

Regelungstechnik I HS 2020

Reglerauslegung

Autoren: C. Küttel, M. Reinders, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Zusammenfassung Vorlesung 13

Buch Kapitel 11

Bei Fragen: morettog@ethz.ch, davidm@ethz.ch

1 PID-Regler

Bisher wurde in Beispielen jeweils ein Proportionalregler (P-Regler) $C(s) = k_p$ verwendet. In diesem Kapitel wird der P-Regler durch einen Integral-Term (I-Teil), und durch einen Derivative-Term (D-Teil) erweitert. Dieser PID-Regler wird in der Praxis häufig verwendet.

Die Reglerstruktur wird zunächst im Zeitbereich betrachtet:

$$u_{PID}(t) = k_p \cdot \left(\underbrace{e(t)}_{\text{P-Term}} + \underbrace{\frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\text{I-Term}} + \underbrace{T_d \cdot \frac{d}{dt} e(t)}_{\text{D-Term}} \right)$$

Der I-Term wird betragsmässig grösser, je länger ein einseitiger Fehler (z.B. $e(t) > 0$) vorhanden ist. Der D-Term wirkt auf schnelle und ruckartige Änderungen. Ein Nachteil des D-Terms ist, dass Rauschen auf dem Fehlersignal $e(t)$ verstärkt wird.

Eine Transformation in den Frequenzbereich ergibt:

$$C_{PID}(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right) = \frac{U(s)}{E(s)}$$

Wie bereits erwähnt wird $u(t)$ durch den D-Term sehr empfindlich auf Rauschen. Man kann im Frequenzbereich hohe Frequenzen ganz einfach unterdrücken, indem eine hochfrequente doppelte Polstelle hinzugefügt wird. Dieser Term wird roll-off Term genannt:

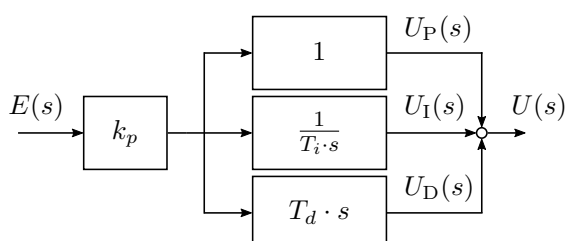
$$C_{PID}(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right) \cdot \underbrace{\frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^2}}_{\text{roll-off}}$$

Als Übertragungsfunktion ergibt sich:

$$C_{PID}(s) = k_p \cdot \left(\underbrace{\frac{T_d \cdot T_i \cdot s^2 + T_i \cdot s + 1}{T_i \cdot s}}_{\text{nicht kausal}} \right) \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^2}$$

Ohne den roll-off Term wäre die Übertragungsfunktion $\frac{U(s)}{E(s)}$ nicht kausal und entsprechend nicht praktisch realisierbar. Um $u(t)$ ohne roll-off zu berechnen, bräuchte man Zukunftswerte des Fehlersignals $e(t)$.

PID-Regler in Standardform im Frequenzbereich



Proportionales Verhalten (P-Term)

$$u_P(t) = k_p \cdot e(t), \quad U_P(s) = k_p \cdot E(s)$$

Der P-Term reagiert auf den momentanen Wert des Fehlers $e(t)$. Die Stärke der Reaktion ist proportional zur Grösse des momentanen Fehlers.

Integratives Verhalten (I-Term)

$$u_I(t) = \frac{k_p}{T_i} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad U_I(s) = \frac{k_p}{T_i} \cdot \frac{1}{s} \cdot E(s)$$

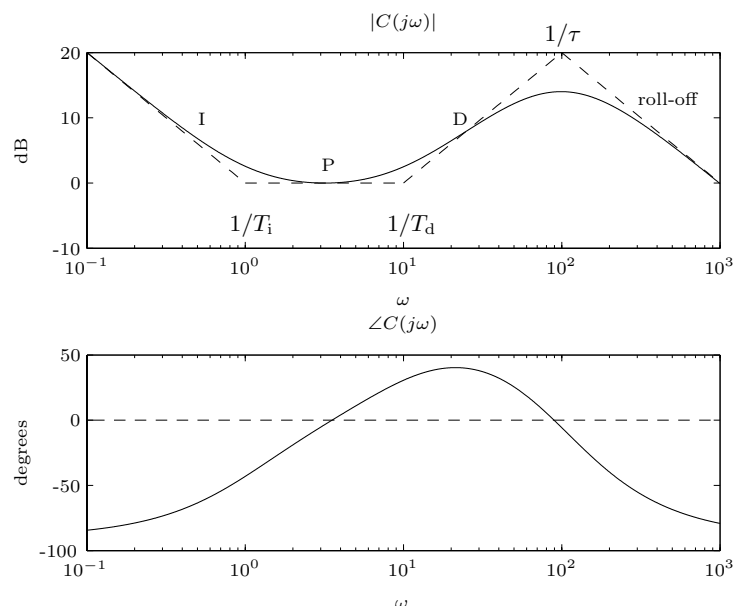
Der I-Term reagiert zum Zeitpunkt t proportional auf den kumulierten Fehler, für $t \in [0, t]$. Falls ein statischer Nachlauf Fehler vorhanden ist, wird dieser aufintegriert, und der Reglerausgang wird immer grösser, bis kein Fehler mehr vorhanden ist. Ein Nachteil des Integrators ist, dass der Reglerausgang theoretisch beliebig gross werden kann.

