

Regelungstechnik I HS 2020

Zusammenfassung Vorlesung 9

Asymptotische Eigenschaften von Frequenzantworten, nichtparametrische Modellunsicherheit

Buch Kapitel 8.3-8.5

Autoren: C. Küttel, M. Reinders, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Bei Fragen: morettog@ethz.ch, davidm@ethz.ch

1 Asymptotische Eigenschaften von Frequenzantworten

Betrachte die folgende Struktur einer allgemeinen Übertragungsfunktion:

$$\Sigma(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^k \cdot (s^{n-k} + a_{n-1-k} \cdot s^{n-1-k} + \dots + a_1 \cdot s + a_0)}$$

Zwei wichtige Eigenschaften zur Frequenzantwort werden im folgenden beschrieben. Einerseits kann man aus der Übertragungsfunktion direkt die Phase bei $\omega = 0$ aus dem Systemtyp k bestimmen. Andererseits kann man das Asymptotische Verhalten der Magnitude $|\Sigma(j\omega)|$ für $\omega \rightarrow \infty$ direkt aus dem relativen Grad $r = n - m$ bestimmen.

Systemtyp k

Der Systemtyp k entspricht der Vielfachheit offener Integratoren ($\frac{1}{s^k}$) des Systems. Die Phase bei $\omega = 0$ ist als folgende Funktion definiert:

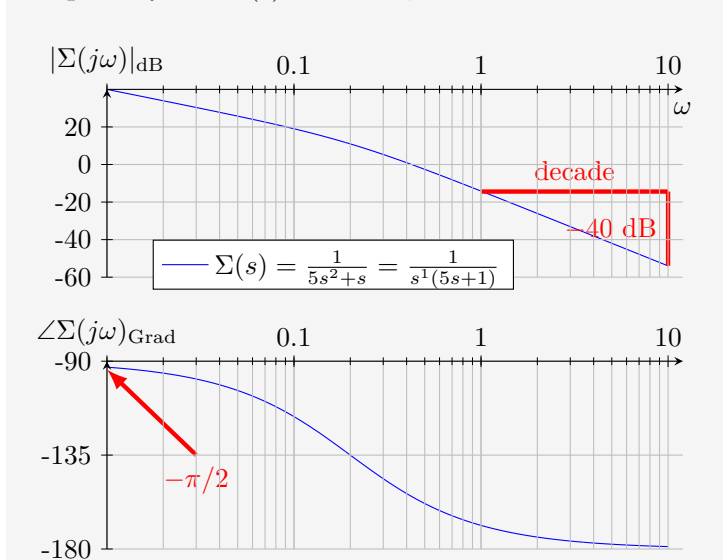
$$\angle \Sigma(0) = \begin{cases} -k \cdot \frac{\pi}{2} & , \operatorname{sgn}\left(\frac{b_0}{a_0}\right) > 0 \\ -\pi - k \cdot \frac{\pi}{2} & , \operatorname{sgn}\left(\frac{b_0}{a_0}\right) < 0 \end{cases}$$

Relativer Grad $r = n - m$

Die Steigung des Magnitudenverlauf im Bode-Diagramm konvergiert für $\omega \rightarrow \infty$ asymptotisch zu:

$$\frac{\partial |\Sigma(j\omega)|_{\text{dB}}}{\partial \log(\omega)} = -r \cdot 20 \text{ dB/decade}$$

Beispiel: System $\Sigma(s)$ mit $k = 1$, $r = 2 - 0 = 2$



2 Systemidentifikation

Generell wird zwischen drei Arten von Systemmodellen unterschieden:

White Box model: Es existiert eine explizite Darstellung der Physik des Systems mit bekannten Parameterwerten.

Grey Box model: Es existiert eine explizite Darstellung der Physik des Systems mit unbekannten Parameterwerten.

Black Box model: Es existiert keine explizite Darstellung der Physik des Systems. Das Systemverhalten muss durch empirische Datenanalyse ermittelt werden.

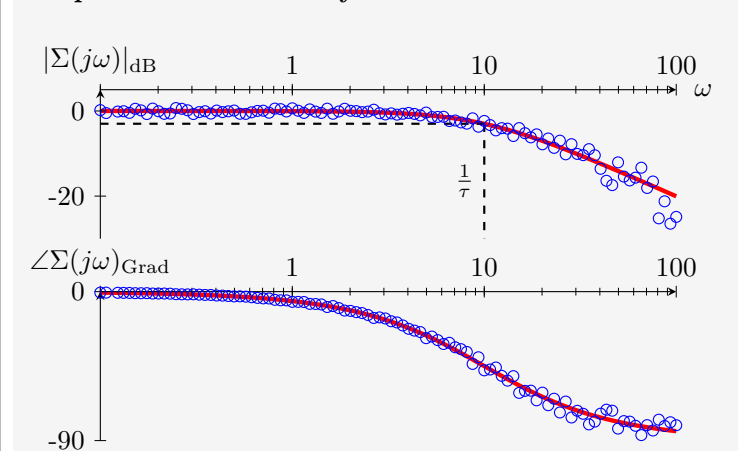
Black box Modelle werden verwendet wenn die Physik des Systems nicht genau bekannt oder zu komplex ist um einfach modelliert zu werden. Durch experimentelle Modellbildung (Systemidentifikation) kann ein Modell des Systems abgeleitet werden, das für die Reglerentwicklung erforderlich ist.

