

# Regelungstechnik I HS 2020

## Frequenzgang / Frequenzantwort

Autoren: C. Küttel, M. Reinders, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

# Zusammenfassung Vorlesung 8

## Buch Kapitel 8.1-8.2

Bei Fragen: morettog@ethz.ch, davidm@ethz.ch

## 1 Frequenzantworten

In Kapitel 4 wurden zwei verschiedene Eingangsgrößen eingeführt: Der Sprung  $h(t)$  und der Impuls  $\delta(t)$ . Als nächstes wird die harmonische Eingangsgrösse eingeführt:

$$u(t) = \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi),$$

wobei  $\alpha$  die Amplitude,  $\omega$  die Frequenz in  $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , und  $\phi$  die Phasenverschiebung ist. Der Ausgang eines Systems  $\Sigma(s)$  mit harmonischen Eingang hat die Form:

$$y(t) = y_{\text{transient}}(t) + y_{\infty}(t)$$

Unter der Annahme, dass das System  $\Sigma(s)$  linear, zeitinvariant und asymptotisch stabil ist, gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{transient}}(t) \rightarrow 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow y_{\infty}$$

Die asymptotische Systemantwort ist ein verstärkter und phasenverschobener cosinus bei derselben Frequenz wie der Eingang:

$$y_{\infty}(t) = m(\omega) \cdot \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi + \varphi(\omega))$$

Die Verstärkung  $m(\omega)$  und die Phasenverschiebung  $\varphi(\omega)$  sind systemabhängig. Es gilt:

$$y_{\infty}(t) = |\Sigma(j\omega)| \cdot \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi + \angle \Sigma(j\omega)) \quad (1)$$

D.h. die Verstärkung entspricht der Systemverstärkung bei der Eingangsfrequenz und die Phasenverschiebung entspricht der Systemphase bei der Eingangsfrequenz.

**Wichtig!** Lineare Systeme generieren keine neue Frequenzen. Dies ist in Gl. (1) ersichtlich. Es kommen immer dieselben Frequenzen aus dem System, wie in das System gehen. D.h. die Phasenverschiebung und Verstärkung ist nur frequenzabhängig und somit eine Eigenschaft des Systems.

**Beispiel:** Gegeben sei:

$$\Sigma(s) = \frac{s+8}{s^2+6s+8} = \frac{(s+8)}{(s+2) \cdot (s+4)} \quad (2)$$

Berechne die asymptotische Frequenzantwort  $y_{\infty}$  auf den Eingang:

$$u(t) = \cos(8 \cdot t)$$

Ohne etwas zu rechnen, kennt man die Form von  $y_{\infty}$

$$y_{\infty} = |\Sigma(8j)| \cdot \cos(8 \cdot t + \angle \Sigma(8j))$$

Einsetzen von  $s = 8j$ , liefert:

$$\Sigma(8j) = \frac{(8j+8)}{(8j+2) \cdot (8j+4)} \quad (3)$$

Die Magnitude ist:

$$|\Sigma(8j)| = \frac{|(8j+8)|}{|(8j+2)| \cdot |(8j+4)|} = \frac{\sqrt{8^2+8^2}}{\sqrt{8^2+2^2} \cdot \sqrt{8^2+4^2}} = 0.1534$$

und die Phase ist:

$$\begin{aligned} \angle \Sigma(8j) &= \angle(8j+8) - \angle(8j+2) - \angle(8j+4) \\ &= \arctan\left(\frac{8}{8}\right) - \arctan\left(\frac{8}{2}\right) - \arctan\left(\frac{8}{4}\right) \\ &= -1.648 \text{ rad} \end{aligned}$$

Die asymptotische Frequenzantwort ist folglich:

$$y_{\infty}(t) = 0.1534 \cdot \cos(8 \cdot t - 1.648)$$

**Beispiel:** Als nächstes wird mit einem Beispiel illustriert, wie man viele Frequenzen eines Systems auf einmal testen könnte. Betrachte Abb. 1. Die Masse  $m$  ist mit einer Feder mit Federkonstante  $k_F$  und einem Dämpfer mit Dämpferkonstante  $c_D$  verbunden. Das System kann mit einer Kraft  $u(t)$  aktuiert werden.

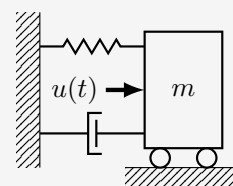


Abb. 1: Aktuiertes Feder-Dämpfer System.

Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= u(t) - F_{\text{Feder}} - F_{\text{Dämpf}} \\ &= u(t) - k_F y - c_D \dot{y} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Sigma(s) = \frac{1/m}{s^2 + \frac{c_D}{m}s + \frac{k_F}{m}} \quad (4)$$

Mit  $k_F = 1$ ,  $c_D = 1$ ,  $m = 0.25$ , folgt:

$$\Sigma(s) = \frac{4}{s^2 + s + 4} = \frac{4}{(s + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}j)(s + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}j)}$$

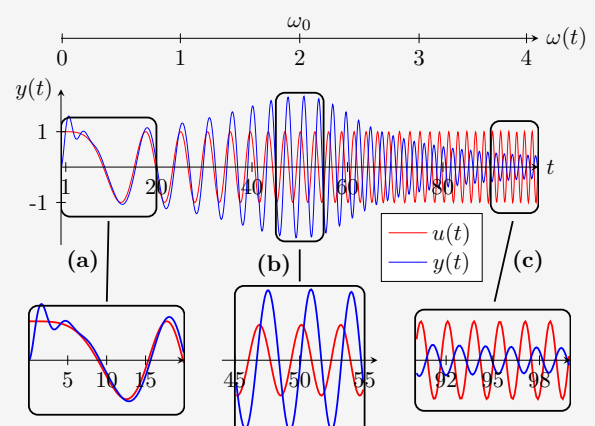
Das System ist *asymptotisch stabil* nach Lyapunov, und erfüllt somit die Bedingung um mit Methoden der Frequenzanalyse betrachtet zu werden.

