

## Regelungstechnik I HS 2020

## Zusammenfassung Vorlesung 7

## Laplace-Transformation II, BIBO-Stabilität, Nullstelleneinfluss

## Buch Kapitel 7

Autoren: C. Küttel, M. Reinders, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Bei Fragen: morettog@ethz.ch, davidm@ethz.ch

## 1 Inverse Laplace-Transformation

In Kapitel 6 wird die Laplace-Transformation eingeführt. Im Frequenzbereich lässt sich leicht folgende Lösung finden:

$$Y(s) = \Sigma(s) \cdot U(s)$$

Um die Antwort im Zeitbereich zu erhalten, könnte man die inverse Laplace-Transformation anwenden:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \quad (1)$$

Die Formel der inversen Laplace-Transformation wird hier mit Absicht nicht wiedergegeben, diese verwenden wir in RT I nie. Als Ingenieure machen wir uns das Leben einfach und nutzen zur Berechnung von Gl. (1) aus, dass Lösungen im Frequenzbereich Brüche rationaler Funktionen sind:

$$Y(s) = b_m \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (s - \xi_j)}{\prod_{i=1}^n (s - \pi_i)}, \quad \xi_j, \pi_i \in \mathbb{C}$$

Insbesondere kann man mit der Partialbruchzerlegung den Bruch in eine Summe von Brüchen tieferer Ordnung zerteilen:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k}}{(s - \pi_i)^k} \quad \rho_{i,k} \in \mathbb{C},$$

wobei  $\rho_{i,k}$  die Residuen sind, und  $\phi_i$  die Vielfachheit von  $\pi_i$  ist. Die inverse Laplace-Transformation der einzelnen Brüche kann dann allgemein hergeleitet werden als:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s - \pi_i)^k}\right\} = \frac{1}{(k-1)!} \cdot t^{k-1} \cdot e^{\pi_i \cdot t} \cdot h(t)$$

Die individuellen summierten Brüche können anschliessend einzeln in den Zeitbereich transformiert werden.

**Beispiel:** Die inverse Laplace-Transformation von:

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 2}{s^3 + s^2 + s + 1} = \frac{s^2 + s + 2}{(s - j) \cdot (s + j) \cdot (s + 1)} \quad (2)$$

Mit der Partialbruchzerlegung:

$$Y(s) = \frac{1}{s + 1} + \frac{\frac{1}{2 \cdot j}}{s - j} + \frac{-\frac{1}{2 \cdot j}}{s + j} \quad (3)$$

Da die Laplace-Transformation eine lineare Operation ist, kann man nun die inverse Laplace-Transformation auf die einzelnen Brüche anwenden:

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = y(t) = e^{-t} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot j} (e^{j \cdot t} - e^{-j \cdot t})}_{\sin(t)} = e^{-t} + \sin(t)$$

**Bemerkung:** Komplexe Residuen sind oft sehr mühsam auszurechnen (Gl. (3)). Man kann bei Gl. (2) abkürzen, indem man erkennt, dass zwei rein konjugiert-komplexe Pole vorhanden sind. D.h. bevor dass man überhaupt etwas berechnet, kann man vorhersagen, dass ein Cosinus (oder Sinus) vorhanden sein muss. Um diesen Fakt auszunutzen fasst man die beiden Pole bei der Partialbruchzerlegung zusammen:

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 2}{(s^2 + 1) \cdot (s + 1)} = \frac{1}{\underbrace{s + 1}_{\mathcal{L}\{e^{-t}\}}} + \frac{1}{\underbrace{s^2 + 1}_{\mathcal{L}\{\sin(t)\}}} \quad (4)$$

In diesem Beispiel sind alle Pole entweder auf der rein reellen Achse ( $s = -1$ ), oder auf der rein komplexen Achse ( $s = \pm j$ ). Um eine Intuition für allgemeine Pole der Form  $s = \sigma + j \cdot \omega$  (und deren inversen Laplace-Transformation) zu erhalten, wird das System zweiter Ordnung eingeführt.

## 2 Systeme 2. Ordnung

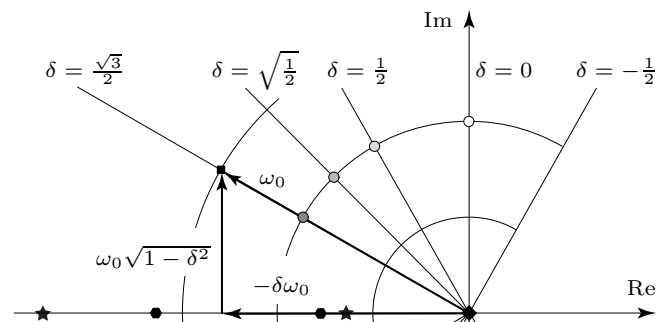
Die Übertragungsfunktion eines Systems zweiter Ordnung mit statischer Verstärkung von 1 hat folgende Form:

$$\Sigma(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2} \quad \Sigma(0) = 1 \quad (5)$$