Systemidentifikation mittels Frequenzgang

Ein unbekanntes System kann wie folgt identifiziert werden:

1. Das System wird mit einem bekannten harmonischen Eingangssignal angeregt: $u(t) = \cos(\omega t)$, $\omega \in [0, \infty)$.
2. Die Verstärkung $|\Sigma(j\omega)|$ und die Phase $\angle \Sigma(j\omega)$ der Systemantwort $y_\infty = |\Sigma(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \angle \Sigma(j\omega))$ werden gemessen. Somit kann das Bodediagramm des Systems experimentell bestimmt werden.
3. Eine Übertragungsfunktion wird an die Daten angepasst. Hier ist es wichtig, die Auswirkung verschiedener Standardelemente auf Magnitude und Phase zu verstehen.

Beispiel zu Black-box System Identifikation



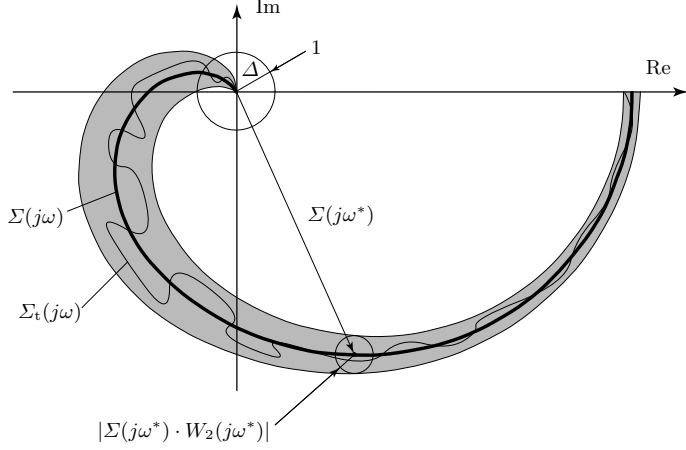
Extensives testen bei verschiedenen Frequenzen ergibt die blauen Datenpunkte. Du erkennst die Form als System erster Ordnung. Durch Auslesen der Zeitkonstante bei $\omega_g = \frac{1}{\tau} = 10$, schätzt du das System als (rot eingezeichnet):

$$\Sigma(s) = \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{1}{0.1s + 1}$$

3 Modellunsicherheit

Ein Modell eines physikalischen Systems kann das wahre System nicht perfekt reproduzieren. Durch die Berücksichtigung der maximal zu erwartenden Modellunsicherheit beim Entwurf eines Regelsystems kann robustes Verhalten garantiert werden.

3.1 Nichtparametrische Unsicherheit



Annahme: es existiert eine lineare, zeitinvariante wahre Übertragungsfunktion $\Sigma_t(s)$, die das System exakt beschreibt, die jedoch wegen Modellunsicherheiten nicht bekannt ist. Die wahre Übertragungsfunktion $\Sigma_t(s)$ liegt in der Menge \mathcal{S} :

$$\mathcal{S} = \left\{ \Sigma(s) \cdot (1 + \Delta \cdot W_2(s)) \mid |\Delta| \leq 1, \angle \Delta \in [-\pi, \pi] \right\}$$

$\Sigma(s)$: Nominelle Übertragungsfunktion, durch (imperfekte) Systemmodellierung gefunden.

Δ : Unsicherheitsgenerator: Kreis in der komplexen Ebene.

$W_2(s)$: Übertragungsfunktion der Unsicherheit: quantifiziert die frequenzabhängige Unsicherheit des Modells

Bei jeder Frequenz ω^* liegt die wahre Übertragungsfunktion $\Sigma_t(j\omega^*)$ innerhalb von einem Kreis mit Radius $|\Sigma(j\omega^*) \cdot W_2(j\omega^*)|$ um die nominelle Übertragungsfunktion $\Sigma(j\omega^*)$.

3.2 Unsicherheitsübertragungsfunktion $W_2(s)$

Es gibt mehrere Methoden, um ein Modell für die Unsicherheitsübertragungsfunktion zu bestimmen.

3.2.1 Unsicherheitsschätzung mittels Messdaten

Diese Methode verwendet Messungen am realen System, um die Unsicherheitsgrenzen des Modells davon zu bestimmen.

1. Es werden $k = 1, \dots, K$ Messungen des Frequenzgangs durchgeführt. Für jede Messung bei Frequenz ω_i , $i = 1, \dots, I$ werden die Werte $|\Sigma(j\omega_{i,k})|$ und $\angle \Sigma(j\omega_{i,k})$ identifiziert.

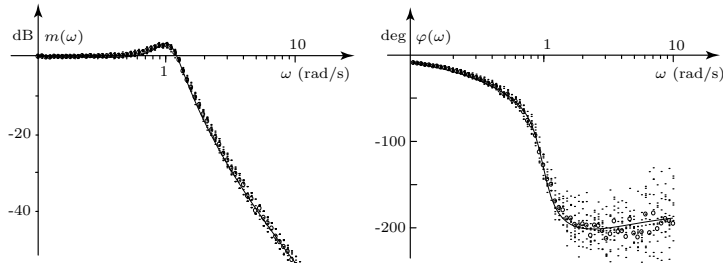


Abb. 1: Repräsentation der Messung des Ausgangs für verschiedene Frequenzen.