Derivatives Verhalten (D-Term)

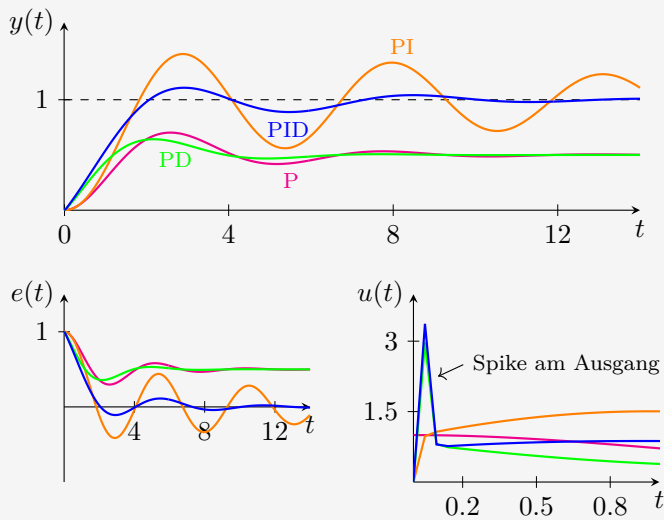
$$u_D(t) = k_p \cdot T_d \cdot \frac{d}{dt} e(t), \quad U_D(s) = k_p \cdot T_d \cdot s \cdot E(s)$$

Der D-Term wirkt antizipierend, er reagiert zum Zeitpunkt t auf die momentane Änderungsrate des Fehlers. Der D-Term wirkt wie ein Dämpfer gegen ein schnelles Erhöhen oder Verringern des Fehlers. Eine starke Änderung im Fehler resultiert in einem erhöhten Reglerausgang. Falls die Änderung zu stark ist, kann der gewünschte Reglerausgang grösser als der grösstmögliche Eingang eines Systems werden.

Bodediagramm eines PID-Reglers mit roll-off



Beispiel: Regelung eines Systems zweiter Ordnung



Es ist ersichtlich, dass ein statischer Fehler durch den Integrator eliminiert werden kann. Der D-Term ermöglicht es, schneller auf die Fehleränderung zu reagieren, jedoch wird dadurch der Reglerausgang auch grösser.

PID-Regler Parameter Tuning nach Ziegler Nichols

Die Parameter k_p , T_i , und T_d können durch extensives Testen des Systems bestimmt werden. Ein anderer Ansatz ist, der von Ziegler-Nichols. Hier geht man davon aus, dass das System $P(s)$ ein System erster Ordnung mit zusätzlicher relativ kleiner Totzeit ist:

$$P(s) \approx \frac{k}{\tau \cdot s + 1} \cdot e^{-T \cdot s}, \quad \text{wobei: } \frac{T}{T + \tau} \stackrel{!}{<} 0.3$$

Zur Bestimmung der Ziegler-Nichols Parameter startet man mit einem reinen P-Regler und erhöht die Verstärkung k_p soweit, bis der geschlossene Regelkreis grenzstabil wird bei der Verstärkung k_p^* (Pole von $T(s)$ auf der imaginären Achse). Falls die Modellannahme ungefähr stimmt, oszilliert das grenzstabile System bei k_p^* mit einer Periode von T^* . Man kann diese Parameter des grenzstabilen System in folgende Tabellen einsetzen um Reglerparameter für verschiedene PID Kombinationen zu erhalten.

Regler	k_p	T_i	T_d
P	$0.5 \cdot k_p^*$	$\infty \cdot T^*$	$0 \cdot T^*$
PI	$0.45 \cdot k_p^*$	$0.85 \cdot T^*$	$0 \cdot T^*$
PD	$0.55 \cdot k_p^*$	$\infty \cdot T^*$	$0.15 \cdot T^*$
PID	$0.60 \cdot k_p^*$	$0.50 \cdot T^*$	$0.125 \cdot T^*$

2 Iterative Loop Shaping

Ein System, das mit einem PID-Regler ausgelegt wird, erfüllt unter Umständen nicht alle Designspezifikationen. Um gewisse Frequenzbänder nach Wunsch abzuändern, kann man einen beliebigen Regler zum Beispiel mit Lead/Lag-Elemente erweitern oder einen Regler von Grund auf neu erstellen.