Als Eingangssignal wird  $u(t) = \cos(\omega(t) \cdot t)$  gewählt, wobei:

$$\omega(t) = \frac{4}{100} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t.$$

D.h. über 100 Sekunden hinweg werden alle Frequenzen von 0 bis  $4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  getestet. Die Systemantwort sieht wie folgt aus:

Abb. 2: Rot: input  $u(t)$ , blau: output  $y(t)$



UG1 → UGF1

Man bemerke folgende Eigenschaften des Systems:

(a) Bei  $\omega = 0$  springt der Wert des Eingangssignals von 0 auf 1. Das Feder-Dämpfer System erfährt etwas ähnliches wie eine Sprungantwort. Aufgrund der Eigenwerte mit negativem Realteil, konvergiert das System schnell zur harmonischen Systemantwort. Ausserdem ist bei tiefen Frequenzen ersichtlich, dass die Phase des Ausgangs quasi der Phase des Eingangs entspricht.

(b) Die natürliche Frequenz des Systems ist bei  $\omega_0 = \sqrt{4} = 2$ . Da  $\omega(t)$  linear gewählt wurde ( $\omega \in [0, 4]$ ), folgt:  $\omega_0 = \omega(t = 50)$ . Aus der Antwort ist ersichtlich, dass  $y(t)$  in der Nähe der natürlichen Frequenz die grösste Magnitude hat. Ausserdem ist der Ausgang gegenüber dem Eingang phasenverschoben.

(c) Bei sehr hohen Frequenzen kann das Feder-Dämpfer System nicht mehr schnell genug auf die Anregung reagieren, und die Amplitude seiner Schwingung nimmt ab. Zusätzlich ist bei hohen Frequenzen ersichtlich, dass die Phase des Ausgangs um ca.  $-\pi$  verschoben ist.

Es gibt verschiedene Methoden, wie man die Magnitude  $m(\omega)$  und Phasenantwort  $\varphi(\omega)$  von Systemen  $\Sigma(s)$  repräsentieren kann. Im folgenden werden zwei Methoden beschrieben: Bode Diagramme und Nyquist Diagramme.

## 2 Bode Diagramme

Bei Bodediagrammen werden die Magnitude  $m(\omega) = |\Sigma(j \cdot \omega)|$  und die Phase  $\varphi(\omega) = \angle \Sigma(j \cdot \omega)$  gegenüber einer logarithmischen Frequenzskala eingezeichnet. Dabei ist die Magnitude üblicherweise in Dezibel, und die Phase in Grad dargestellt.

### Umrechnung zwischen dezimal und dezibel

$$|\Sigma(s)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10} |\Sigma(s)|$$

$$|\Sigma(s)| = 10^{\frac{|\Sigma(s)|_{\text{dB}}}{20}}$$

Dezimalskala	Dezibelskala
100	40
10	20
5	13.97...
2	6.02...
1	0
$1/\sqrt{2}$	-3.0103
0.1	-20
0.01	-40
0	-Inf

Tabelle 1: Einige wichtige Skalenumrechnungen

### Beispiel: System erster Ordnung

Viele reale Regelkreise können als Systeme erster Ordnung approximiert werden. Ein solches System reagiert auf tiefe Frequenzen, die kleiner als die Eckfrequenz (cutoff frequency<sup>a</sup>)  $\omega_g = 1/\tau$  sind. Bei Anregungsfrequenzen höher als  $\omega_g$  verhindert die Trägheit des Systems eine starke Änderung des Ausgangs. Ausserdem reagiert das System für  $\omega > \omega_g$  zunehmend verzögert, wie an der Phase des Bode-Diagramms ersichtlich ist. Eine wichtiges Merkmal: die Magnitude bei  $\omega_g = \frac{1}{\tau}$  ist immer bei  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3$  dB.

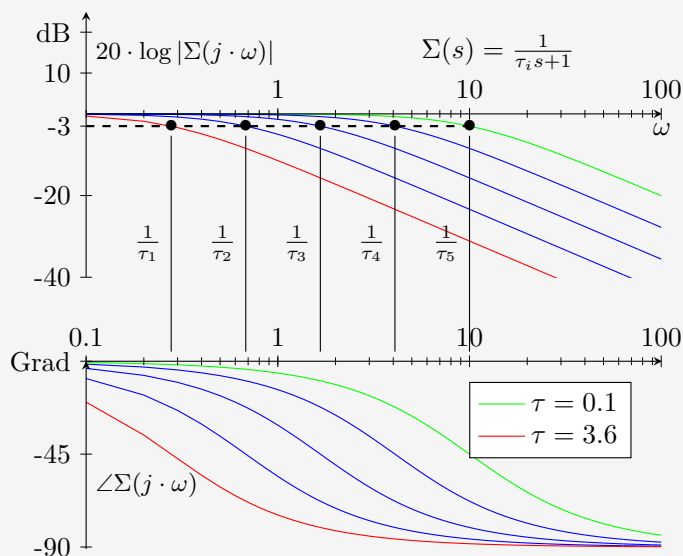


Abb. 3: Bode-Diagramme von Systemen erster Ordnung.

<sup>a</sup>Nicht zu verwechseln mit der später eingeführten crossover frequency.

### Beispiel: System zweiter Ordnung

Viele mechanischen Systeme zeigen resonantes Verhalten (grössere Verstärkung bei mittleren Frequenzen als bei tiefen - eine sogenannte Resonanzüberhöhung). Solche Systeme werden oft als Systeme zweiter Ordnung approximiert.

