

Regelungstechnik I HS 2020

Normierung und Linearisierung

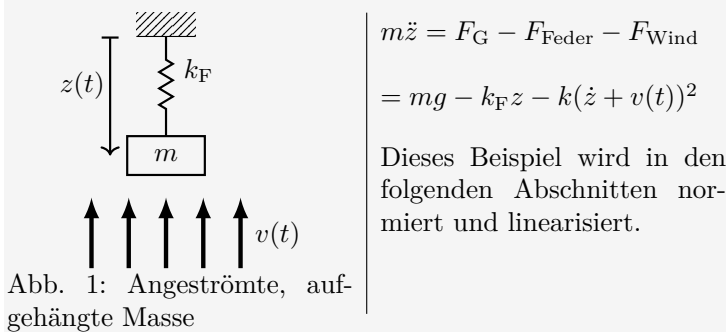
Zusammenfassung Vorlesung 3

Buch Kapitel 3

Autoren: C. Küttel, M. Reinders, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Bei Fragen: morettog@ethz.ch, hraffael@ethz.ch, 23. August 2020

Beispiel: Betrachte Abb.1. Die Masse m ist an einer Feder mit Federkonstante k_F aufgehängt. Man kann ein Gasfluss mit Geschwindigkeit $v(t)$ von unten einstellen. Die Kraft der Anströmung auf die Masse m sei proportional zum Quadrat der relativen Geschwindigkeit. Die Gleichgewichtsposition des Objekts bei gegebenem v_e sei bei p_e . Die Position des Systems ist die Ausgangsgrösse und wird mit einem Sensor gemessen.



1 Zustandsgleichung erster Ordnung

In diesem Abschnitt wird erklärt, wie man eine nichtlineare Differentialgleichung (Gl. (1)) in eine Zustandsgleichung erster Ordnung (Gl. (2)) umwandelt. Aus dem Modellierungsschritt erhält man generell nichtlineare Differentialgleichungen der Ordnung n :

$$q(z^{(n-1)}, \dots, z^{(1)}, z^{(0)}, v) = z^{(n)} \quad (1)$$

$$\dot{z} = f(z, v), \quad w = g(z, v), \quad (2)$$

wobei $z(t)$ der Zustandsvektor, $v(t)$ die Eingangsgrösse, und $w(t)$ die Ausgangsgrösse ist. $f(\cdot)$ und $g(\cdot)$ sind generell nichtlineare Funktionen.

Beispiel $\frac{1}{m}(mg - k_F z - k(\dot{z} + v(t))^2) = \ddot{z}.$

Durch die Wahl

$$z = \begin{bmatrix} z^{(0)} & z^{(1)} & \dots & z^{(n-2)} & z^{(n-1)} \end{bmatrix}^T \\ = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_{n-1} & z_n \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

lässt sich Gl. (1) in eine Zustandsgleichung erster Ordnung umwandeln. Aus Gl. (3) und Gl. (1) folgt

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z^{(1)} & z^{(2)} & \dots & z^{(n-1)} & z^{(n)} \end{bmatrix}^T \\ = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & q(z_n, \dots, z_2, z_1, v) \end{bmatrix}^T \\ = f(z, v).$$

Beispiel

$$z = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ \dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \frac{1}{m}(mg - k_F z_1 - k(z_2 + v(t))^2) \end{bmatrix}$$

2 Normierung

Die Grössen im Zustandsvektor z weisen verschiedene Einheiten auf. Die Normierung dient einerseits einer vereinfachten Interpretation und andererseits zur Vorbeugung von numerischen Problemen. Falls der Betrachter die physikalischen Grössen bevorzugt und die Numerik kein Problem darstellt, kann man den Normierungsschritt überspringen.

$$z_i(t) = z_{i,0} \cdot x_i(t), \quad z_{i,0} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

In Vektornotation

$$z = T \cdot x, \quad T = \text{diag}(z_{1,0}, \dots, z_{n,0})$$

Die Ein- und Ausgangsgrösse werden analog normiert:

$$v(t) = v_0 \cdot u(t) \quad v_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$w(t) = w_0 \cdot y(t) \quad w_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Generell gilt

$$T \cdot \dot{x} = \dot{z} = f(z, v)$$

$$w_0 \cdot y = w = g(z, v)$$

Nun normiert man das System:

$$\dot{x} = T^{-1} \cdot f(T \cdot x, v_0 \cdot u) = f_0(x, u) \quad (4)$$

$$y = w_0^{-1} \cdot g(T \cdot x, v_0 \cdot u) = g_0(x, u) \quad (5)$$

Die Einheit der normierten Gleichung (4) ist $\left[\frac{1}{s}\right]$.