Lead-Lag Elemente erster Ordnung

Der Term 'Lead-Lag' bezeichnet zwei Arten von Systemen mit gleicher Struktur und den zwei Parametern α und T :

$$C(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1}, \quad \alpha, T \in \mathbb{R}_+ \quad (1)$$

Der Wert von α definiert ob es sich um ein Lead- oder ein Lag-Element handelt:

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 1 &\Leftrightarrow \text{Lead-Element} \\ 1 < \alpha &\Leftrightarrow \text{Lag-Element} \end{aligned}$$

Die Parameter α und T werden gezielt gewählt, sodass bei der Frequenz $\hat{\omega}$ eine maximale Phasenänderung von $\hat{\varphi}$ vorliegt:

$$\alpha = \left(\sqrt{\tan^2(\hat{\varphi}) + 1} - \tan(\hat{\varphi}) \right)^2, \quad T = \frac{1}{\hat{\omega} \cdot \sqrt{\alpha}}$$

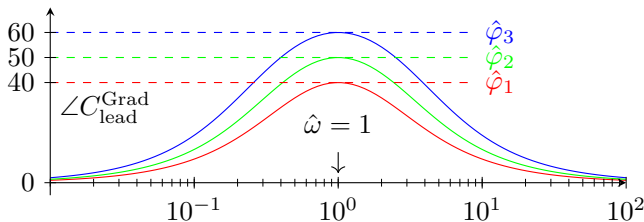
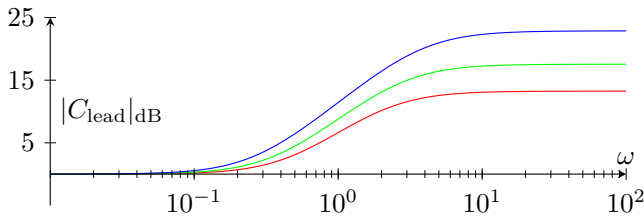


Abb. 1: Lead-Element für $\hat{\omega} = 1$ und $\hat{\varphi} = \{40, 50, 60\}$

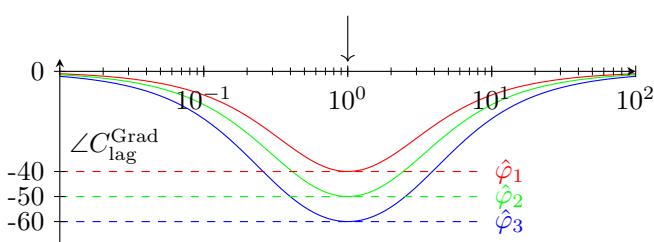
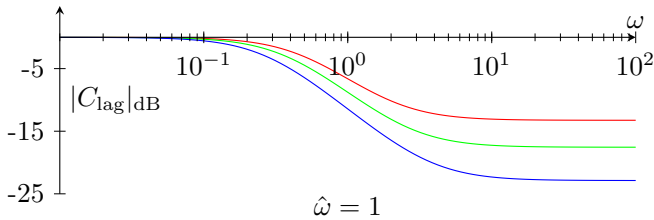


Abb. 2: Lag-Element für $\hat{\omega} = 1$ und $\hat{\varphi} = \{-40, -50, -60\}$

Ein Lag-Element mit $-\hat{\varphi}$ entspricht einer Spiegelung des Magnituden- und des Phasendiagramms des Lead-Elements mit $\hat{\varphi}$.

Lead-Lag Elemente zweiter Ordnung

Die Verwendung eines Elements erster Ordnung beeinflusst Frequenzen in der grösseren Umgebung von $\hat{\omega}$. Die Idee eines Elements zweiter Ordnung ist, dass der gewünschte Effekt an einer bestimmten Frequenz besser isoliert ist. Die Struktur erfordert die Parameter κ, ϵ , und ω_0 :

$$C(s) = k \cdot \frac{s^2 + 2 \cdot \kappa \cdot \epsilon \cdot (1 - \epsilon) \cdot \omega_0 \cdot s + (1 - \epsilon)^2 \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \kappa \cdot \epsilon \cdot (1 + \epsilon) \cdot \omega_0 \cdot s + (1 + \epsilon)^2 \cdot \omega_0^2} \quad (2)$$

Zusätzlich zur Wahl der mittleren Frequenz $\hat{\omega}$ und der maximalen Phasenverschiebung $\hat{\varphi}$ kann man nun zusätzlich die Breite des Frequenzbands durch den Parameter ϵ wählen:

$$k = \frac{(1 + \epsilon)^2}{(1 - \epsilon)^2}, \quad \kappa = \frac{\cot(\hat{\varphi}/2)}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}, \quad \omega_0 = \frac{\hat{\omega}}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$$

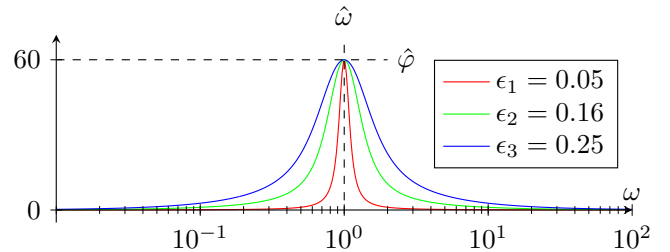
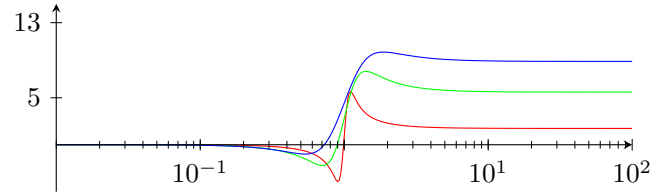


Abb. 3: Lead-Element zweiter Ordnung für $\hat{\omega} = 1$, $\hat{\varphi} = 60$, und $\epsilon = \{0.05, 0.16, 0.25\}$.