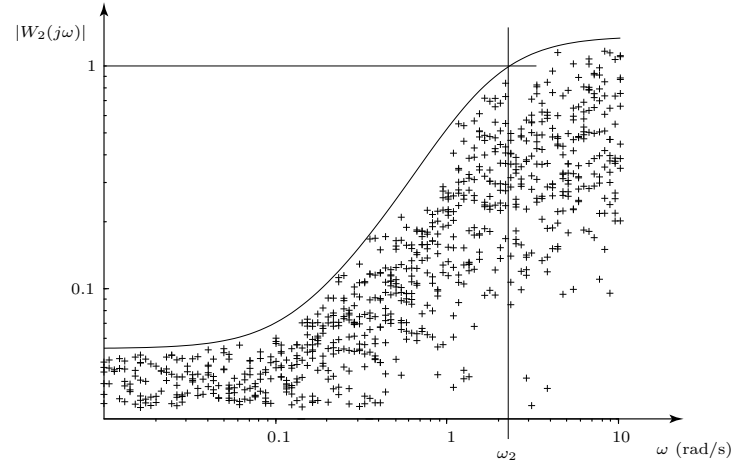
2. Eine nominelle Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ wird an die experimentellen Daten angepasst (analog zur Methode der Systemidentifikation).

$$\Sigma(j\omega_i) = m_i \cdot e^{j\varphi_i}$$

3. Bei jeder Frequenz ω_i sind die Werte der K Messungen von $\Sigma(j\omega_{i,k})$ verteilt um den Punkt (in der komplexen Ebene) der nominellen Übertragungsfunktion $\Sigma(j\omega_i)$. Die Unsicherheitsübertragungsfunktion bildet einen Kreis mit Radius $|\Sigma(j\omega_i) \cdot W_2(j\omega_i)|$ um $\Sigma(j\omega_i)$, so dass alle Messpunkte von $\Sigma(j\omega_{i,k})$ darin enthalten sind:

$$\left| \frac{\Sigma(j\omega_{i,k})}{\Sigma(j\omega_i)} - 1 \right| < |W_2(j\omega_i)|, \quad k \in [1, K] \quad i \in [1, I] \quad (1)$$

Die Ungleichung Gl. (1) definiert eine Bedingung bei jeder Frequenz ω_i . Wird die Linke Seite der Ungleichung als Funktion der Frequenz dargestellt, ergibt sich:

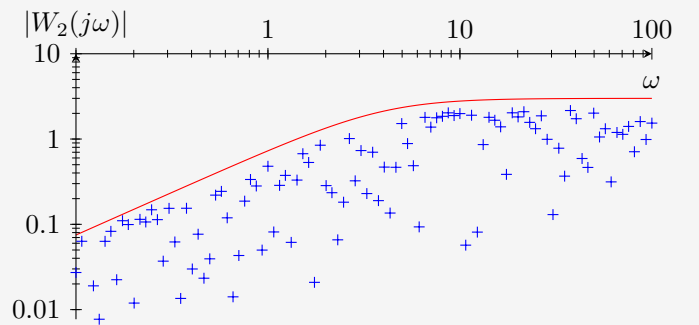


Wie erwartet, steigt die Unsicherheit bei höheren Frequenzen. Den Daten kann eine Unsicherheitsübertragungsfunktion $W_2(s)$ zugeordnet werden.

Bemerkung: Die Unsicherheitsübertragungsfunktion $W_2(s)$ enthält keine Phaseninformation. Es ist nur der Amplitudenverlauf über die Frequenz relevant.

Beispiel zu Unsicherheit

Um eine Unsicherheitsschranke W_2 für das identifizierte System aus dem vorherigen Beispiel zu erhalten, wendest du Gl. (1) an:

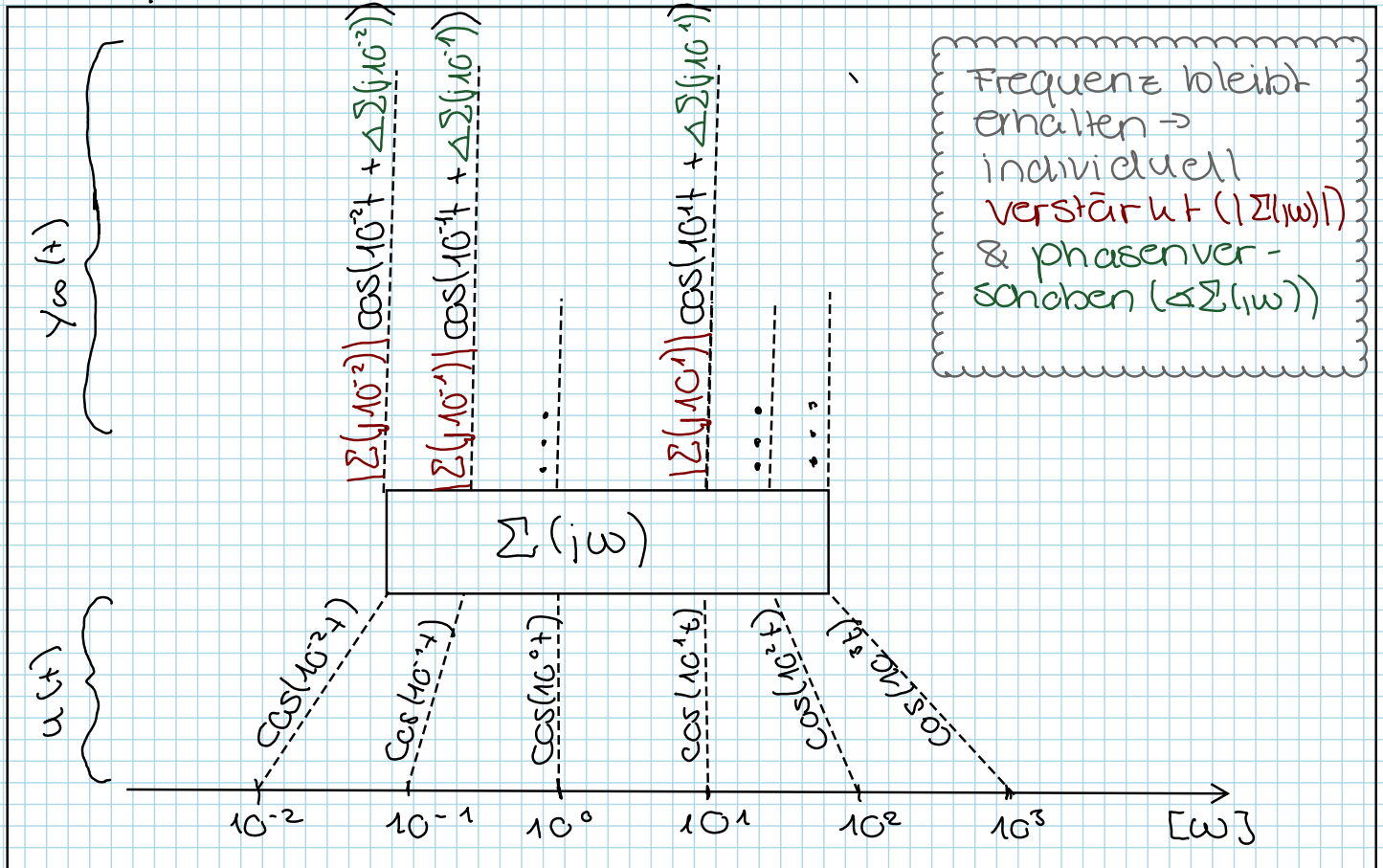


Du findest eine Übertragungsfunktion $W_2(s)$, die die Datenpunkte umhüllt:

$$W_2(s) = \frac{3/4 \cdot s}{1/4 \cdot s + 1}$$

Recap

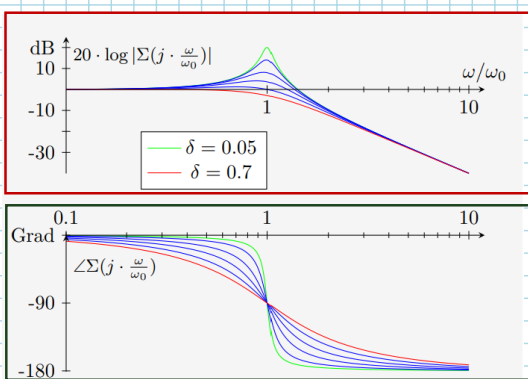
Antwort auf harmonischen Eingang $u(t)$ für stabile LTI systeme (\Rightarrow nach transientem Verhalten).



2 unterschiedliche Darstellungen

Bode:

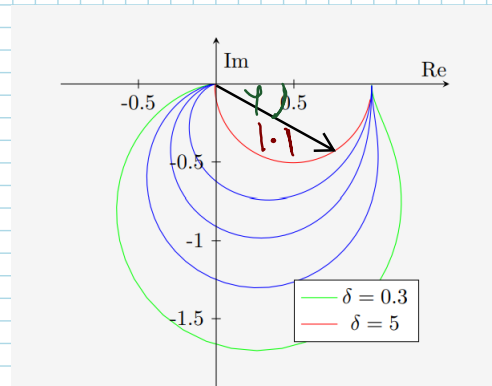
Nyquist:



$\lim_{\omega \rightarrow 0}$ & $\lim_{\omega \rightarrow \infty}$

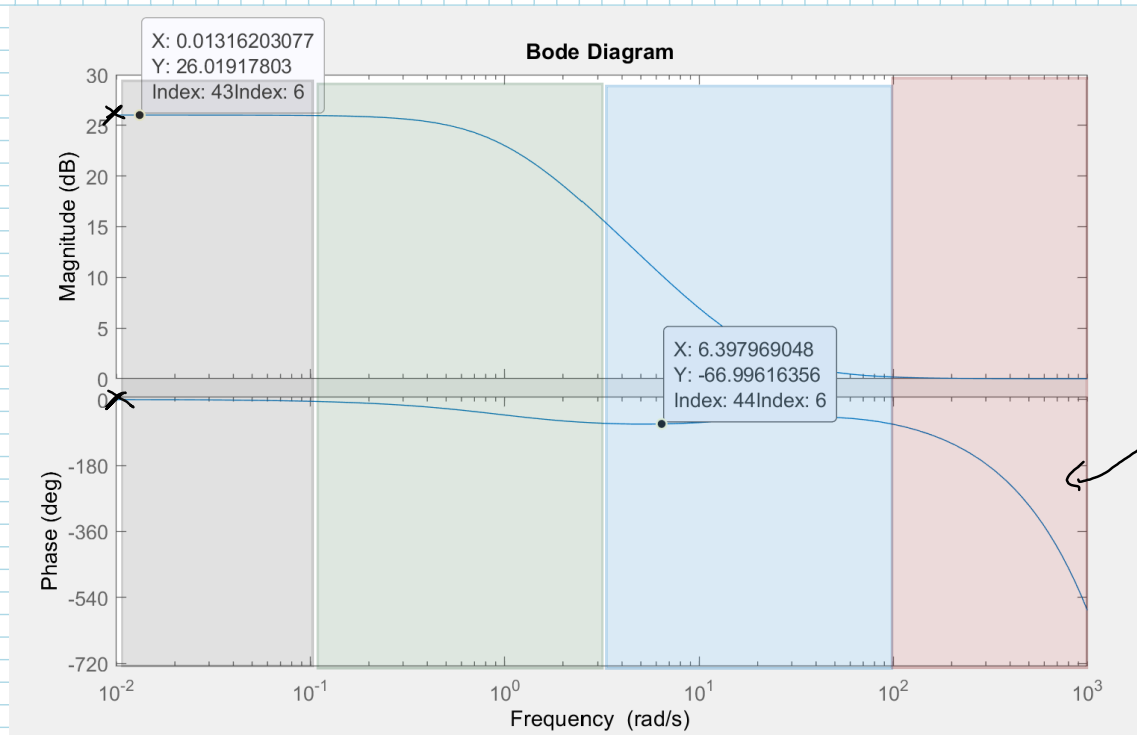
Frequenzinfo verloren

Nur noch relative Aussagen möglich.



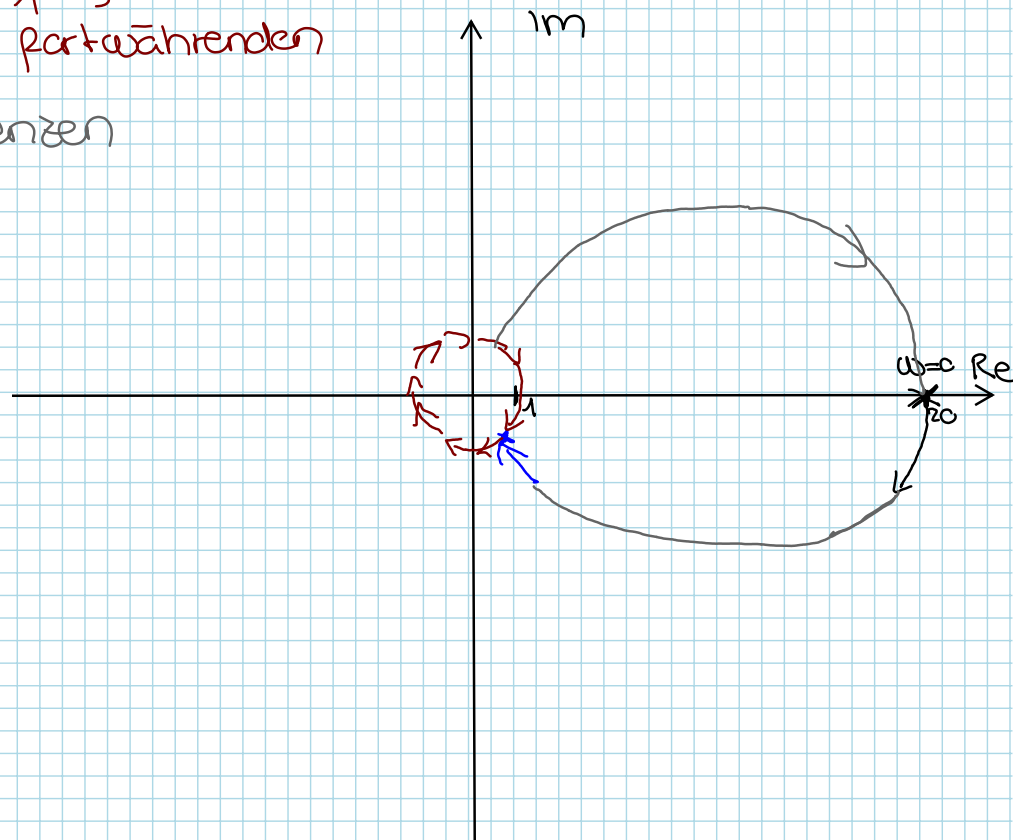
- dB-Darstellung \rightarrow Zerlegung Standard-Elemente.
- Regeln für Pole & Nullstellen.

Beispiel



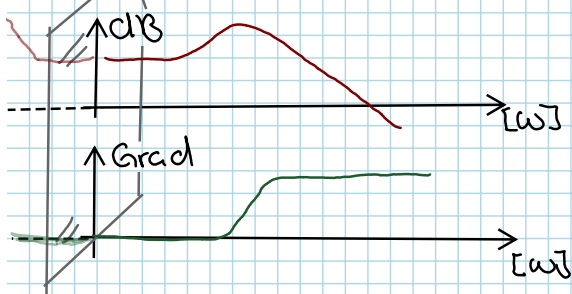
Nyquist aus Bode:

1. $\omega=0 \Rightarrow |Z(j\omega)| \approx 26 \text{ dB} = 20$ & $\angle Z(j\omega) = 0$
2. Betrachtet nächste Veränderung: Phase & Betrag nehmen ab.
3. Betrag bleibt bei 1 \Rightarrow Phase vorerst bei $\approx -60^\circ$
4. Betrag bleibt bei 1 \rightarrow Totzeit sorgt für fortwährenden Phasenverlust
5. Restliche Frequenzen ergänzen

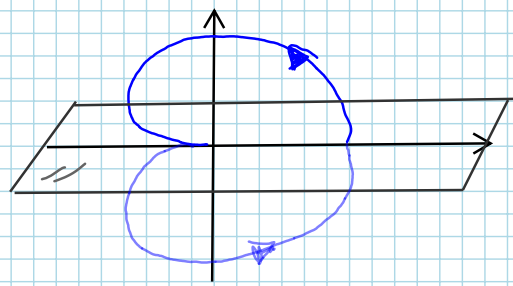


Was gilt für negative ω

Bode: Spiegeln an dB- & Grad-Achse



Nyquist: Spiegeln an Re-Achse



RT1 Übung 8

2 schnelle Aussagen aus Bode

Wir schreiben $\Sigma(s)$ folgendermassen um:

$$\Sigma(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^k (s^{n-k} + a_{n-k-1} s^{n-k-1} + \dots + a_0)}$$

und können anschliessend ablesen.

