

Regelungstechnik I Konzepte

Jorit Geurts, jgeurts@student.ethz.ch

29. September 2021

Diese Zusammenfassung soll nur einen groben Überblick geben. Es sind nicht alle Themen genau beschrieben und einige kleine gar nicht vorhanden. Es soll mehr als Intuitionsverstärkung dienen. Weiter sind auch keine wirklichen Kochrezepte vorhanden, diese werden in der Übung besprochen.

Ich kann nicht für die Richtigkeit dieser Zusammenfassung garantieren, also das Dokument mit Vorsicht lesen.

Falls ein Fehler gefunden wird, freue ich mich um eine Rückmeldung an jgeurts@student.ethz.ch.

Gleichungen mit einer Box, sind besonders wichtig bzw. werden häufiger verwendet.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Definitionen	1
1.1	Systemdefinition	1
1.1.1	Lineare und Nicht Lineare Systeme	1
1.1.2	Weitere Klassifikationen	2
1.1.3	Systemmodelle	2
1.1.4	Kontroll Systeme	3
2	System Modellierung	4
3	Systemdarstellung	5
3.1	Zustandsgleichung erster Ordnung	5
3.2	System Normalisieren	5
3.3	System Linearisieren	6
3.4	Zustandsraumdarstellung	7
4	Systemanalyse I	9
4.1	Lösung der Differentialgleichung	9
4.1.1	Berechnung der Lösung	9
4.2	Lösung eines System erster Ordnung	10
4.2.1	Impuls Antwort	10
4.2.2	Sprung Antwort	10
4.2.3	Rampen Antwort	11
4.2.4	Harmonische Antwort	11
4.3	Stabilität	12
4.3.1	Laypunov Stabilität	12
4.3.2	Berechnung der Lyapunov Stabilität	12
5	System Analyse II	14
5.1	Erreichbarkeit	14
5.2	Beobachtbarkeit	14
5.3	Stabilisierbarkeit und Detektierbarkeit	15
5.3.1	Stabilisierbarkeit	15
5.3.2	Detektierbarkeit	15
5.3.3	Anwendung auf das nicht lineare System	15
5.4	Zustandsraum Zerlegung	15
5.5	Input-Output (I/O) Beschreibung	17
5.5.1	I/O Beschreibung → Zustandsraumdarstellung	17
6	Laplace Transformation	18
6.1	Transferfunktion	18
6.1.1	Eigenschaften der Transferfunktion	19
6.1.2	Pole und Nullstellen der Transfer Function	19
6.2	Lösung der Transferfunktion	19
6.3	Static Gain	20
6.4	BIBO Stabilität	21
6.4.1	BIBO und Lyapunov im Vergleich	21
6.5	Einfluss von Polen und Nullstellen	22
6.5.1	Pole	23
6.5.2	Nullstellen	24
6.5.3	Nichtminimalphasige Nullstellen	24

7	Frequenzantwort	25
7.1	Harmonische Antwort	25
7.2	Graphische Darstellung der Frequenzantwort	26
7.2.1	Nyquist-Diagramm	26
7.3	Bode-Diagramm	27
7.3.1	Regeln um Zeichnen vom Bode-Diagramm	27
7.3.2	Bodes Law	28
7.4	Asymptotische Systemeigenschaften	28
7.4.1	Systemtyp k	28
7.4.2	Relativer Grad	29
7.5	Systemidentifikation Mithilfe der Frequenzantwort	29
7.6	Modell Unsicherheit	30
7.6.1	Bestimmung der Unsicherheit durch die gemessenen Daten:	30
8	Analyse von Feedback Systemen	32
8.1	Stabilität eines Closed Loop System	33
8.2	Nyquist Theorem	33
8.2.1	Robustheit eines System	34
8.2.2	Robustes Nyquist Theorem	34
8.3	Einschränkungen vom Closed Loop System	35
8.3.1	Disturbance und Noise Einschränkung	35
8.4	Einschränkungen an die Crossover Frequenz	35
8.4.1	Einschränkungen durch die Modellunsicherheit	36
8.4.2	Einschränkungen durch nichtminimalphasige Nullstellen	36
8.4.3	Einschränkungen durch instabile Pole	37
8.4.4	Einschränkungen zusammengefasst	37
9	Spezifikationen für das Feedback System	38
9.1	Nachlauffehler	38
9.2	Spezifikationen basierend auf ein System zweiter Ordnung	39
9.3	Frequenz Domain Spezifikationen	39
10	Feedback Control Design	41
10.1	PID Controller	41
10.2	PID Tuning	42
10.2.1	Ziegler Nichols	43
10.2.2	Loop Shaping by Parameter Tunig	43
10.3	Iterative Loop Shaping	44
10.3.1	First-Order Lead/Lag Element	44
10.3.2	Second-Order Lead/Lag Element	44
10.4	Plant-Iversion Methode	45
11	Appendix	46
11.1	Lineare Algebra:	46
11.2	Herleitungen	47
11.2.1	Beobachtbarkeit	47
11.2.2	Static Gain	47
11.2.3	Harmonische Antwort höherer Ordnung	48

1 Einführung und Definitionen

In Regelungstechnik I werden die grundsätzlichen Ideen und Methoden eingeführt um ein System zu entwerfen, welches eine bestimmte Grösse reguliert. Das beste Beispiel eines solchen Systems ist der Tempomat im Auto.