3 Inversion der Regelstrecke

Wenn die Regelstrecke $P(s) = \frac{n_p(s)}{d_p(s)}$ mit relativem Grad r asymptotisch stabil ist und nur minimalphasige Nullstellen enthält, kann ein Regler $C(s)$ gewählt werden, der die Dynamik der Regelstrecke exakt kompensiert und gleichzeitig in einer gewünschten Übertragungsfunktion $L(s)$ des offenen Regelkreises resultiert:

$$\begin{aligned} L(s) &= P(s) \cdot P(s)^{-1} \cdot \underbrace{\frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^{r-1}}}_{C(s)} \\ \Rightarrow C(s) &= P(s)^{-1} \cdot \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^{r-1}} \\ C(s) &= \frac{d_p(s)}{n_p(s)} \cdot \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^{r-1}} \end{aligned}$$

Der Regler invertiert die Dynamik der Regelstrecke, und somit haben die Pole und Nullstellen von $P(s)$ keinen Einfluss auf die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $L(s)$. Die übrigen Elemente von $C(s)$ stellen sicher, dass die gewünschte Übertragungsfunktion $L(s)$ des offenen Regelkreises resultiert:

$$L(s) = \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^{r-1}}$$

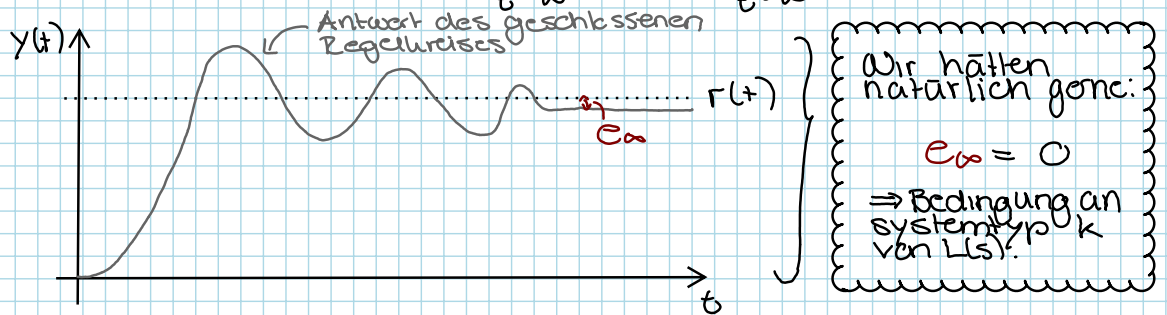
Mit der Verstärkung $T_i = \omega_c^{-1}$ kann die gewünschte Durchtrittsfrequenz ω_c eingestellt werden. Zusätzlich wählen wir $\tau < T_i$ und $\omega_c < \omega_2$.

Recap

(Wir haben Eigenschaften/Anforderungen des geschlossenen Regelkreises ($T(s)$, $S(s)$) in Anforderungen an $L(s)$ (offene Kreisverstärkung) umgewandelt)

① Statischer Nachlauffehler:

$$e(t) = r(t) - y(t) \rightarrow e_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t))$$



Wir wissen: $E(s) = S(s) \cdot R(s)$ & nehmen an: $R(s) = \frac{1}{s^{m+1}}$
 dann gilt:

$$e_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s S(s) \cdot \frac{1}{s^{m+1}} = \lim_{s \rightarrow 0^+} S(s) \cdot \frac{1}{s^m} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s^m (1 + L(s))}$$

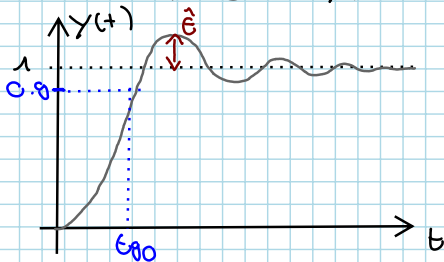
\Rightarrow geht gegen 0, falls $k > m$.

Spezifikationen basierend auf System 2. Ordnung

Ist $T(s)$:

$$\approx \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\zeta\omega_c s + \omega_c^2}$$

verhält sich Antwort des geschlossenen Regelkreises ungefähr:



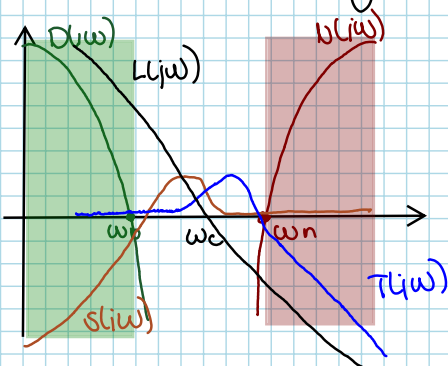
In diesem Fall können $\hat{\epsilon}$ (relatives Überspringen) & t_{00} (Anstiegszeit) mit Größen von $L(s)$ verknüpft werden

$$\omega_c \approx \frac{1.7}{t_{00}}$$

$$\varphi = 71^\circ - 117^\circ \hat{\epsilon}$$

Frequenzbereich Spezifikationen:

Bekannte Einteilung des Frequenzbereichs:

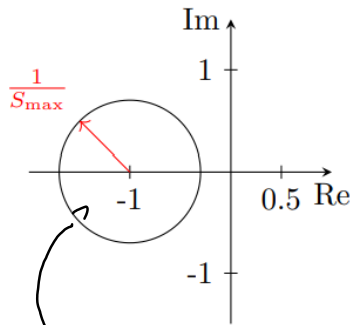


Auch im weissen Frequenzband haben wir evtl. noch Störungen oder Rauschen mit kleinen Beträgen. \Rightarrow Damit diese nicht zu sehr verstärkt werden, macht es manchmal Sinn:

$$\|S(j\omega)\|_{\infty} < S_{\max} \quad \& \quad \|T(j\omega)\|_{\infty} < T_{\max}$$

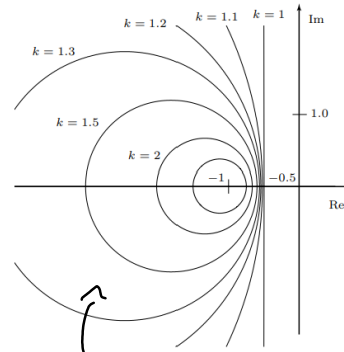
umgewandelt in Anforderungen an $L(s)$

$$\|S(j\omega)\|_{\infty} < S_{\max}$$



$L(j\omega)$ darf nicht in Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius $1/S_{\max}$

$$\|T(j\omega)\|_{\infty} < T_{\max}$$

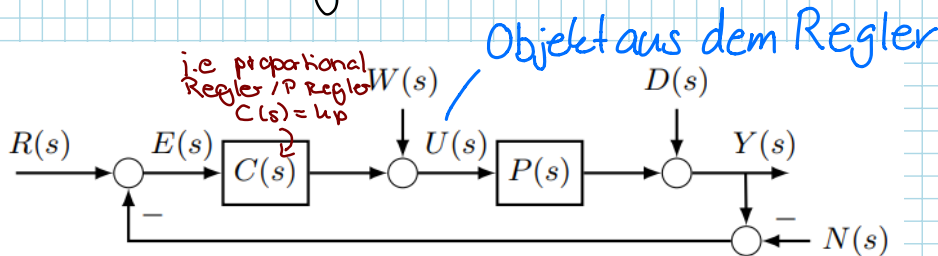


$L(j\omega)$ darf nicht in Kreis mit Mittelpunkt $\frac{T_{\max}}{T_{\max}-1}$ & Radius $\frac{T_{\max}}{T_{\max}-1}$

RT 1 Übung 12

Heute lernt ihr einen ziemlich nützlichen Regler ($C(s)$) kennen.
 \Rightarrow den PID!

Aber zuerst: Was macht ein Regler & was für Regler habt ihr bereits kennengelernt?



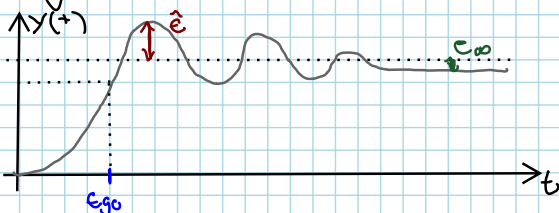
\Rightarrow Regler nimmt Fehlersignal ($E(s)/e(t)$) und verändert es zu einem Inputsignal für die Regelstrecke

\Rightarrow Regler ($C(s)$) ist Teil von $L(s) (= P(s)C(s))$ & kann somit dessen Verlauf beeinflussen. (\Rightarrow denkt an Verknüpfung $L(s) \leftrightarrow$ geschlossener Regelkreis).

Wir können nun:

Regler im Zeitbereich betrachten.

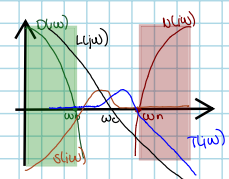
\Rightarrow Was macht es mit $e(t)$, wie sieht Antwort des geschlossenen Regelkreises aus.



Regler im Frequenzbereich betrachten

\Rightarrow wählt $C(s)$ so, dass $L(s)/L(j\omega)$ Anforderungen erfüllt, welche ihr in den letzten Wochen kennengelernt habt:

Loop-shaping \rightarrow



PID Regler

Ihr habt bereits den P-Regler ($C(s) = k_p$) kennengelernt, welcher ein Teil vom PID-Regler ist. Er besteht aus einem **proportionalen**, **integrativem** & **derivativem** Element

Aufbau

$$u(t) = k_p \underbrace{e(t)}_P + \underbrace{\frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt}_I + \underbrace{T_d \cdot \frac{d}{dt} e(t)}_D$$