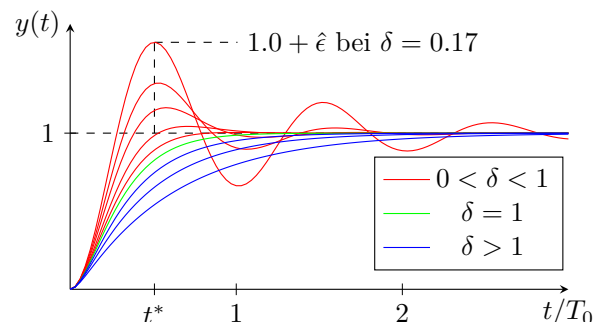
Dieses System hat zwei Pole:

$$s_{1,2} = \pi_{1,2} = \left(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}\right) \cdot \omega_0 \quad (6)$$

Anordnung der Pole auf der real-imaginären Ebene:



Der Parameter  $\delta$  wird als Dämpfungsparameter bezeichnet. Für  $|\delta| < 1$  wird das Argument in der Wurzel in Gl. (6) negativ. Somit werden die Pole komplex. Für  $|\delta| > 1$  werden die Pole rein reell. Der Parameter  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  wird als natürliche Frequenz des Systems bezeichnet, wobei  $T_0$  die natürliche Periode ist. Die zeitnormierte Sprungantwort, für verschiedene Dämpfungsparameter sieht wie folgt aus:



**Vorsicht!** Die Zeit  $t^*$  ist nur für  $\delta = 0.17$  eingezeichnet. Generell gilt  $t^* = t^*(\delta, \omega_0)$ . Ausserdem überschiesst das System nur für  $\delta < 1$ .  $\delta \geq 1$  wird später behandelt.

Abhängig von der Dämpfung gibt es drei grundsätzlich unterschiedliche Fälle des Systemverhaltens:

**$0 < \delta < 1$**  Da für  $\delta < 1$  die Pole komplex werden, beinhaltet die Sprungantwort Schwingungen. Die erste Schwingung überschiesst das Ziel  $u(t) = h(t)$  um den Überschuss  $\hat{\epsilon} = e^{-\delta \cdot \pi / \sqrt{1-\delta^2}}$ , bei der Zeit  $t^* = \frac{\pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1-\delta^2}}$ .

**$\delta > 1$**  Für übergedämpfte Systeme konvergiert das System ähnlich wie bei einem System erster Ordnung zum Endwert. Die Antwort überschiesst in diesem Fall nicht, da alle Pole rein reell sind:

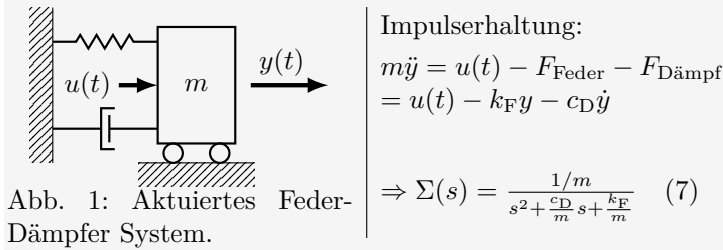
$$\Sigma(s) = \frac{\omega_0^2}{(s + \pi_1) \cdot (s + \pi_2)} \quad \pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}$$

Falls ein Pol viel schneller konvergiert ( $\pi_2 \gg \pi_1$ ) gilt:

$$\Sigma(s) \approx \frac{\pi_1}{s + \pi_1}$$

**$\delta = 1$**  Dieser Fall heisst kritisch gedämpft. Mit Gl. (6) ist ersichtlich, dass für  $\delta = 1$  beide Pole an der gleichen Stelle sind:  $\pi_{1,2} = -\omega_0$ . Dieser Fall entspricht der schnellstmöglichen Konvergenz ohne Überschwinger.

**Beispiel für  $0 < \delta < 1$ :** Betrachte Abb. 1. Die Masse  $m$  ist mit einer Feder mit Federkonstante  $k_F$  und einem Dämpfer mit Dämpferkonstante  $c_D$  verbunden. Das System kann mit einer Kraft  $u(t)$  aktuiert werden.



**Fall 1:**  $m = 1$ ,  $k_F = 1$ , und  $c_D = 1$ :

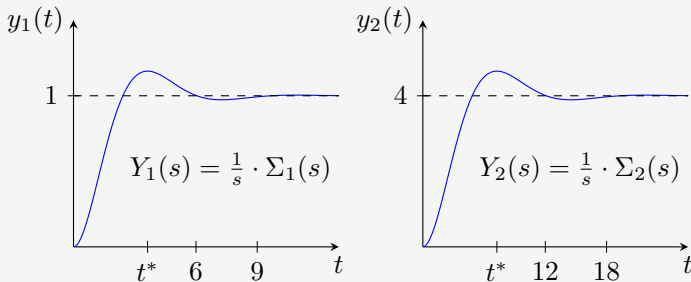
$$\Sigma_1(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}.$$

Vergleicht man nun mit der Standardform Gl. (5), erhält man:  $\omega_0 = 1$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $t^* = 3.628$ ,  $\Sigma_1(0) = 1$ ,  $\hat{\epsilon} = 0.163$ .

