTWICKELN, SOLANGE MAN DABEI DAS SCHACHBRETTARTIGE VORZEICHENMUSTER BEIBEHÄLT.

ZB 3x3 : VORZEICHENMUSTER :

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

→ BEISPIELE INCOMING :)

→ COMMON SHORTCUTS :

- REDUZIERTER GAUSS-ALGORITHMUS ⟹ OBERE DREIECKSFORM
- DETERMINANTE VON DREIECKSMATRIZEN (DIAGONALMATRIZEN) IST DAS PRODUKT IHRER DIAGONALELEMENTE.
- DETERMINANTEN VON MATRIZEN MIT GLEICHEN ZEILEN / SPALTEN IST NULL.
- DETERMINANTEN VON MATRIZEN MIT NULL - ZEILEN / SPALTEN IST NULL.

DETERMINANTEN

(DAS WICHTIGSTE, $\alpha \in \mathbb{R}$)

EIGENSCHAFTEN :

- $\det(A) = 0 \iff A$ IST SINGULÄR : A IST NICHT INVERTIERBAR UND φ IST NICHT BIJEKTIV :)
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$: HIER ALSO BITTE NIE ZUERST A^{-1} BERECHNEN :)
- $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det(A)$: DIE DETERMINANTE IST LINEAR IN JEDER ZEILE UND SPALTE ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

MODIFIKATION :

- ZEILENTAUSCH : $\det(A) = -\det(A)$: ACHTUNG ZUR BERECHNUNG VIA GAUSSEN :0
- SPALTENTAUSCH : $\det(A) = -\det(A)$
- ZEILENADDITION ODER SUBTRAKTION : $\det(A) = \det(A)$ (!) : NÜTZLICH ZUR BERECHNUNG VIA GAUSSEN :)

→ BSP: 54 - 64

EIGENWERTE / EIGENVEKTORE / DGL

GEGEBEN: MATRIX $A^{n\times n}$, GESUCHT: $\boxed{Av = \lambda v}$ $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{R}^n$

EIGENWERTE BESTIMMEN:

1) LÖSE $\underbrace{\det(A - \lambda I)}_{\text{CHARAKTERISTISCHES POLYNOM}^{(*)}} \overset{!}{=} 0$ (BESTIMME ALLE n NULLSTELLEN)

2) ALGEBRAISCHE MULTIPLIZITÄT VON $\lambda \;\widehat{=}$ "WIE OFT KOMMT DIE NULLSTELLE λ VOR".

EIGENVEKTOR EV_i ZU EIGENWERT λ_i BESTIMMEN:

1) LÖSE $(A - \lambda_i I)\, x = 0$ NACH x ($EV_i = x$)

↳ DABEI SOLLTE ES ZU RANGVERLUSTE / FREIE VARIABELN KOMMEN

2) BESTIMME DIE EIGENRÄUME ZU JEDEM EIGENWERT

$$E_{\lambda_i} = \text{SPAN}\{\ldots, \ldots\}$$

(SIEHE BEISPIEL)

3) GEOMETRISCHE MULTIPLIZITÄT VON $\lambda_i \;\widehat{=}$ DIMENSION VON E_{λ_i}
$\widehat{=}$ WIE VIELE VEKTOREN SIND IM SPAN{ } VON E_{λ_i}

BEMERKUNGEN:

- FALLS A SYMMETRISCH (IMMER DIAGONALISIERBAR :)) IST SIND ALLE $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (SPEKTRALSATZ)
- FALLS A SYMMETRISCH IST SIND ALLE E_{λ_i} ORTHOGONAL ZUEINANDER (SPEKTRALSATZ)
- FALLS A SYMMETRISCH POSITIV DEFINIT IST SIND ALLE $\lambda_i \in \mathbb{R} > 0$ (PER DEFINITION)
- VERSCHIEDENE EIGENWERTE HABEN LINEAR UNABHÄNGIGE EIGENVEKTORE. (BEWEIS IM SKRIPT GRADMARK 7.2.0.23)

(*) DAS CHARAKTERISTISCHE POLYNOM IST IMMER VON GRAD n DER FOLGENDEN FORM:

$$\text{CHP}(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0$$

MIT $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = \text{TR}(A)$, $a_0 = (-1)^n \cdot \det(A)$

"DIAGONALISIERBAR"?:

1) BESTIMME GEOMETRISCHE UND ALGEBRAISCHE MULTIPLIZITÄT VON ALLEN EIGENWERTEN

2) ÜBERPRÜFE OB SIE JEWEILS ÜBEREINSTIMMEN.