Im Frequenzbereich

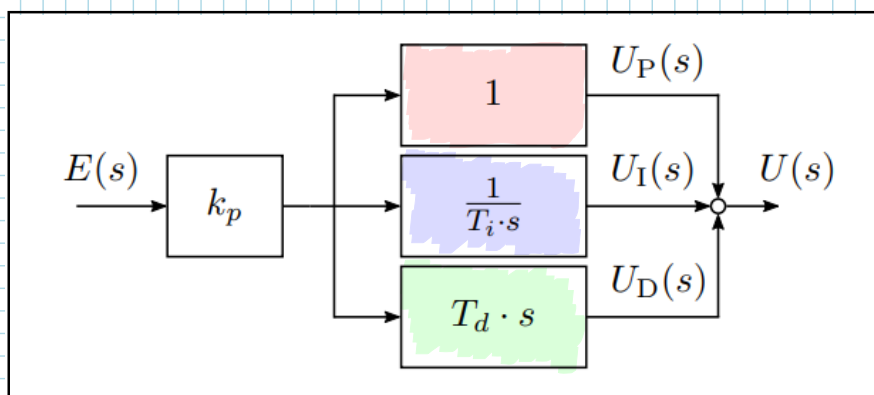
$$U(s) = k_p \left(E(s) + \frac{1}{s T_i} E(s) + T_d \cdot s E(s) \right) \\ = k_p \left(\underbrace{1}_P + \underbrace{\frac{1}{s T_i}}_I + \underbrace{T_d \cdot s}_D E(s) \right)$$



nicht kausal, mehr Null-als Polstellen \Rightarrow Lösung: zwei Polstellen bei hohen Frequenzen hinzufügen ("roll-off")

$$U(s) = k_p \left(\underbrace{1}_P + \underbrace{\frac{1}{s T_i}}_I + \underbrace{T_d \cdot s}_D \right) \cdot \underbrace{\frac{1}{(Ts + 1)^2}}_{\text{roll-off}} \cdot E(s)$$

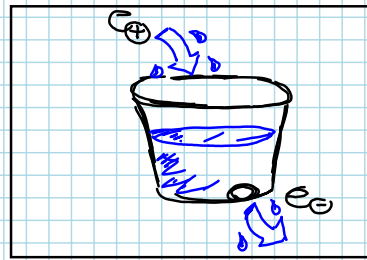
Dargestellt als Element des Regelkreises (ohne roll-off)



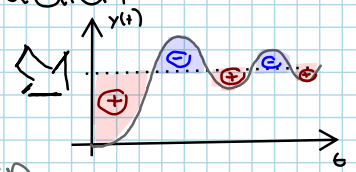
Betrachtung jedes Elements im Zeitbereich

P-Regler: $u(t) = k_p e(t)$ $U(s) = k_p E(s)$
 \Rightarrow reagiert auf momentanen Fehler, $u(t)$ **proportional** zu $e(t)$ \Rightarrow zu grosses k_p kann zur Instabilität führen

I-Regler: $u(t) = \frac{k_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$ $U(s) = \frac{k_p}{s \cdot T_i} E(s)$
(☕) \Rightarrow summiert Fehler auf & füllt sich entsprechend. Entleerung geschieht durch Fehler in entgegengesetzte Richtung. (wie Wassereimer)



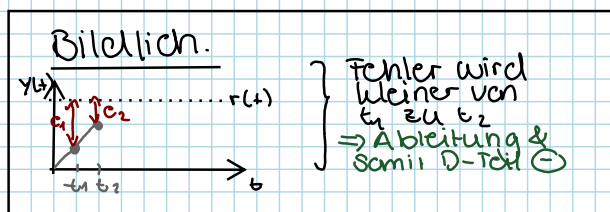
$u(t)$ ist proportional zum kummulierten Fehler.
 \Rightarrow also zum aktuellen "Wasserstand".



⚠ Achtung, kann sich sehr stark füllen.

Einschub: I-Regler liefert zusätzlichen Pol im Ursprung \rightarrow höherer Systemtyp \rightarrow erlaubt trading $r(t)$ höherer Ordnung ohne statischen Nachlauffehler.
 \Rightarrow wie erklärt ihr euch das intuitive mit dem Wassereimer Beispiel?

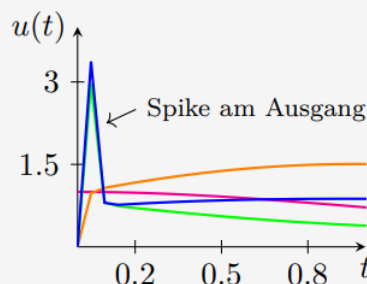
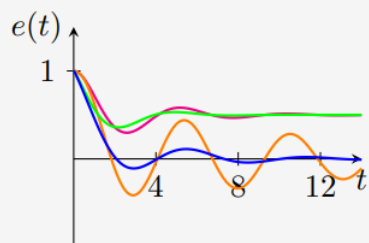
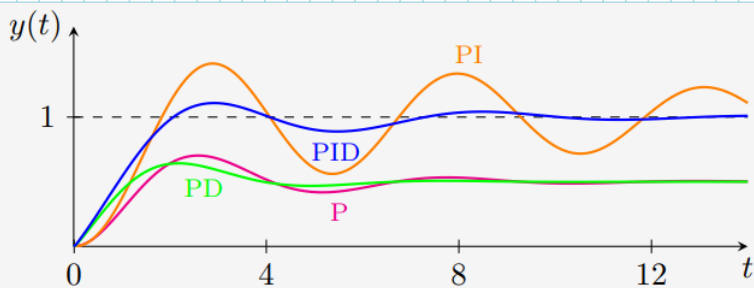
D-Regler: $u(t) = T_d \frac{d}{dt} e(t)$ $u(s) = T_d \cdot s \cdot E(s)$
 \Rightarrow reagiert proportional zur momentanen Änderung des Fehlers.



