

# Regelungstechnik I HS 2020

## Definitionen und Systemmodellierung

Autoren: C. Küttel, M. Reinders, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

# Zusammenfassung Vorlesung 1+2

## Buch Kapitel 1+2

Bei Fragen: morettog@ethz.ch, hraffael@ethz.ch, 11. September 2020

## 1 Systemdefinitionen

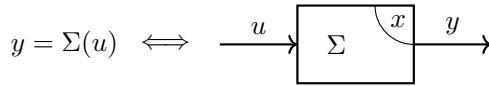


Abb. 1: System  $\Sigma$  mit Eingang  $u$ , Ausgang  $y$  und Zustand  $x$

**Signal:** Ein Signal ist eine Funktion der Zeit (z.B.  $u(t), y(t)$ )

**System:** Ein Operator der ein Signal ändert. Das System  $\Sigma$  in Abb. 1 transformiert ein Eingangssignal  $u$  in ein Ausgangssignal  $y$ . Ein System kann interne Zustandsvariablen  $x$  haben, welche von aussen nicht zugänglich sind.

## 2 Systemklassifikation

**SISO/MIMO:** SISO (Single Input Single Output) sind Systeme mit genau einem Eingang und einem Ausgang. Systeme mit mehreren Eingängen oder Ausgängen heissen MIMO (Multiple Input Multiple Output).

**Linear/Nichtlinear:** Ein System  $\Sigma$  ist linear, falls gilt:  
 $\Sigma(\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2) = \alpha \cdot \Sigma(u_1) + \beta \cdot \Sigma(u_2)$

### Linear

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{d}{dt} u(t) \\ y(t) &= \int_0^t u(\tau) d\tau \\ y(t) &= \alpha \cdot u(t) \end{aligned}$$

### Nichtlinear

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha \cdot u(t) + \beta \\ y(t) &= \sin(u(t)) \\ y(t) &= \sqrt{u(t)} \end{aligned}$$

Eine Änderung des Ausgangs bei einem **linearen** System ist proportional zur Änderung des Eingangs.

**Kausal/Akausal:** Ein kausales System hängt nicht von Eingängen in der Zukunft ab.

### Kausal

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t - \tau) \quad \forall \tau \geq 0 \\ y(t) &= \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

### Akausal

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t + 5) \\ y(t) &= \int_{-\infty}^{t+1} u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Alle physikalischen Systeme sind kausal. Solche Systeme können **dynamisch** oder **statisch** sein

### Dynamisch

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t u(\tau) d\tau \\ y(t) &= u(t - \tau) \quad \forall \tau \neq 0 \end{aligned}$$

### Statisch

$$\begin{aligned} y(t) &= 3 \cdot u(t) \\ y(t) &= \sqrt{u(t)} \end{aligned}$$

Der Ausgang eines **statischen** Systems zur Zeit  $t^*$  hängt nur vom Eingang zur Zeit  $t^*$  ab.

**Zeitinvariant/Zeitvariant:** Zeitvariante Systeme geben bei Anwendung einer gleichen Kombination aus Anfangszustand und Eingangssignal, angewendet zu unterschiedlichen Zeitpunkten, unterschiedliche Ausgangssignale.

### Zeitinvariant

$$\begin{aligned} y(t) &= 3 \cdot u(t) + 5 \\ y(t) &= \frac{d}{dt} u(t) \end{aligned}$$

### Zeitvariant

$$\begin{aligned} y(t) &= \sin(t) \cdot u(t) \\ y(t) &= u(t) + t \end{aligned}$$

## 3 Steuerung vs. Regelung vs. Vorsteuerung

In diesem Abschnitt wird der Unterschied zwischen Steuerung und Regelung mit Hilfe von Beispielen illustriert.

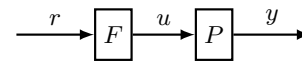


Abb. 2: Steuerungsstruktur

Betrachte Abb. 2. Das System stellt sich zusammen aus einer Steuerung  $F$  und einer Strecke  $P$ . Ein- und Ausgänge in die Systemblöcke sind Führungsgrösse  $r$ , Eingangsgrösse  $u$  und Ausgangsgrösse  $y$ . Bei einem Steuersystem wird die Steuergrösse nicht mit der Ausgangsgrösse verglichen. Diese Struktur hat ein Freiheitsgrad: Die Steuerung  $F$ .

