

Regelungstechnik I HS 2020

Analyse von Regelsystemen

Autoren: C. Küttel, M. Reinders, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Zusammenfassung Vorlesung 10

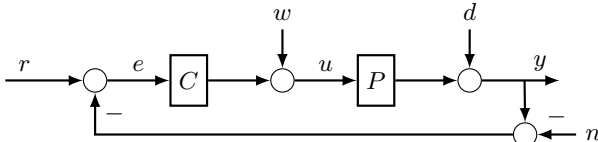
Buch Kapitel 9.1-9.4

Bei Fragen: morettog@ethz.ch, davidm@ethz.ch

1 Definitionen

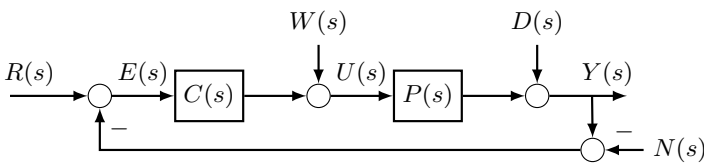
Signale im Regelkreis:

- $r(t)$: Referenz (Sollzustand des Systems)
- $w(t)$: Störung der Eingangsgrösse u
- $d(t)$: Störung der Ausgangsgrösse y
- $n(t)$: Sensorrauschen

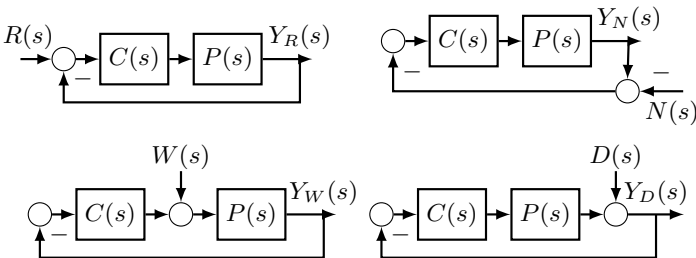


Standardregelstruktur mit Störgrössen w und d .

Das Konzept einer Übertragungsfunktion kann erweitert werden, um die Beziehung zwischen zwei beliebigen Signalen zu beschreiben. Dafür wird der Regelkreis zunächst in den Frequenzbereich transformiert:



Ziel ist, die Ausgangsgrösse $Y(s)$ als Funktion des Reglers $C(s)$, der Regelstrecke $P(s)$ und der Eingänge $R(s)$, $N(s)$, $D(s)$, und $W(s)$ zu schreiben. Durch die Linearität der Regelstruktur und unter Annahme von unkorrelierten Eingängen können die Eingangsbeiträge einzeln betrachtet werden:



Daraus folgt:

$$Y_R(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \cdot R(s), \quad Y_N(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \cdot N(s)$$

$$Y_W(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} \cdot W(s), \quad Y_D(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} \cdot D(s)$$

Die gesamte Ausgangsgrösse $Y(s)$ lautet somit:

$$Y(s) = Y_R(s) + Y_N(s) + Y_W(s) + Y_D(s) \quad (1)$$

Es werden Komponenten von Gl. (1) neu definiert:

- Kreisverstärkung : $L(s) = P(s) \cdot C(s)$ ($e \rightarrow y$)
- Sensitivität : $S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$ ($d \rightarrow y$)
- Komplementäre Sensitivität : $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ ($r \rightarrow y$)

Mit diesen Definitionen können wir die Beziehung zwischen allen Eingangssignalen und dem Ausgang kompakt schreiben:

$$Y(s) = S(s) \cdot [D(s) + P(s) \cdot W(s)] + T(s) \cdot [R(s) + N(s)]$$

2 Stabilität des geschlossenen Regelkreises

Für geschlossene Regelkreise muss das Konzept der Stabilität erweitert werden. Ein System ist *intern stabil*, wenn alle Übertragungsfunktionen, welche die Eingänge w, d, r in den Regelkreis auf die Ausgänge u, y, e abbilden, asymptotisch stabil sind ($\text{Re}(\lambda_i) < 0, i = 1, \dots, n$)¹. Die Beziehungen zwischen diesen Signalen sind gegeben durch:

$$\begin{bmatrix} U(s) \\ Y(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(s) & -S(s) \cdot C(s) & S(s) \cdot C(s) \\ S(s) \cdot P(s) & S(s) & T(s) \\ -S(s) \cdot P(s) & -S(s) & S(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W(s) \\ D(s) \\ R(s) \end{bmatrix}$$

D.h. die Übertragungsfunktionen $S(s)$, $T(s)$, $S(s) \cdot C(s)$, und $S(s) \cdot P(s)$ dürfen nur Pole π_i mit $\text{Re}(\pi_i) < 0$ haben.

