

Regelungstechnik I HS 2020

Laplace-Transformation I

Zusammenfassung Vorlesung 6

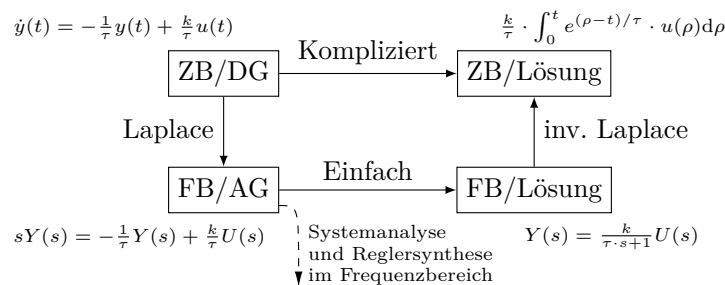
Buch Kapitel 6

Autoren: C. Küttel, M. Reinders, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Bei Fragen: morettog@ethz.ch, davidm@ethz.ch

1 Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation ermöglicht es, eine Differentialgleichung (DG) im Zeitbereich (ZB) in eine algebraische Gleichung (AG) im Frequenzbereich (FB) umzuwandeln. Die Algebraische Gleichung im Frequenzbereich lässt sich oft einfacher lösen als die Differentialgleichung im Zeitbereich. Die Lösung im Frequenzbereich lässt sich mit der inversen Laplace-Transformation in den Zeitbereich zurückwandeln. Die inverse Laplace-Transformation ist jedoch oft nicht nötig, da Aussagen über das System auch im Frequenzbereich möglich sind. Zudem können Regler direkt im FB ausgelegt werden.



Die Laplace-Transformation eines Zeitsignals $x(t)$ ist:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^\infty x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt,$$

mit $s = \sigma + j \cdot \omega$. Die Laplace-Transformation ist eine Generalisierung der Fourier-Transformation. Setzt man $s = j \cdot \omega$, erhält man die Fourier-Transformation.

Wichtige Eigenschaften

Linearität : $\mathcal{L}\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} = a \cdot X_1(s) + b \cdot X_2(s)$

Ähnlichkeit : $\mathcal{L}\{\frac{1}{a} \cdot x(\frac{t}{a})\} = X(s \cdot a)$

Verschiebung : $\mathcal{L}\{x(t - T)\} = e^{-T \cdot s} \cdot X(s)$

Dämpfung : $\mathcal{L}\{x(t) \cdot e^{-a \cdot t}\} = X(s - a)$

Ableitung t : $\mathcal{L}\{\frac{d}{dt} x(t)\} = s \cdot X(s) - x(0)$ (1)

n -te Abl. t : $\mathcal{L}\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\} = s^n \cdot X(s) \left(\frac{d^k x(t=0)}{dt^k} = 0 \forall k \right)$ (2)

Ableitung s : $\mathcal{L}\{t \cdot x(t)\} = -\frac{d}{ds} X(s)$

Integration t : $\mathcal{L}\{\int_0^t x(\tau) d\tau\} = \frac{1}{s} \cdot X(s)$

Integration s : $\mathcal{L}\{\frac{1}{t} \cdot x(t)\} = \int_s^\infty X(\sigma) d\sigma$

Faltung t : $\mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(s) \cdot X_2(s)^1$

Faltung s : $\mathcal{L}\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = X_1(s) * X_2(s)$

Anfangswert : $\lim_{t \rightarrow 0+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$ (3)

Endwert : $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0+} s \cdot X(s)$ (4)

Wichtige Signaltransformationen

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
$h(t)$	$\frac{1}{s}$
$h(t) \cdot t^n \cdot e^{\alpha \cdot t}$	$\frac{n!}{(s - \alpha)^{n+1}}$
$h(t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$h(t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$h(t) \cdot \sinh(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$h(t) \cdot \cosh(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$

Als nächstes werden einige wichtige Eigenschaften der Laplace-Transformation mit Beispielen erklärt.

Eigenschaft Gl. (1): Ableitungen im Zeitbereich werden zu algebraischen Grössen im Frequenzbereich. Insbesondere lässt sich mit Gl. (1) die Lösung einer Zustandsgleichung erster Ordnung finden, wie folgt.