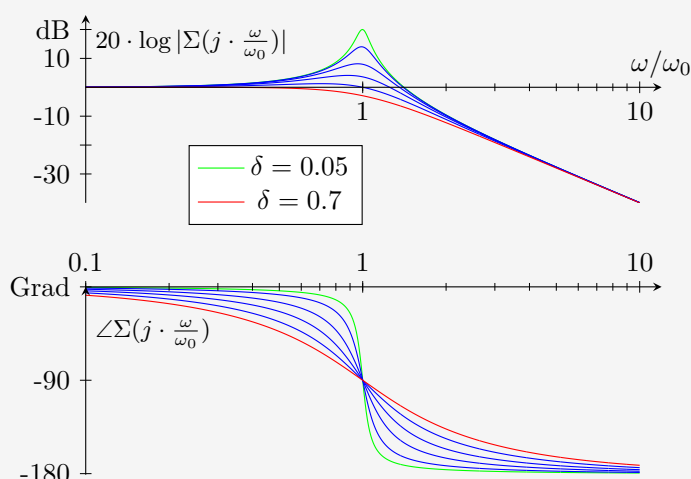


Abb. 4: Frequenznormiertes Bode-Diagramm für ein System 2. Ordnung bei unterschiedlichen Dämpfungsparametern.

**Vorsicht!** Die resonante Frequenz (maximale Verstärkung) ist nicht bei der natürlichen Frequenz  $\omega/\omega_0 = 1$ , sondern bei:

$$\omega_{\max} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \delta^2}, \quad 0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Jedoch gilt für kleine Dämpfungsparameter  $\omega_{\max} \approx \omega_0$ . Ausserdem zeigen Systeme 2. Ordnung für  $\delta > \frac{1}{\sqrt{2}}$  kein resonantes Verhalten.

Vergleich Abb. 2 und Abb. 4 | Beide Abbildungen beinhalten dieselbe Information, jedoch dient das Bode-Diagramm zur vereinfachten Nutzung. Bei tiefen Frequenzen wurde in Abb. 2 identifiziert, dass quasi keine Phasenverschiebung und eine Verstärkung von 1 vorzufinden ist. Dies lässt sich direkt am Bode-Diagramm in Abb. 4 ablesen. Um die natürliche Frequenz ist in Abb. 2 eine starke Verstärkung ersichtlich. Zusätzlich könnte man eine Phase von  $-\pi/2$  erahnen. Am Bode-Diagramm ist die Phase von  $-90$  Grad direkt ersichtlich.

### Einfluss von Polen und Nullstellen auf das Bode Diagramm

Standardelemente	Änderung im Bode Diagramm	
	Verstärkung	Phase
Stabiler Pol	-20 dB/dec bei $\omega_g$	$-90^\circ$ bei $\omega_g$
Instabiler Pol	-20 dB/dec bei $\omega_g$	$+90^\circ$ bei $\omega_g$
Minimalphasige NS	+20 dB/dec bei $\omega_g$	$+90^\circ$ bei $\omega_g$
Nicht-Minimalphasige NS	+20 dB/dec bei $\omega_g$	$-90^\circ$ bei $\omega_g$
Delay um $\tau$ [s] ( $\forall \omega$ [rad/s])	0 dB/dec	$-180/\pi \cdot \omega \cdot \tau^\circ$

Für Pole oder Nullstellen mit Vielfachheit grösser als eins, muss sowohl die Änderung der Verstärkung wie auch die gesamte Phasenänderung mit der Vielfachheit multipliziert werden. Beispielsweise führt eine doppelte minimalphasige Nullstelle zu einer Steigung von +40 dB/Dekade und eine Phasenänderung von +180°.

### Allgemeine Übertragungsfunktionen

Gegeben sei eine Übertragungsfunktion als Serienschaltung:

$$\Sigma(s) = \Sigma_1(s) \cdot \Sigma_2(s)$$

Das Bode-Diagramm der Serienschaltung  $\Sigma(s)$  lässt sich einfach aus den Bode-Diagrammen der einzelnen Subsysteme  $\Sigma_1(s)$  und  $\Sigma_2(s)$  konstruieren.

Die **Magnitude** der Serienschaltung  $\Sigma(s)$  in Bode Diagramm ergibt sich aus der Summe der Magnituden der Subsysteme  $\Sigma_1(s)$  und  $\Sigma_2(s)$ . Dies, weil dB eine logarithmische Einheit ist und somit gilt:  $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ .

$$\begin{aligned} |\Sigma(j\omega)| &= |\Sigma_1(j\omega)| \cdot |\Sigma_2(j\omega)| \\ (|\Sigma(j\omega)|)_{\text{dB}} &= (|\Sigma_1(j\omega)| \cdot |\Sigma_2(j\omega)|)_{\text{dB}} \\ |\Sigma(j\omega)|_{\text{dB}} &= |\Sigma_1|_{\text{dB}} + |\Sigma_2|_{\text{dB}} \end{aligned}$$

Die **Phase** der Übertragungsfunktion  $\angle \Sigma(j\omega)$  wird in Grad oder Bogenmass angegeben. Da  $e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\varphi_2} = e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$  gilt, ergibt sich auch die Phase der Serienschaltung als Summe der Phasen der einzelnen Subsysteme:

$$\angle \Sigma = \angle \Sigma_1 + \angle \Sigma_2$$

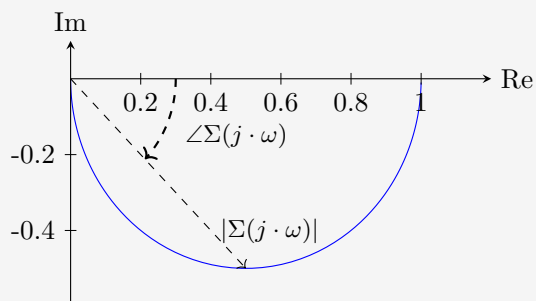
## 3 Nyquist Diagramme

Das Nyquist Diagramm ist die Darstellung des Frequenzganges (Magnitude und Phase über die Anregungsfrequenz  $\omega$ ) direkt in der komplexen Ebene.