→ JA: DIAGONALISIERBAR

NEIN: NICHT DIAGONALISIERBAR

DIAGONALISIERE A: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$

1) BESTIMME ALLE EIGENWERTE λ_i VON A UND DIE ZUGEHÖRIGEN EIGENVEKTOREN $\underline{EV}_i$

2) BILDE $\underline{\underline{S}}$ UND $\underline{\underline{D}}$ (UND BERECHNE $\underline{\underline{S}}^{-1}$)

$$\underline{\underline{D}} := \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{S}} := \begin{bmatrix} \underline{EV}_1 & \underline{EV}_2 & \dots & \underline{EV}_n \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$$

TRICK: FALLS A SYMMETRISCH IST, STEHEN DIE EIGENRÄUME ORTHOGONAL ZUEINANDER

→ FALLS ALLE GEOMETRISCHEN MULTIPLIZITÄTEN = 1 SIND, MÜSSEN DIE EIGENVEKTOREN NUR NOCH NORMIERT WERDEN DAMIT $\underline{\underline{S}}$ ORTHOGONAL IST (UND DAMIT $S^{-1} = S^T$)

$$\Longrightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{S}}^{T}$$

BEMERKUNG: A UND D HEISSEN ÄHNLICH: SELBE EIGENWERTE, SPUR & DETERMINANTE

→ FALLS $GM(\lambda_i) > 1$ MÜSSTE DIE BASIS DES EIGENRAUM E_{λ_i} ZUERST NOCH MIT GRAM-SCHMIDT NORMIERT WERDEN. (UNWAHRSCHEINLICH AN PRÜFUNG)

MATRIXPOTENZEN

('GANZE' HERLEITUNGEN IN THEORIE LV08)

SEI A DIAGONALISIERBAR $(A = SDS^{-1})$

BERECHNUNG MATRIXPOTENZ :

- VIA DIAGONALISIERUNG

$$\underline{\underline{A}}^k = (SDS^{-1})^k = \underbrace{(SD\underbrace{S^{-1})(S}_{=I}D\underbrace{S^{-1})(S}_{=I}DS^{-1}) \dots (SDS^{-1})}_{k\text{-MAL}}$$

$$= \underline{\underline{S D^k S^{-1}}}$$

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1 & & & & 0 \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & d_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} d_1^k & & & & 0 \\ & d_2^k & & & \\ & & d_3^k & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & d_n^k \end{bmatrix}$$

- NILPOTENZ : FALLS A NILPOTENT MIT GRAD $p > 0$ IST, WIRD DAS PRODUKT

$A^k \neq 0$ FUR $k \in \{1, \dots, p-1\}$ UND $A^p = 0$

MATRIXEXPONENTIAL

('GANZE' HERLEITUNGEN IN THEORIE W08)

SEI A DIAGONALISIERBAR $(A = SDS^{-1})$

BERECHNUNG MATRIXEXPONENTIALS:

- VIA DIAGONALISIERUNG

ANALOG ZU $e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(SDS^{-1})^n t^n}{n!} = \underset{\text{HERLEITUNG IN MY THEORIE SLIDES}}{\ldots\ldots\ldots} = S \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} S^{-1}$$

λ_i : EIGENWERTE VON A
(KONSISTENT)

NILPOTENZ : FALLS A NILPOTENT MIT GRAD $p > 0$ IST WIRD DIE SUMME ENDLICH:

BSP: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$

$$\implies e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + \underbrace{\frac{\overset{\swarrow 0}{\boxed{A^2}}}{2!} + \frac{\overset{\swarrow = A^2 \cdot A,\ A^2 \swarrow 0}{A^3}}{3!} + \ldots}_{=0}$$

$$= I + A = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

EIGENSCHAFTEN:

- $e^{\alpha A} \cdot e^{\beta A} = e^{(\alpha + \beta) \cdot A}$
- $(e^A)^p = e^{p \cdot A}$
- $(e^A)^T = e^{A^T}$

$\rightsquigarrow \det(e^A) = e^{\operatorname{TR}(A)} > 0$

$\leftarrow$ ACHTUNG : $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ NUR FALLS $[A,B] = 0$
$\iff AB = BA$

ALSO AUCH $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

SIDENOTE : FALLS A NICHT DIAGONALISIERBAR WÄRE, MÜSSTE MAN SIE IN DIE REIHE EINSETZEN ODER JORDAN-BLÖCKE BENUTZEN... (AUSSERHALB DER VORLESUNG)

PROBABLY SLIPPED IN #324

'DGL LÖSEN' (PRÜFUNGSAUFGABE ABLAUF)