Beispiel:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \frac{1}{m}(mg - k_F z_1 - k(z_2 + v(t))^2) \end{bmatrix}$$

Es liege im Interesse des Betrachters, dass die normierte Position x_1 der Masse m im Gleichgewichtszustand p_e (bei Wind v_e), $x_{1,e} = 1$ entspreche. Ausserdem weiss der Betrachter, dass gilt: $0 < v(t) < v_{\max}$. Dies ist hilfreich, um die Eingangsgrösse in die Region $0 < u(t) < 1$ zu normieren. Die maximale Geschwindigkeit \dot{z}_{\max} sei h :

$$T = \begin{bmatrix} p_e & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}, \quad v(t) = v_{\max} \cdot u(t)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{h}{p_e} \cdot x_2 \\ \frac{1}{h \cdot m}(mg - k_F \cdot p_e \cdot x_1 - k(h \cdot x_2 + v_{\max} \cdot u(t))^2) \end{bmatrix}$$

3 Linearisierung von nichtlinearen Systemen

Das normierte nichtlineare System wird nun um den Gleichgewichtspunkt linearisiert. Die Linearisierung vereinfacht die Analyse um den Gleichgewichtspunkt.

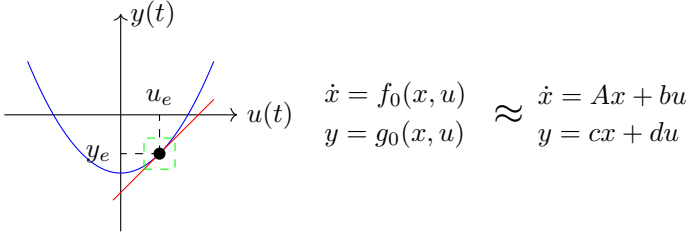


Abb. 2: Graphische Interpretation der Eingangs-Ausgangslinearisierung. Nichtlineares System in blau. Linearisiertes System in rot.

Berechnung der Gleichgewichtslage

Um das System zu linearisieren wird zuerst die Gleichgewichtslage berechnet. Im Gleichgewichtszustand gilt per Definition:

$$\dot{x} = [\dot{x}_1 \quad \dots \quad \dot{x}_n]^T = [0 \quad \dots \quad 0]^T = f(x_e, u_e).$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in x_1, x_2, \dots, x_n und u . Für einen gewünschten Zustand x_e lässt sich ein u_e berechnen. Dabei ist zu beachten, dass nicht alle gewünschten x_e möglich sind. Umgekehrt lässt sich für ein konstantes u_e der resultierende Gleichgewichtszustand x_e berechnen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= \begin{bmatrix} \frac{h}{p_e} \cdot x_{2,e} \\ \frac{1}{h \cdot m} (mg - k_F \cdot p_e \cdot x_{1,e} - k(h \cdot x_{2,e} + v_{\max} \cdot u_e)^2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_{2,e} = 0, \quad u_e = \frac{1}{v_{\max}} \sqrt{\frac{1}{k} (mg - k_F p_e \cdot x_{1,e})}, \end{aligned}$$

mit $x_{1,e} = 1$.

Linearisierung

Um das System um den Gleichgewichtspunkt zu linearisieren, werden die Matrizen A, b, c, d berechnet:

$$\begin{aligned} A &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_n} \end{bmatrix} \bigg|_{x_e, u_e} & \quad b \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{0,1}}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{0,n}}{\partial u} \end{bmatrix} \bigg|_{x_e, u_e} \\ c &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_0}{\partial x_1} & \frac{\partial g_0}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_0}{\partial x_n} \end{bmatrix} \bigg|_{x_e, u_e} & \quad d \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_0}{\partial u} \end{bmatrix} \bigg|_{x_e, u_e} \end{aligned}$$

Die Matrizen sind eine direkte Konsequenz der Taylorentwicklung¹ erster Ordnung von $\dot{x} = f_0(\delta x + x_e, \delta u + u_e)$ um x_e, u_e

$$\delta \dot{x} \approx \underbrace{f_0(x_e, u_e)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f_0(x_e, u_e)}{\partial x}}_A \delta x + \underbrace{\frac{\partial f_0(x_e, u_e)}{\partial u}}_B \delta u$$

¹Analog für $y = g_0(\delta x + x_e, \delta u + u_e)$

Wichtig: Bei linearisierten Systemen betrachtet man nur die Dynamik der Differenzen mit Ursprung x_e, u_e und lässt das δ weg ($\delta x \stackrel{\text{def}}{=} x, \delta u \stackrel{\text{def}}{=} u, \delta y \stackrel{\text{def}}{=} y$)

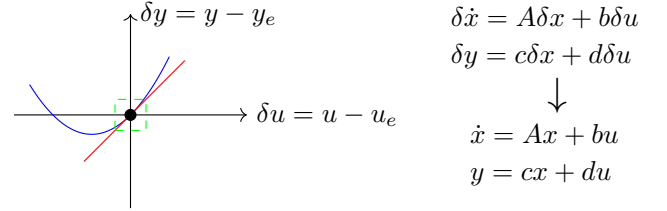


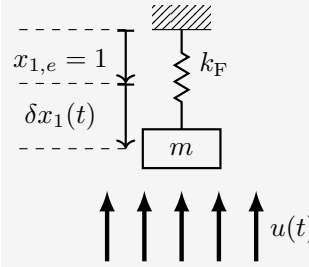
Abb. 3: Graphische Interpretation der Delta-Formulierung.