### Beispiel: System erster Ordnung

Ein allgemeines System 1. Ordnung bei der Frequenz  $s = j\omega$  hat folgende Magnituden und Phasen:

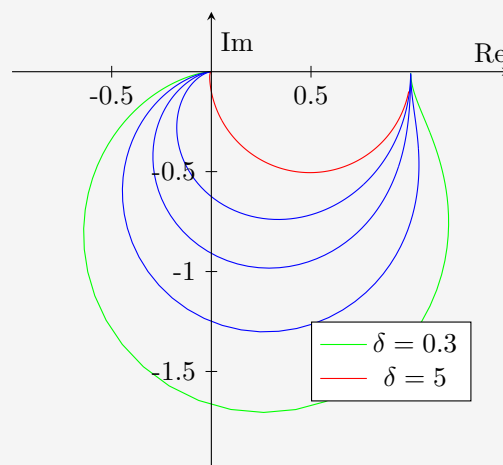
$$\begin{aligned} |\Sigma(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}} \\ \angle \Sigma(j\omega) &= -\arctan(\tau \cdot \omega) \end{aligned}$$



### Beispiel: System zweiter Ordnung

Ein allgemeines System 2. Ordnung hat bei der Frequenz  $s = j \cdot \omega$  folgende Magnituden und Phasen:

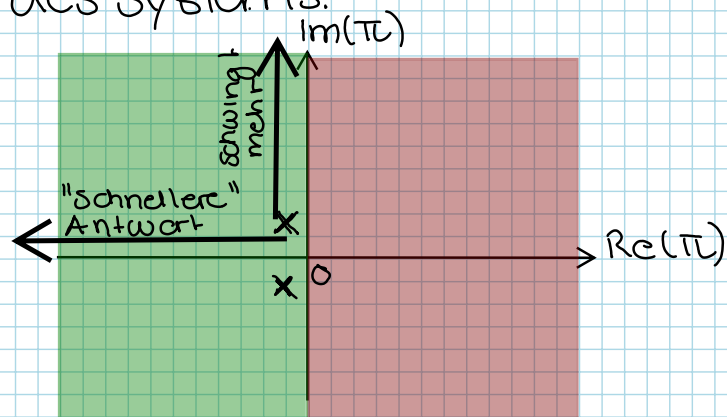
$$\begin{aligned} |\Sigma(j \cdot \omega)| &= \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \delta^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega^2}} \\ \angle \Sigma(j \cdot \omega) &= \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) & \forall 0 \leq \omega \leq \omega_0 \\ -\arctan\left(\frac{2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) - \pi & \forall \omega_0 < \omega \end{cases} \end{aligned}$$



Das Nyquist Diagramm wird im Kapitel 9 im Zusammenhang mit der Stabilitätsanalyse eines Regelkreises nützlich. Wir werden sehen, dass Aussagen zum geschlossenen Regelkreis anhand des Nyquist Diagramms des offenen Regelkreises getroffen werden können.

## Recap:

Pole: Nullstellen des Nenners  $\Rightarrow$  Beschreiben I/O-Verhalten des Systems.



⚠ Pol  $\Rightarrow$  Eigenwerte A  
Umkehrschluss gilt nur falls vollständig steuerbar & beobachtbar

$\dot{x} = Ax + Bu$   
 $y = Cx + Du$  } minimale Realisierung

& Impulsantwort  $\Sigma(s) \Rightarrow y(t) = a_1 e^{\pi_1 t} + a_2 e^{\pi_2 t} + \dots$

BIBO-Stabilität (Stabilität des I/O-Verhaltens)

Ein System ist BIBO-stabil falls

$$\int_0^{\infty} |G(t)| dt < \infty \Rightarrow \text{Alle Pole des Systems haben } \operatorname{Re} < 0.$$

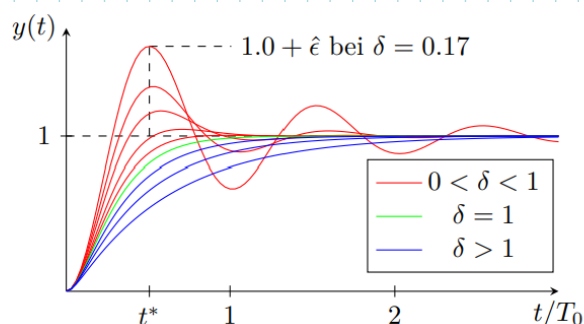
(mit  $G(t)$ : Impulsantwort)

## Systeme 2. Ordnung

$$\Sigma(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$\omega_0$  & Dämpfung  $\delta$  beeinflussen Pollage & somit Systemantwort

$$\pi_{1/2} = (-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}) \omega_0$$

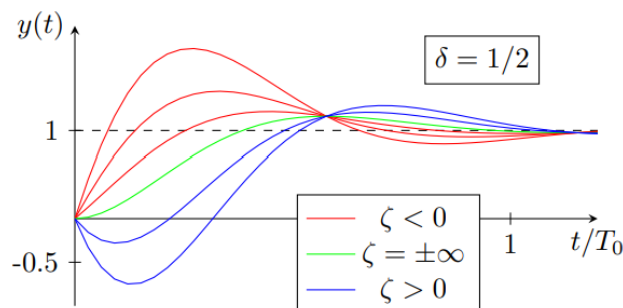


## Nullstellen

„Auch Nullstellen des Zählers haben Einfluss auf Systemantwort“

- Abschwächung Pol durch nahe Nullstelle
- $\dot{y}(0) \neq 0$
- $\operatorname{Re}(\xi) < 0 \rightarrow$  schnellere Antwort
- $\operatorname{Re}(\xi) > 0 \rightarrow$  System läuft

$\Rightarrow$  Je näher beim Ursprung, desto größer der Einfluss



# RT 1 Übung 7

Bisher haben wir uns die Systemantwort von  $t=0$  für Schritte & Impulse angeschaut.