1.1 Systemdefinition

Als erstes soll ein System einfach als ein Operator betrachtet werden, welcher aus einem Input($u(t)$) einen gewissen Output($y(t)$) generiert. Dieser Operator soll im Moment noch nicht weiter Verstanden werden. Dabei unterscheidet man von Statischen und Dynamischen Systemen.

1. **Statische Systeme** hängen nur von $u(t)$ ab (z.B. dieses rein lineare System):

$$y(t) = 2 \cdot u(t) \quad (1)$$

2. **Dynamische Systeme** hängen auch von den "versteckten" Variablen $\mathbf{x}(t)$ ab. Solche dynamischen Systeme haben ein "Gedächtnis":

$$\begin{aligned} y(t) &= 2 \cdot x(t) + 3 \cdot u(t) \\ \dot{x}(t) &= -x(t) + u(t) \end{aligned} \quad (2)$$

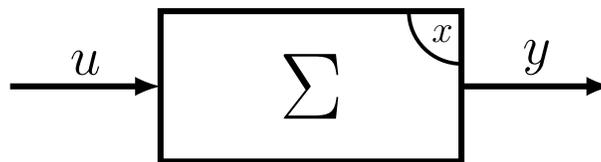


Abbildung 1: Darstellung eines System

In Regelungstechnik I werden nur SISO Systeme betrachtet. Dies bedeutet, dass die Systeme nur aus einem **Single Input** und einem **Single Output** bestehen. In Regelungstechnik II werden dann auch MIMO Systeme angeschaut (Multiple Input Multiple Output).

1.1.1 Lineare und Nicht Lineare Systeme

Wie erwähnt transformiert das System Σ einen Input $u(t)$ in einen Output $y(t)$, folglich können wir schreiben:

$$y = \Sigma(u) \quad (3)$$

Aus der Linearen Algebra kennt man die Definition einer Linearen Operation. Ein System ist linear wenn gilt:

$$\Sigma(\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2) = \alpha \cdot \Sigma(u_1) + \beta \cdot \Sigma(u_2) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Mit Linearen Systemen kann man einfacher rechnen (auch numerisch), deshalb wird in Regelungstechnik I auch nur mit linearen Systemen gearbeitet. Falls man ein nicht lineares System hat, welches z.B. folgende Form besitzt

$$y(t) = \sin u(t) \quad (5)$$

kann man das System um einen beliebigen Punkt Linearisieren:

$$\Sigma(u_0 + \delta u) = \Sigma(u_0) + \Lambda_{u_0}(\delta u) \quad (6)$$

Wobei Λ_{u_0} ein linearer Operator ist, welchen wir später definieren.

1.1.2 Weitere Klassifikationen

<p>Linear</p> <p>Eine Änderung des Ausgang ist proportional zur Änderung des Eingangs.</p> $\Sigma(\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2) = \alpha \cdot \Sigma(u_1) + \beta \cdot \Sigma(u_2)$ $y(t) = \alpha \cdot u(t), \quad y(t) = \frac{d}{dt}u(t), \quad y(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$	<p>Nichtlinear</p> <p>Eine Änderung des Ausgang ist nicht direkt proportional zur Änderung des Eingangs.</p> $\Sigma(\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2) \neq \alpha \cdot \Sigma(u_1) + \beta \cdot \Sigma(u_2)$ $y(t) = \alpha \cdot u(t) + \beta, \quad y(t) = \sin u(t), \quad y(t) = \sqrt{u(t)}$
<p>Kausal</p> <p>Der Ausgang hängt nicht von Eingängen in der Zukunft ab. Physikalische Systeme sind kausal.</p> $y(t) = u(t - \tau) \forall \tau \geq 0, \quad y(t) = \int_{-\infty}^0 u(\tau)d\tau$	<p>Akausal</p> <p>Der Ausgang hängt von Eingängen in der Zukunft ab. "Man muss in die Zukunft schauen"</p> $y(t) = u(t + 5), \quad \int_{-\infty}^{t+1} u(\tau)d\tau$
<p>Statisch</p> <p>Der Ausgang bei statischen Systemen zur Zeit t^* hängt nur vom Eingang zur Zeit t^* ab.</p> $y(t) = 3 \cdot u(t), \quad y(t) = \sqrt{u(t)}$	<p>Dynamisch</p> <p>Der Ausgang von dynamischen Systemen, hängt von verschiedenen Zeitpunkten ab.</p> $y(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau, \quad y(t) = u(t - \tau) \quad \forall \tau \neq 0$
<p>Zeitinvariant</p> <p>Der Ausgang von gleichen Anfangszuständen und Eingangssignale zu unterschiedlichen Zeitpunkten ist gleich. Sprich der Ausgang ist nicht direkt proportional zur Zeit.</p> $y(t) = \frac{d}{dt}u(t), \quad y(t) = 3 \cdot u(t)$	<p>Zeitvariant</p> <p>Der Ausgang von gleichen Anfangszuständen und Eingangssignale zu unterschiedlichen Zeitpunkten ist nicht gleich. Sprich der Ausgang ist direkt proportional zur Zeit.</p> $y(t) = \sin(t) \cdot u(t), \quad y(t) = u(t) + t$