**Fall 2:**  $m = 1$ ,  $k_F = 0.25$ , und  $c_D = 0.5$ :

$$\Sigma_2(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 0.25} = 4 \cdot \frac{0.25}{s^2 + 0.5s + 0.25}$$

Es folgt:  $\omega_0 = 0.5$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $t^* = 7.255$ ,  $\Sigma_2(0) = 4$ ,  $\hat{\epsilon} = 0.163 \cdot \Sigma_2(0) = 0.652$ .



Obwohl beide Systeme die gleiche Dämpfung haben, ist der Überschuss des zweiten Systems 4 mal grösser als beim ersten System. Ausserdem konvergiert die Sprungantwort des zweiten Systems zum Endwert  $y(\infty) = 4$ . Aus Gl. (5) ist ersichtlich, dass gilt:  $\Sigma(0) = \omega_0^2 / \omega_0^2 = 1$ . Dasselbe gilt für das

erste System:  $\Sigma_1(0) = 1/1 = 1$ . Das zweite System, jedoch, hat eine grössere statische Verstärkung:  $\Sigma_2(0) = 1/0.25 = 4$ . Nun stellt sich die Frage, wann das allgemeine Beispielsystem (Gl. (7)) eine statische Verstärkung von 1 hat ( $\Sigma(0) = 1$ ). Aus Gl. (5) ist leicht ersichtlich, dass gelten muss:  $\frac{1}{m} = \frac{k_F}{m}$ . D.h. das System konvergiert zum angewandten Sprung nur, falls gilt:  $k_F = 1 \frac{N}{m}$ ! Dies macht Sinn, da eine Feder mit  $k_F = 1$  sich bei einem Newton um einen Meter auslenkt. Eine Feder mit  $k_F = 0.25$  lenkt sich bei einem Newton um 4 Meter aus. Wie schnell sich die Auslenkung einpendelt hängt vom Dämpfer ab.

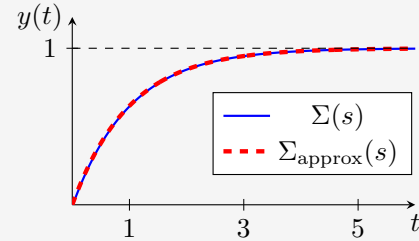
**Beispiel für  $\delta > 1$ :** Betrachte Abb. 1. Wählt man:  $m = 0.01$ ,  $k_F = 1$ , und  $c_D = 101/100$ , folgt:

$$\Sigma(s) = \frac{100}{s^2 + 101s + 100} = \frac{100}{(s + 100) \cdot (s + 1)} \quad (8)$$

In Gl. (8) ist im Nenner ersichtlich, dass die Impulsantwort im ZB eine Superposition der Form,  $y(t) = \alpha \cdot e^{-100 \cdot t} + \beta \cdot e^{-t}$ , sein wird. Da  $e^{-100 \cdot t}$  viel schneller abklingt, kann man das System approximieren:

$$\Sigma_{\text{approx}}(s) = \frac{1}{s + 1} \quad (9)$$

Man muss den Zähler anpassen, um die statische Verstärkung des approximierten Systems gleich zu halten:  $\Sigma(0) = \Sigma_{\text{approx}}(0)$ . Die Simulation beider Systeme liefert:



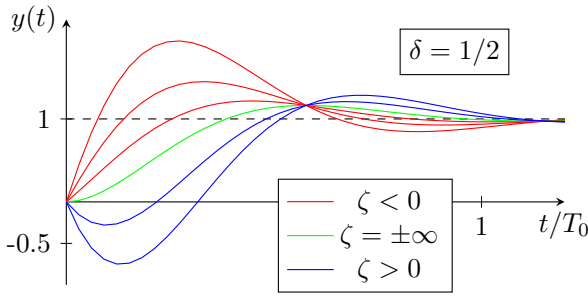
Die beiden Sprungantworten sind fast identisch.

### 3 Nullstelleneinfluss

Bis jetzt wurden nur die Pole betrachtet. Nullstellen sind jedoch auch sehr wichtig für das Systemverhalten. Um Nullstellen besser zu verstehen, wird das System zweiter Ordnung (Gl. (5)) mit einer rein reellen Nullstelle an der Stelle  $s = \zeta$  erweitert:

$$\Sigma(s) = \frac{(-s/\zeta + 1) \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2} \quad (10)$$

Eine Nullstelle weit weg vom Ursprung ( $\zeta = \pm\infty$ ) hat keinen Einfluss auf das Systemverhalten. Je näher die Nullstelle am Ursprung ist, desto stärker ist der Einfluss dieser Nullstelle. Dies widerspiegelt sich an einem stärkeren Überschuss in der Systemantwort. Wie bereits in Kapitel 5 behandelt, kann eine Nullstelle nahe an einem Pol, den Einfluss des Pols schwächen. Für  $\zeta > 0$  hat die Systemantwort einen "Undershoot". In anderen Worten reagiert das System zuerst in die "falsche" Richtung. Ein System mit einer Nullstelle der Form  $\zeta > 0$  wird als nicht-minimalphasig bezeichnet.



Nicht-minimalphasige Nullstellen folgen aus der Sensor- und Aktuatorwahl. D.h. sie sind eine Eigenschaft der Vektoren  $b$  und  $c$ , und nicht eine Eigenschaft der Systemmatrix  $A$ . Durch Änderung der Messgröße (z.B. durch Änderung der Sensorenkonfiguration), kann eine nicht-minimalphasige Nullstelle minimalphasig werden.

