

Regelungstechnik I HS 2020

Analyse von Linearen Systemen - Teil II

Zusammenfassung Vorlesung 5

Buch Kapitel 5

Autoren: C. Küttel, M. Reinders, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

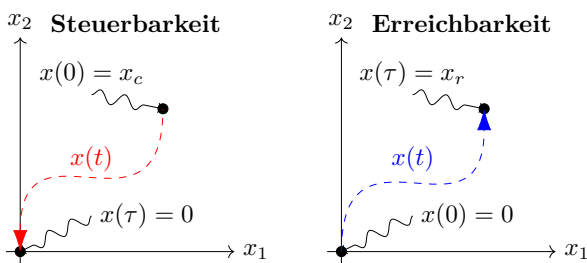
Bei Fragen: morettog@ethz.ch, davidm@ethz.ch

Gegeben sei ein Lineares Zeit Invariantes (LZI) System:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + b \cdot u(t) & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^{n \times 1} \\ y(t) &= c \cdot x(t) + d \cdot u(t) & c \in \mathbb{R}^{1 \times n}, d \in \mathbb{R} \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\quad (1)$$

1 Steuerbarkeit / Erreichbarkeit

Ein Punkt $x_c \in \mathbb{R}^n$ ist steuerbar, falls ein Eingangssignal $u(t)$ existiert das den Zustandsvektor des Systems von $x(0) = x_c$ zum Zustand $x(\tau) = 0$ (zum Ursprung) in endlicher Zeit τ bringt. Falls alle Punkte in \mathbb{R}^n steuerbar sind, heisst das System vollständig steuerbar. Ein System ist potentiell stabilisierbar, falls alle nicht-steuerbaren Zustände asymptotisch stabil sind.



Ein Punkt $x_r \in \mathbb{R}^n$ ist erreichbar, falls ein Eingangssignal $u(t)$ existiert, das den Zustandsvektor des Systems von Zustand $x(0) = 0$ zum Zustand $x(\tau) = x_r$ in endlicher Zeit τ bringt. Falls alle Punkte in \mathbb{R}^n erreichbar sind, heisst das System vollständig erreichbar.

Wichtig: Für LZI Systeme sind die Teilräume der erreichbaren und steuerbaren Zustände identisch.

Das System ist vollständig steuerbar/erreichbar, wenn die **Steuerbarkeitsmatrix** \mathcal{R} (reachability/controllability matrix) vollen Rang hat.

$$\mathcal{R} = [b, \quad A \cdot b, \quad A^2 \cdot b, \quad \dots, \quad A^{n-1} \cdot b]$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da $\text{rank}(\mathcal{R}) = 1 < n$, ist das System nicht vollständig erreichbar. Aus $\{A, b\}$ folgt, dass der zweite Zustand nicht direkt vom Eingang beeinflusst wird (b) und dass er nur abhängig von sich selber ist (A): $\dot{x}_2 = A_{22} \cdot x_2$, mit Eigenwert $\lambda_2 = A_{22} = -1$. Daraus folgt, dass der zweite Zustand unabhängig stabil ist und somit ist das System $\{A, b\}$ stabilisierbar.

2 Beobachtbarkeit

Ein System ist vollständig beobachtbar wenn man mit der Messung des Ausgangssignals $y(t)$, $t \in [0, \tau]$, $\tau > 0$ eindeutig auf den Anfangszustand $x(0)$ des Systems schliessen kann.

Ein LZI System ist dann vollständig beobachtbar, wenn die **Beobachtbarkeitsmatrix** \mathcal{O} (observability matrix) vollen Rang hat.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ c \cdot A \\ c \cdot A^2 \\ \vdots \\ c \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

Beispiel:

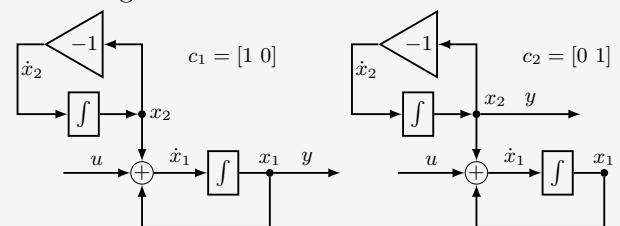
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad c_1 = [1 \quad 0], \quad c_2 = [0 \quad 1],$$

Es sei möglich entweder x_1 , oder x_2 zu messen.

$$\mathcal{O}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Falls man x_1 misst, ist das System vollständig beobachtbar: $\text{rank}(\mathcal{O}_1) = 2$. D.h. man kann durch messen von x_1 auf die Anfangsbedingungen $x_1(0)$ und $x_2(0)$ schliessen. Falls man nur x_2 misst, erhält man $\text{rank}(\mathcal{O}_2) = 1$. Das System ist somit nicht vollständig beobachtbar.