GEGEBEN : DGL $\dot{y} = Ay$ UND $y(0) = \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}$ ANFANGSBEDINGUNGEN

ALLGEMEINE LÖSUNG DES DGL :

1) DIAGONALISIERE A

2) BILDE $y(t) = \underline{s}^{(1)} e^{\lambda_1 t} \cdot C_1 + \underline{s}^{(2)} e^{\lambda_2 t} \cdot C_2 + \underline{s}^{(3)} e^{\lambda_3 t} \cdot C_3 \quad \dots$

IRGENDEINE SUBSTITUTION :)

KONSTANTEN $v(0) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} := S^{-1} y(0)$

$\Leftrightarrow \underline{S}\,\underline{v(0)} = y(0)$

EIGENVEKTOREN $\underline{s}^{(i)}$ VON A ZU ZUGEHÖRIGEN EIGENWERT λ_i

EIGENWERTE λ_i VON A

SPEZIELLE LÖSUNG DER DGL :

1) BESTIMME DIE ALLGEMEINE LÖSUNG $y(t) = \underline{s}^{(1)} e^{\lambda_1 t} \cdot C_1 + \underline{s}^{(2)} e^{\lambda_2 t} \cdot C_2 + \underline{s}^{(3)} e^{\lambda_3 t} \cdot C_3$.

2) BESTIMME $v(0) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$

DURCH GAUSSEN VON $\underline{S}\,\underline{v(0)} = y(0)$ (NACH $v(0)$ LÖSEN)

3) $C_1, C_2, \dots$ IN DIE ALLGEMEINE LÖSUNG EINSETZEN :)

PUNKT 1)

KONVERGENZ VON $y(t)$ ZU 0 FÜR $t \to \infty$:

1) FALLS $\lambda_i < 0$ IST $C_i = \alpha \in \mathbb{R}$
DER THERM KONVERGIERT SOWIESO ZU 0 $(t \to \infty)$

2) FALLS $\lambda_i \geq 0 \longrightarrow C_i \overset{!}{=} 0$

3) $v(0) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$ AUFSCHREIBEN

4) $y(0) = S^{-1} v(0)$ BERECHNEN ! (NICHT VERGESSEN)

ANFANGSBEDINGUNG FÜR DIE FUNKTION

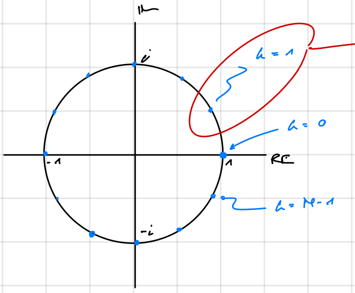
→ Bsp. 60

FOURIER · MATRIZEN : IN KÜRZE

SEI $S_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}$

DAS CHARAKTERISTISCHE POLYNOM LAUTET $\lambda^N = 1$

SO HAT SIE DIE N EIGENWERTE $\lambda_k = e^{2\pi i \frac{k}{N}}$ FÜR $k = 0, \dots, N-1$



DER EIGENWERT $\lambda_1 = e^{2\pi i \cdot \frac{1}{N}}$

NENNEN WIR $\overline{\omega}_N$

$\Longrightarrow \omega_N = e^{-2\pi i \cdot \frac{1}{N}}$

UND DEFINIEREN $F := \begin{bmatrix} \omega_N^{0\cdot 0} & \omega_N^{1\cdot 0} & \omega_N^{2\cdot 0} & \cdots & \omega_{N-1}^{(N-1)\cdot 0} \\ \omega_N^{0\cdot 1} & \omega_N^{1\cdot 1} & \omega_N^{2\cdot 1} & \cdots & \omega_{N-1}^{(N-1)\cdot 1} \\ \omega_N^{0\cdot 2} & \omega_N^{1\cdot 2} & \omega_N^{2\cdot 2} & \cdots & \omega_{N-1}^{(N-1)\cdot 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_N^{0\cdot (N-1)} & \omega_N^{1\cdot (N-1)} & \omega_N^{2\cdot (N-1)} & \cdots & \omega_{N-1}^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ ALS FOURIER MATRIX.