**Bemerkung:** Die initiale Sprungantwort in die “falsche” Richtung tritt bei einer ungeraden Anzahl positiver ( $\text{Re}(\zeta > 0)$ ) Nullstellen auf.

## 4 BIBO Stabilität

Als nächstes wird das Konzept von Bounded Input Bounded Output (BIBO) Stabilität eingeführt, welche sich auf Übertragungsfunktionen  $\Sigma(s)$  (das I/O Verhalten) bezieht. Es wurde bereits im Zeitbereich die Stabilität vom GGP nach Lyapunov eingeführt. Diese wird für den allgemeinen Fall mit Anfangsbedingung  $x(0) = x_0 \neq 0$  betrachtet. Bei Übertragungsfunktionen  $\Sigma(s)$  hingegen wird  $x(0) = 0$  angenommen. Zudem wurde gezeigt, dass sich nicht beobachtbare und nicht steuerbare Zustände in  $\Sigma(s)$  kürzen. Falls alle Zustände beobachtbar und steuerbar sind, entsprechen die Nullstellen des Nenners der Übertragungsfunktion im FB den Eigenwerten der Matrix  $A$  im ZB. Die Stabilität im I/O Setting braucht jedoch eine neue Interpretation, da es keinen Zustandsvektor mehr gibt. → **BIBO Stabilität** bezieht sich auf das **I/O Verhalten** von  $\Sigma(s)$ , und **Lyapunov Stabilität** bezieht sich auf das Gleichgewicht der **Zustände**.

Theorem 1: Ein System ist BIBO stabil, falls für die Impulsantwort  $\sigma(t)$  folgendes gilt:

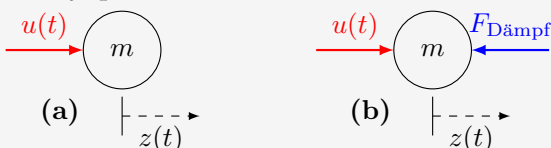
$$\int_0^\infty |\sigma(t)| dt < \infty \quad (11)$$

Theorem 2: Für eine Übertragungsfunktion  $\Sigma(s)$ , gilt:

- Das System ist BIBO stabil falls alle Pole  $\pi_i$  negativen Realteil haben.
- Das System ist nicht BIBO stabil in allen anderen Fällen.

Dabei ist wichtig, dass nicht beobachtbare Zustände und nicht steuerbare Zustände die BIBO Stabilität nicht beeinflussen, da sich diese in  $\Sigma(s)$  wegekürzen. BIBO Stabilität und Lyapunov Stabilität scheinen zunächst sehr ähnlich zu sein, man muss aber die Konzepte auseinanderhalten. Ein BIBO stabiles System kann Lyapunov instabil sein, und ein Lyapunov stabiles System kann BIBO instabil sein.

### Beispiel: Lyapunov stabil und BIBO instabil



Das System in (a) wird betrachtet. Ein Körper mit Masse  $m = 1$  sei ohne Reibung frei beweglich. Die einzige Kraft, die wirkt sei der Eingang  $u(t)$ . Der Ausgang sei die Geschwindigkeit des Körpers  $\dot{z}(t)$ . Durch Impulserhaltung folgt:

$$\ddot{z}(t) = u(t), \quad y(t) = \dot{z}(t)$$

Durch die Wahl des Zustands  $x(t) = \dot{z}(t)$ , folgt:

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad y(t) = x(t) \quad (12)$$

Vergleicht man Gl. (12) mit der Standardform, folgt:

$$\dot{x} = Ax + bu \quad \leftrightarrow \quad \dot{x} = 0 \cdot x + u \quad (13)$$

D.h. das System hat einen Eigenwert  $\lambda = 0$ . Der GGP ist stabil nach Lyapunov (nicht asymptotisch). Die I/O Übertragungsfunktion des Systems lautet:

$$\Sigma(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} \quad (\text{Integrator})$$

Es gibt verschiedene Methoden, wie man zeigen kann, dass (a) nicht BIBO stabil ist. Die Übertragungsfunktion hat einen Pol bei  $s = 0$ . Per Definition ist das System somit nicht BIBO stabil. Rechnet man die Impulsantwort aus, folgt:  $\sigma(t) = \mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1$ . Somit ist die Bedingung in Gl. (11) auch nicht erfüllt. Ausserdem lässt sich leicht ein Bounded Input finden ( $u(t) = c$ ), der einen Unbounded Output ( $y(t) = c \cdot t$ ) liefert.

**Bemerkung:** Das System in (a) wäre BIBO stabil, falls auf die Kugel eine geschwindigkeitsabhängige Widerstandskraft  $F_{\text{Dämpf}} = \dot{z}$  wirkte, wie dargestellt in (b).

$$\ddot{z}(t) = -\dot{z}(t) + u(t), \quad y(t) = \dot{z}(t)$$

Durch dieselbe Zustandswahl  $x = \dot{z}$  folgt:

$$\dot{x} = -x(t) + u(t), \quad y(t) = x(t)$$

Dies ist ein System erster Ordnung mit Eigenwert  $\lambda = -1$  und ist somit asymptotisch stabil nach Lyapunov. Die Impulsantwort ergibt sich zu:

$$\Sigma(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow \sigma(t) = e^{-t},$$

somit ist das System (b) auch BIBO stabil.

