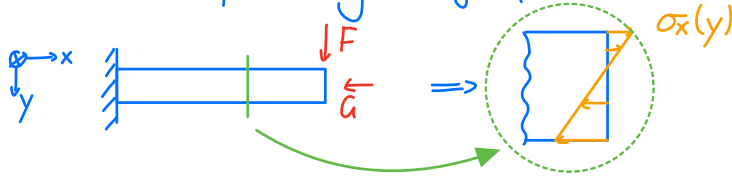


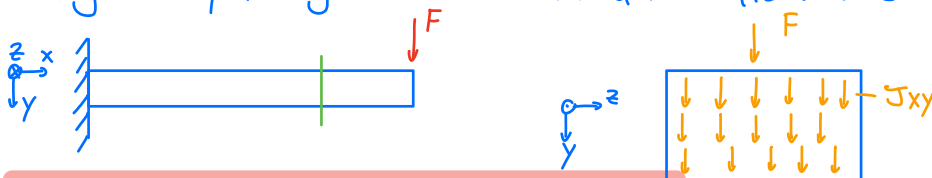
Schubspannungen im Querschnitt (Wir schauen nur M_z & Q_y Beanspruchungen an!)

Bis jetzt haben wir Momente und Normalkräfte angeschaut, welche zu Normalspannungen σ_x führen:



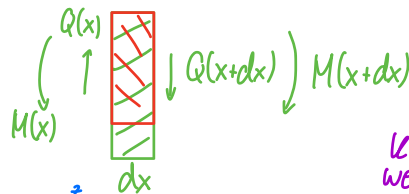
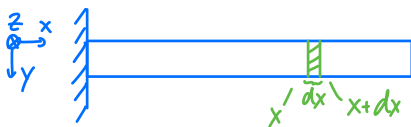
Doch wie sieht es mit Tangentialspannungen (τ_{ij}) aus?

Tangentialspannungen werden durch Querkräfte verursacht: (Vollquerschnitt)

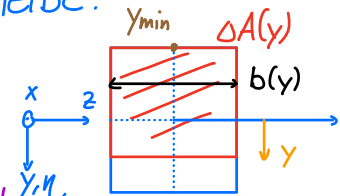


$$\tau_{xy}(y) = \left(\frac{Q_y}{I_z} \right) \cdot \frac{1}{b(y)} \cdot \underbrace{\int_{\Delta A} \eta \cdot dA}_{H_z(y)} = \left(\frac{Q_y}{I_z} \right) \cdot \frac{H_z(y)}{b(y)}$$

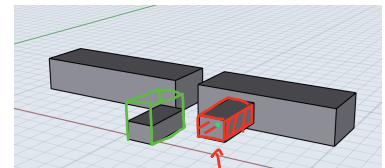
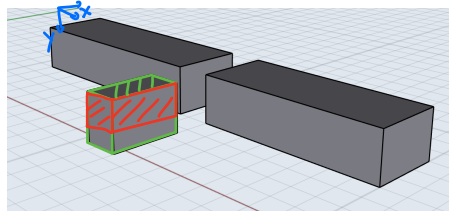
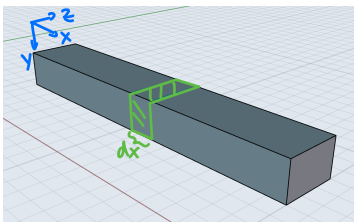
Woher kommt diese Formel? $\rightarrow$ Kräftegleichgewicht einer Scheibe!



KS
wechsel!