Falls $P(s)$ und $C(s)$ nur asymptotisch stabile Pole haben, genügt es also, die asymptotische Stabilität von $S(s)$ und $T(s)$ zu überprüfen um die interne Stabilität zu garantieren.

3 Nyquist Theorem

Durch das Nyquist-Theorem kann die asymptotische Stabilität eines geschlossenen Regelkreissystems $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ durch Analyse seiner Kreisverstärkung $L(s)$ (offener Regelkreis) bestimmt werden. Dabei wird angenommen, dass keine Modellunsicherheit $W_2(s)$ vorhanden ist.

Nominales Stabilitätskriterium von Nyquist:

Der geschlossene Regelkreis, mit Übertragungsfunktion $T(s)$, ist asymptotisch stabil, falls für $L(s)$ gilt:

$$n_c = \frac{n_0}{2} + n_+ \quad (2)$$

n_c : Anzahl Umrundungen von $L(j\omega)$ um den Punkt $(-1 + j0)$, wenn ω zwischen $(-\infty, \infty)$ variiert wird.

n_0 : Anzahl Pole von $L(s)$ mit Realteil = 0

n_+ : Anzahl Pole von $L(s)$ mit Realteil > 0

Wichtig: Stabilität nach Nyquistkriterium gilt nur, falls keine Kürzungen von instabilen Polen mit nicht-minimalphasigen Nullstellen auftreten in $L(s) = C(s) \cdot P(s)$. Andernfalls kann nicht von $L(s)$ auf die interne Stabilität des geschlossenen Regelkreises geschlossen werden.

Vorgehen zur Auswertung des Stabilitätskriteriums

1. Betrachte das Nyquistdiagramm von $L(j\omega)$ in der komplexen Ebene mit $\omega \in [0, \infty)$.
2. Spiegle das Diagramm um die reelle Achse. Die gespiegelte Kurve entspricht dem Bereich $\omega \in (-\infty, 0]$. Die kombinierte Kurven entspricht also $L(j\omega)$, $\omega \in (-\infty, \infty)$
3. Zähle n_c , die Anzahl Umrundungen von $L(j\omega)$ um den Punkt $(-1 + j0)$, wenn ω von $-\infty$ bis ∞ variiert wird. Ein Umlauf in \odot wird positiv gezählt, und in \ominus negativ.

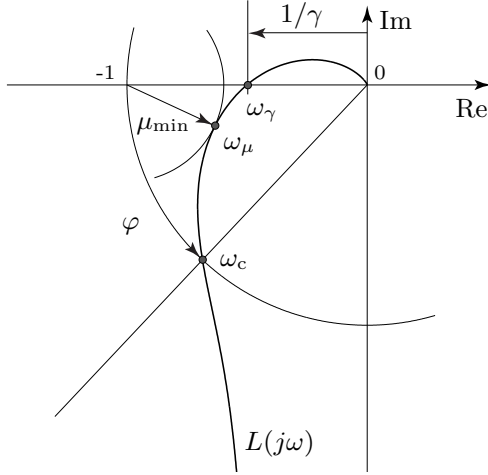
¹Im Folgenden wird asymptotisch stabil (nach Lyapunov) gleich BIBO-stabil gesetzt. Dies ist zulässig für minimal-realisierte LZI-Systeme.

Detaillierte Anleitung zum Zählen der Umrundungen

Betrachten einen Zeiger dessen Basis auf dem Punkt $(-1 + j0)$ liegt und dessen Kopf auf $L(j\omega)$, $\omega \rightarrow -\infty$ zeigt. Folge mit dem Kopf des Zeigers der Kurve $L(j\omega)$ von $\omega \rightarrow -\infty$ bis $\omega \rightarrow +\infty$ und zähle die Anzahl Umdrehungen um den Punkt $(-1 + j0)$, die der Zeiger dabei vollzieht.

4 Verstärkungsreserve und Phasenreserve

Falls $L(s)$ eines Systems Gl. (2) nicht erfüllt, hat das resultierende $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ instabile Pole. Falls ein $L(s)$ Gl. (2) erfüllt, ist ein Mass für die Robustheit der Stabilität also: "Wie nahe sind wir an einer weiteren Umdrehung?"



Es werden drei Robustheitsmasse eingeführt: die Verstärkungsreserve γ , die Phasenreserve φ , und der kritische Abstand μ