### Beispiel: Lyapunov instabil und BIBO stabil:

Das folgende System wird auf Lyapunov und BIBO Stabilität geprüft:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x = x_1 \quad (14)$$

In Gl. (14) stehen die Eigenwerte direkt auf der Diagonalen:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$ . Das System ist somit instabil nach Lyapunov. Die Instabilität nach Lyapunov ist nachvollziehbar wenn  $x_2(0) \neq 0$ , dann divergiert der Zustand  $x_2$  für  $t \rightarrow \infty$ . Da der instabile Zustand weder steuerbar noch beobachtbar ist, ist das System trotzdem BIBO stabil. Durch ausrechnen der Übertragungsfunktion folgt:

$$\Sigma(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1}$$

Der Pol hat einen negativen Realteil. Das System ist somit gleichzeitig BIBO stabil und Lyapunov instabil.

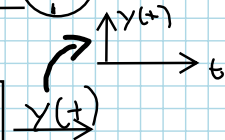
# Recap

vom Zeitbereich



in den Frequenzbereich

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$



- direkte Lösung im Zeitbereich
- meist schwierig
- Faltung

$$\mathcal{L} \left( \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \right)$$

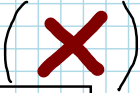
$$\Sigma(s) = C(Is - A)^{-1}B + D$$

$$U(s) \rightarrow \Sigma(s) \rightarrow Y(s)$$

- $Y(s) = \Sigma(s)U(s)$  (Faltung wird zur Multiplikation)
- Lösung im Zeitbereich über Rücktransfo (heute)

## Laplace Transformation mit Tabellen

$$u(s) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt$$



Wichtige Eigenschaften	
Linearität	$\mathcal{L}\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} = a \cdot X_1(s) + b \cdot X_2(s)$
Ähnlichkeit	$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{a} \cdot x\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = X(s \cdot a)$
Verschiebung	$\mathcal{L}\{x(t - T)\} = e^{-T \cdot s} \cdot X(s)$
Dämpfung	$\mathcal{L}\{x(t) \cdot e^{-at}\} = X(s - a)$
Ableitung t	$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = s \cdot X(s) - x(0)$ (1)
n-te Abl. t	$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right\} = s^n \cdot X(s) - \left(\frac{d^k x(t=0)}{dt^k} = 0 \forall k\right)$ (2)
Ableitung s	$\mathcal{L}\{t \cdot x(t)\} = -\frac{d}{ds}X(s)$
Integration t	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot X(s)$
Integration s	$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} \cdot x(t)\right\} = \int_s^{\infty} X(\sigma) d\sigma$
Faltung t	$\mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(s) \cdot X_2(s)$
Faltung s	$\mathcal{L}\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = X_1(s) * X_2(s)$
Anfangswert	$\lim_{t \rightarrow 0+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$ (3)
Endwert	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0+} s \cdot X(s)$ (4)



## Pole & Nullstellen von $\Sigma(s)$

$$\Sigma(s) = C \cdot (Is - A)^{-1} \cdot B + D$$

$$= C \cdot \frac{\text{adj}(Is - A)}{\det(Is - A)} \cdot B + D$$

$$= \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

Übertragungsfunktion

- physikalische Systeme  $\rightarrow$  kausal  $\rightarrow m \leq n$
- strikt "proper"  $\rightarrow D = 0 \rightarrow m < n$

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
$h(t)$	$\frac{1}{s}$
$h(t) \cdot t^n \cdot e^{\alpha \cdot t}$	$\frac{n!}{(s - \alpha)^{n+1}}$
$h(t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$h(t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$h(t) \cdot \sinh(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$h(t) \cdot \cosh(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$

- $b(s)$  Zählerpolynom
- $a(s)$  Nennerpolynom
- $\rightarrow$  Nullstellen  $\xi_i$  (Nullstellen  $b(s)$ )
- $\rightarrow$  Pole  $\pi_i$  (Nullstellen  $a(s)$ )

$\pi_i \xrightarrow{\text{X}} \in W(A)$   
 Pol/Nullstellen-kürzung bei nicht beobachtbaren / steuerbaren Zuständen

## RT 1 Übung 6

$$\rightarrow Y(s) = Z(s) \cdot U(s)$$

i.e

$$Z(s) = \frac{s+1}{s^2-5s-6}$$

$$U(s) = 1 \quad (u(t) = \delta(t))$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s+1}{s^2-5s-6}$$

Analyse Antwort im zB:  $Y(s) \rightarrow y(t)$

Rücktransformation:  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \frac{1}{2\pi j} \oint Y(s) e^{st} ds$  (X)

(✓) In RT machen wir dies nun aber mit Hilfe von Partialbruchzerlegung und Tabelle

Erklärung mit Beispiel oben

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2-5s-6}$$

Partialbruchzerlegung  $Y(s)$ . Nullstellen des Nenners

$$Y(s) = \frac{s+1}{(s-2)(s+3)} = \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s+3)} \quad (\Rightarrow \text{Findet } A \& B, \text{ sodass "=" stimmt})$$