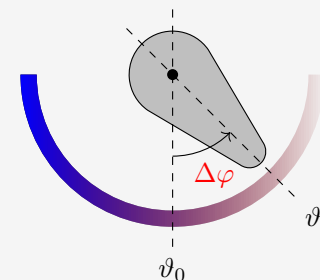


Abb. 3: Temperaturhebel deiner Dusche.

**Beispiel:** Betrachte Abb. 3. Du hast schon oft in deiner Dusche geduscht und ein affines Verhältnis zwischen dem Winkel des Temperaturhebels und der Ausgangstemperatur des Wassers identifiziert. Das heisst, eine Temperaturänderung ist Proportional zur Winkeländerung des Hebels:  $\vartheta = \nu(\varphi - \varphi_0) + \vartheta_0 = P(\varphi)$ , wobei  $\nu$  die Proportionalitätskonstante und  $\vartheta_0$  die Referenztemperatur beim Referenzwinkel  $\varphi_0$  ist. Dieses Modell ist die Steuerstrecke  $P$ . Du möchtest, dass die Ausgangsgrösse  $y = \vartheta$  deiner Lieblingstemperatur  $r = \vartheta^*$  entspricht. Da du die Proportionalitätskonstante kennst, kannst du die Steuerstrecke invertieren:  $\varphi = \frac{1}{\nu}(\vartheta - \vartheta_0) + \varphi_0$  und erhältst somit die Steuerung  $F = P^{-1}$ . Setzt man die gewünschte Temperatur  $\vartheta^*$  in die Steuerung, erhält man die Eingangsgrösse  $u = \varphi^* = \frac{1}{\nu}(\vartheta^* - \vartheta_0) + \varphi_0$ . Der Aktuator ist in diesem Fall deine Hand.

Als nächstes wird die folgende Regelstruktur betrachtet.

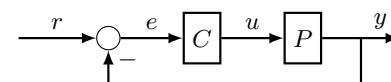


Abb. 4: Regelstruktur

Das System setzt sich immer noch aus einer Regelstrecke  $P$  und einem Regler  $C$  zusammen. Der Hauptunterschied zur Steuerung ist, dass nun die Ausgangsgrösse  $y$  zurückgeführt wird und mit der Sollgrösse  $r$  verglichen wird. Die Differenz dieser Grössen ist der Fehler  $e$  zwischen Soll- und Istwert. Diese Struktur hat einen Freiheitsgrad: Den Regler  $C$ .

**Beispiel:** Du hast dich für Tennis am Campus Irchel angemeldet und benutzt die Dusche der Garderobe. Du stellst fest, dass du diese Dusche noch nie verwendet hast, und weisst nicht welche Einstellung deine Lieblingstemperatur  $\vartheta^*$  liefert. In anderen Worten kennst du die Regelstrecke  $P$  nicht.

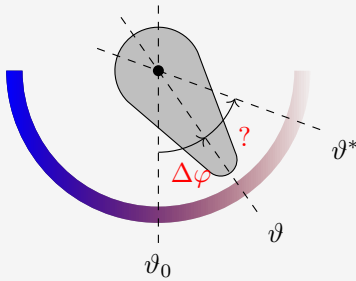


Abb. 5: Temperaturhebel einer Dusche am Campus Irchel.

