PROBEPRÜFUNG A3

DIESES A BEACHTEN WIR IN DER NÄCHSTEN AUFGABE

Sei P_k der Vektorraum der Polynome vom Grad $< k$ für $k \in \mathbb{N}$.

Betrachten Sie die folgende Abbildung

$$\cancel{A}: P_n \to P_{n+1}$$
$$p(X) \mapsto 2p'(X) + \int_0^X p'(x)dx$$

- A ist nie eine Lineare Abbildung.
- A ist eine Lineare Abbildung nur für $n > 2$.
- Keine der anderen Antworten ist generell richtig.
- A ist eine Lineare Abbildung.

Bewertungsmethode: **SC1/0**

Betrachten wir nun die Komposition von A aus der vorherige Aufgabe mit der *Auswertungsabbildung*

$$E_a(p(X)) = p(a)$$

für $a \in \mathbb{R}$.

DIESER TEIL DER AUFGABE SAGT EUCH EINFACH NUR, WAS $E_a(\cdot)$ MACHT.

"$E_a(p(x))$ NIMMT EIN POLYNOM $p(x)$ UND ERSETZT JEDES x MIT EINEM a."

ZB.

$$E_a(1 + 3x + 7x^2) = 1 + 3a + 7a^2 \in \mathbb{R}$$

Welches Polynom $p_a(X)$ repräsentiert $\boxed{E_a \circ A : P_2 \to \mathbb{R}}$ mit Hilfe des Rieszschen Repräsentationssatzes, wenn man P_2 mit dem inneren Produkt

$$\langle p(X), q(X)\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

ausstattet?

UM DIESE VERKNÜPFTE LINEARE ABBILDUNG A GEHTS WIRKLICH...

$p_a(X) =$ x^2+a

SEI P_2 EIN VEKTORRAUM

1) MIT EINEM SKALARPRODUKT $\langle p(x), q(x)\rangle := \int_0^1 p(x), q(x)\, dx$

UND EINER VERKNÜPFTEN LINEAREN ABBILDUNG $E_a(A(p(x))) = E_a \circ A$

SO EXISTIERT EIN EINDEUTIGES POLYNOM $p_a(x) \in P_2$

SODASS $E_a(A(p(x))) = \langle p(x), p_a(x)\rangle$ FÜR ALLE $p(x) \in P_2$

ZIEL: FINDE $p_a(x)$ EXPLIZIT. FALLS WIR DIESES $p_a(x)$ GEFUNDEN HABEN, KÖNNEN WIR UNS IRGENDEIN POLYNOM $p(x)$ ÜBERLEGEN, (ZB $p(x) = 1 + x$) UND UNS DIE BERECHNUNG VON $E_a(A(p(x)))$ "SPAREN", INDEM WIR EINFACH DAS SKALARPRODUKT $\langle p(x), p_a(x)\rangle$ BERECHNEN.

1) $p(x) \in P_2$ HAT FOLGENDE FORM $c_0 + c_1 \cdot x$ MIT $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$

2) WIR SUCHEN $p_a(x) \in P_2$, SODASS $E_a(A(p(x))) = \langle p(x), p_a(x)\rangle$

3) WIR SETZEN DIE MONOMIALBASIS $\{1, x\}$ VON P_2 IN $E_a(A(p(x)))$ EIN.

HIER HÄTTEN WIR ZWEI BELIEBIGE LINEAR UNABH. VEKTOREN NEHMEN KÖNNEN... ABER WÄRE KOMPLIZIERTER :/

$p(x) = 1$; $p(x) = 1 \Rightarrow p'(x) = 0$

FÜR $p(x) = 1$: $E_a(A(1)) = E_a\left(2 \cdot 0 + \int_0^x 0\, dx\right) = E_a(0) = \underline{\underline{0}}$

$p(x) = x$; $p(x) = x \Rightarrow p'(x) = 1$

FÜR $p(x) = x$: $E_a(A(x)) = E_a\left(2 \cdot 1 + \int_0^x 1\, dx\right) = E_a(2 + x) = \underline{\underline{2 + a}}$

3) UND WIR VERLANGEN, DASS DIE BEIDEN ERGEBNISSE DASSELBE SEIN MÜSSEN.
WIE WENN WIR DIE SKALARPRODUKTE MIT 1 BZW. X UND $p_a(x)$ DIREKT BERECHNET HÄTTEN.

$$E_c(\mathcal{A}(1)) = \boxed{0} \overset{!}{=} \langle 1, p_a(x)\rangle = \int_0^1 1\cdot p_a(x)\,dx \overset{(*)}{=} \alpha + \frac{\beta}{2}$$

$$E_c(\mathcal{A}(x)) = \boxed{2+a} \overset{!}{=} \langle x, p_a(x)\rangle = \int_0^1 x\cdot p_a(x)\,dx \overset{(*)}{=} \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}$$

IHR WISST WIE DAS SKALARPRODUKT AUSSIEHT AUS DER AUFGABE...

(*) WIR WISSEN ÜBRIGENS AUCH, WIE $p_a(x)$ AUSSIEHT ... $p_a(x) = \alpha + \beta x \in P_2$

ALSO WIRD ZB. $\int_0^1 p_a(x)\,dx = \int_0^1 \alpha + \beta x\,dx = \left[\alpha x + \frac{\beta x^2}{2}\right]_0^1 = \alpha + \frac{\beta}{2}$

⤳ ANALOG FÜR $\int_0^1 x\cdot p_a(x)\,dx = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}$

4) $\square \overset{!}{=} \square$ ← <u>LGS</u>

DAS BEDEUTET NUN ABER:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 0 = \alpha + \frac{\beta}{2} \\ \text{II} \quad & 2+a = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} \end{aligned}$$

IN MATRIX-FORM UND GAUSSEN...
MACHT α, β LÖSEN :)

$$\text{LGS} \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 2+a \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{aligned} \alpha &= -6a - 12 \\ \beta &= 12a + 24 \end{aligned}$$

$$p_a(x) = (-6a - 12) + (12a + 24)x$$

ÜBERPRÜFEN

WIR WOLLEN $\boxed{p_a(x) = (-6a - 12) + (12a + 24)x}$ ÜBERPRÜFEN.

$\boxed{p(x) = 1 + x}$ ← BELIEBIGES TEST-POLYNOM

COOL WÄRE ES, WENN ... : $\langle p(x), p_a(x) \rangle \overset{?}{=} E_a(A(p(x)))$

$p(x) = 1+x$
$p'(x) = 1$

$$\int_0^1 (1+x)\big((-6a - 12) + (12a + 24)x\big) \overset{?}{=} E_a(A(1+x)) = E_a\left(2 \cdot 1 + \int_0^x 1\,dx\right)$$

$$= E_a(2 + x)$$

$\|$ ← MIT DEM COMPUTER BERECHNET :)

$$a + 2 \;=\; = 2 + a$$

:) WIR WOLLTEN DIE VERKNÜPFTE ABBILDUNG $E_a(A(p(x)))$ ALS $\langle p(x), p_a(x) \rangle$ MIT $p_a(x) = (-6a - 12) + (12a + 24)x$ DARSTELLEN :)

$$p(x) = 1 + x$$
$$A(p(x)) = 2 + x$$
$$E_a(A(p(x))) = \underline{2 + a}$$