Gleichnamig machen:

$$\frac{s+1}{(s-2)(s+3)} = \frac{A(s+3)}{(s-2)(s+3)} + \frac{B(s-2)}{(s+3)(s-2)}$$

$$\frac{s+1}{(s-2)(s+3)} = \frac{A(s+3) + B(s-2)}{(s-2)(s+3)}$$

Zähler sollen nun übereinstimmen:

$$s+1 = As + 3A + Bs - 2B$$

daraus folgt:

$$\begin{array}{l} s \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} = As + Bs \\ = 3A - 2B \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 3/5 \\ B = 2/5 \end{array}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{3/5}{s-2} + \frac{2/5}{s+3}$$



## Rücktransformation mit Tabelle

① Linearität:

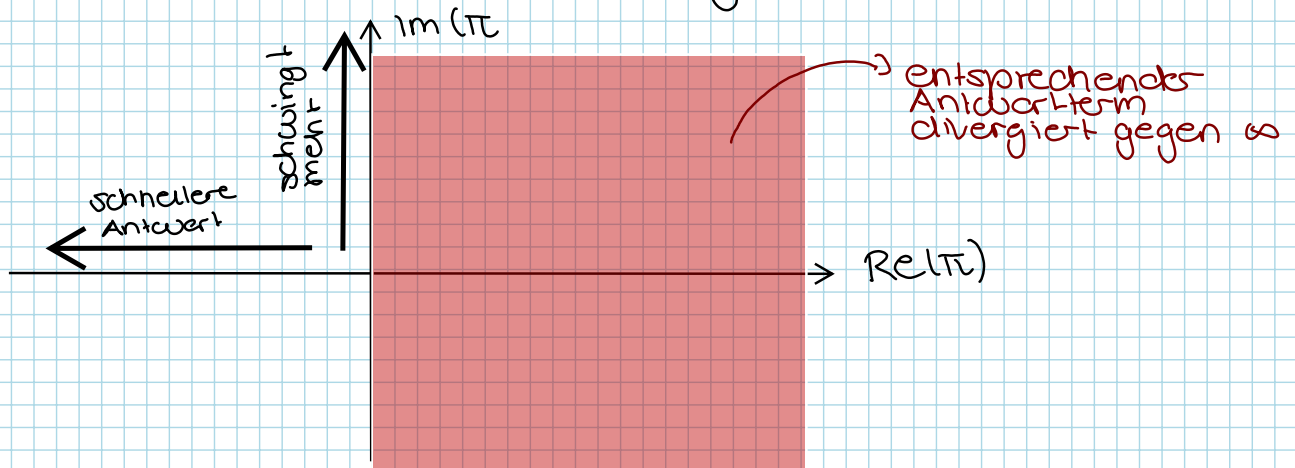
$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3/5}{s-2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2/5}{s+3}\right)$$

②  $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}\right) = h(t) \cdot t^n \cdot e^{-\alpha t}$

$$y(t) = \underbrace{\frac{3}{5} h(t) e^{2t}}_{\substack{\uparrow \\ \text{schwingt} \\ \text{mehr}}} + \underbrace{\frac{2}{5} h(t) e^{-3t}}_{\substack{\uparrow \\ \text{schnellere} \\ \text{Antwort}}}$$

Im Exponent haben wir unsere Pole von  $Z(s)$  → sie geben uns also Aufschluss über Input-output-Verhalten unseres Systems.

## Impulsantwortverhalten nach Pollage



## BIBO - Stabilität (Bounded Input $\Rightarrow$ Bounded Output)

Beurteilt Stabilität des I/O-Verhaltens ( $u \rightarrow y$ )

( $\rightarrow$  nicht beobachtbare / steuerbare Zustände haben keinen Einfluss)  $\rightarrow$  Lyapunov: Aussage zu allen Zuständen & ohne

Input

Es gilt:

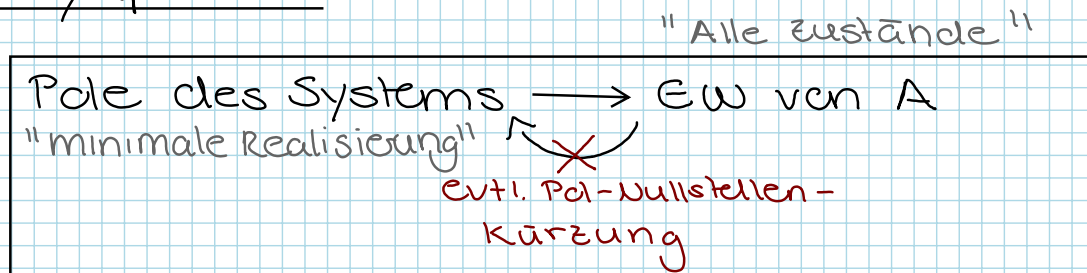
- BIBO stabil  $\rightarrow$  alle Pole haben  $\text{Re} < 0$
- BIBO instabil  $\rightarrow$  mind. 1 Pol hat  $\text{Re} \geq 0$