Beispiel: Das System wird nun um u_e, x_e linearisiert

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & h/p_e \\ -\frac{1}{h \cdot m} \cdot k_F \cdot p_e & -\frac{1}{m} \cdot 2k \cdot (h \cdot x_{2,e} + v_{\max} \cdot u_e) \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{h \cdot m} \cdot 2k \cdot v_{\max} \cdot (h \cdot x_{2,e} + v_{\max} \cdot u_e) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die Ausgangsgröße ist die Position $z_1 = z$ der Masse. Wählt man die normierte Ausgangsgröße $p_e \cdot y = z$, folgt

$$y = \frac{z}{p_e} = x_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad d = 0.$$



Das normierte System hat die Gleichgewichtslage bei $x_{1,e} = 1$. Das linearisierte System beschreibt das originale nichtlineare Systemverhalten sehr genau für kleine Abweichungen $\delta x_1(t)$ um den linearisierten Punkt.

Systeme in gewünschte Form bringen (LTI):

Von: $\ddot{z}(t) = f(\dot{z}(t), z(t), v(t))$ - nicht zwingend linear
 $w(t) = g(\dot{z}(t), z(t), v(t))$ - kann Ableitungen höherer Ordnung enthalten

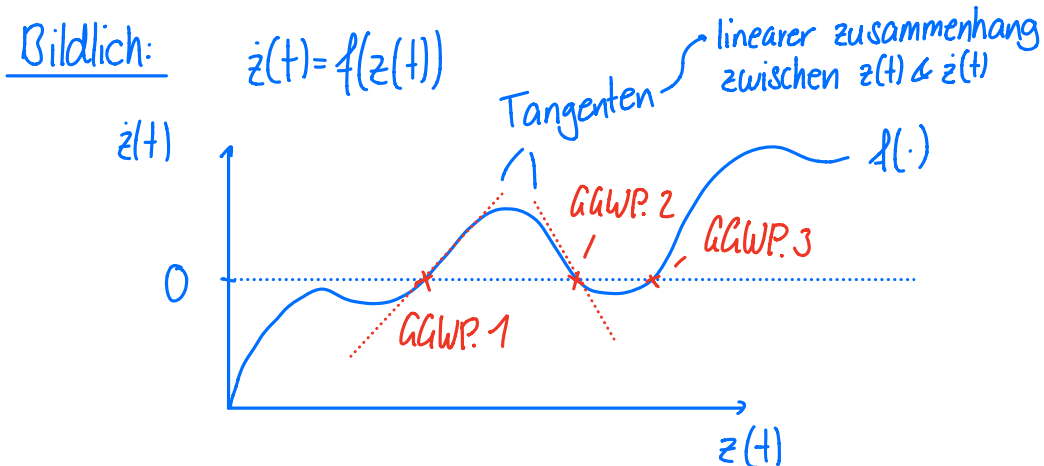


Zu: $\dot{x}_1(t) = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + b_1 u(t)$
 $\dot{x}_2(t) = a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + b_2 u(t)$
 $y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + d u(t)$ · linear
· nur Ableitungen erster Ordnung
· gilt nur um GGWP



$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (c_1 \ c_2) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + (d) u(t)$$



⚠ · Approximation nur gut nahe GGWP.

· Unterschiedliche Approximation für unterschiedliche GGWP.

Wie findet man lin. Approx.:

1) Diff'gl höherer Ordnung in Diff'gl 1. Ordnung umwandeln:

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{a} \ddot{z}(t) + \sin(\dot{z}(t)) + \log(z(t)) + v(t) = f(\ddot{z}(t), \dot{z}(t), z(t), v(t))$$

$$z_1(t) = z(t) \quad \dot{z}_1 = \dot{z}(t) = z_2(t) = f_1(z_1, v(t))$$

$$z_2(t) = \dot{z}(t) \Rightarrow \dot{z}_2 = \ddot{z}(t) = z_3(t) = f_2(z_1, v(t))$$

$$z_3(t) = \ddot{z}(t) \quad \dot{z}_3 = \dddot{z}(t) = \frac{1}{a} z_3(t) + \sin(z_2(t)) + \log(z_1(t)) + v(t) = f_3(z_1, v(t))$$

$$w(t) = g(z_1, z_2, z_3, v)$$

2) Normalisierung von Variablen unterschiedlicher Grössenordnungen

$$X_1(t) = \frac{z_1(t)}{z_{10}}, \quad X_2(t) = \frac{z_2(t)}{z_{20}} \dots u(t) = \frac{v(t)}{v_0}, \quad y(t) = \frac{w(t)}{w_0}, \quad z_{10}, z_{20}, \dots, v_0, w_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$X_1(t) \sim X_2(t) \sim \dots \sim 1 \Rightarrow$ keine Einheiten & gleiche Grössenordnungen