UND OBSERVIEREN GILT $V = \begin{bmatrix} \lambda_0^0 & \lambda_1^0 & \lambda_2^0 & \cdots & \lambda_{N-1}^0 \\ \lambda_0^1 & \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \cdots & \lambda_{N-1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda_0^{(N-1)} & \lambda_1^{(N-1)} & \lambda_2^{(N-1)} & \cdots & \lambda_{N-1}^{(N-1)} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & & 0 \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{N-1} \end{bmatrix}$

WOBEI $S = V D V^{-1}$

BZW $S = U \cdot D \cdot U^H$

MIT $U := \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot V$

SCHUR · ZERLEGUNG

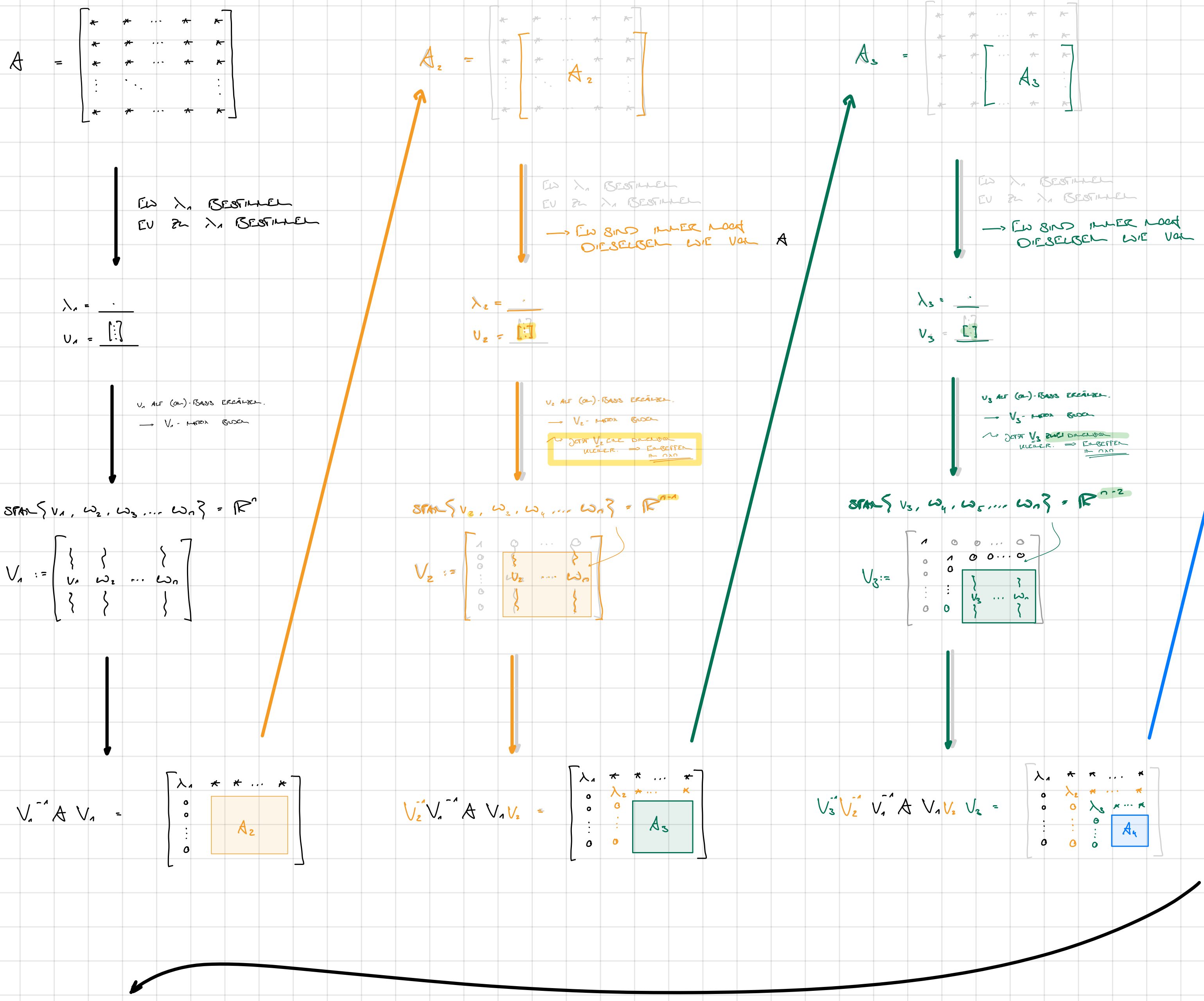
→ BSP. 61, 62

ZIEL: ZERLEGUNG EINER QUADRATISCHEN MATRIX $A^{n \times n}$ (ABER NICHT DIAGONALISIERBAR)

$$\boxed{A = U T U^*}$$

MIT $U^{n \times n}$ UNITÄR

MIT $T^{n \times n}$ OBERE DREIECKSMATRIX MIT EW VON A AUF HAUPTDIAGONALE.