Betrachte Abb. 5. Du hast den Hebel auf den arbiträren Winkel  $\varphi = \Delta\varphi + \varphi_0$  gestellt. Nun fühlst du auf deiner Haut, dass die resultierende Temperatur  $\vartheta$  nicht deiner Lieblingstemperatur  $\vartheta^*$  entspricht. Das heisst, durch Rückführung der Temperatur, mittles deiner Haut stellst du eine Temperaturdifferenz  $e = \vartheta^* - \vartheta$  fest. Intuitiv wirst du, wenn die Temperaturdifferenz sehr gross ist, den Hebel stark in die Richtung bewegen, die den Fehler reduziert. Falls die Temperaturdifferenz eher klein ist, musst du den Hebel nur leicht bewegen. Ein Beispiel eines solchen Reglers ist ein Proportionalregler:  $\Delta\varphi = k_P \cdot e$ , wobei  $k_P$  eine Proportionalitätskonstante ist, die du ungefähr schätzt. Ein grosser Fehler  $e$ , wird in einer grossen Winkeländerung  $\Delta\varphi$  resultieren, wobei ein kleiner Fehler in einer kleinen Winkeländerung resultiert. Du wirst den Winkel basierend auf dem Fehler  $e$  kontinuierlich ändern, bis sich die gewünschte Temperatur eingestellt hat.

Als nächstes wird eine allgemeine Regelstruktur inklusive Störung und Rauschen erklärt.

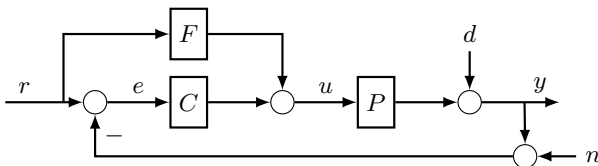


Abb. 6: Regelstruktur mit Vorsteuerung.

Die Rückführung der Ausgangsgrösse in Abb. 6 übernimmt immer noch die gleiche Rolle wie in der Regelstruktur in Abb. 4. Zusätzlich hat man nun eine Schätzung  $\hat{P}$  der Regelstrecke  $P$ . Die Vorsteuerung kann nun ähnlich wie bei der Steuerung als Inversion der ungefähren Regelstrecke gewählt werden:  $F = \hat{P}^{-1}$ . Das Ziel der Vorsteuerung ist, das System durch Vorwissen des Verhaltens der Regelstrecke in die Umgebung des gewünschten Operationspunkt zu steuern. Fehler der Vorsteuerung  $F$ , werden durch den Regler  $C$  korrigiert. Zusätzlich sind noch die Störung  $d$  und das Rauschen  $n$  eingezeichnet. Die Störung  $d$  wirkt sich auf die wahre Ausgangsgrösse aus, wobei das Rauschen  $n$  auf die Messung von  $y$  wirkt. Über die Rückführung wird  $n$  auch auf  $y$  wirken. Diese Struktur hat zwei Freiheitsgrade:  $C, F$ .

**Beispiel:** Du warst jetzt schon öfters im Training und weisst welche Hebeleinstellung deine Lieblingstemperatur liefert (Vorsteuerung  $F$ ). Da die Einstellung aber nicht genau stimmt, regelst du den Hebel noch auf die richtige Einstellung (Regler  $C$ ). Leider duscht das Fussballteam auch noch. Wenn alle Duschen gleichzeitig laufen, entspricht die resultierende Temperatur nicht mehr deiner Lieblingseinstellung (Störung  $d$ ). Da du dies mittels Rückführung merkst, regelst du den Hebel, bis sich wieder deine Lieblingstemperatur einstellt. Nun hat jemand die Tür zur Garderobe offen gelassen und du kriegst ab und zu Hühnerhaut (Rauschen  $n$ ). Da du das Gefühl hast, dass sich die Temperatur geändert hat, obwohl sie noch gleich ist, regelst du die Dusche auf eine Temperatur, die sich gleich anfühlt wie deine Lieblingstemperatur.

## 4 Modellierung

Drei Methoden um die Differentialgleichung eines Systems herzuleiten werden beschrieben.

**Impulserhaltung:**  $\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \sum_i F_i$

Die momentane Beschleunigung  $\ddot{x}$  eines Körpers mit Masse  $m$  ist durch die Summe der momentan anliegenden Kräfte  $F_i$  bestimmt.

**Drehimpulserhaltung:**  $\frac{d}{dt}(J_B\dot{\theta}) = \sum_i T_i$

Die momentane Winkelbeschleunigung  $\ddot{\theta}$  eines Körpers mit Trägheitsmoment  $J_B$  und Ruhepunkt B ist durch die Summe der momentan anliegenden Momente  $T_i$  bestimmt.