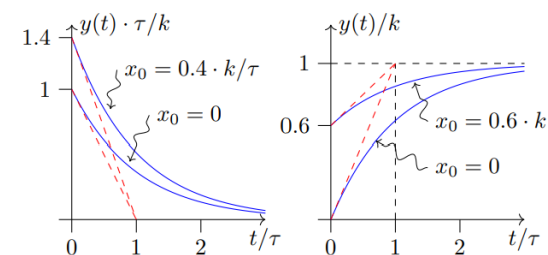
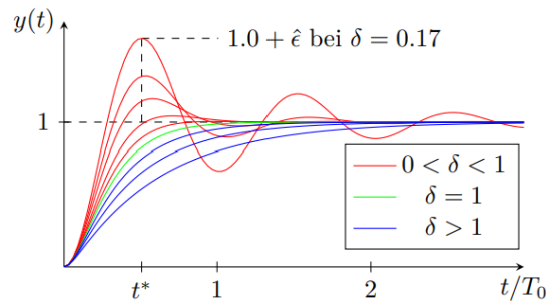
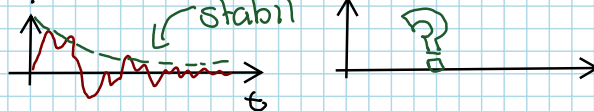


Abb. 3: Impulsantwort links und Sprungantwort rechts.



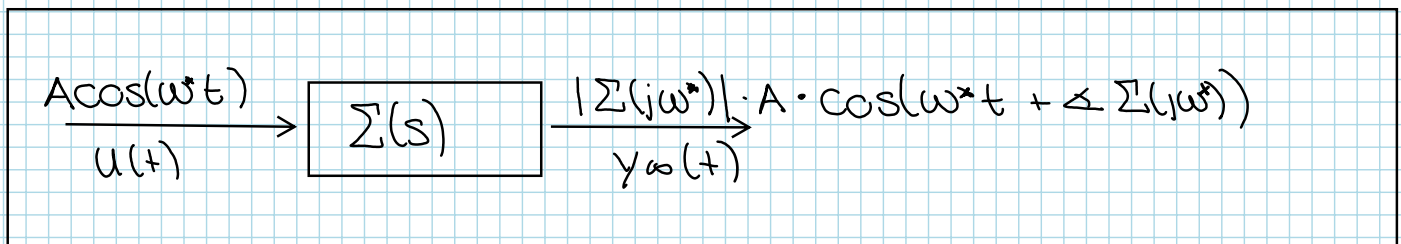
Heute: Was passiert für  $u(t)$  = "Schwingung" nach transientem Verhalten. Betrachtung für stabile  $\underline{L \geq 1}$  Systeme

$$y(t) = y_{\text{transient}}(t) + y_{\infty}(t)$$

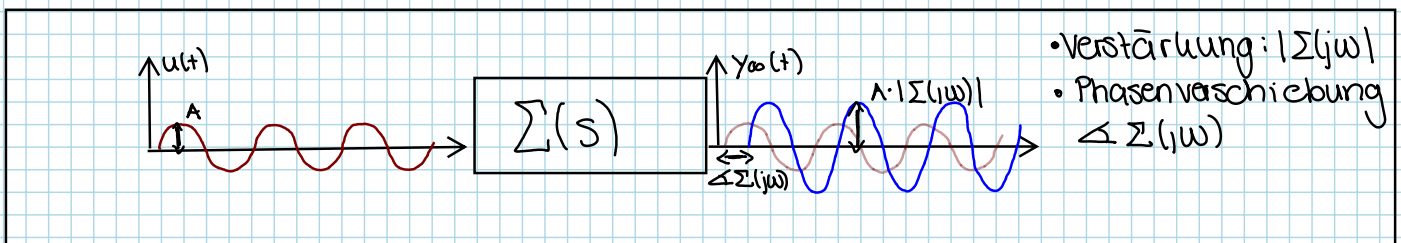


⇒ also wenn unser System "eingeschwungen" ist. →  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{transient}}(t) \rightarrow 0$  falls System stabil.

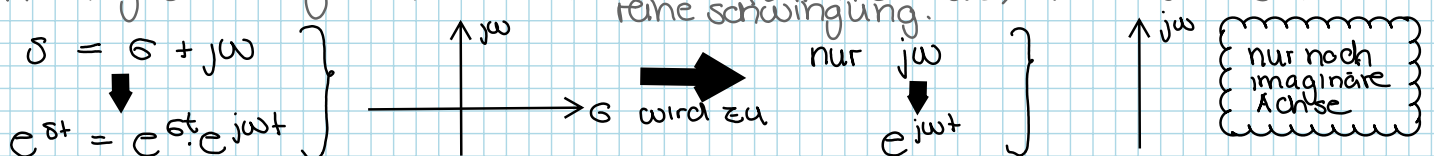
Und hier gilt:



Geben wir eine bestimmte Frequenz in unser System bleibt diese erhalten (i.e.  $\omega^*$ )  
 → sie wird jedoch frequenzabhängig verstärkt und phasenverschoben.



Im eingeschwungenen Bereich: nichts fällt mehr ab, nichts wächst mehr  
 keine Schwingung.





Beispiel: <https://www.sccs.swarthmore.edu/users/12/abiele1/linear/examples/freq.html>

## Bode & Nyquist-Plots

Diese Frequenzabhängige Verstärkung und Phasenverschiebung würden wir nun gerne graphisch darstellen.

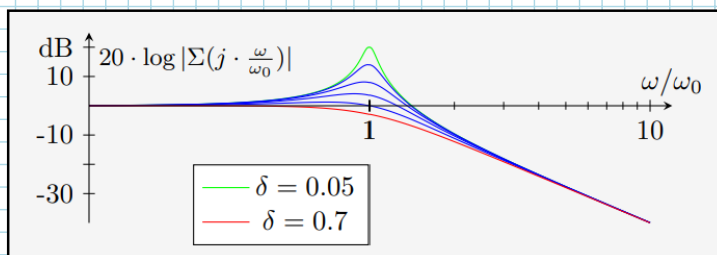
Ihr habt kennengelernt:

Bode-Plot: 2 Plots  $\rightarrow$  "frequenz explizit"

Nyquist-Plot: 1 Plot  $\rightarrow$  "frequenz implizit"