→ SOLANGE BIS RESULTAT EINE OBERE DREIECKSMATRIX IST.

→ PRODUKT $V_1 \cdot V_2 \cdot \ldots V_{n-1}$ MIT GRAM-SCHMIDT ORTHONORMALISIEREN. ⟹ Q

→ $R := Q^* A Q$ NOCHMALS BERECHNEN.

KOCHREZEPT : SVD VON $A^{m\times n} = U\cdot\Sigma\cdot V^T$

EIGENSCHAFTEN:
THEORIE_W13

U, V ORTHOGONAL !

→ BSF: 65 - 67

(*)

1) BERECHNE A^TA ← IST DIREKT SYMMETRISCH POSITIV SEMI-DEF. UND REELL
↳ ORTHOGONALE EV

2) BERECHNE EW$^{(1)}$ UND EV$^{(2)}$ VON A^TA

(1) : $\det(A^TA - \lambda I) \overset{!}{=} 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = \_\_\_ ; \dots ; \lambda_n = \_\_\_$

(2) : $(A^TA - \lambda_i I)x = 0 \Longleftrightarrow \underline{v}_1 = [\ ] ; \dots ; \underline{v}_n = [\ ]$

↳ NORMIERE ALLE EV $\Longrightarrow$ V ORTHOGONAL

2.1) BILDE $\underline{\underline{V}}^{n\times n}$ ALS EV (NORMIERT) $\Longrightarrow \underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \underline{v}_1, & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

2.2) BILDE V^T ($= V^{-1}$, DA V ORTHOGONAL)

3) BERECHNE SINGULÄRWERTE σ_i

↳ $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$ (SORTIEREN : $\sigma_1 > \sigma_2 \dots$)

3.1) BILDE $\Sigma^{m\times n}$ → $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & 0 \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_r & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$

4) BERECHNE ALLE SPALTEN VON $U^{m\times m}$

↳ $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i = [\ ]$

↳ ERGÄNZE ZU ONB ENTSPRECHEND DIMENSIONEN (KREUZPRODUKT, GRAM-SCHMIDT, ...)

↝ EIGENTLICH SIND u_i EIGENVEKTOREN VON AA^T

4.1) BILDE $U^{m\times m}$ ← $U^{m\times m} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1, & u_2 & \dots & u_3 \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

(*) : FALLS $A^{m\times n}$ MIT $n \gg m$ LOHNT ES SICH (VON HAND) ZUERST DIE SUBSTITUTION

$A_1 := A^T$ ZU MACHEN, UND DIE SVD VON $A_1 = U_1 \Sigma_1 V_1^T$ ZU BERECHNEN.

DIE SVD VON A IST DANN $A = V_1 \Sigma_1^T U_1^T$

→ BSP: 68

SVD : ABLESEN

GEGEBEN : FERTIGE SINGULÄRWERTZERLEGUNG $A = U \Sigma V^T$

r = RANG(A) : $\hat{=}$ ANZAHL SINGULÄRWERTE > 0 (IN Σ)

DIMENSIONEN VON A : $\hat{=}$ DIMENSIONEN VON Σ (IN Σ)

2-NORM VON A : $\hat{=}$ σ_1 , GRÖSSTER SINGULÄRWERT (IN Σ)

ONB VON BILD (A) : $\hat{=}$ SPAN $\{u_1, \dots u_r\}$ SPALTEN IN U (IN U)

ONB VON KERN (A) : $\hat{=}$ SPAN $\{v_{r+1}, \dots v_n\}$ SPALTEN IN V (NICHT V^T) (VIA V^T)

"ALS SUMME VON RANG 1 MATRIZEN"

$\longrightarrow A = \sigma_1 \cdot u_1$ (SPALTE) $\cdot\, v_1^T$ (ZEILE) $+\ \sigma_2 \cdot u_2$ (SPALTE) $\cdot\, v_2^T$ (ZEILE) $+ \dots$

BEWEISE : EINE ABWÄGUNGSFRAGE

IN DEN BEISPIELEN BEFINDEN SICH AM SCHLUSS EINIGE BEWEISAUFGABEN ...

LEIDER IST ES WEDER MÖGLICH, NOCH SINNVOLL ALLE BEWEISE ZU BESPRECHEN.

DESHALB IST NUR EINE (KLEINE) AUSWAHL AN BEWEISEN IN DEN BEISPIELEN.

TIPP : FOKUSSIERT EUCH AUF DIE MC IN DEN SERIEN (ALTE PRÜFUNGEN)

ALLES GUTE.

FRAGEN ODER ANMERKUNGEN :

jamatter@ethz.ch

:)