Oder aber richtige Definition: BIBO stabil falls:

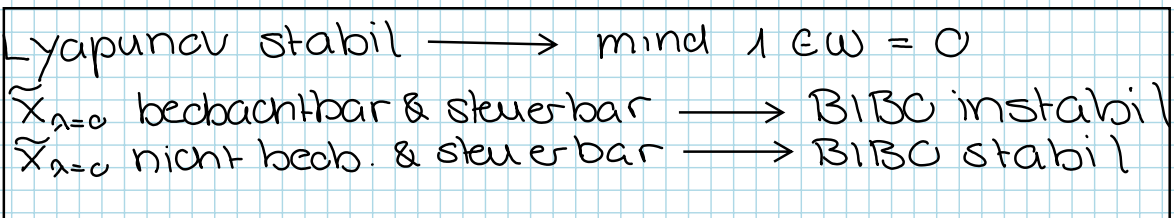
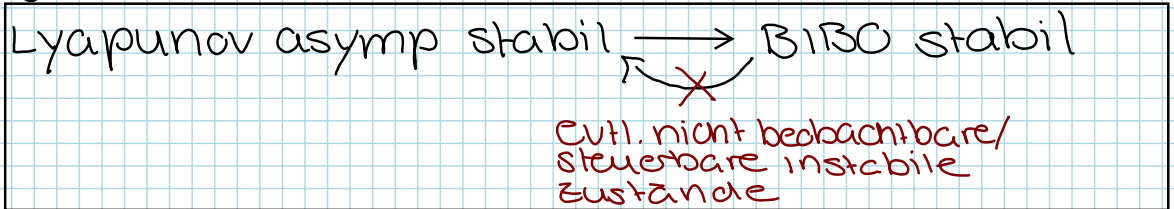
$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty$$

## BIBO vs. Lyapunov

Es gilt:



daraus folgt:



## BIBO Beispielaufgabe.

System aus letzten beiden Übungsstunden:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_1 = [1 \quad 0] \quad D_1 = [0]$$

$$\Sigma_1(s) = \frac{2}{s+2}$$

① Lyapunov stabil?

$\Rightarrow$  EW von A direkt ablesbar da  $A = \text{diag}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \end{array} \right\} \text{Re}(\lambda_2) > 0$$

$\Rightarrow$  Lyapunov instabil

② BIBO stabil?

$\Rightarrow$  Pole von  $\Sigma_1(s)$  berechnen:

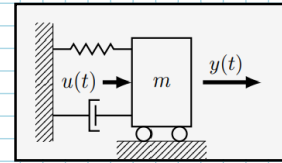
$$\pi_1 = -2$$

Alle  $\text{Re}(\pi_i) < 0 \rightarrow$  BIBO stabil

## Systeme 2. Ordnung

In der Vorlesung habt ihr kennengelernt.

$$\Sigma(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2}$$



mit  $\delta$  = Dämpfung  
 $\omega_0$  = natürliche Frequenz =  $\frac{2\pi}{T}$

System hat Pole bei:

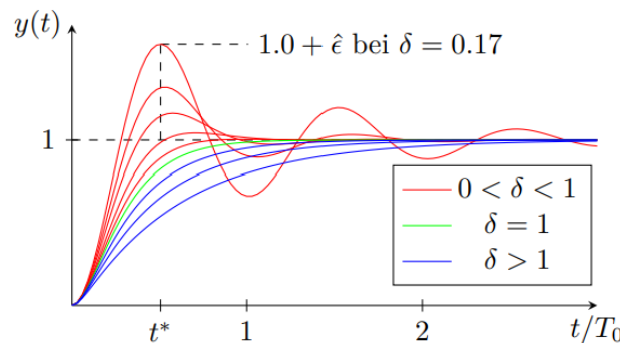
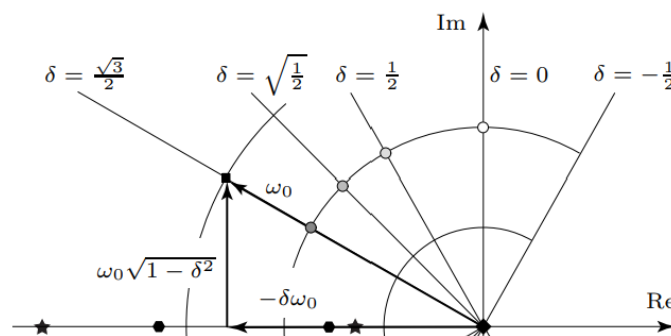
$$\pi_{1,2} = (-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1})\omega_0$$

Abhängig von  $\delta$  &  $\omega_0$  verändert sich also unsere Pollage & somit unsere Systemantwort

Für:  $\delta > 1$ :  $\text{Im}(\pi_{1,2}) = 0 \rightarrow$  kein Schwingen  $\rightarrow$  überkritisch gedämpft.

$\delta = 1$ :  $\text{Im}(\pi_{1,2}) = 0$  &  $\pi_1 = \pi_2 \rightarrow$  kein Schwingen  $\rightarrow$  kritisch gedämpft.

$\delta < 1$ :  $\text{Im}(\pi_{1,2}) \neq 0 \rightarrow$  System schwingt.