## Bode

Plot 1: " $|\Sigma(j\omega)|$  vs  $\omega$ "



wobei:

- $|\Sigma(j\omega)|$  in dB  
 $\Rightarrow |\Sigma(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \lg_{10} |\Sigma(j\omega)|$   
 $|\Sigma(j\omega)| = 10^{\frac{|\Sigma(j\omega)|_{dB}}{20}}$
- $\omega$ -Achse in  $\lg_{10}$  Skala

dB-Tabelle

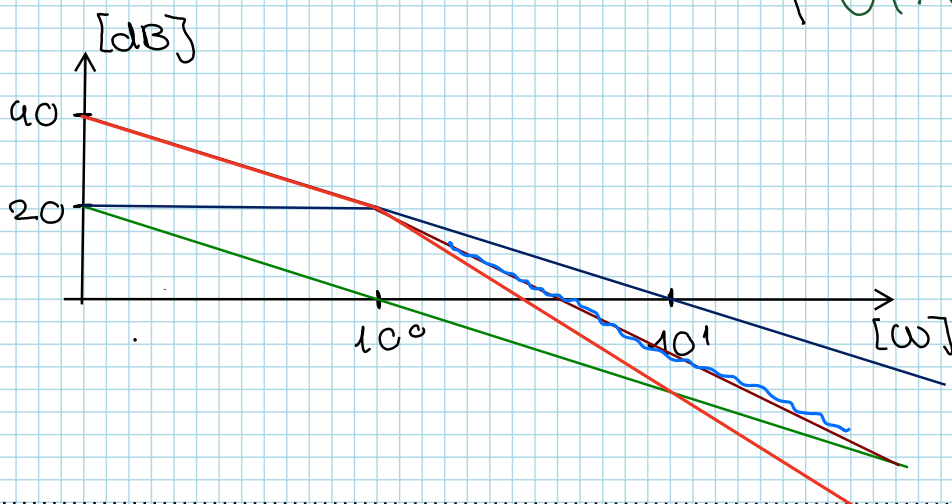
? wo liegt  $\omega = 0$  auf der  $\lg_{10}$  Skala.  $-\infty$

! Umwandlung in dB hat Vorteile: log macht aus Multiplikation  $\rightarrow$  Addition.  $\Rightarrow$  Systemzerlegung möglich.

## Beispiel

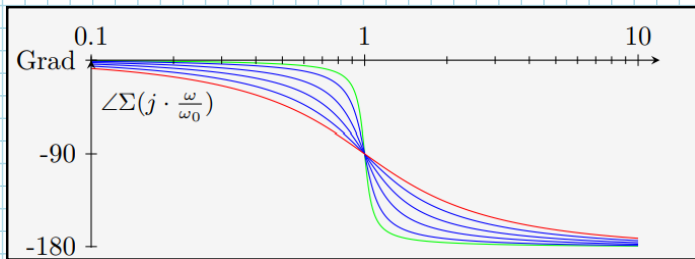
$$\Sigma(s) = \frac{10}{s(s+1)} \Rightarrow |\Sigma(j\omega)|_{dB} = 20 \lg\left(\left|\frac{10}{s(s+1)}\right|\right)$$

$$= 20 \cdot \left(\lg\left(\left|\frac{1}{s}\right|\right) + \lg\left(\left|\frac{10}{(s+1)}\right|\right)\right)$$



Wir kommen noch dazu, warum ich weiss, dass es so aussieht

Plot 2: " $\angle \Sigma(j\omega)$  vs  $\omega$ " mit  $\angle \Sigma(j\omega)$  in Grad



$$\angle \Sigma(j\omega) = \tan^{-1} \left( \frac{\operatorname{Im}(\Sigma(j\omega))}{\operatorname{Re}(\Sigma(j\omega))} \right)$$

⇒ Erfüllt Additionsanforderungen bereits.

$$\Sigma(j\omega) = \frac{a(j\omega)}{b(j\omega)} \Rightarrow$$

$$\angle \Sigma(j\omega) = \angle a(j\omega) - \angle b(j\omega)$$

$$\text{da } r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

## Beispiel

$$\Sigma(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

$$\begin{aligned} \angle \Sigma(s) &= \angle \left( \frac{10}{s(s+1)} \right) \\ &= \angle \left( \frac{1}{s} \right) + \angle \left( \frac{10}{s+1} \right) \end{aligned}$$



## Wie plotten?

① Standardelemente → Appendix A Buch (findet ihr auf moodle)

② Regeln für Pole & Nullstellen verwenden

	$ \Sigma(j\omega) $	$\angle \Sigma(j\omega)$
• stabile pole	-20 dB/dec	-90°
• instabile pole	+20 dB/dec	+90°
• negativ nullstelle	-20 dB/dec	-90°
• positive nullstelle	+20 dB/dec	+90°

## Einschub: Bode's law

⇒ Phase & Amplitude sind nicht wirklich unabhängig: für asymptisch stabiles System mit nur negativen Nullstellen gilt.

$$\begin{aligned} \text{Für Steigung } |\Sigma(j\omega)| &= 20 \text{ dB/dec} \cdot \kappa \\ \Leftrightarrow \angle \Sigma(j\omega) &\approx \kappa \pi/2 \end{aligned}$$

nicht erfüllt ⇒ instabiler Pol, positive Nullstelle, Totzeit...

③ MATLAB (siehe Matlabhilfe).