Beispiel: Zustandsgleichung erster Ordnung

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t), \quad y(t) = c \cdot x(t) + d \cdot u(t), \quad x(0) = 0$$

Unter Anwendung von Gl. (1) gilt:

$$s \cdot X(s) = A \cdot X(s) + b \cdot U(s), \quad Y(s) = c \cdot X(s) + d \cdot U(s)$$

was umgeformt werden kann zu:

$$Y(s) = (c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b + d) \cdot U(s) = \Sigma(s) \cdot U(s), \quad (5)$$

wobei $\Sigma(s)$ Übertragungsfunktion heisst. $\Sigma(s)$ ist im Allgemeinen ein Bruch rationaler Funktionen, wobei der Nenner bei physikalischen Systemen mindestens die Ordnung des Zählers hat ($n \geq m$):

$$\begin{aligned} \Sigma(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c \cdot \text{Adj}(sI - A) \cdot b}{\det(sI - A)} + d \\ &= \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0} \end{aligned}$$

Der Nenner $\det(sI - A)$ entspricht dem charakteristischen Polynom der Matrix A .

Falls $m < n$ ist, nennen wir das System echt-gebrochen (strictly proper). Dies kann nur der Fall sein, falls in der Zustandsraumdarstellung kein Feedthrough vorhanden ist ($d = 0$). Falls $m = n$, nennen wir es gebrochen (proper).

¹Der Operator $*$ repräsentiert die Faltung (convolution) zweier Signale, definiert als: $x_1 * x_2(t) = \int_0^t x_1(t - \rho) \cdot x_2(\rho) d\rho$.

Beispiel: Betrachte Abb. 1. Die Masse m ist mit einer Feder mit Federkonstante k_F und einem Dämpfer mit Dämpferkonstante c_D verbunden. Das System kann mit einer Kraft $u(t)$ aktuiert werden.

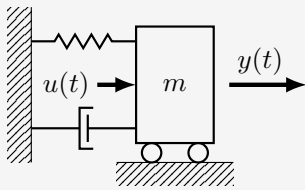


Abb. 1: Aktuiertes Feder-Dämpfer System.

Impulserhaltung:

$$m\ddot{y} = u(t) - F_{\text{Feder}} - F_{\text{Dämpfer}} \\ = u(t) - k_F y - c_D \dot{y} \quad (6)$$

Durch die Wahl $x_1 = y$, und $x_2 = \dot{y}$, folgt:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_F/m & -c_D/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u(t)$$

Durch die Wahl $k_F = 1$, $c_D = 1$, $m = 1$, und Ausgangsgröße x_1 , erhält man folgende Systemmatrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [1 \quad 0], \quad d = [0]$$

Mit Gl. (5) lässt sich die Übertragungsfunktion finden:

$$\begin{aligned} \text{es gilt: } K &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \rightarrow K^{-1} = \frac{1}{\det(K)} \cdot \begin{bmatrix} k_{22} & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{11} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow c \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot b &= [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s(s+1)+1} \cdot [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \Sigma(s) &= \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (7) \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion lässt sich auch direkt durch Transformation von Gl. (6) (mit Gl. (2)), berechnen:

$$\begin{aligned} m \cdot s^2 \cdot Y(s) &= U(s) - k_F \cdot Y(s) - c_D \cdot s \cdot Y(s) \\ \frac{Y(s)}{U(s)} = \Sigma(s) &= \frac{1}{ms^2 + c_D s + k_F} = \frac{1}{s^2 + s + 1} \end{aligned}$$

Übertragungsfunktionen haben die allgemeine Form:

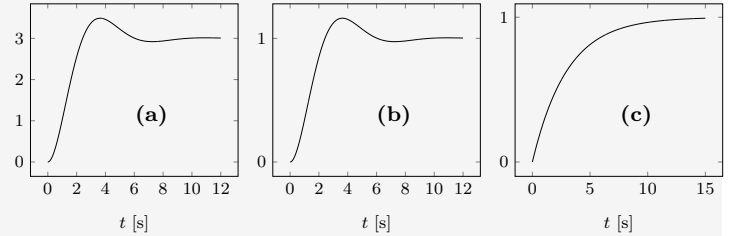
$$\Sigma(s) = b_m \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (s - \xi_j)}{\prod_{i=1}^n (s - \pi_i)}, \quad \xi_j, \pi_i \in \mathbb{C}$$

wobei π_i Pole und ξ_j Nullstellen genannt werden. Jeder Pol π_i entspricht einem Eigenwert λ_i von A .