1.1.3 Systemmodelle

Realen Systeme kann man nie ganz korrekt darstellen, man kann sie nur als Modelle approximieren. Die Modelle mit welchen man in Regelungstechnik rechnet sind ODEs (Ordinary Differential Equations) und sogenannte Transfer Functions welche man erhält durch die Laplace Transformation von ODEs. Mit diesen Transfer Functions, kann man einfach *algebraisch* mit den Systemen rechnen. (Vgl. Analysis III).

Wenn man System von ODEs in die Transfer Function übertragen hat, ODE $\rightarrow \Sigma$, kann man algebraische Verknüpfungen zwischen mehreren Systemen berechnen. Wie man auf die Transfer Function kommt ist jetzt noch nicht wichtig.

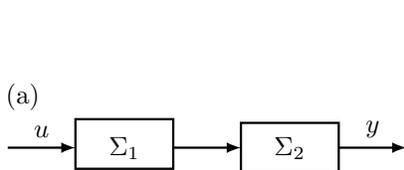


Abbildung 2: Serieschaltung

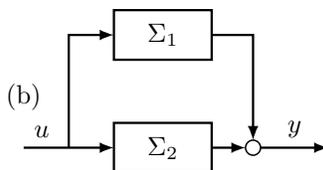


Abbildung 3: Parallelschaltung

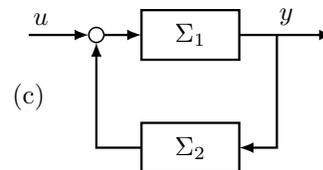


Abbildung 4: Kreisschaltung

(a) **Serie Schaltung:** $\Sigma = \Sigma_2 \cdot \Sigma_1$

(b) **Parallel Schaltung:** $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$

(c) **Kreisschaltung Schaltung:** $\Sigma = \frac{\Sigma_1}{1 - \Sigma_2 \cdot \Sigma_1}$

1.1.4 Kontroll Systeme

Kombinationen obiger Systemschaltungen ergeben zwei grundlegende Systemtypen in der Regelungstechnik. Das einfache aber limitierte Feedforward System, welches ohne Feedback des Ausgangs eine sogenannte **Vorsteuerung** repräsentiert.

Davon unterscheidet man das gut steuerbare Feedback System, welches auf den Ausgang eingeht und **Regelung** betreibt. Letzteres kann jedoch auch instabil werden. Wenn Σ_1 und Σ_2 ungünstig gewählt werden erfolgt eine Division durch Null (siehe Gleichung (c)).

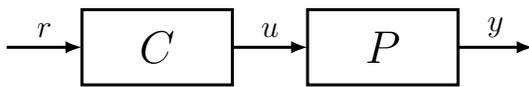


Abbildung 5: Feedforward System

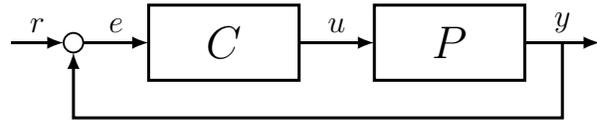


Abbildung 6: Feedback System

Wenn man das reale Systeme in ein Modell bzw. eine Transfer Function vereinfacht hat, kann man ausgeweitete Regelsysteme aufstellen. Auf das Erstellen dieser Transfer Functions und das Deuten der Regelsysteme wird in späteren Kapitel eingegangen.

Wichtig ist zu wissen, dass die Hauptaufgaben von Regelsystemen das Verfolgen von Referenzen (reference tracking), das Unterdrücken von Störungen (disturbance rejection) und das Stabilisieren vom System sind. Man rechnet meist mit Standard Control Systems, welche die wichtigsten Störungen und Eigenschaften von Regelsystemen beinhalten.