Beispiel oben . aus standardelementen

$$Z(s) = \frac{10}{s(s+1)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{10}{(s+1)}$$

### A.1 Integrator Element

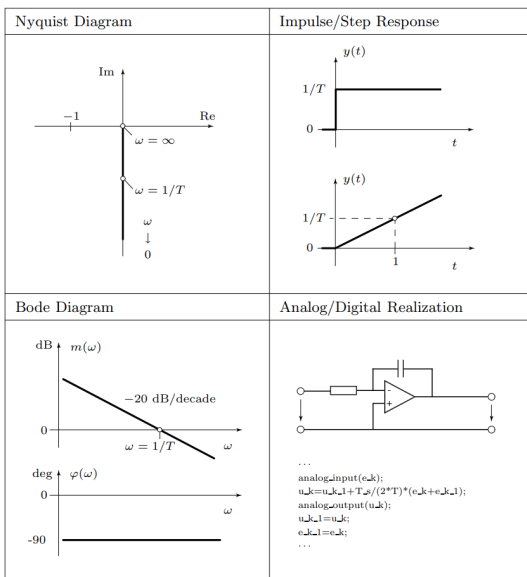
Element Acronym: **I**

mit  $T=1$

Transfer Function:  $\Sigma(s) = \frac{1}{T \cdot s}$

Poles/Zeros:  $\pi_1 = 0, \zeta_1 = \infty$

Internal Description:  $\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{T} \cdot u(t)$   
 $y(t) = x(t)$



### A.3 First-Order Element

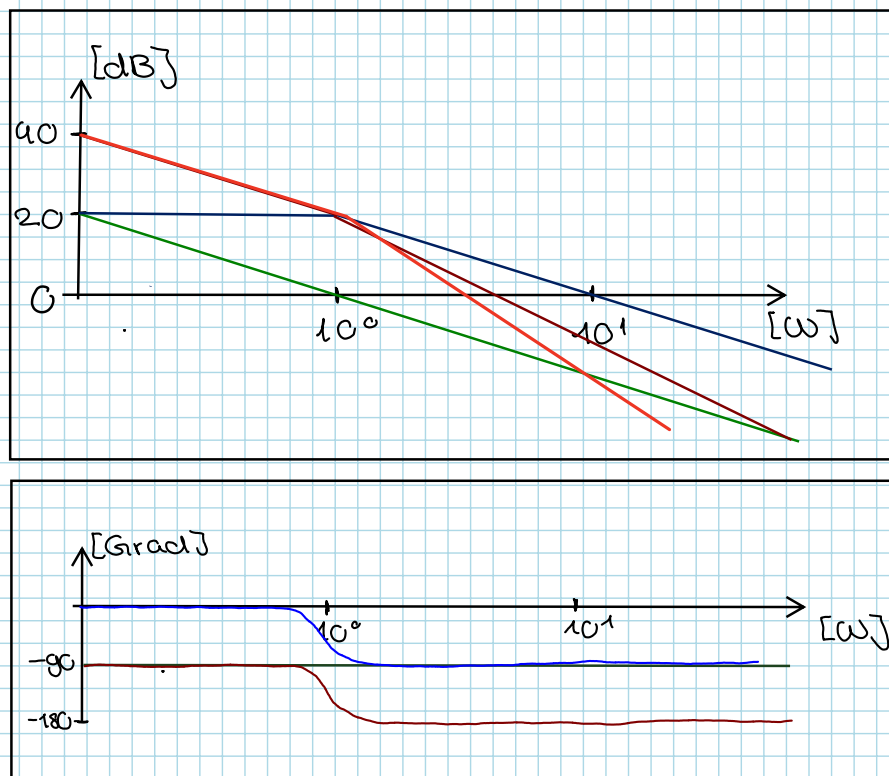
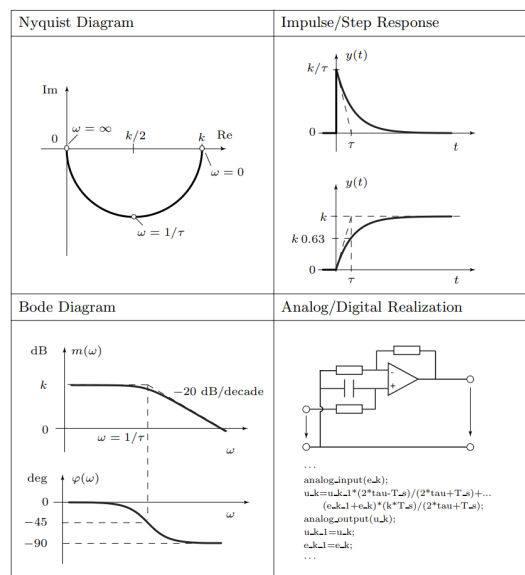
Element Acronym: **LP-1**

mit  $k=10 = 20\text{dB}$   
 $\& \tau=1$

Transfer Function:  $\Sigma(s) = \frac{k}{\tau \cdot s + 1}$

Poles/Zeros:  $\pi_1 = -\frac{1}{\tau}, \zeta_1 = \infty$

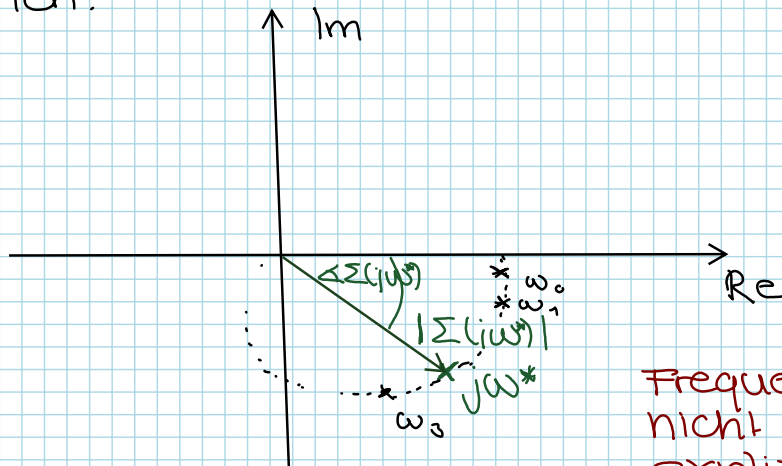
Internal Description:  $\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot x(t) + \frac{1}{\tau} \cdot u(t)$   
 $y(t) = k \cdot x(t)$





## Nyquist

wollen wir  $|\Sigma(j\omega)|$  und  $\angle \Sigma(j\omega)$  in einem Graph darstellen, so können wir das in der komplexen Ebene machen.