Vorsicht: Nicht alle Eigenwerte von A sind Pole π_i von $\Sigma(s)$, da sich Nullstellen und Pole kürzen können! Wenn die Übertragungsfunktion aus einer minimalen Systemrealisierung $\{A, b, c, d\}$ berechnet wird, lassen sich keine Pole und Nullstellen aufheben. Das Kürzen von Termen ist somit ein Hinweis dafür, dass das System $\{A, b, c, d\}$ nicht beobachtbare oder nicht steuerbare Zustände enthält. Diese Zustände beeinflussen das I/O Verhalten nicht.

Eigenschaften Gl. (3) und Gl. (4): Der Anfangs- und Endwert der Lösung im Zeitbereich lässt sich im Frequenzbereich berechnen. **Vorsicht:** Der Limes in Gl. (4) kann existieren obwohl das System nie zum GGP konvergiert.

Beispiel: Gegeben sei das System in Gl. (7). Welches Diagramm zeigt die korrekte Sprungantwort?



Zunächst wird die Lösung im FB berechnet:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \Sigma(s) \cdot U(s), \quad U(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s} \\ \Rightarrow Y(s) &= \frac{1}{s(s^2 + s + 1)} \end{aligned}$$

Unter Anwendung von Gl. (3) und Gl. (4):

$$\begin{aligned} y(0_+) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^2 + s + 1} = 0 \\ y(\infty) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow 0_+} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0_+} \frac{1}{s^2 + s + 1} = 1 \end{aligned}$$

Diagramme (b) und (c) haben beide einen Anfangswert 0 und einen Endwert 1. Diagramm (a) kann ausgeschlossen werden, da es gegen 3 konvergiert. Um zwischen (b) und (c) zu unterscheiden kann man die Pole von Gl. (7) betrachten. Für komplex-konjugierte Pole erwartet man eine oszillierende Ausgangsgröße (b). Für rein reelle Pole erwartet man keine Schwingungen in der Ausgangsgröße (c). Die Pole sind:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot j \Rightarrow \text{richtige Sprungantwort ist (b)}$$

Beispiel: Endwert der Impulsantwort von $\sin(t)$:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \Sigma_{\sin}(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \quad \text{mit} \quad u(t) = \delta(t)$$

Aus $U(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$, folgt $Y(s) = \Sigma_{\sin}(s)$ und somit gilt $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Sigma_{\sin}(s)\} = \sin(t)$ ¹. Dieses Signal oszilliert für immer um den GGP, was sich auch aus den Polen von $\Sigma_{\sin}(s)$ ablesen lässt: $s = \pm j$.

Mit Gl. (4) berechnet sich jedoch fälschlicherweise ein diskreter Endwert von $y(t)$:

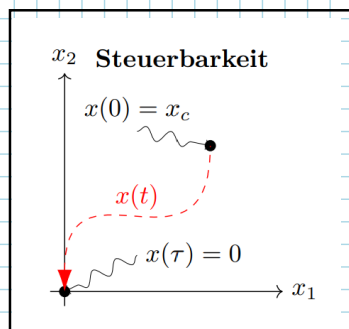
$$y(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 + 1} = 0$$

¹Dieses Resultat gilt allgemein und ist sehr wichtig: Die Impulsantwort ist die Laplaceinverse des Systems \Leftrightarrow die Laplacetransformation der Impulsantwort ist die Übertragungsfunktion des Systems. Die Impulsantwort kann oft experimentell gemessen werden.

Recap:

Steuerbarkeit

x_c steuerbar \rightarrow
es existiert ein
 $u(t)$ welches x_c
in endlicher Zeit
zum Ursprung
bringt



Alle Punkte steuerbar
 \Rightarrow vollständig steuerbar
 $R_n = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$
hat vollen Rang n .
 $n = \text{Anzahl Zustands-variablen}$

Beobachtbarkeit

vollständig beobachtbar,
wenn mit Messung des
Outputs $y(t)$, $t \in [0, \tau]$, $\tau > 0$
Eindeutigkeit $x(0)$ bestimmt werden
kann.