γ : Verstärkungsreserve zu $(-1 + 0j)$ bei $\angle L(j\omega) = -180^\circ$

φ : Phasenabstand zu -180° bei der Durchtrittsfrequenz ω_c

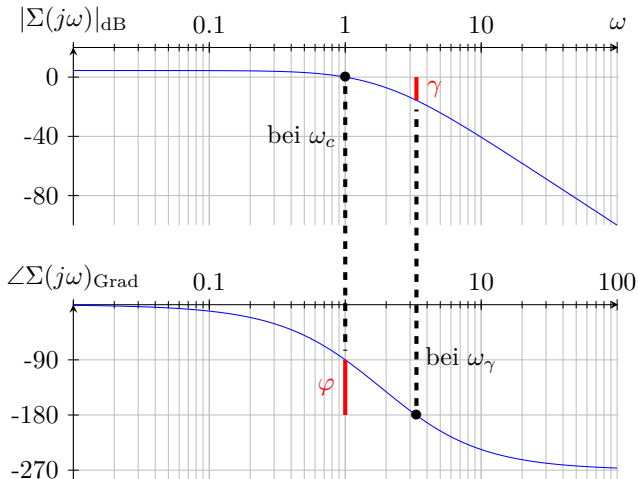
μ : kleinste Distanz zwischen $(-1 + 0j)$ und $L(j\omega)$
 $\mu = \min_{\omega} |1 + L(j\omega)| = \frac{1}{\max_{\omega} |S(j\omega)|}$

Beispiel Das nominelle System $L(s)$ hat Phasenfehler α oder Verstärkungsfehler k gegenüber dem wahren System:

$$L_{t,\alpha}(s) = e^{-\alpha \cdot s / \omega_c} \cdot L(s), \quad L_{t,k}(s) = k \cdot L(s)$$

$L_{t,\alpha}$ ist stabil für $\alpha < \varphi$ und $L_{t,k}$ für $k < \gamma$. Falls beide Fehler gleichzeitig vorhanden sind, sind γ und φ keine guten Robustheitsmasse, sie messen beide nur eindimensional.

Auslesen der Reserven bei Bode-Diagrammen



5 Robustes Nyquist Theorem

Annahme: ein wahres Modell der linearen und zeitinvarianten Regelstrecke $P_t(s)$ existiert, ist aber wegen Modellierungsunsicherheit nicht bekannt. Stattdessen wurde ein Nominalmodell der Regelstrecke $P(s)$ und eine zugehörige multiplikative Unsicherheitsübertragungsfunktion $W_2(s)$ gefunden. Der Regler $C(s)$ ist exakt bekannt. Die wahre Kreisverstärkung des Systems $L_t(s) = P_t(s) \cdot C(s)$ ist teil der Menge $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}} = \{P(s) \cdot C(s) \cdot (1 + \Delta \cdot W_2(s)) \mid |\Delta| \leq 1, \angle \Delta \in [-\pi, \pi]\} \quad (3)$$

Es wird angenommen, dass $L(s)$ und $L_t(s)$ dieselbe Anzahl instabile (n_+) und stabile (n_0) Pole haben.

Robustes Stabilitätskriterium von Nyquist:

Das robuste Stabilitätskriterium von Nyquist wird aus dem nominalen Nyquist-Stabilitätskriterium abgeleitet: Falls nämlich das nominale Nyquist-Stabilitätskriterium Gl. (2) für jedes $L_t(j\omega) \in \mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ in Gl. (3) erfüllt ist, dann ist der Regelkreis garantiert asymptotisch stabil.

Umsetzung des robusten Stabilitätskriteriums: Durch betrachten der Grössen Modellunsicherheit, d.h. mit $|\Delta| = 1$ und für alle möglichen Richtungen (Phasen) von Δ beschränken wir unsere Überlegung auf den schlimmstmöglichen Fall, d.h.

$$L_t(s) = L(s) + L(s) \cdot W_2(s) \quad (4)$$

Betrachte Abb. 2 und vergleiche mit Gl. (4). Um zusätzliche Umrundungen des Punktes $(-1 + 0j)$ garantiert zu verhindern, darf der Unsicherheitsradius $|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)|$ (in rot) nie grösser als $|1 + L(j\omega)|$ (in blau) werden. Daraus folgt das robuste Stabilitätskriterium nach Nyquist:

$$|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|, \quad \forall \omega \in [0, \infty)$$

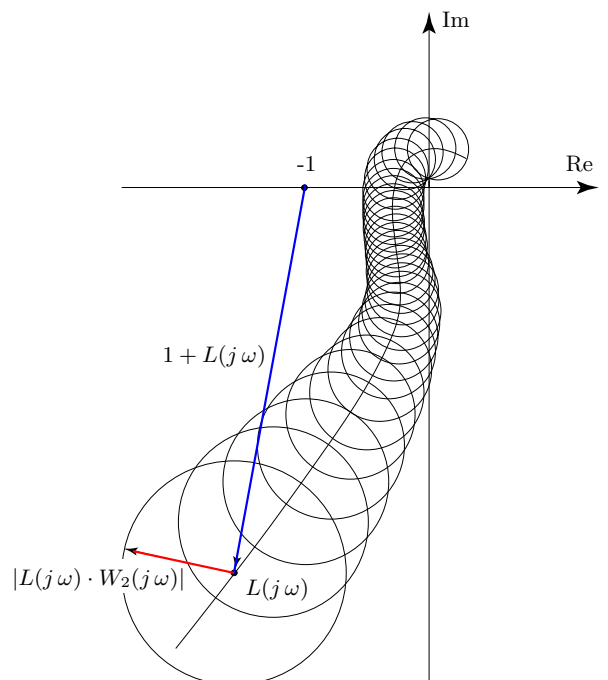


Abb. 2: Robustes Stabilitätskriterium nach Nyquist.