Die grafische Darstellung der zwei beschriebenen Systeme macht deren Eigenschaften bzgl. Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit direkt ablesbar durch den Informationsfluss der Variablen im Diagramm.



3 Koordinatentransformationen

Ein Zustandsraum mit Koordinaten x kann durch eine (von unendlich vielen) Koordinatentransformation in anderen Koordinaten \tilde{x} beschrieben werden:

$$\begin{aligned}x(t) &= T \cdot \tilde{x}(t) & T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(T) \neq 0 \\ \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) &= T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot \tilde{x}(t) + T^{-1} \cdot b \cdot u(t) \\ y(t) &= c \cdot T \cdot \tilde{x}(t) + d \cdot u(t)\end{aligned}$$

Fundamentale Sytemeigenschaften (Stabilität, Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, I/O-Verhalten) sind transformationsinvariant (unabhängig von der Wahl der Koordinaten x), d.h. sie bleiben nach einer Koordinatentransformation erhalten.

Recap

Allgemeine Lösung LTI system:

$$y(t) = C e^{At} x_0 + C \int_0^t e^{A(t-p)} B u(p) dp + D u(t)$$

→ explizite Lösung für Systeme 1. Ordnung:

① Impulsantwort

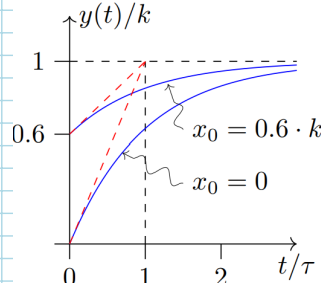
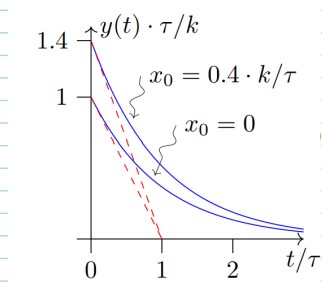
$$u(t) = \delta(t)$$

$$y(t) = C e^{At} (x_0 + B)$$

② Sprungantwort

$$u(t) = h(t)$$

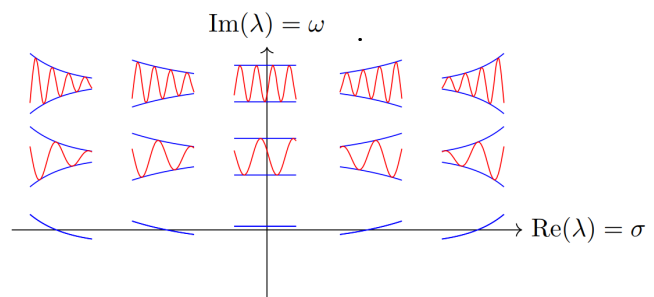
$$y(t) = C e^{At} x_0 + B/A (1 - e^{At})$$



→ qualitative Aussagen für System 1. & höherer Ordnung

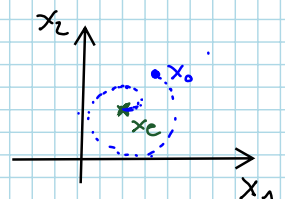
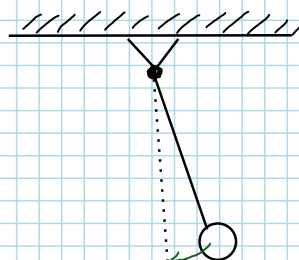
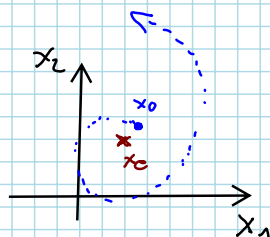
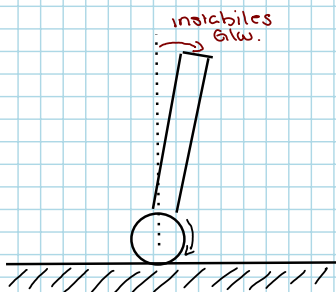
Eigenwerte von A geben aufschluss über Stabilitätsverhalten des Gleichgewichtspunkt im linearisierten System:

$$\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{\sigma_1 t} (\cos(\omega_1 t) + j \sin(\omega_1 t)) \\ e^{\sigma_2 t} (\cos(\omega_2 t) + j \sin(\omega_2 t)) \\ e^{\sigma_n t} (\cos(\omega_n t) + j \sin(\omega_n t)) \end{pmatrix}$$