$O_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$
hat vollen Rang n

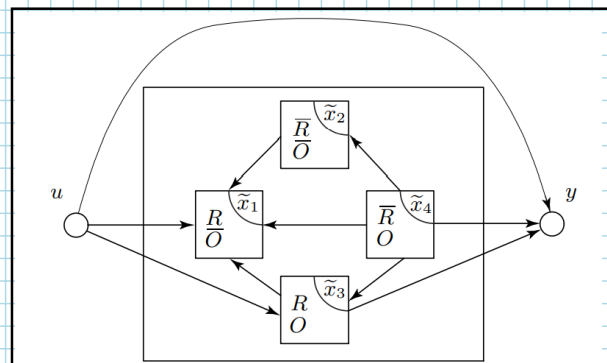
Transformationsinvarianz von Systemeigenschaften

$$\begin{aligned} x &= T\tilde{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} T\dot{\tilde{x}} &= AT\tilde{x} + Bu \\ y &= CT\tilde{x} + Du \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= T^{-1}AT\tilde{x} + T^{-1}Bu \\ y &= CT\tilde{x} + Du \end{aligned} \end{aligned}$$

\Rightarrow verändert Stabilität, Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit und I/O-Verhalten nicht.

Zustandsraumzerlegung

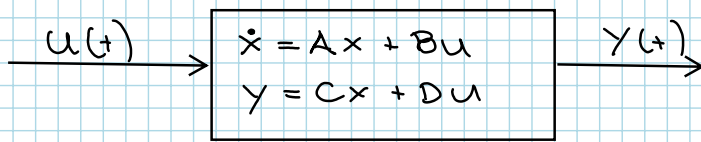
Geeignete Koordinaten-
transformation gibt
auch...



minimale Realisierung
 $\dot{\tilde{x}}_3 = \tilde{A}_3 \tilde{x}_3 + \tilde{B}_3 u$
 $y = \tilde{C}_3 \tilde{x}_3 + D u$


RT 1 Übung 5

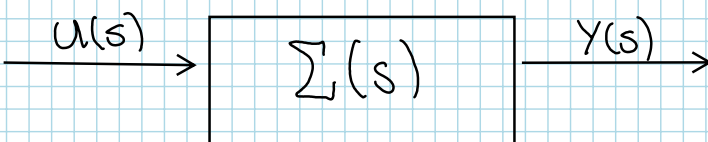
Vom Zeitbereich 



- Exakte Lösung möglich
→ meist schwierig
→ Faltung im Integral
... $C \int e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$...

Laplace
i.e. $U(s) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt$
mit $s = \sigma + j\omega$

In den Frequenzbereich 



- Faltung wird zu Multiplikation
 $Y(s) = \Sigma(s)U(s)$
- Exakte Lösung im Zeitbereich über Rücktransformation.
- ⊕ neue Analysetools im Frequenzbereich

Interpretation vom Frequenzbereich

Zeit taucht im Frequenzbereich nicht mehr auf, vielmehr betrachten wir nun wie unser System auf die Hineingabe von Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen & Exponentialfunktionen reagiert.

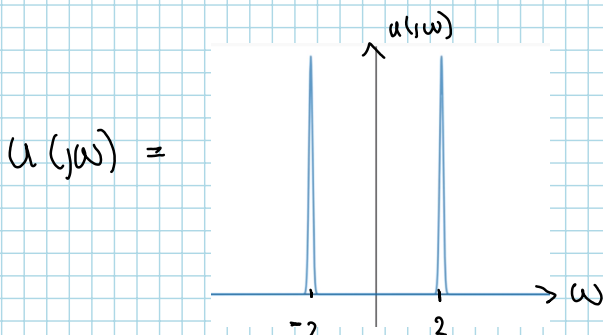
Einschub: Fourier vs. Laplace

Fourier: $U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt$

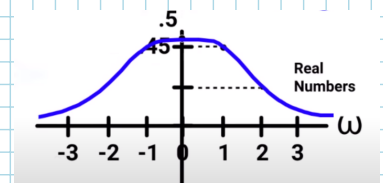
⇒ sagt uns aus welchen überlagerten Schwingungsfrequenzen (mit welcher "Stärke") sich unser Signal $u(t)$ zusammensetzt