- ① Systemtyp k = Anzahl Pole bei 0 = Anzahl "offener Integratoren"

\Rightarrow wie starten wir in unseren Bodeplot

$$\text{Phase} = \begin{cases} -k \cdot \pi/2 & , \text{sgn}(\frac{p_0}{a_0}) > 0 \\ -\pi - k \cdot \pi/2 & , \text{sgn}(\frac{p_0}{a_0}) < 0 \end{cases}$$

- ② relativer Grad r : Grad Nenner (n) - Grad Zähler (m)

\Rightarrow wohin konvergiert unser System für $\omega \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \text{Steigung } |\Sigma(j\omega)| \text{ für } \omega \rightarrow \infty \\ = -r \cdot 20 \text{ dB/dec} \end{aligned}$$

Beispiel: $\Sigma(s) = \frac{s+1}{s^3 + s^2 + 3s} = \frac{s+1}{s(s^2 + s + 3)}$ $\begin{matrix} m=1 \\ n=3 \\ k=1 \end{matrix}$

$$\text{Systemtyp } p = 1 = k$$

$$\text{relativer Grad } r = n - m = 2$$

Kennen wir $\Sigma(s)$ immer vollständig?

Bisher haben wir angenommen:

White box model:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, \theta_1) \\ y &= g(\dot{x}, u, \theta_2)\end{aligned}$$

"Alles bekannt,
 $\Rightarrow f(\cdot), g(\cdot), \theta_1, \theta_2$ "

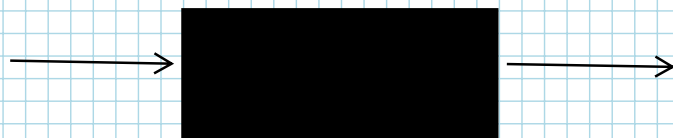
Es kann nun aber auch sein, dass wir nicht alles über unser System wissen.

Grey box model:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, ?) \\ y &= g(x, u, ?)\end{aligned}$$

"Physik eigentlich bekannt $\Rightarrow f(\cdot), g(\cdot)$,
Parameter unbekannt
 $\Rightarrow \theta_1 = ? , \theta_2 = ?$ "

Black box model:



"weder Zusammenhänge ($f(\cdot), g(\cdot)$) noch Parameter (θ_1, θ_2) bekannt"

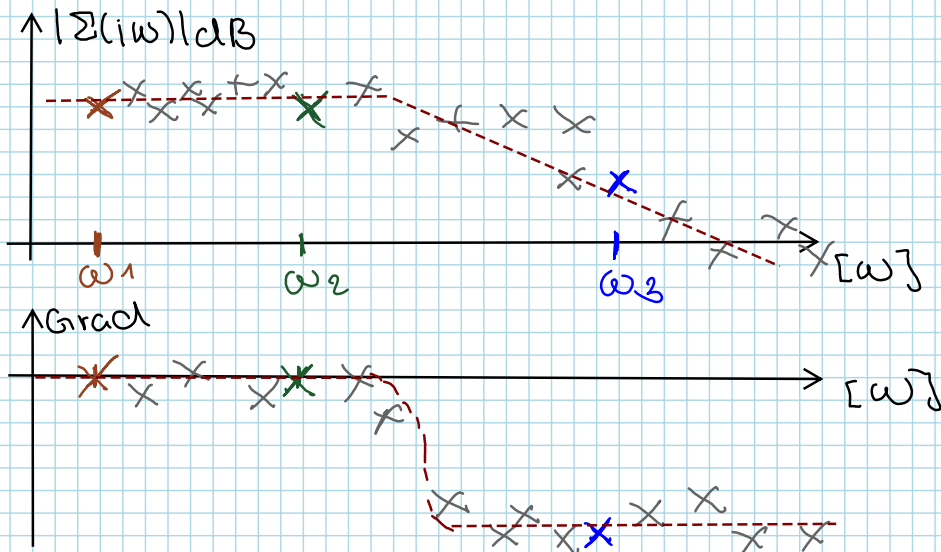
Wie können wir trotzdem mit black box modellen arbeiten?

\Rightarrow Analyse der Antwort auf Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen.

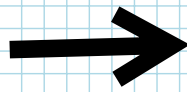
\Rightarrow Nach abklingen transientser Antwort erhalten wir $|\Sigma(j\omega)|$ & $\angle \Sigma(j\omega)$.



