Spur einer Matrix zur Überprüfung der Hauptspannungen

March 23, 2022

1 Spur einer Matrix

Die Spur einer Matrix M ist definiert als:

$$spur(M) = \sum_{i}^{N} m_{i,i} = m_{1,1} + m_{2,2} + \ldots + m_{N,N}$$

Für uns im 3D Raum wird die Spur folgendermassen berechnet:

$$spur \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = m_{11} + m_{22} + m_{33}$$

Aus der Linearen Algebra weiss man, dass die Spur die Summe aller Eigenwerte mir den dazugehörigen Vielfachheiten ist. In Mechanik II ist diese Eigenschaft sehr nützlich, da man überprüfen kann ob die Hauptspannungen korrekt berechnet wurden.
Die Spur einer Spannungs-/Dehungsmatrix muss gleich der Summer der Hauptspannungen bzw. Hauptdehnungen sein.

$$spur \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

Wobei σ_i die Hauptspannungen sind.

1.1 Beispiel

Die Schnellübung 1 der Serie 3. Der Spannungstensor war wiefolgt gegeben:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4k \\ 0 & -3k & 0 \\ -4k & 0 & 2k \end{pmatrix}$$

Die Spur des Spannungstensor ist folglich:

$$spur(T) = 0 + (-3k) + 2k = -1k$$

Aus den Berechnungen resultieren folgende Hauptspannungen:

$$\sigma_1 = -3k, \qquad \sigma_2 = -3,12k, \qquad \sigma_3 = 5,12k$$

Die Summe der Hauptspannungen ist folglich:

$$S = -3k - 3,12k + 5,12k = -1k$$

Wie man sieht stimmt die Spur mit der Summe der Hauptspannungen überein. Diese Schnelle und einfache Rechnung kann man immer durchführen um das Resultat zu verifizieren.