i.e. $u(t) = \cos(2t)$

i.e. $u(t) = e^{-t} \sin(1 \cdot t)$



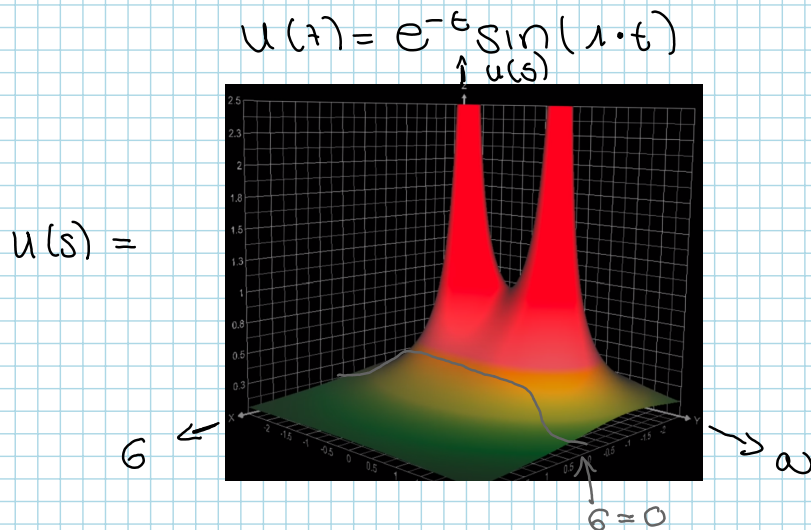
$U(j\omega) =$



$$\text{Laplace: } u(s) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} u(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \\ = \int_0^{\infty} u(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

⇒ aus welchen überlagerten Schwingungsstärken mit Abfall $e^{-\sigma t}$ setzt sich $u(t)$ zusammen.

- $\sigma \rightarrow$ zusätzliche Dimension
- $\sigma = 0 \rightarrow$ Fourier



mehr dazu in Analysis 3 & und unter:

<https://www.youtube.com/watch?v=n2y7n6jw5d0>
(⇒ Graphiken).

Vereinfachung mit Tabellen

Zur Durchführung einer Laplace-Transformation in RT I benutzen wir oft nicht das Integral sondern Eigenschaften von $\mathcal{L}(\cdot)$ und bereits bekannte Transformationen.

Wichtige Eigenschaften

Linearität	: $\mathcal{L}\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} = a \cdot X_1(s) + b \cdot X_2(s)$	
Ähnlichkeit	: $\mathcal{L}\{\frac{1}{a} \cdot x(\frac{t}{a})\} = X(s \cdot a)$	
Verschiebung	: $\mathcal{L}\{x(t - T)\} = e^{-T \cdot s} \cdot X(s)$	
Dämpfung	: $\mathcal{L}\{x(t) \cdot e^{a \cdot t}\} = X(s - a)$	
Ableitung t	: $\mathcal{L}\{\frac{d}{dt} x(t)\} = s \cdot X(s) - x(0)$	(1)
n -te Abl. t	: $\mathcal{L}\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\} = s^n \cdot X(s) \left(\frac{d^k x(t=0)}{dt^k} = 0 \forall k \right)$	(2)
Ableitung s	: $\mathcal{L}\{t \cdot x(t)\} = -\frac{d}{ds} X(s)$	
Integration t	: $\mathcal{L}\{\int_0^t x(\tau) d\tau\} = \frac{1}{s} \cdot X(s)$	
Integration s	: $\mathcal{L}\{\frac{1}{t} \cdot x(t)\} = \int_s^{\infty} X(\sigma) d\sigma$	
Faltung t	: $\mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(s) \cdot X_2(s)$	¹
Faltung s	: $\mathcal{L}\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = X_1(s) * X_2(s)$	
Anfangswert	: $\lim_{t \rightarrow 0+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$	(3)
Endwert	: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0+} s \cdot X(s)$	(4)

Wichtige Signaltransformationen

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
$h(t)$	$\frac{1}{s}$
$h(t) \cdot t^n \cdot e^{a \cdot t}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$h(t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$h(t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$h(t) \cdot \sinh(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$h(t) \cdot \cosh(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$

Beispiel Aufgabe 2. i.)

$$f(t) = h(t) \cdot t^2 \cdot \exp(-3t) + h(t-2) \cdot (t-2)^2 \cdot \exp(-2t+4)$$

Für die Laplace-Transf. benutzen wir nun obige "Regeln".