Recap

$$\Sigma(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^k (s^{n-k} + a_{n-1-k} s^{n-k-1} + \dots + a_0)}$$

Systemtyp k

- Anzahl Pde bei 0
- mit welcher Phase starten wir in Bodeplot:

$$\text{Phase} = \begin{cases} -k \cdot \pi/2 & (\frac{b_0}{a_0}) > 0 \\ -\pi - k \cdot \pi/2 & (\frac{b_0}{a_0}) < 0 \end{cases}$$

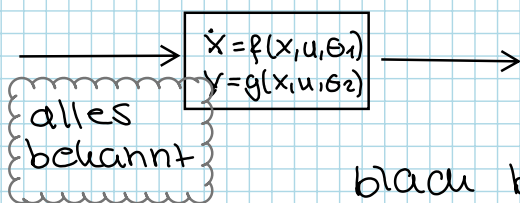
relativer Grad r

- $r = n - m$
- Welche Steigung des Betrags erwarten wir für $\omega \rightarrow \infty$

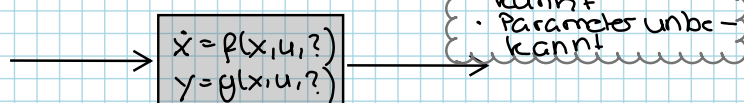
$$\frac{\partial |\Sigma(j\omega)|_{dB}}{\partial \log(\omega)} = -r \cdot 20 \text{ dB/dec}$$

Systemunterteilung.

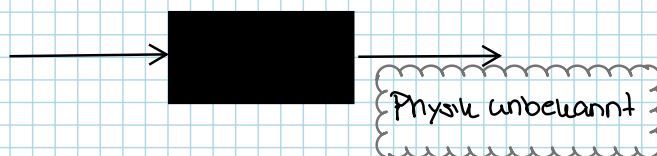
white box model.



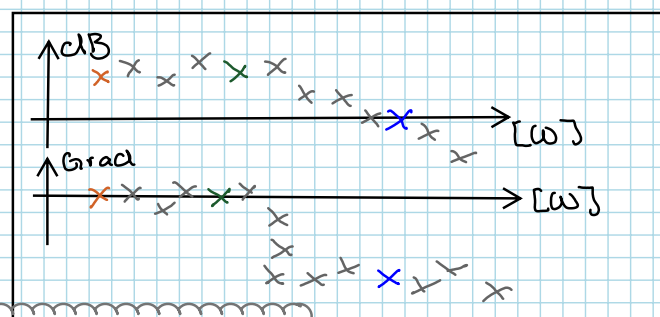
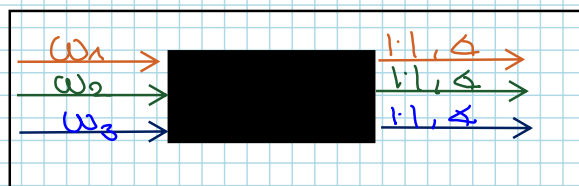
grey box model



black box model

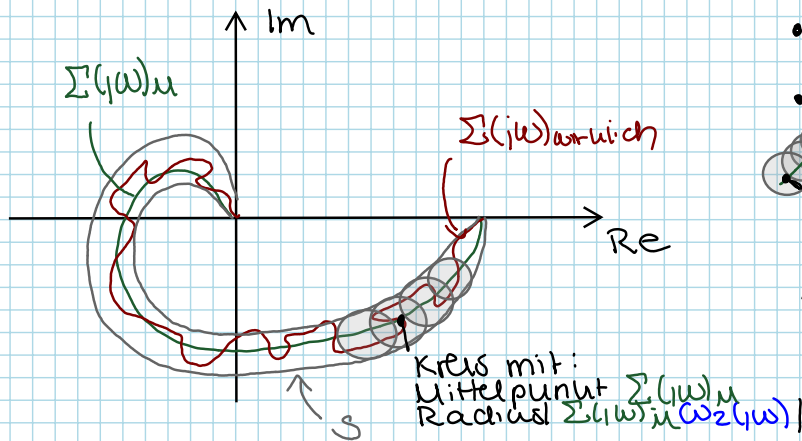


Systemidentifikation:



- aus Standard-elementen
- aus Regeln für Pole & Nullstellen

Systemunsicherheit $\omega_2(j\omega)$



- $\Sigma(j\omega)_{\text{wirklich}} \neq \Sigma(j\omega)_n$

- $\Sigma(j\omega)_{\text{wirklich}} \in S$

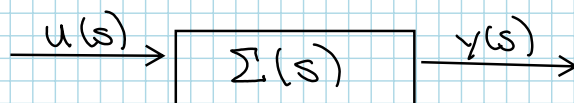
$$S = \{ \Sigma(j\omega)_n (1 + \Delta \omega_2(j\omega)) \mid |\Delta| \leq 1, \angle \Delta \in [-\pi, \pi] \}$$

- $\omega_2(j\omega)$ aus Messpunkten & $\Sigma(j\omega)_n$

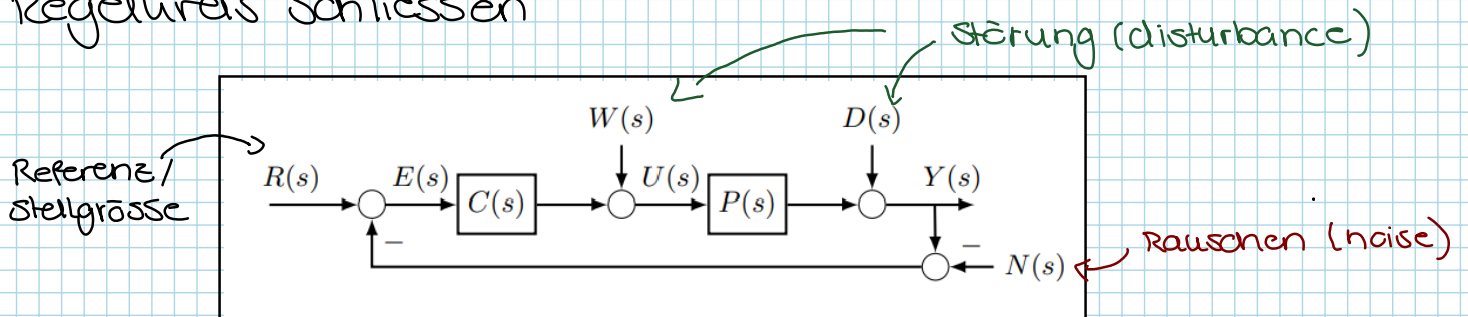
$$\left| \frac{\Sigma(j\omega, k)_{\text{meas}}}{\Sigma(j\omega)_n} - 1 \right| \leq \omega_2(j\omega)$$

RT 1 Übung 9

Bis jetzt haben wir Systeme ohne Regler & Feedback betrachtet:



Was müssen wir nun alles beachten, wenn wir den Regelkreis schliessen

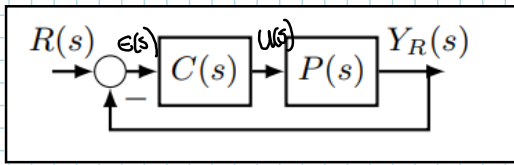


1. mehr Signale ($R(s)$, $E(s)$, $W(s)$, $U(s)$, $D(s)$...) → somit auch mehr Übertragungswege welche wir im Auge behalten müssen

2. Übertragungsweg nicht mehr einfach nur System, sondern unterschiedliche Zusammensetzung von $C(s)$ (Regler) & $P(s)$ (System).

Übertragungsfunktion von $R(s) \rightarrow Y_R(s)$

1. Alle anderen Signale = 0 setzen ($W(s), U(s), D(s)$)



2. Vom Endsignal aus "zusammensetzen":

$$Y_R(s) = P(s)U(s) \Rightarrow U(s) = C(s)E(s) \Rightarrow E(s) = R(s) - Y_R(s)$$

$$Y_R(s) = P(s)C(s)(R(s) - Y_R(s))$$

$$Y_R(s) = P(s)C(s)R(s) - P(s)C(s)Y_R(s)$$

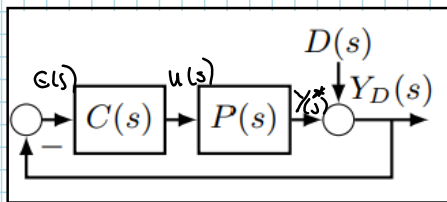
$$Y_R(s) + P(s)C(s)Y_R(s) = P(s)C(s)R(s)$$

$$(1 + P(s)C(s))Y_R(s) = P(s)C(s)R(s)$$

$$Y_R(s) = \underbrace{\frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}}_{T(s)} R(s)$$