Lyapunov Stabilität

- asymptotisch stabil → alle EW haben negativen Realteil ($\sigma_i < 0$)
- stabil → mind. ein EW hat Realteil = 0 (aber alle $\sigma_i \leq 0$)
- instabil → mind. ein EW hat Realteil > 0



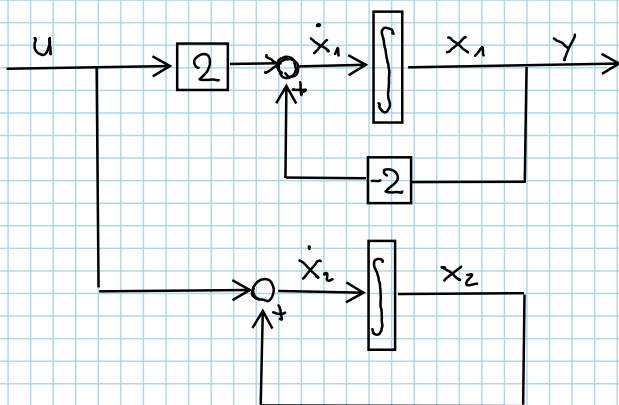
RT1 Übung 4

Nach der Lyapunov Stabilität betrachten wir nun weitere Systemeigenschaften im Zeitbereich.

⇒ Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit:

Hierzu zwei Beispiele

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_1 = [1 \ 0] \quad D_1 = [0]$$

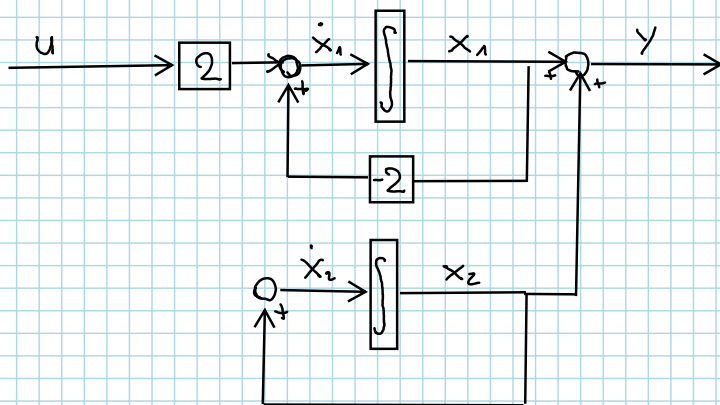


💡 Bemerken wir etwas von x_2 im Output?

⇒ nicht vollständig Beobachtbar

Warum ist das hier besonders kritisch?

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ c \end{bmatrix} \quad C_2 = [1 \ 1] \quad D_2 = [0]$$



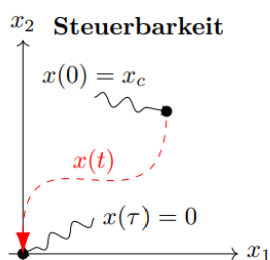
💡 Bemerken wir hier etwas im Output?
Können wir darauf Einfluss nehmen?

⇒ nicht vollständig steuerbar.

⚠️ es reicht aber nicht sich nur B & C Matrizen anzuschauen.

Steuerbarkeit

Ein Punkt x_c ist steuerbar, falls ein zugehöriger Input u_c existiert, welcher ihn in endlicher Zeit τ in den Ursprung zurücksteuert.



➡ Alle Punkte in \mathbb{R}^n steuerbar
⇒ System vollständig steuerbar

Wie berechnen?

Komplett kontrollierbar wenn:

$$R_n = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

vollen Rang $= n$ hat. ($n = \text{Anzahl Zustände}$)

Stabilisierbarkeit?

Sind alle nicht steuerbaren Zustände asymptotisch stabil (alle nicht steuerbaren Zustände tendieren sowieso ins Glw. (0) zurück) so können wir das System potentiell stabilisierbar.

Beispiel ② von oben

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_1 = [1 \ 1] \quad D_1 = [0]$$

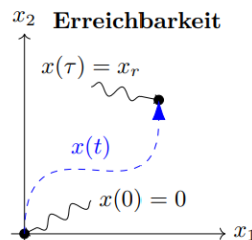
$$2 \text{ Zustände} \Rightarrow R_2 = [B, AB]$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rang } 1$$

Info:

In LTI Systemen.

Erreichbarkeit = Steuerbarkeit



Beobachtbarkeit

Ein System ist vollständig beobachtbar wenn man mit einer Messung des outputs $y(t)$, $t \in [0, \bar{t}]$, $\bar{t} > 0$ (also über einen kleinen Zeitraum) eindeutig auf den Anfangszustand schließen kann.

$$y(t), t \in [0, \bar{t}], \bar{t} > 0 \longrightarrow x_0$$

Wie berechnen?