① Linearität

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}_1(h(t) \cdot t^2 \cdot \exp(-3t)) + \mathcal{L}_2(h(t-2) \cdot (t-2)^2 \cdot \exp(-2t+4))$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_1(\cdot) = \frac{2}{(s+3)^3}$$

② Für $\mathcal{L}_2(\cdot)$ brauchen wir noch den Verschiebungssatz:

$$\bullet \mathcal{L}(x(t-T)) = e^{-Ts} \cdot X(s)$$

und fassen noch ein wenig um:

$$\mathcal{L}(h(\underbrace{t-2}_T) \cdot (\underbrace{t-2}_T)^2 \cdot \exp(-2(\underbrace{t-2}_T)))$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_2(\cdot) = e^{-2s} \cdot \frac{2}{(s+2)^3}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{2}{(s+3)^3} + e^{-2s} \cdot \frac{2}{(s+2)^3}$$

Übertragungsfunktion

$$\Sigma(s) = \mathcal{L} \left(\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{array} \right)$$

unter Verwendung der Ableitungsregel:

$$\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = sX(s) - x(0) \quad \& \quad x(0) = 0$$

$$\text{I} \quad sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$\text{II} \quad Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$\text{I} \rightarrow \text{II} \quad sX(s) - AX(s) = BU(s)$$

$$(\text{II}s - A)X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = (\text{II}s - A)^{-1} BU(s)$$

$$X(s) \text{ in } \mathbb{I} \rightarrow Y(s) = C(\mathbb{I}s - A)^{-1} B U(s) + D U(s)$$

$$Y(s) = (C(\mathbb{I}s - A)^{-1} B + D) U(s)$$



$$\Sigma(s) = C(\mathbb{I}s - A)^{-1} B + D$$

$$\text{Or as } (\cdot)^{-1} = \frac{\text{adj}(\cdot)}{\det(\cdot)}$$

$$\Sigma(s) = C \cdot \frac{\text{adj}(\mathbb{I}s - A)}{\det(\mathbb{I}s - A)} B + D = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

$$\text{adj}(2 \times 2) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

↖ auf ZF bis 3x3

Nullstellen des Nenners → EW von A (wichtig).
→ genannt **Pole** = π

Beispiel: System aus letzter Übungsstunde

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_1 = [1 \ 0] \quad D_1 = [0]$$

$$\Sigma(s) = C_1 \cdot \frac{\text{adj}(\mathbb{I}s - A_1)}{\det(\mathbb{I}s - A_1)} B_1 + D$$

$$(\mathbb{I}s - A) = \begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s-1 \end{pmatrix} \Rightarrow (*) = \frac{1}{(s+2)(s-1)} \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Sigma(s) = [1 \ 0] \left(\frac{1}{(s+2)(s-1)} \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0$$

$$= [1 \ 0] \left(\frac{1}{(s+2)(s-1)} \begin{pmatrix} 2(s-1) \\ s+2 \end{pmatrix} \right) = \underline{\underline{\frac{2(s-1)}{(s+2)(s-1)}}}$$

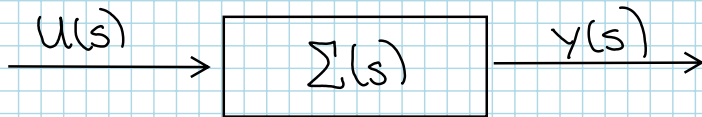
⚠ Aber das könnten wir ja jetzt noch kürzen...

➡ Pol-Nullstellen-Kürzung bei nicht steuerbaren oder nicht beobachtbaren Zuständen.

➔ Vollständig gekürzt erhalten wir minimale Realisierung

$$\Sigma(s) = \frac{2}{(s+2)}$$

Output im Frequenzbereich



Im FB gilt nun schön einfach:

$$Y(s) = \Sigma(s) U(s)$$

Bsp: Sprungantwort

$$\Sigma(s) = \frac{2}{(s+2)} \quad \& \quad u(t) = h(t) \xrightarrow{\text{Tabelle}} u(s) = 1/s$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s+2)} \cdot 1/s = \frac{2}{s(s+2)}$$

➔ Nächste Woche: Rücktransformation von $Y(s)$ in ZB

Zurück in den Zustandsraum?