**Speichermethode:**

1. Identifiziere die Systemgrenze (Zuflüsse, Ausflüsse)
2. Identifiziere die relevanten Speicher im System (Masse, Energie, Ladung) und ihre zugehörigen Pegelvariablen
3. Formuliere die Differentialgleichung für alle relevanten Speicher

$$\frac{d}{dt}(\text{Speicherinhalt}) = \sum \text{Zuflüsse} - \sum \text{Ausflüsse}$$

Falls der Speicherinhalt die Energie des Systems ist, sind Zu- und Ausflüsse Leistungen  $P_+$  und  $P_-$ . Die Leistung einer Kraft  $F$  in einem System hängt von der Geschwindigkeit  $\dot{x}$  ab. Die Leistung eines Momentes  $T$  hängt von der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  ab.

$$P_{\text{Kraft}} = F\dot{x}$$

$$P_{\text{Moment}} = T\dot{\varphi}$$

4. Formuliere algebraische Relationen um Zuflüsse/Ausflüsse eines Speichers als Funktion der Pegelvariablen auszudrücken. Nach einsetzen sollten sowohl der Speicherinhalt wie auch die Zuflüsse/Ausflüsse als Funktion der Pegelvariablen ausgedrückt sein.

5. Identifiziere Systemparameter durch Experimente, Designspezifikationen oder Systemoptimierung

6. Validiere das Modell mit Experimenten

**Beispiel:** Betrachte Abb.7. Die Masse  $m$  ist an einer Feder mit Federkonstante  $k_F$  aufgehängt und wird von unten mit einem Gas mit Geschwindigkeit  $v(t)$  angeströmt. Die Geschwindigkeit  $v(t)$  entspricht der Eingangsgröße  $u(t)$ . Die Kraft der Anströmung auf die Masse  $m$  sei proportional zum Quadrat der relativen Geschwindigkeit. Die Position des Systems ist der Ausgang  $y(t)$  und wird mit einem Sensor gemessen.

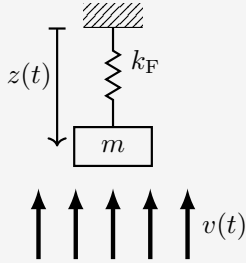


Abb. 7: Angeströmte, aufgehängte Masse

Die Systemgleichungen können für dieses Beispiel am schnellsten mittels Impulserhaltung hergeleitet werden:

$$m\ddot{z} = F_G - F_{\text{Feder}} - F_{\text{Wind}} \\ = mg - k_F z - k(\dot{z} + v(t))^2$$

Das System lässt sich auch allgemeiner mit der Speichertheorie herleiten:

1. Die externe Kraft durch die Anströmung führt dem System Energie zu/ab.
2. Die Energie im System setzt sich aus potentieller Energie der Masse und der Feder, und der kinetischen Energie der Masse zusammen:

$$E(t) = -mgz(t) + \frac{1}{2}k_F z(t)^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}(t)^2$$

Die Pegelvariablen des Systems sind:  $z, \dot{z}$

3. Die Energiebilanz liefert:

$$\frac{d}{dt}E(t) = -mg\dot{z} + k_F z\dot{z} + m\dot{z}\ddot{z} = P_+ - P_-$$

4. Die Kraft der Anströmung wirkt laut Abb. 7 der positiven  $z$ -Richtung entgegen und hat deshalb ein negatives Vorzeichen. Somit ist das Modell des Systems gegeben durch:

$$-mg\dot{z} + k_F z\dot{z} + m\dot{z}\ddot{z} = -F_{\text{Wind}} \cdot \dot{z} \\ = -\underbrace{k(\dot{z} + v(t))^2}_{\text{Kraft}} \cdot \dot{z}$$

$$\Rightarrow m\ddot{z} = mg - k_F z - k(\dot{z} + v(t))^2$$

feedforward (Vorsteuerung)  
feedback (Regelung)