Vollständig beobachtbar wenn:

$$O_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

vollen Rang n hat.

Detekrierbarkeit:

Sind alle nicht beobachtbaren Zustände asymptotisch stabil, so ist unser System detekrierbar.

Beispiel ① von oben

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ C & 1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_1 = [1 \ C] \quad D_1 = [0]$$

2 Zustände $\sigma_2 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & C \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rang } 1$$

Einschub: Koordinatentransformationen

(Haben wir bereits letzte Übungsstunde verwendet)

Wir können unseren Zustandsraum mittels Koordinatentransformationen

$$x = T \tilde{x}$$

in anderen Koordinaten beschreiben:

$$\begin{aligned} T \dot{\tilde{x}} &= A T \tilde{x} + B u \\ y &= C T \tilde{x} + D u \end{aligned}$$

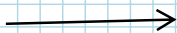


$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= T^{-1} A T \tilde{x} + T^{-1} B u \\ y &= C T \tilde{x} + D u \end{aligned}$$

Gut für uns: „Fundamentale Systemeigenschaften (Stabilität, Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, I/O-Verhalten) sind Transformationsinvariant

⇒ und manche Dinge können wir einfach besser in anderen Zustandsvariablen ablesen

von altem
Theorieblatt



Beispiel: Bestimme, ob das System $\{A, b\}$ steuerbar ist, ohne die Erreichbarkeitsmatrix \mathcal{R} zu berechnen.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eine einfache Darstellung von *diagonalisierbaren*² Systemen ergibt sich durch eine Hauptachsentransformation, $A = V \cdot D \cdot V^{-1}, x = V^{-1} \cdot \tilde{x} \rightarrow \dot{\tilde{x}} = D \cdot \tilde{x} + V^{-1} \cdot b \cdot u$:

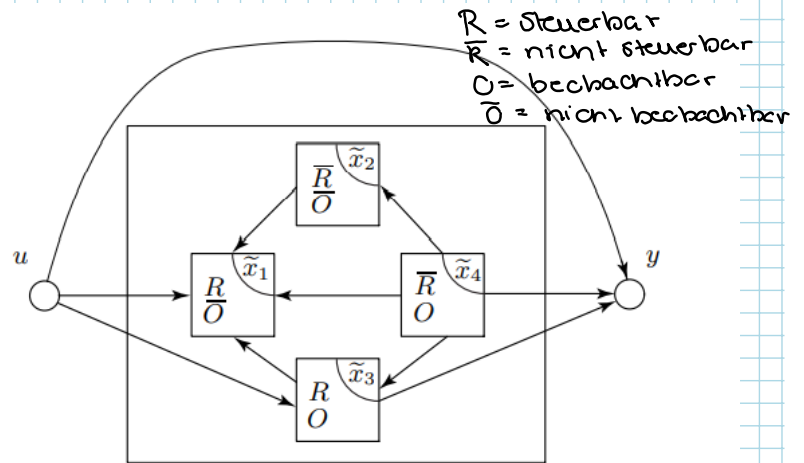
$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

Dabei ist V die Matrix der Eigenvektoren von A und D eine Matrix mit den Eigenwerten von A auf der Diagonalen: $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

In diesen Koordinaten wird klar, dass das System einen Zustand \tilde{x}_3 hat, der instabil ($\lambda_3 = 1$) und nicht steuerbar ($b_3 = 0$) ist.

Zerlegung des Zustandsraums

Wird System mit "geeigneter" Transformation transformiert, lassen sich Zustände unterschiedlichen Gruppen zuordnen



⇒ einen Einfluss vom Input auf den Output sehen wir nur über \tilde{x}_3 & algebraischen Durchgriff (D) somit wäre unsere

minimale Realisierung

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_3 &= \tilde{A}_3 \tilde{x}_3 + \tilde{B} u \\ y &= \tilde{C}_3 \tilde{x}_3 + D u\end{aligned}$$

⇒ Reicht für Beschreibung von Input-Output (I/O)-Verhalten, wir sehen jedoch nicht alles was im System passiert.

I/O-Verhalten und (kanonische) Normalform

Das I/O-Verhalten kann nun auch in folgender Form dargestellt werden:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot y'(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t)$$

Eine mögliche Umwandlung in die uns bekannte Zustandsraumdarstellung sieht folgendermaßen aus

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & d \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & 1 \\ \hline b_0 & \dots & b_m & 0 & \dots & d \end{array} \right]$$