Übertragungsfunktion $D(s) \rightarrow Y_D(s)$

1. Alle anderen Signale = 0 setzen.



2. Vom Endsignal aus "zusammensetzen":

$$Y_D(s) = D(s) + Y^*(s) \Rightarrow Y^*(s) = P(s)U(s) \Rightarrow U(s) = C(s)E(s)$$

$$\Rightarrow E(s) = -Y_D(s)$$

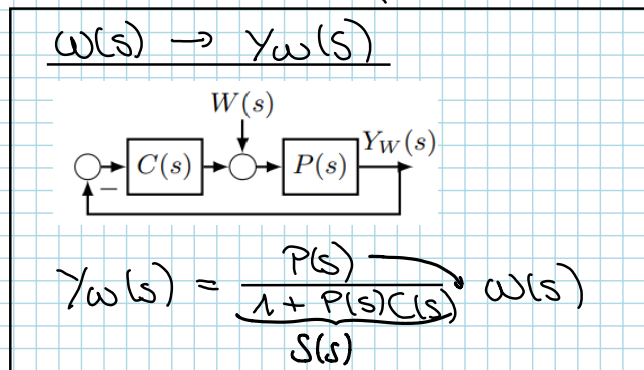
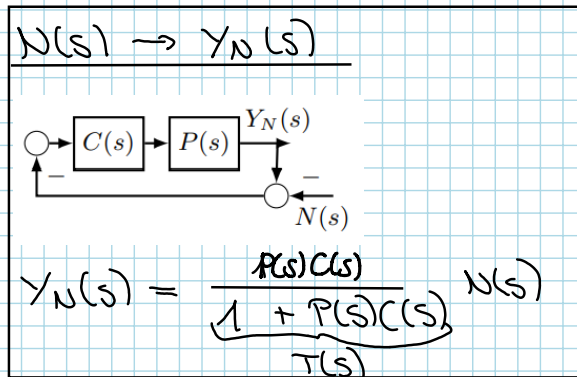
$$Y_D(s) = D(s) + P(s)C(s)(-Y_D(s))$$

$$Y_D(s) + P(s)C(s)Y_D(s) = D(s)$$

$$(1 + P(s)C(s))Y_D(s) = D(s)$$

$$Y_D(s) = \underbrace{\frac{1}{1 + P(s)C(s)}}_{S(s)} D(s)$$

Das könnten wir nun auch noch machen für:



wären also alle signale $\neq 0$:

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_R(s) + Y_W(s) + Y_N(s) + Y_D(s) \\ &= \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \cdot (R(s) + N(s)) + \frac{1}{1 + P(s)C(s)} (P(s)W(s) + D(s)) \end{aligned}$$

Gewisse Elemente wiederholen sich \rightarrow deshalb:

Neue Definitionen:

- Kreisverstärkung $L(s) = P(s)C(s)$
 - Komplementäre Sensitivität $T(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}$
 - Sensitivität $S(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)}$
- } Merkt euch: $T(s) + S(s) = 1$

Stabilität des geschlossenen Regelkreises

Wir haben: $\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ mehrere Signale} \\ \bullet \text{ unterschiedliche Übertragungsfunktionen dazwischen} \end{array} \right\}$ "alle Übertragungswege sollen stabil sein"

Wir betrachten: $W(s), D(s), R(s) \xrightarrow{U} E(s), Y(s), \cancel{W}(s)$

$$\begin{bmatrix} U(s) \\ Y(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(s) & -S(s) \cdot C(s) & S(s) \cdot C(s) \\ S(s) \cdot P(s) & S(s) & T(s) \\ -S(s) \cdot P(s) & -S(s) & S(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W(s) \\ D(s) \\ R(s) \end{bmatrix}$$

Wir sehen: sind $P(s)$ & $C(s)$ stabil, müssen wir nur noch Stabilität von $S(s)$ & $T(s)$ überprüfen \rightarrow diese haben aber selben Nenner.

⚠ Achtung: falls $P(s)$ instabil (hat Polstelle mit $\text{Re} > 0$)
 so ist Versuchung gross $C(s)$ so zu wählen,
 dass sich instabiler Pol kürzt.

↪ meist keine gute Idee

Beispiel:

Wir haben $P(s) = \frac{s+2}{s-5}$ $\pi_1 = 5 \Rightarrow$ instabil

Wir wählen $C(s) = \frac{s-5}{s+10}$

Wir erhalten $L(s) = C(s)P(s) = \frac{s+2}{s+10}$

$$S(s) = \frac{1}{1 + \frac{s+2}{s+10}} = \frac{s+10}{2s+12}$$

$$T(s) = \frac{\frac{s+2}{s+10}}{1 + \frac{s+2}{s+10}} = \frac{s+2}{2s+12}$$

✓ soweit alles kein Problem...

! Aber: i.e. $w(s) \rightarrow y(s)$

$$S(s)P(s) = \frac{(s+10)(s+2)}{(2s+12)(s-5)}$$

hat immer noch instabilen Pol.

\Rightarrow Kürzungen von instabilen Polen mit nichtminimalphasig Nullstellen immer kritisch im geschlossenen Regelkreis.