\Rightarrow wirkt zu schnellen Änderungen des Fehlers entgegen \rightarrow wie ein Dämpfer \rightarrow

⚠ Achtung, schnelle Änderungen können zu grossen $u_0(t)$ führen. (i.e. Referenzänderungen)

Entsprechende Antworten:



① Integrator lässt e_∞ zu Null gehen

② Differenziator dämpft Schwingung.
 \Rightarrow Aber verursacht Spike durch Sprung-
 hafte Änderung von $r(t)$ auf 1.

Wie finden wir nun optimale k_p, T_i & T_D ?

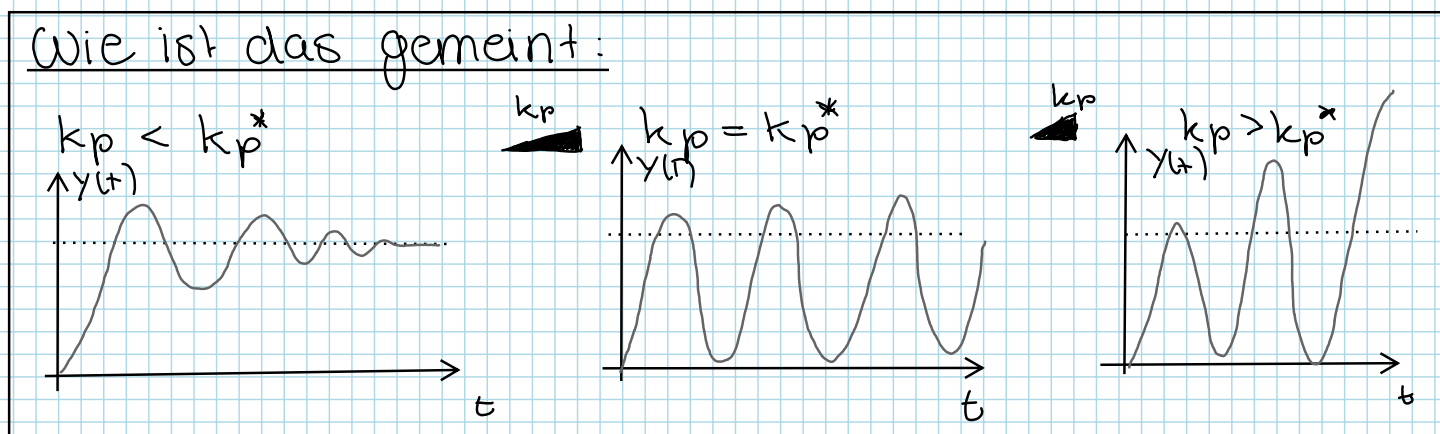
gehen wir davon aus:

$$P(s) \approx \frac{k}{Ts + 1} e^{-sT} \quad \text{mit} \quad \frac{T}{T + T} < 0.3$$

dann liefert auch Ziegler Nichols ein rezeptmässiges vorgehen.

- ① Wählt $C(s)$ als reinen P-Regler. $C(s) = k_p$
- ② Erhöht k_p so lange bis System grenzstabil \Rightarrow liefert k_p^*, ω^*, T^*

Wie ist das gemeint:



\Rightarrow wir wissen aus Nyquiststabilitätstheorem \rightarrow zuvor stabiler geschlossener Regelkreis wird instabil ("grenzstabil") wenn $L(j\omega)$ Anzahl Umdrehungen um $-1 + 0j$ ändert:

Es gilt: $-1 + 0j = k_p^* P(j\omega^*)$

Tipp zum Lösen von komplexen Gleichungen: $z_1 = z_2$

$$z_1 = a_1 + b_1j = r_1 \cdot e^{j\psi_1} \quad \& \quad z_2 = a_2 + b_2j = r_2 \cdot e^{j\psi_2}$$

$$\text{löst entweder} \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}(z_1) &= \operatorname{Re}(z_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \\ &\& \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) \Leftrightarrow b_1 = b_2 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} |z_1| &= |z_2| \Leftrightarrow r_1 = r_2 \\ \arg(z_1) &= \arg(z_2) \Leftrightarrow \psi_1 = \psi_2 \end{aligned}$$

- ③ wählt Regler aus: P, PI, PD, PID

④ lest Parameter aus Tabelle

Regler	k_p	T_i	T_d
P	$0.5 \cdot k_p^*$	$\infty \cdot T^*$	$0 \cdot T^*$
PI	$0.45 \cdot k_p^*$	$0.85 \cdot T^*$	$0 \cdot T^*$
PD	$0.55 \cdot k_p^*$	$\infty \cdot T^*$	$0.15 \cdot T^*$
PID	$0.60 \cdot k_p^*$	$0.50 \cdot T^*$	$0.125 \cdot T^*$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (Ziegler-Nichols II)

a) Von einer Strecke $P_1(s)$ ohne Regler haben Sie das Bode-Diagramm in Abb. 1 gegeben.