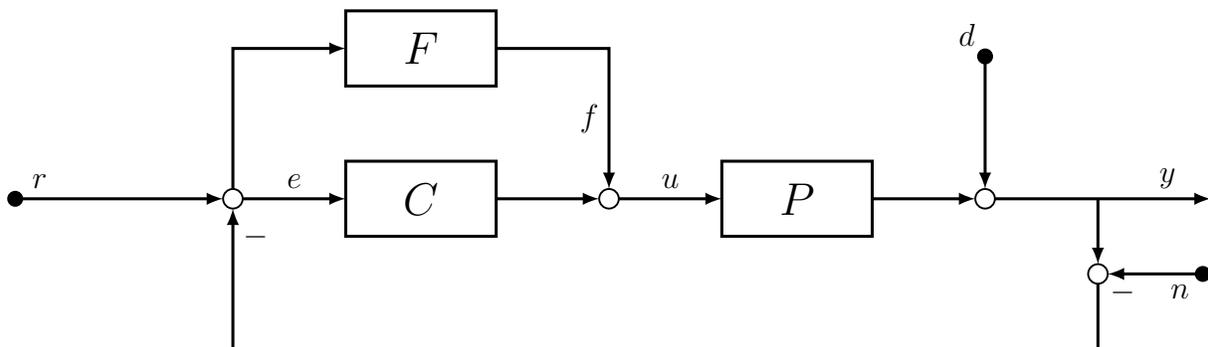


Abbildung 7: Standard Control System

- r = Sollwert
- e = error, der Fehler bzw. die Abweichung vom Ausgang zum Sollwert
- C = Controller, dieser gibt das Kontrollsignal aus
- F = Feedforward, vorsteuerung
- f = Vorsteuerungssignal
- u = Kontrollsignal, mit dem Feedforward Signal(f)
- P = Plant, das System welches Geregelt werden soll
- d = disturbance, tiefe Frequenz, Äussere Störungen
- n = noise, hohe Frequenz, z.B. Messrauschen

2 System Modellierung

Unter der System Modellierung versteht man das Aufstellen der Differential Gleichung, welche das zu regelnde System beschreibt¹. Ein allgemeines Vorgehen sieht wie folgt aus:

1. Systemgrenzen mit Inputs und Outputs identifizieren
2. Die System relevanten Reservoirs (z.B. ein Wassertank oder eine Feder die Energie speichert) und die dazugehörigen Variablen bestimmen.
3. Die DGL aufstellen in folgender Form:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\text{reservoir contents}) = \sum \text{inflows} - \sum \text{outflows}} \quad (7)$$

4. Formulieren von algebraischen Beziehungen zwischen den Zu- und Abflüssen (φ_{in} , φ_{out}) und den Zustandsvariablen ($\vec{x}(t)$). Die Zu- und Abflüsse sowie der Speicherinhalt (σ) sollen als Funktionen der Zustandsvariablen ausgedrückt werden.

$$\varphi_{in} = f(\vec{x}(t)), \quad \varphi_{out} = g(\vec{x}(t)), \quad \sigma = h(\vec{x}(t)) \quad (8)$$

$\vec{x}(t)$ soll zeigen, dass es mehr als eine Zustandsvariable gibt.

5. Identifizieren von Systemparameter durch Experimente oder Designspezifikationen. (z.B. Federkonstante einer Feder)
6. Validieren vom Modell durch Experimente

Häufig werden auch die folgenden Gesetze verwendet.

Impulserhaltung: $\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \sum_i F_i$	Drehimpulserhaltung: $\frac{d}{dt}(I_B\dot{\theta}) = \sum_i T_i$
---	--

Für Beispiele siehe im Buch ab Seite 19.

Die Unterteilung der Systemparameter erfolgt folgendermaßen:

- (a) algebraisch: Sehr schnell, annäherungsweise instantane Veränderung
- (b) dynamisch: System relevante Dynamik
- (c) statisch: Zu Langsam, nicht relevant

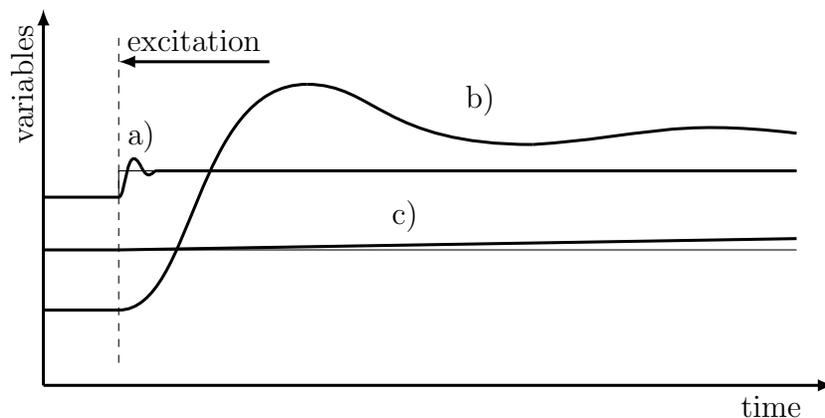


Abbildung 8: Relevante Dynamiken

¹Für die Modellierung werden einige physikalische Grundkenntnisse vorausgesetzt, die Ihr aktuell noch nicht habt. Es ist nur wichtig, dass Ihr das Vorgehen versteht. Eine DGL aufstellen müsst ihr aktuell noch nicht gut können.

3 Systemdarstellung

3.1 Zustandsgleichung erster Ordnung

Als Resultat der System Modellierung erhalten wir im Allgemeinen ein System von *nicht linearen* und *nicht normierten* Differentialgleichungen. Das System der Differentialgleichungen nennt man **Zustandsgleichung**.

$$\frac{d^m}{dt^m} z(t) = f(z(t)^{m-1}, \dots, z(t)'', z(t)', z(t), v(t)) \quad w(t) = g(z(t), v(t)) \quad (9)$$

$z(t) \in \mathbb{R}^n$ sind die Zustände, $v(t) \in \mathbb{R}$ ist der Input und $w(t) \in \mathbb{R}$ ist der Output des System.¹

Die Funktionen f und g haben folgende Form.