Frequenz kann nicht mehr explizit abgelesen werden.

## Methode zum plotten

1. Berechnen von Phase & Betrag für  $\omega=0$ ,  $\omega \rightarrow \infty$  & evtl. weitere Plot eurer Wahl

Beispiel:  $\Sigma(s) = \frac{10}{s+1}$

•  $\omega=0$ :  $\Sigma(j0) = \frac{10}{0j+1} = 10$

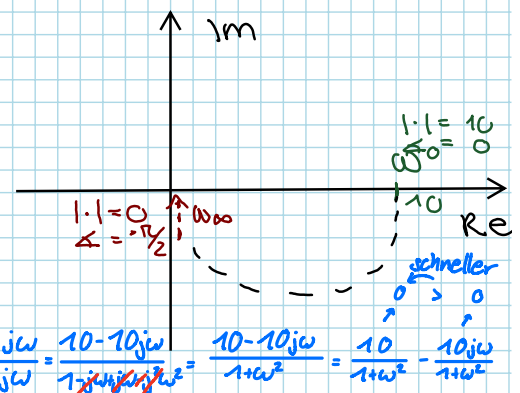
$|10| = 10$

$\angle 10 = \tan^{-1}\left(\frac{0}{10}\right) = 0$

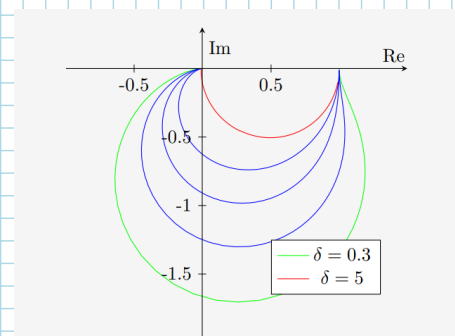
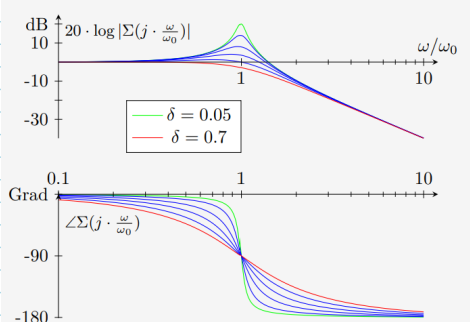
•  $\omega \rightarrow \infty$ :  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Sigma(j\omega) \Rightarrow \frac{10}{\infty j + 1}$

$\left| \frac{10}{\infty j + 1} \right| = \frac{|10|}{|\infty j + 1|} = 0$

$\angle \left( \frac{10}{\infty j + 1} \right) = \angle 10 - \tan^{-1}\left(\frac{\infty}{1}\right) = -\pi/2$



## 2. aus Bodeplot herleiten:



Und wenn wir es schon als Bsp. genommen haben

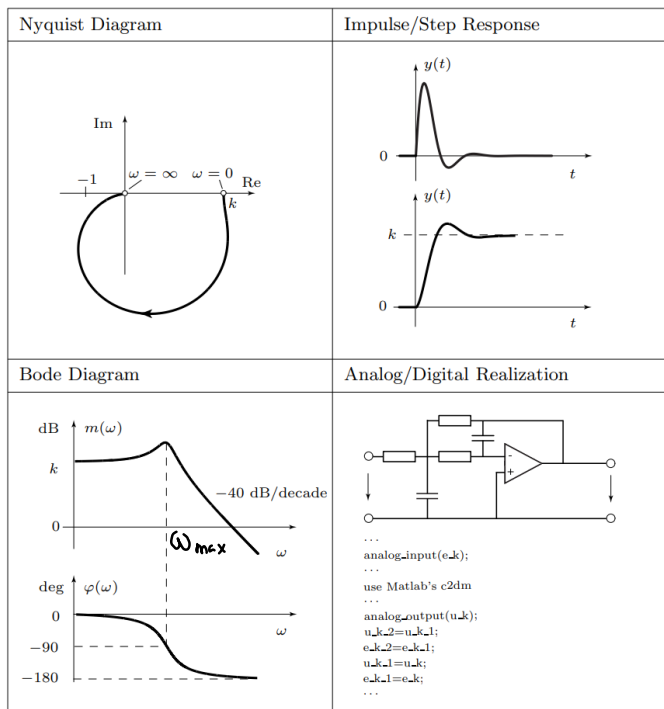
### A.5 Second-Order Element

Element Acronym: **LP-2**

Transfer Function:  $\Sigma(s) = k \cdot \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2}$

Poles/Zeros:  $\pi_{1,2} = -\omega_0 \cdot \delta \pm \omega_0 \sqrt{\delta^2 - 1}$ ,  $\zeta_{1,2} = \infty$

Internal Description:  $\frac{d}{dt}x_1(t) = x_2(t)$ ,  
 $\frac{d}{dt}x_2(t) = -\omega_0^2 \cdot x_1(t) - 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot x_2(t) + \omega_0^2 \cdot u(t)$   
 $y(t) = k \cdot x_1(t)$



•  $\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\delta^2}$   
 $\Rightarrow$  zeigt Frequenz der Resonanzüberhöhung.

Es gilt:

$\delta \ll \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \omega_{\max} \approx \omega_0$

$\delta < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \omega_{\max} < \omega_0$

$\delta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad$  keine Resonanzüberhöhung

•  $m(\omega_{\max}) = |\Sigma(j\omega_{\max})|$   
 $= \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot \sqrt{1 - \delta^2}}$

Merkt euch:

$\omega_{\max} \neq (\omega_{\text{eigen}} = \text{Im}(\pi,))$   
 $\omega_0 \sqrt{1 - 2\delta^2} \neq \omega_0 \sqrt{1 - \delta^2}$

Auch interessant

### A.10 Delay Element

Element Acronym: **-**

Transfer Function:  $\Sigma(s) = e^{-s \cdot T}$

Poles/Zeros: not a real-rational element

Internal Description:  $y(t) = u(t - T)$