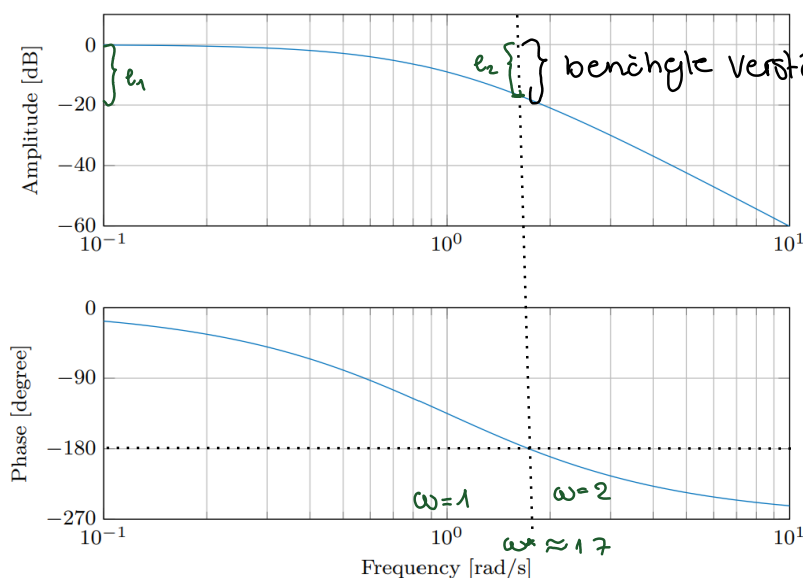


Abbildung 1: Bode Diagram von $P_1(s)$

Finden Sie die kritische Frequenz ω^* , die kritische Verstärkung k_p^* und T^* . Berechnen Sie mit den Einstellregeln von Ziegler/Nichols die Parameter (k_p , T_i) für den PI-Regler.

① mit einem reinen P-Regler können wir Phase nicht verändern \rightarrow wir finden $\omega^* \rightarrow \angle P(j\omega^*) = -180^\circ$
 \Rightarrow Ablesen $\omega^* \approx 1.7$ & somit $T^* \approx \frac{2 \cdot \pi}{1.7} \approx 3.63 \text{ s}$

② Wir sind bei -180° aber der Betrag ist noch nicht 1.
 $\Rightarrow |k_p^* \cdot P(j\omega^*)| = |k_p^*| \cdot |P(j\omega^*)| = 1$
 in dB $|k_p^*|_{\text{dB}} + |P(j\omega^*)|_{\text{dB}} = |k_p^*|_{\text{dB}} + (-18 \text{ dB}) = 0$
 $|k_p^*|_{\text{dB}} = 18 \Rightarrow k_p^* = 10^{18/20} \approx 8$

Wie kommt ihr auf -18

$$-18 = e_{2/e_1} \cdot 20$$

(Bei linearen Skalen könnt ihr einfach messen).

③ Parameter für PI-Regler aus Tabelle lesen

$$k_p = 0.45 k_p^* \approx 3.6$$

$$T_i = 0.85 \cdot T^* \approx 3.15$$

Tipps für Serie:

Aufgabe 1

- schreibt $P(j\omega^*)$ & $C(j\omega^*)$ als Funktionen von k_p^* & ω^* .
(überlegt auch wie $P(j\omega^*)$ aussieht (ihr kennt Phase & Betrag)) \rightarrow beim Auflösen von $L(j\omega^*)$ werden sich k_p^* & ω^* rauskürzen

Aufgabe 2

- b) Meistens macht es Sinn zur Berechnung von k_p^* & ω^* mit der Phase zu beginnen und so ω^* zu finden.
(Die Phase kann ja anschliessend durch eine reine Verstärkung nicht mehr verändert werden)
- \Rightarrow Gleichung für ω^* sehr schwierig zu lösen (\rightarrow nutzt MATLAB)

Aufgabe 3

- a) findet ω^* wie in 2 und erhält so Anforderungen für die Durchtrittsfrequenzen. Bei diesen Frequenzen müsst ihr nun Phasenanforderungen und Betragsanforderungen erfüllen.
- b) wo treten $N(s)$ & $D(s)$ auf, wie werden sie übertragen & was muss darum entsprechend für $|L(j\omega)|$ gelten?

Aufgabe 4

- Da es System 2. Ordnung könnt ihr Faustregeln anwenden
 \rightarrow so erhält ihr $L(j\omega^*)$ als komplexe Zahl. $L(j\omega^*)$ ist aber auch $P(j\omega^*)C(j\omega^*) \dots$