Im Frequenzbereich

$$Y(s) = \Sigma(s) U(s)$$

wir nehmen $\Sigma(s)$ von oben.

$$Y(s) = \frac{2}{(s+2)} U(s)$$

$$(s+2)Y(s) = 2U(s)$$

$$sY(s) + 2Y(s) = 2U(s)$$

Rücktransfo. mit Ableitungsregel:

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = 2u(t)$$

➔ Input/output - Form

➔ Zustandsmatrizen über Regelnormalform finden.

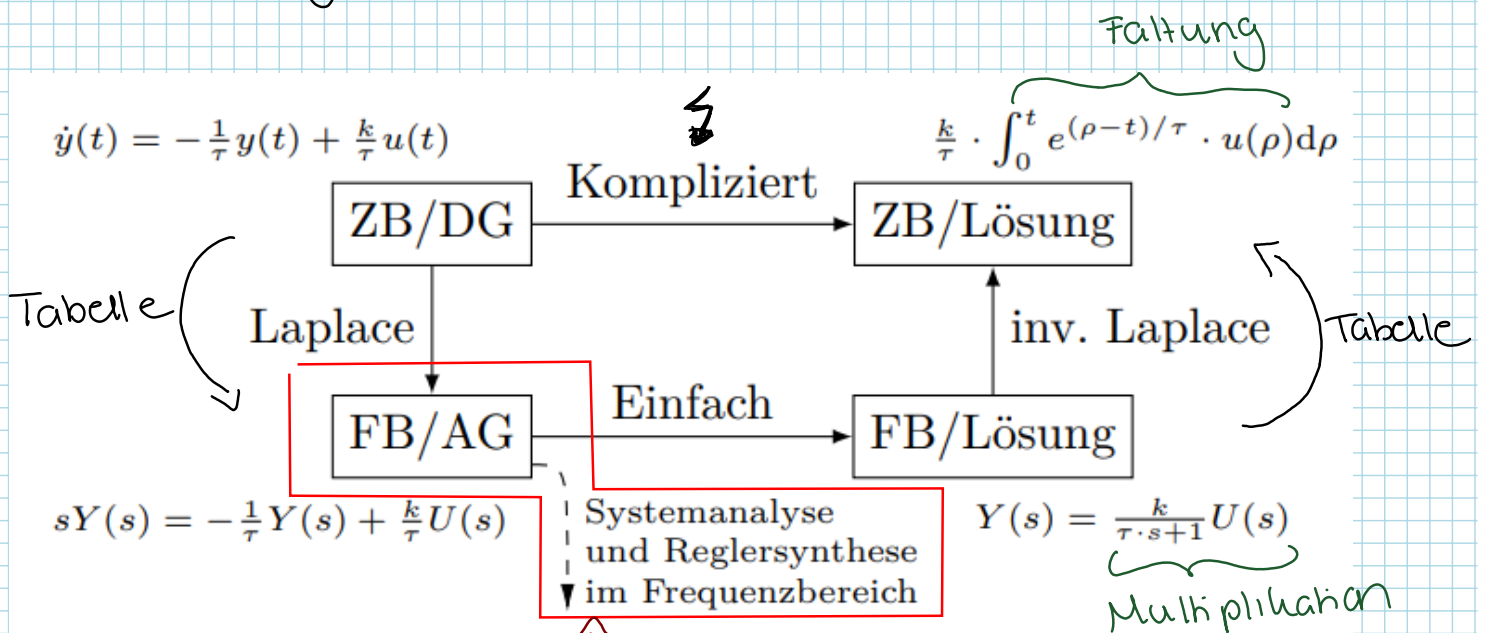
Controller Canonical Form:

Achtung: gilt für "strictly proper" Systeme \rightarrow ohne algebraischen Durchgriffe ($D=0$) $\Leftrightarrow m < n$.

$$\Sigma(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \iff$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & d \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ \hline b_0 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Zusammengefasst



Werden wir uns in den nächsten Wochen ausführlich damit beschäftigen.