Was wir nun öfters machen werden.

Wir nutzen
 $L(s)$

machen
Aussagen über
 $S(s)$ & $T(s)$

Nyquist Theorem / Stabilitätskriterium

$$\frac{1}{1+L(s)}$$

$$\frac{L(s)}{1+L(s)}$$

Analyse asymptotische Stabilität von $T(s)$ anhand von $L(s)$, falls:

- keine Modellunsicherheit
- keine Kürzung von instabilen Polen mit Nullstellen in $L(s)$.

Vorgehen:

- ① Zeichnet Nyquist-plot für $L(s)$ von $\omega \in (-\infty, \infty)$.

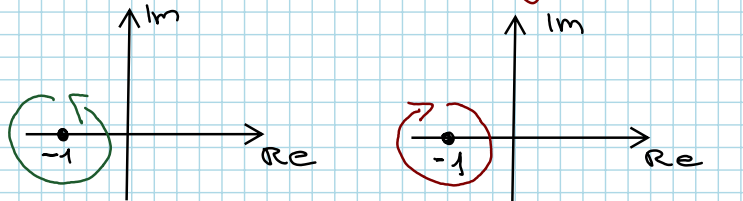
Also wie gewohnt von $\omega = 0$ bis $\omega = \infty$ & anschliessen Spiegelung an Re-Achse.

- ② Findet Anzahl Umdrehungen um Punkt $-1 + 0j$, wenn ihr dem Plotverlauf von $\omega = -\infty$ bis $\omega = \infty$ folgt

$\Rightarrow n_c$

positiver Umlauf

negativer Umlauf



- ③ Findet n_0 = Anzahl Pole von $L(s)$ mit $\text{Re} = 0$
 n_+ = Anzahl Pole von $L(s)$ mit $\text{Re} > 0$

$\Rightarrow T(s)$ asymptotisch stabil, falls gilt:
$$n_c = n_0/2 + n_+$$

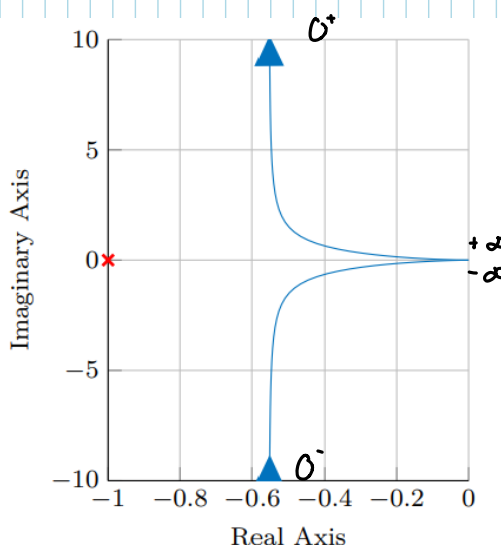
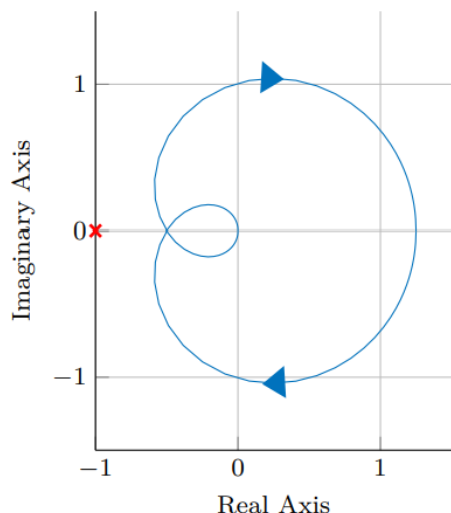
Beispiel:

$$L(s) = \frac{-2s+5}{(s+2)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} n_0 = 0 \\ n_+ = 0 \\ n_c = 0 \end{array} \right\} 0 = 0/2 + 0 \quad \checkmark$$

Tipp: Wie viele Umdrehungen um $-1 + 0j$ machen wir im Nyquistplot unten?

$$\underline{n_c = \frac{1}{2}}$$



Erfüllen wir das Nyquist Theorem so ist $T(s)$ asymptotisch stabil \Rightarrow eine zusätzliche Umdrehung um den Punkt $-1 + 0j$ würde zur Instabilität führen

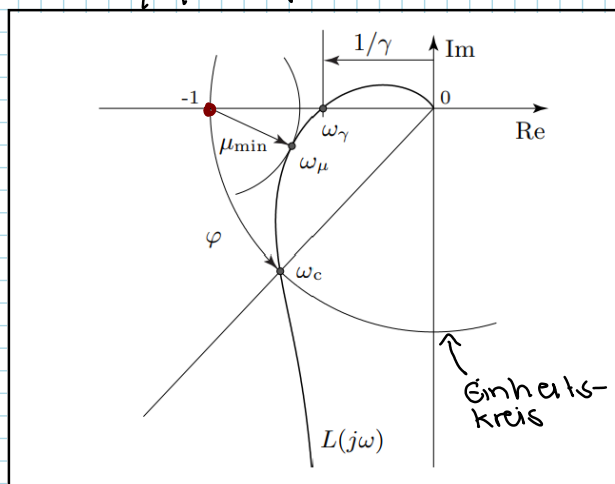
Robustheit kann beschrieben werden durch:

„Wie weit sind wir vom Punkt $-1 + 0j$ im Minimum entfernt“

$$-1 + 0j = 1 \angle e^{-\pi j}$$

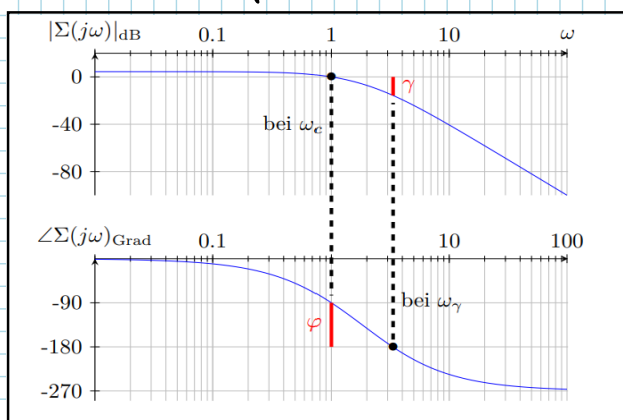
Verstärkungsreserve und Phasenreserve

Im Nyquistplot:



- γ : Mit was könnten ihr $|L(j\omega)|$ multiplizieren, sodass es durch $-1 + 0j$ geht
 $= 1/|L(j\omega_\gamma)|$ s.t. $\angle L(j\omega_\gamma) = -180^\circ$
- φ : Wie viel Phase könnten ihr verlieren, sodass $L(j\omega)$ durch $-1 + 0j$ geht
 $= \angle L(j\omega_c) + 180^\circ$ s.t. $|L(j\omega_c)| = 1$
 \Rightarrow erlaubt unsicherheit in Totzeit
 \triangle ω_c nennen wir Durchtrittsfrequenz

Im Bodeplot:



- μ_{\min} : Was ist der allgemein kleinste Abstand von $L(j\omega)$ zu $-1 + 0j$.
 $= \min_{\omega} |1 + L(j\omega)|$
 $= \frac{1}{\max_{\omega} |S(j\omega)|}$

⇒ Desto Robuster desto mehr kann $\Sigma(j\omega)_{\text{wirklich}}$ von $\Sigma(j\omega)_M$ abweichen

& das führt uns zu ...

Robustes Nyquist Theorem

Annahme: $L(s)_M$ erfüllt Nyquistkriterium &

$$L(s)_{\text{wirklich}} \in \mathcal{S}_L = \{ L(s)_M (1 + \Delta W_2(s)) \mid |\Delta| \leq 1, \Delta \in [-\pi, \pi] \}$$

Zusätzlich: $L(s)_M$ & $L(s)_{\text{wirklich}}$ haben selbe Anzahl Pole mit $\text{Re} < 0$ (n_+) & $\text{Re} = 0$ (n_0).

⇒ Dann müssen wir nur verhindern, dass $L(s)_{\text{wirklich}}$ eine zusätzliche Umdrehung um $-1 + 0j$ macht

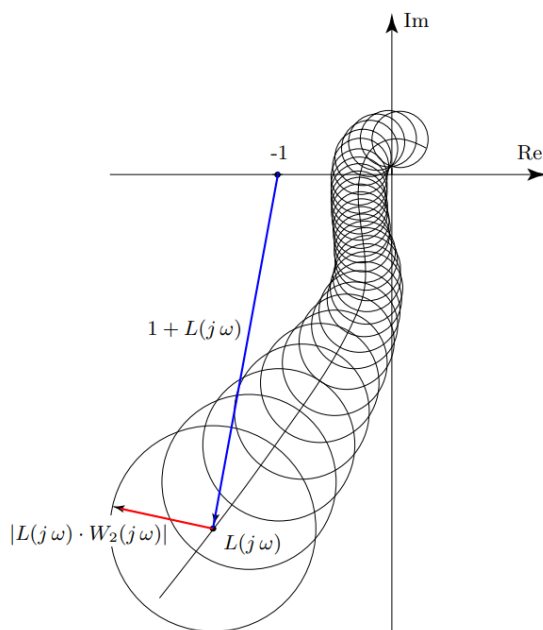


Abb. 2: Robustes Stabilitätskriterium nach Nyquist.

Erfüllt falls **roter Vektor** < **blauer Vektor**

$$|L(s)_M W_2(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad \forall \omega \in [0, \infty]$$