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (10)$$

Wir wollen der Einfachheit geschuldet mit Zustandsgleichungen erster Ordnung arbeiten (nur erste Ableitungen). Dies erreicht man durch eine geschickte Koordinaten Transformation.² Die resultierende Differentialgleichung sieht dann folgendermaßen aus.

$$\frac{d}{dt} z(t) = f(z(t), v(t)) \quad w(t) = g(z(t), v(t)) \quad (11)$$

3.2 System Normalisieren

Das System der Differentialgleichungen ist *nicht normalisiert*, folglich sind die Funktionswerte und Konstanten beliebiger Grössenordnung. Dies kann vor allem beim numerischen Lösen zu Problemen führen (Informatik I). Weiter haben die Zustände z_i beliebige Einheiten. Durch die Normierung werden alle Zustände einheitslos gemacht und in die gleiche Größenordnung $|z_i| \approx 1$ gebracht.

Zur Normalisierung wird *die Annahme* getroffen, dass ein System um einen konstanten Nominalwert³ schwingt. Folglich existiert für jeden Zustand z_i eine physikalisch sinnvoller Nominalwert⁴ $z_{i,0} \neq 0$. Mit diesem Nominalzustand ist auch ein Nominalinput $v_0 \neq 0$ und Nominaloutput $w_0 \neq 0$ assoziiert.

Die Normalisierung erfolgt durch die neue Definition der Zustände, dem Input und Output.

$$\boxed{z_i(t) = z_{i,0} \cdot x_i(t), \quad v(t) = v_0(t) \cdot u(t), \quad w(t) = w_0 \cdot y(t)} \quad (12)$$

Die Normalisierung kann als Matrixnotation geschrieben werden.

$$\boxed{z = T \cdot x, \quad T = \text{diag}(z_{1,0}, \dots, z_{n,0}), \quad z_{i,0} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \quad (13)$$

Die Differentialgleichung kann anschließend umgeschrieben werden.

$$\frac{d}{dt} z(t) = T \cdot \frac{d}{dt} x(t) = f(T \cdot x(t), v_0 \cdot u(t)) \quad w(t) = w_0 \cdot y(t) = g(T \cdot x(t), v_0 \cdot u(t)) \quad (14)$$

Durch Normierung erhält man folglich

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= T^{-1} \cdot f(T \cdot x(t), v_0 \cdot u(t)) = f_0(x(t), u(t)) \\ y(t) &= \frac{1}{w_0} g(T \cdot x(t), v_0 \cdot u(t)) = g_0(x(t), u(t)) \end{aligned}} \quad (15)$$

¹ $v(t)$ und $w(t)$ sind für SISO Systeme reelle Skalare. Für MIMO Systeme können diese auch Vektoren sein.

²Ein genaues Vorgehen wurde in der Linearen Algebra II besprochen und ein kurze Erklärung findet man im Theory Sheet 2.

³Der Nominalwert kann ein Gleichgewichtspunkt sein oder eine beliebig sinnvoll gewählter Betriebspunkt.

⁴z.B. Ein Wassertank der um die Füllhöhe h_0 schwingen soll.

Beispiel (Dieses System ist unsinnig, dient lediglich zur Veranschaulichung der Normalisierung):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ a \cdot z_1^2 + b \cdot z_2 \cdot v - c \end{pmatrix} \quad (16)$$

Durch das Einsetzen der normierten Variablen erhält man:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \cdot z_{1,0} \\ x_2 \cdot z_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{2,0} \cdot x_2 \\ a \cdot z_{1,0}^2 \cdot x_1^2 + b \cdot z_{2,0} \cdot x_2 \cdot v_0 \cdot u - c \end{pmatrix} \quad (17)$$

Auflösen nach $x(t)$ ergibt:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z_{2,0}}{z_{1,0}} \cdot x_2 \\ \frac{a \cdot z_{1,0}^2}{z_{2,0}} \cdot x_1^2 + b \cdot v_0 \cdot x_2 \cdot u - \frac{c}{z_{2,0}} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Für der Output ergibt sich analog:

$$w(t) = z_1(t) \rightarrow y \cdot w_0 = z_{1,0} \cdot x_1 \rightarrow y(t) = \frac{z_{1,0}}{w_0} \cdot x_1 \quad (19)$$

3.3 System Linearisieren

Allgemeine Systeme sind *nicht linear*, wie es auch im Beispiel der Fall ist (x_1^2). Mit nicht linearen Systemen lässt sich sehr schlecht rechnen, weshalb wir das System um einen Gleichgewichtspunkt linearisieren.

Durch die Linearisierung gehen zwar Informationen verloren, wir können aber um den Gleichgewichtspunkt immer noch relativ genau Berechnungen durchführen.