\Rightarrow dann in DGL-System einsetzen:

$$\dot{X}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, u) \quad \nearrow \quad z_i = z_{i0} \cdot x_i$$

$$\dot{X}_2 = f_2(x_1, u)$$

$$X_3 = f_3(x_1, u)$$

$$y = g(x_i, u)$$

$= 0$ setzen

Achtung:

Auch abgeleitete Variablen durch "Normalisierungsfaktoren" teilen

$$z_{10} \cdot \dot{X}_1 = z_{20} \cdot X_2 \Rightarrow \dot{X}_1 = \frac{z_{20}}{z_{10}} X_2(t) = f_1(x_1, u)$$

3) GAWP-finden: (wurde bereits gemacht) \swarrow Zustandsvariablen

alle $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} = \frac{d^3}{dt^3} = 0 \rightarrow$ gibt Werte $x_{i,e}, u_{i,e}$ & y_e

$$\left. \begin{aligned} 0 &= f_1(x_{i,e}, u_e) \\ 0 &= f_2(x_{i,e}, u_e) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \text{GLS-lösen}$$

$$y = g(x_{i,e}, u_e)$$

\Rightarrow Bis jetzt noch nicht linear

n Gleichungen (n Zustandsvariablen)

n+1 Variablen

\Rightarrow System unterbestimmt

4) Linearisieren um GGWP:

→ Wir betrachten nur noch Umgebung von GGWP:

$$x_i(t) = x_{i,e} + \delta x_i(t)$$

$$u(t) = u_e + \delta u(t)$$

somit ist: $\overset{0}{\text{—}}$

$$\dot{x}_i(t) = \cancel{\dot{x}_{i,e}} + \delta \dot{x}_i(t) = \dot{f}_i(x_i, u) = \dot{f}_i(x_{i,e} + \delta x_i(t), u_e + \delta u) \quad \text{Taylorreihe 1. Ordnung}$$

$$\delta \dot{x}_i(t) = \dot{f}_i(x_{i,e}, u_e) + \frac{\partial \dot{f}_i(\cdot)}{\partial x_i} \Big|_{x_{i,e}, u_e} \cdot \delta x_i + \frac{\partial \dot{f}_i(\cdot)}{\partial u} \Big|_{x_{i,e}, u_e} \cdot \delta u$$

$\overset{0''}{\text{—}}$, Def. von GGWP

$$\delta \dot{x}_i(t) = \frac{\partial \dot{f}_i(\cdot)}{\partial x_i} \Big|_{x_{i,e}, u_e} \cdot \delta x_i + \frac{\partial \dot{f}_i(\cdot)}{\partial u} \Big|_{x_{i,e}, u_e} \cdot \delta u \Rightarrow \text{das ergibt ein Vektor}$$

$$\delta \dot{\underline{x}} = \underset{\text{Matrix A}}{\left[\frac{\partial \dot{f}}{\partial \underline{x}} \right]} \cdot \delta \underline{x} + \underset{\text{Vektor B}}{\left[\frac{\partial \dot{f}}{\partial u} \right]} \cdot \delta u$$

Das selbe auch für $y = g(x_i, u)$ anwenden

$$\cancel{y_e} + \delta y = g(x_{i,e} + \delta x_i, u_e + \delta u_e) = \underbrace{g(x_{i,e}, u_e)}_{= y_e} + \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{x_{i,e}, u_e} \cdot \delta x_i + \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{x_{i,e}, u_e} \cdot \delta u$$

$\underset{\text{Vektor } [\cdot, \cdot, \cdot]}{\delta y} \quad \underset{1 \times 1\text{-Matrix}}{\left[\frac{\partial g}{\partial x_i} \right]}$

$$\delta y = \left[\frac{\partial g}{\partial x_i} \right] \delta \underline{x} + \left[\frac{\partial g}{\partial u} \right] \cdot \delta u$$

Also: $\delta \dot{x} = A \cdot \delta x + B \cdot \delta u$

$$\delta y = C \cdot \delta x + D \cdot \delta u$$

Erstellen eines Flussbildes: (Simulink)

$$\dot{x}_1 = 3x_1 + 4x_2$$

$$\dot{x}_2 = 3x_2 + u$$

$$y = 2x_1$$