Also Punkte im Bode Plot



⇒ viele Messungen
• bei verschiedenen/frequenzen



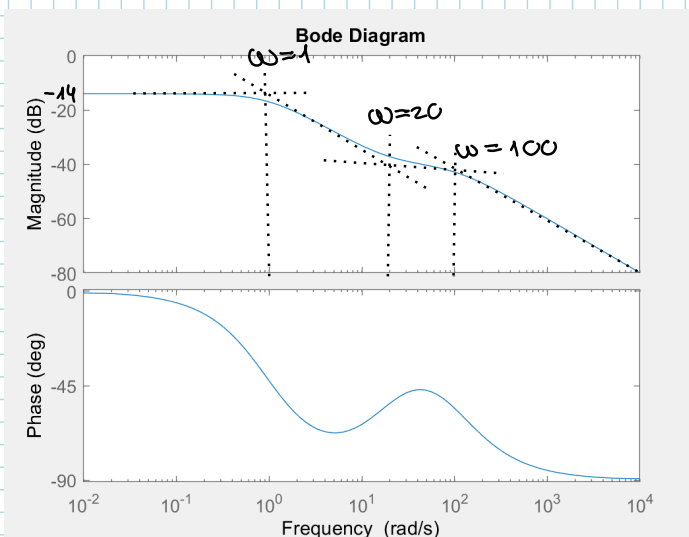
$Z(j\omega)$ aus Wissen von Standard-funktionen



System Identification

Beispiel:

- ① Aus welcher Übertragungsfunktion wurde das Bode Diagram unten erstellt?
- ② Was sind der Systemtyp k und der relative Grad r des Systems?



- ① Findet Veränderungen im Betrag oder der Phase und ordnet sie Polen, Nullstellen, Totzeiten... zu.

$\omega=1$: -20 dB/dec & Phasenverlust \rightarrow Pol mit $\text{Re} < 0$

$\omega=20$: $+20 \text{ dB/dec}$ & Phasengewinn \rightarrow Nullstelle mit $\text{Re} < 0$

$\omega=100$: -20 dB/dec & Phasenverlust \rightarrow Pol mit $\text{Re} < 0$

① wir starten nicht bei 0dB $\Rightarrow |Z(j0)| = k \neq 1$
 lest $|Z(j0)|_{dB}$ aus Diagramm ab: -14 dB

$$k = 10^{-14/20} = 10^{-0.7}$$

$$Z(s) = 10^{-0.7} \cdot \frac{(\frac{1}{20}s + 1)}{(s+1)(\frac{1}{100}s + 1)}$$

② Systemtyp k: wir starten mit 0 Grad in unseren Plot $\Rightarrow \underline{k=0}$.

relativer Grad r : Steigung für $\omega \rightarrow \infty$ -20dB/dec
 $\Rightarrow \underline{r=1}$.

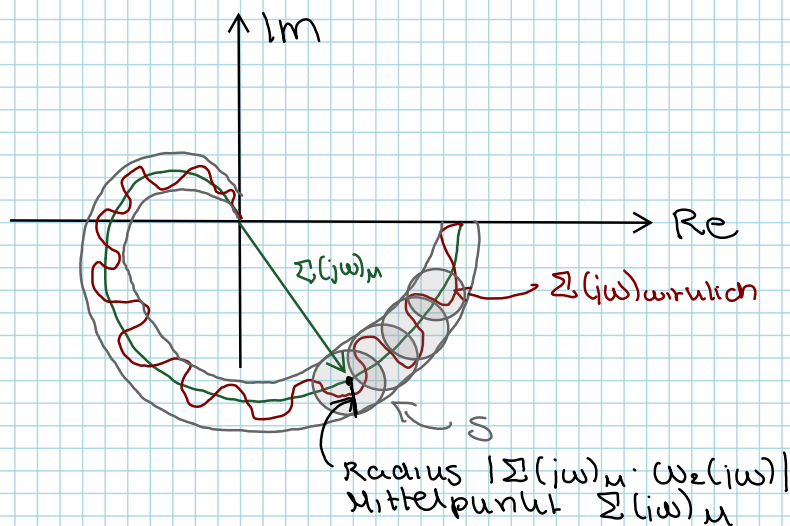
Aber auch wenn wir denken wir wissen alles über unser System:

"Modell bleibt Modell"

modelliertes System ist praktisch immer nur Approximation der Wirklichkeit

Annahme bis jetzt Modell = Wirklichkeit

Aber Wirklichkeit steht evtl. ein bisschen anders da



⚡ Problem: $Z(j\omega)_{\text{wirklich}}$ nicht bekannt

✓ Lösung: Genügend Spielraum um $Z(j\omega)_M \rightarrow$ Sicherheitskreis -
 kreis mit Radius $|Z(j\omega)_M \omega_z(j\omega)|$

Annahme: $Z(j\omega)_{\text{wirklich}}$ liegt in Menge S :

$$S = \{Z(j\omega)_M (1 + \Delta \cdot \omega_z(j\omega)) \mid |\Delta| \leq 1, \angle \Delta \in [-\pi, \pi]\}$$