Der Gleichgewichtspunkt ist wie folgt definiert.

$$\frac{d}{dt} x(t) = f_0(x_e, u_e) = 0 \quad (20)$$

Aus dieser Voraussetzung erhält man die Gleichgewichtsbedingung (das Subskript „e“ steht für „equilibrium“).

$$\begin{cases} f_0(x_e, v_e) = 0 \\ g_0(x_e, u_e) = y_e \end{cases} \quad (21)$$

Wir betrachten anschließend nur noch Zustände, Inputs und Outputs um das Gleichgewicht.

Zustand(t) = Gleichgewichtspunkt + kleine Abweichung(t)

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_{i,e} + \delta x_i(t) && \text{wobei} && |\delta x_i(t)| \ll |x_{i,e}| \approx 1 \\ u(t) &= u_e + \delta u(t) && \text{wobei} && |\delta u(t)| \ll |u_e| \approx 1 \\ y(t) &= y_e + \delta y(t) && \text{wobei} && |\delta y(t)| \ll |y_e| \approx 1 \end{aligned} \quad (22)$$

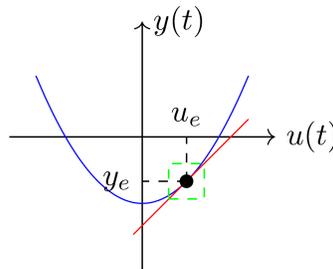


Abbildung 9: Graphische Interpretation der Linearisierung.
Nichtlineares System blau. Linearisiertes System rot.

Folglich erhalten wir.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\delta x(t) &= f_0(x_{i,e} + \delta x_i(t), u_e + \delta u(t)) \\ y_e + \delta y(t) &= g_0(x_{i,e} + \delta x_i(t), u_e + \delta u(t))\end{aligned}\quad (23)$$

Wobei wir folgende Ableitung verwenden.

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(x_e + \delta x(t)) = \frac{d}{dt}\delta x(t)\quad (24)$$

Wir können nun Gleichung (23) mit Hilfe einer Taylorentwicklung um den Gleichgewichtspunkt linearisieren⁵.

$$\begin{aligned}f_0(x_{i,e} + \delta x_i(t), u_e + \delta u(t)) &= \underbrace{f_0(x_e, u_e)}_{=0} + \left. \frac{\partial f_0}{\partial x} \right|_{x=x_e, u=u_e} \cdot \delta x(t) + \left. \frac{\partial f_0}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=u_e} \cdot \delta u(t) + \mathcal{O}(2) \\ g_0(x_{i,e} + \delta x_i(t), u_e + \delta u(t)) &= \underbrace{g_0(x_e, u_e)}_{=y_e} + \left. \frac{\partial g_0}{\partial x} \right|_{x=x_e, u=u_e} \cdot \delta x(t) + \left. \frac{\partial g_0}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=u_e} \cdot \delta u(t) + \mathcal{O}(2)\end{aligned}\quad (25)$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung erhalten wir.⁶

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\delta x(t) &= A \cdot \delta x(t) + b \cdot \delta u(t) \\ \delta y &= c \cdot \delta x(t) + d \cdot \delta u(t)\end{aligned}\quad (26)$$

Mit den Folgenden Matrizen A, b, c, d.

$$A = \left. \frac{\partial f_0}{\partial x} \right|_{x=x_e, u=u_e} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_1} \right|_{x=x_e, u=u_e} & \cdots & \left. \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_n} \right|_{x=x_e, u=u_e} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_1} \right|_{x=x_e, u=u_e} & \cdots & \left. \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_n} \right|_{x=x_e, u=u_e} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}\quad (27)$$

$$b = \left. \frac{\partial f_0}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=u_e} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_{0,1}}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=u_e} \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial f_{0,n}}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=u_e} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}\quad (28)$$

$$c = \left. \frac{\partial g_0}{\partial x} \right|_{x=x_e, u=u_e} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_{0,1}}{\partial x_1} \right|_{x=x_e, u=u_e} & \cdots & \left. \frac{\partial g_{0,n}}{\partial x_n} \right|_{x=x_e, u=u_e} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n}\quad (29)$$

$$d = \left. \frac{\partial g_0}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=u_e} = \left[\left. \frac{\partial g_{0,1}}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=u_e} \right] \in \mathbb{R}^{1 \times 1}\quad (30)$$

3.4 Zustandsraumdarstellung

Da wir bei der Linearisierung nur die Differenz der Dynamik vom Gleichgewichtspunkt betrachten, werden die δ weggelassen um die Gleichungen übersichtlicher zu schreiben ($x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \delta x(t)$)⁷.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= A \cdot x(t) + b \cdot u(t) \\ y(t) &= c \cdot x + d \cdot u\end{aligned}\quad (31)$$

⁵Die $\mathcal{O}(2)$ Terme werden weggelassen, da sie sehr klein sind.