$\Rightarrow$  Probiert's selbst aus in der MATLAB-Hilfe



## Nullstellen $\xi$ .

Neben den Nullstellen des Nenners (Polen) können wir auch Infos aus den Nullstellen des Zählers gewinnen.

Was ist eine Nullstelle:  $\rightarrow$  regen wir unser System mit der Nullstelle an: also  $u(t) = k \cdot e^{\xi t}$  so existiert ein  $x(0) \neq 0$  s.t.  $y(t) = 0$  für  $t \geq 0$

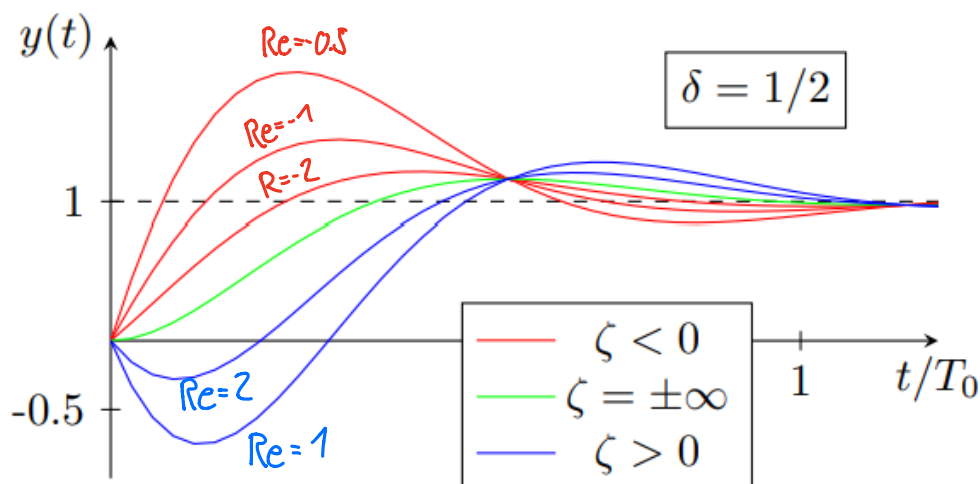
Ergänzung unseres Systems 2. Ordnung um Nullstelle

$$\Sigma_{\text{null}}(s) = \frac{(-\frac{1}{\xi}s + 1)\omega_0^2}{s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Was machen die Nullstellen nun:

- Haben wir Nullstellen  $\rightarrow \dot{y}(0) \neq 0$
- Nullstellen nahe bei Polstellen schwächen diese ab.  
 $\rightarrow$  Extremfall  $\xi_i = \pi_i \Rightarrow$  Pol-Nullstellen-Kürzung
- $\text{Re}(\xi) \leq 0 \rightarrow$  System wächst schneller  $\rightarrow$  grösseres Überspringen.
- $\text{Re}(\xi) > 0 \rightarrow$  System "tügt"  $\rightarrow$  unterschwingen  
 $\Rightarrow$  solche Nullstellen nennen wir "nicht minimalphasig"

$\Rightarrow$  Desto kleiner  $|\xi|$  - desto näher am Ursprung - desto grösser ist der jeweilige oben genannte Effekt



# Sene 6, Aufgabe 1

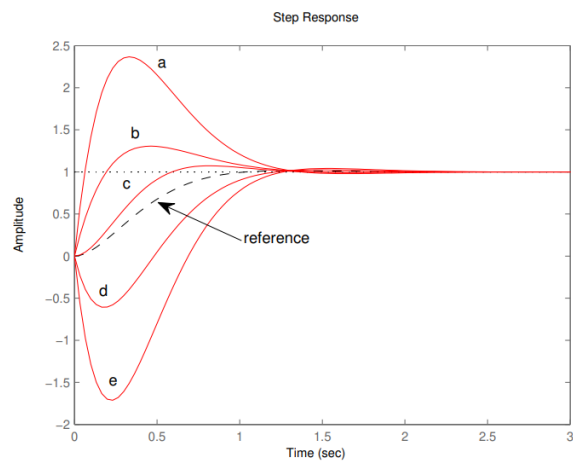


Abbildung 1: Sprungantworten

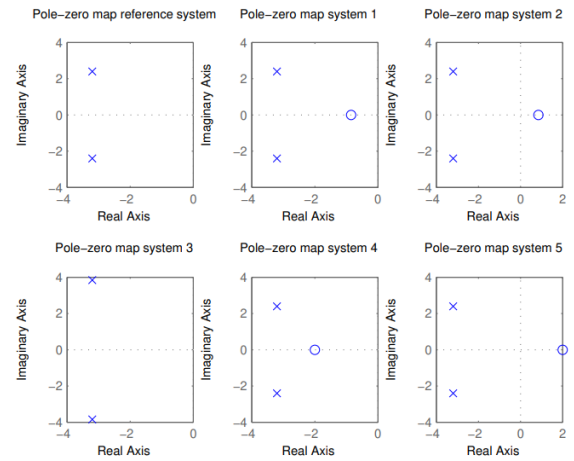


Abbildung 2: Pole (x) und Nullstellen (o)

Welche Antwort gehört zu welchem Pol-Nullstellen-Plot?