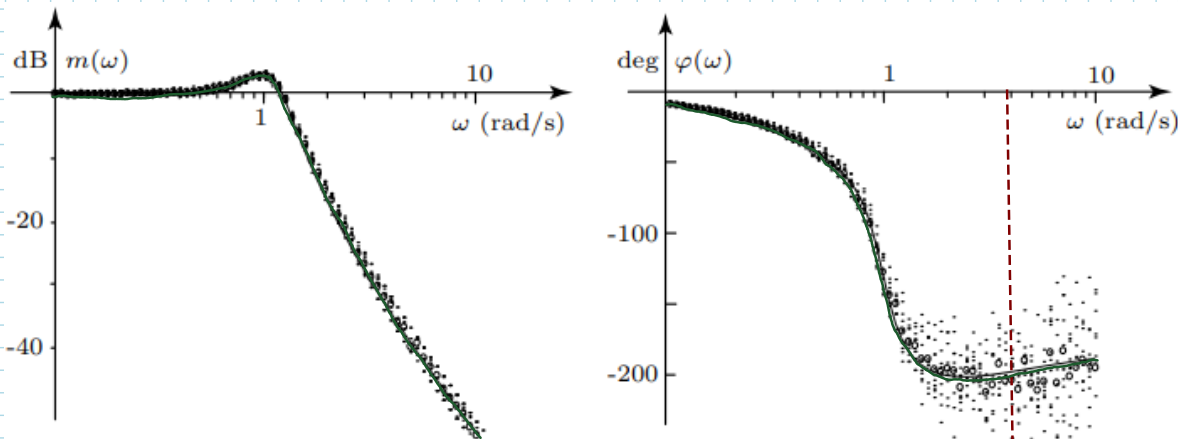
Wie finden wir $\omega_z(j\omega)$?

⇒ Mittels Messpunkten

① Erzeugung von k-Frequenzgängen $\rightarrow |\Sigma(j\omega^*)|$ & $\angle \Sigma(j\omega^*)$

„Also wie bei Systemidentifikation (black box) nur mehrere (k) Messungen für jede Frequenz.“

Jede Messung wird in Bodeplot eingezeichnet



mehrere Messungen
bei der selben
Frequenz. $k=1,2,3,\dots$

② Systemidentifikation: Findet ein passendes Modell: $\Sigma(s)_u$

Wir haben also bei jeder Frequenz:

$$\Sigma(j\omega)_u = m_i e^{j\varphi_i} \quad \& \quad \Sigma(j\omega_{i,u})_{\text{meas}} = \tilde{m}_{i,u} e^{j\tilde{\varphi}_{i,u}}$$

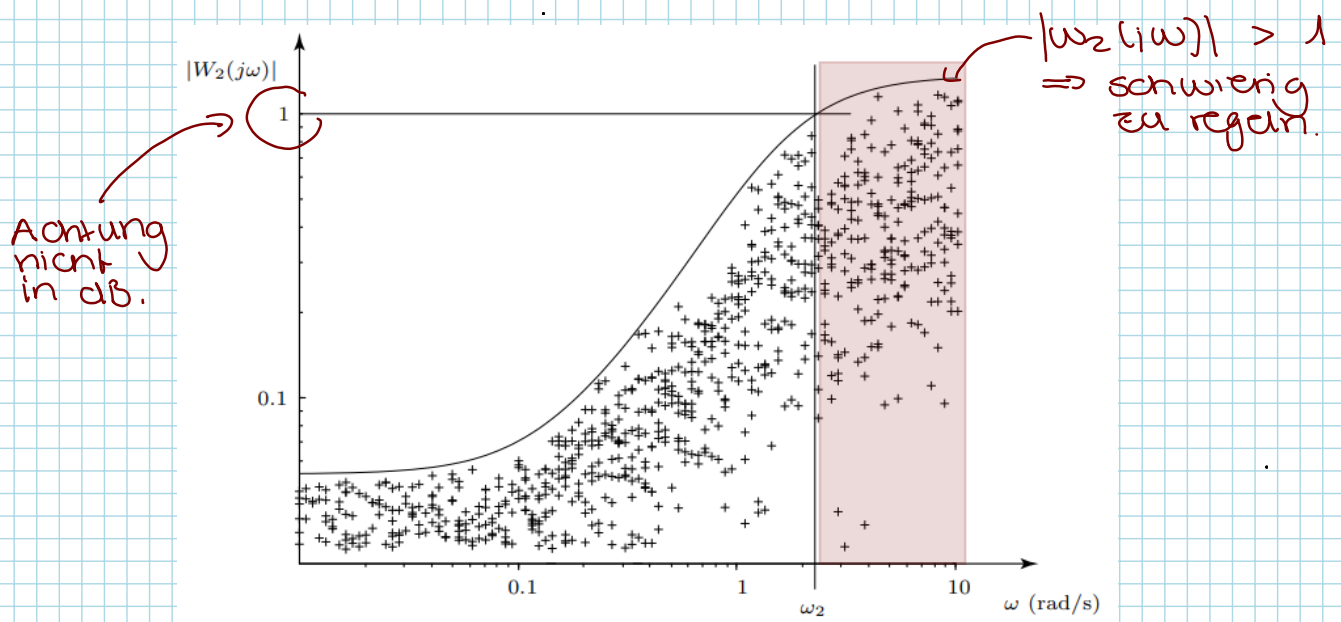
Alle $\Sigma(j\omega_{i,u})_{\text{meas}}$ sollten nun in S liegen.

$$S = \{ \Sigma(j\omega)_u (1 + \Delta \cdot \omega_z(j\omega)) \mid |\Delta| \leq 1, \angle \Delta \in [-\pi, \pi] \}$$

⇒ Durch umformung erhalten wir daraus folgende Bedingung für $\omega_z(j\omega)$.

$$\left| \frac{\Sigma(j\omega_{i,u})_{\text{meas}}}{\Sigma(j\omega_i)_u} - 1 \right| \leq |\omega_z(j\omega_i)|$$

③ Plottet obige Bedingung für alle Messpunkte und findet $|\omega_z(j\omega_i)|$ welches die Punktemenge von oben begrenzt.



\Rightarrow Tipps zur Serie ...