⁶ $y_e + \delta y(t) = y_e + \frac{\partial g_0}{\partial x} \cdot \delta x(t) + \frac{\partial g_0}{\partial u} \cdot \delta u(t)$ wird zu $\delta y(t) = \frac{\partial g_0}{\partial x} \cdot \delta x(t) + \frac{\partial g_0}{\partial u} \cdot \delta u(t)$, durch beidseitiges subtrahieren von y_e .

⁷ $x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \delta x(t)$ meint, dass $x(t)$ ist per Definition $\delta x(t)$.

Beispiel

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z_{2,0}}{z_{1,0}} \cdot x_2 \\ \frac{a \cdot z_{1,0}^2}{z_{2,0}} \cdot x_1^2 + b \cdot v_0 \cdot x_2 \cdot u - \frac{c}{z_{2,0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Daraus folgt, wobei u_e beliebig gewählt werden kann⁸.

$$x_e = \begin{pmatrix} x_{1,e} \\ x_{2,e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{c}{z_{1,0}^2 \cdot a}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Durch die Taylorentwicklung erhält man.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{z_{2,0}}{z_{1,0}} \\ \frac{2 \cdot a \cdot z_{1,0}^2}{z_{2,0}} \cdot \sqrt{\frac{c}{z_{1,0}^2 \cdot a}} & b \cdot v_0 \cdot u_e \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} \frac{z_{1,0}}{w_0} & 0 \end{pmatrix} \quad d = 0 \quad (34)$$

Das System kann anschließend folgendermassen geschrieben werden⁹.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= A \cdot x + b \cdot u \\ y(t) &= c \cdot x + d \cdot u \end{aligned}$$

⁸Dass u_e frei wählbar ist, ist nur eine Ausnahme. Im Allgemeinen ist $u_e = f(x_e)$ eine Funktion des Gleichgewichtszustand x_e .

⁹Beachte, dass die δ weggelassen wurden.

4 Systemanalyse I

4.1 Lösung der Differentialgleichung

Aus der Systemmodellierung haben wir nun ein System von Differential Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= A \cdot x + b \cdot u \\ y(t) &= c \cdot x + d \cdot u\end{aligned}\tag{35}$$

Für einen bekannten Anfangszustand (Initial Condition) $x(0)$ und einen bekannten Input $u(t)$, kann eine allgemeine Lösung für dieses System berechnet werden. Man verwendet dafür den Ansatz $x(t) = e^{A \cdot t}$.

Im Buch auf Seite 44 wird die genaue Lösung der Differential Gleichung hergeleitet.

Die Lösung lautet.

$$x(t) = e^{A \cdot t} \cdot x(0) + \int_0^t e^{A \cdot (t-\rho)} \cdot b \cdot u(\rho) \cdot d\rho\tag{36}$$

Der dazugehörige Ausgang.

$$y(t) = \underbrace{c \cdot e^{A \cdot t} \cdot x(0)}_I + \underbrace{\int_0^t c \cdot e^{A \cdot (t-\rho)} \cdot b \cdot u(\rho) \cdot d\rho}_{II} + \underbrace{d \cdot u(t)}_{III}\tag{37}$$

I: Natürliche Antwort vom System. (unabhängig von $u(t)$)

II: Einfluss von $u(t)$ auf die Systemdynamik

III: Direkte Antwort auf den Ausgang (Feedthrough).

Der Integralteil(II) ist bekannt aus Analysis III und wird Faltung genannt.

$$\sigma(t) * u(t) = \int_0^t \sigma(t - \rho) \cdot u(\rho) d\rho\tag{38}$$

Das Signal $\sigma(t)$ definiert durch

$$\sigma(t) = c \cdot e^{A \cdot t} \cdot b\tag{39}$$

ist die **Impulsantwort**¹ des System für $d = 0$, $u(t) = \delta(t)$ und $x(0) = 0$.

4.1.1 Berechnung der Lösung

Da $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ im Allgemeinen ein Matrix ist, ist die Berechnung der Lösungen für Systeme mit $n > 1$ meist nur mit Numerischen Methoden möglich. Eine einfache analytische Lösung ist nur für Systeme tieferer Ordnung möglich. Zur Berechnung einer geschlossenen Lösung muss ein bekanntes $u(t)$ vorhanden sein. Wir werden uns in dieser Vorlesung auf 4 Inputs beschränken.

dirac delta function: $\delta(t)$

step function: $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq 0 \\ 1 & \text{for } t \geq 0 \end{cases}$

ramp function: $p(t) = t \cdot h(t)$

harmonic functions: $c(t) = \cos(\omega \cdot t) \cdot h(t)$

¹Was die Impulsantwort ist, kommt in späteren Kapitel.

4.2 Lösung eines System erster Ordnung

In diesem Kapitel wird die Lösung eines System erster Ordnung, mit $d = 0^2$, analysiert. Die dazugehörige Differentialgleichung lautet.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= -\frac{1}{\tau} \cdot x(t) + \frac{k}{\tau} \cdot u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned}} \quad (40)$$

wobei $k, \tau > 0$.