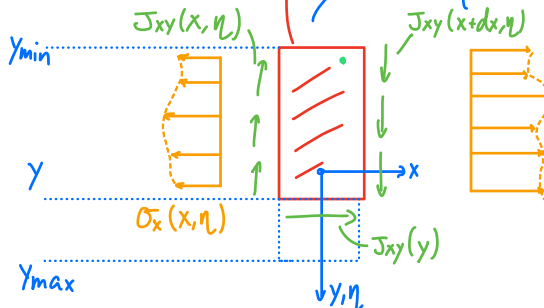
η : "eta" Hilfskoordinate



wir betrachten diesen Würfel

$$\Delta A(y) = \int_{y_{\min}}^y b(\eta) d\eta$$

ΔA Oberfläche: Spannungsfrei



$$\sigma_x(x+dx, \eta) = \underbrace{\sigma_x(x, \eta)}_{\text{Taylor-Entwicklung}} + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) dx$$

Kräftegleichgewicht: ,

$$\Sigma F_x = 0: - \int_{\Delta A} \cancel{\sigma_x(x)} dA + \int_{\Delta A} (\cancel{\sigma_x(x)} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dA + \tau_{xy} dx \cdot b(y) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\tau_{xy} = - \frac{1}{b(y)} \int_{\Delta A} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dA \quad \text{bekannt!}$$

nur Biegung um z-Achse

$$\sigma_x = - \frac{M_z}{I_z} \cdot \eta \rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = - \frac{dM_z}{dx} \cdot \frac{\eta}{I_z} \stackrel{\text{Mech I}}{=} Q_y \frac{\eta}{I_z}$$

$$\tau_{xy}(y) = - \frac{1}{b(y)} \int_{\Delta A} \frac{Q_y}{I_z} \eta \cdot dA = - \frac{1}{b(y)} \cdot \frac{Q_y}{I_z} \cdot \underbrace{\int_{\Delta A} \eta \cdot dA}_{H_z(y)} \quad , \quad H_z(y) = \underbrace{\int_{\Delta A(y)} \eta \cdot dA}_{\text{statisches Moment}}$$

$$\tau_{xy}(x, y) = - \frac{Q_y(x)}{I_z} \frac{H_z(y)}{b(y)}$$

DGL von Moment & Querkraft:

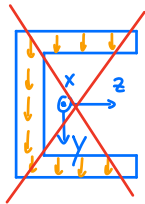
$$\frac{dM_x}{dx} = - Q_y$$

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z$$

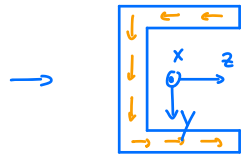
Schubspannungen → Dünnwandig

Wir haben jetzt die Schubspannung an einem Vollquerschnitt betrachtet.

Bei Dünnwandigen Querschnitten ist das nicht mehr so "simpel"!



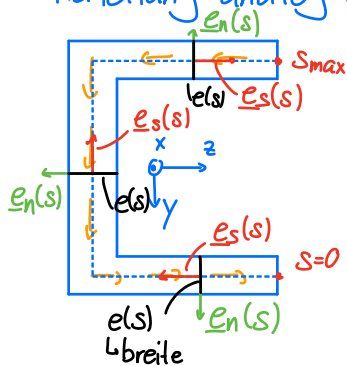
Falsch



gute Näherung

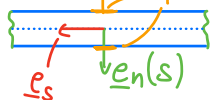
Wichtig ist, dass $\int \tau_{xy} \cdot dA = Q_y$
und $Q_z = 0$ ist! Kräfteggw.

Herleitung analog zum Vollquerschnitt:



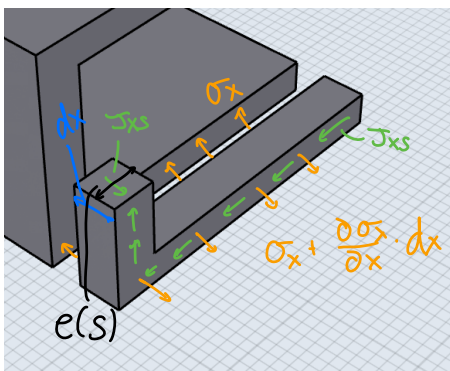
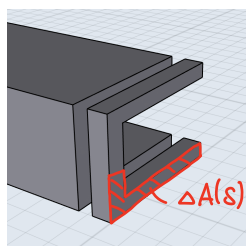
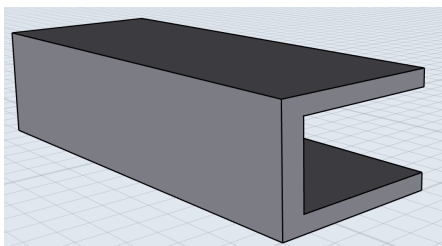
Annahme $\underline{T} \cdot \underline{e}_n(s) = 0$ ^{-e_n}
Spannungsfrei → $T \cdot (-\underline{e}_n) = 0$

Warum?



Da dünn auch im innern!!
 $d \ll 1$

$$\Rightarrow \underline{T} \cdot \underline{e}_n = \begin{pmatrix} \tau_{xn} \\ \tau_{sn} \\ \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tau_{xs} \text{ ist die einzige Schubkomponente}$$



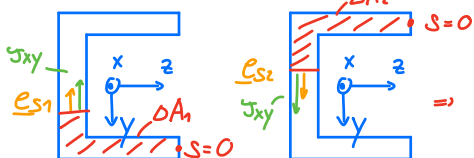
Kräfteggw.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \tau_{xs}(s) dx e(s) + \int_{\Delta A(s)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx dA = 0$$

$$\tau_{xs}(s) = - \frac{Q_y}{I_z} \frac{1}{e(s)} \underbrace{\int_{\Delta A(s)} y dA}_{H_z(s)}$$

$$\tau_{xs}(x, s) = - \frac{Q_y(x)}{I_z} \frac{1}{e(s)} H_z(s)$$

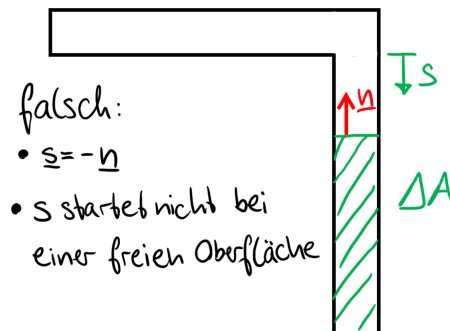
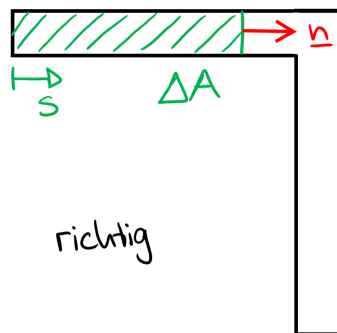
$$\Rightarrow H_z(s) = \int_{\Delta A(s)} y dA$$



$$H_{z,1} = -H_{z,2}$$

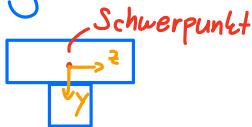
2.4 Vorgehen bei Aufgaben zur Schubspannung auf dem Querschnitt

1. Schwerpunkt bestimmen.
2. Teilflächen bestimmen.
3. Falls dünnwandiger Querschnitt: s einführen.
4. Für jede Teilfläche das statische Moment berechnen.
 - Bei Vollquerschnitte muss die Teilfläche von y nach y_{max} integriert werden.
 - Bei dünnwandigen Querschnitte
 - muss die Teilfläche in s -Richtung wachsen. Dies heisst, dass an der Flächengrenze die Variabel s auch der positive Normalenvektor der Teilfläche sein muss.
 - muss die Laufvariabel s von einer freien Oberfläche (wo $\tau_{xs} = 0$) aus starten.



5. Schubspannungen berechnen.

Wichtig: Globales Koordinatensystem immer im Schwerpunkt !!!



Beispiel:

1) Was ist $\gamma_s(y)$?

2) Was ist $\Delta A(y)$?

3) Was ist $H_z(y)$?