4.2.1 Impuls Antwort

Die Impulsantwort ist, die Reaktion eines Systems auf einen Dirac Stoss (Impuls). Die allgemeine Lösung³ lautet.

$$y_{\delta}(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(x_0 + \frac{k}{\tau} \right) \quad (41)$$

Aus dem Exponentialterm sieht man, dass für $t \rightarrow \infty$ die Lösung $y(t \rightarrow \infty) = 0$ konvergiert.

Die Zeitkonstante τ beschreibt das Abklingen des Ausgangs. (Grosses τ , Langsames Abklingen.)

Die Konstante k zusammen mit dem Anfangszustand x_0 , beschreiben den Startpunkt der Kurve.

Wenn man den Ausgang nach der Zeit ableitet und zum Zeitpunkt $t = 0$ auswertet, erhält man eine Tangente.

Diese Tangente schneidet die t-Achse bei τ , für alle Anfangsbedingungen x_0 .

4.2.2 Sprung Antwort

Die Sprungantwort ist die Antwort auf die Heaveside Funktion. Sprich das Signal springt von 0 auf $k \cdot h(t)$. Die allgemeine Lösung lautet.

$$y_h(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot x_0 + k \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (42)$$

Der Ausgang dieser Antwort konvergiert für $t \rightarrow \infty$ zu $y(t \rightarrow \infty) = k$. Auch hier beschreibt die Zeitkonstante das Annähern an k . (Grosses τ , Langsames Annähern.)

x_0 gibt den Startwert der Kurve an.

Auch hier erhält man durch Evaluieren der Ableiten des Outputs bei der Zeit $t = 0$ eine Tangente.

Die Tangente schneidet die Sprung Antwort $k \cdot h(t)$ beim Zeitpunkt $t = \tau$.

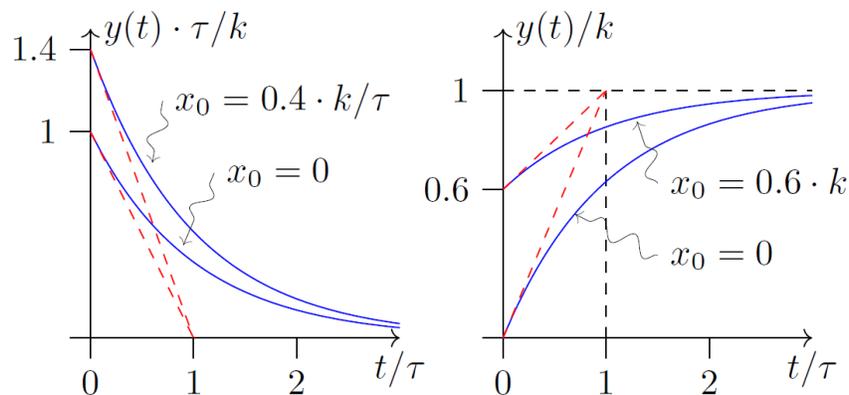


Abbildung 10: links: Impuls Antwort, rechts: Sprungantwort

²diesen Fall nennt man strikt kausal

³Das Subskript δ weist auf den Dirac Stoss hin.

4.2.3 Rampen Antwort

Die Antwort auf einen linear stiegenden Input lautet.

$$y_p(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot x_0 + k \cdot \left(t + (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1) \cdot \tau \right) \quad (43)$$

Dieser Output divergiert für $t \rightarrow \infty$ auch ins unendliche. Dabei schmiegt sich der Output an die Gerade $p(t - \tau)$ an.

Da dieser Output divergiert, ist er für uns nicht sehr interessant. Daher wird er nicht weiter besprochen.

4.2.4 Harmonische Antwort

Die letzte und wahrscheinlich wichtigste Antwort die wir untersuchen, ist die Antwort auf ein harmonisches Eingangssignal $u(t) = \cos(\omega \cdot t) \cdot h(t)$.

Die allgemeine Lösung lautet.

$$y_c(t) = \underbrace{e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot x_0}_{\text{Transiente Antwort}} + \underbrace{\left(\cos(\omega \cdot t) + \omega \cdot \tau \cdot \sin(\omega \cdot t) - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot \frac{k}{1 + \omega^2 \cdot \tau^2}}_{\text{Harmonisch schwingender Teil}} \quad (44)$$

Für $t \rightarrow \infty$ verschwindet die Transiente Antwort und das System konvergiert zu einer harmonischen Schwingung⁴.

$$y_\infty(t) = \frac{k}{1 + \omega^2 \cdot \tau^2} \cdot (\cos(\omega \cdot t) + \omega \cdot \tau \cdot \sin(\omega \cdot t)) \quad (45)$$

Die eingeschwingene Antwort y_∞ schwingt mit der gleichen Frequenz ω wie der Input, ist aber Phasenverschoben⁵.

$$y_\infty(t) = m(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi(t)) \quad (46)$$

Die Amplitude und die Phasenverschiebung sind gegeben durch.

$$m(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot \tau^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctan(\omega \cdot \tau) \quad (47)$$

Diese Eigenschaft des einschwingenden Verhalten wird später auf höhere Systeme generalisiert und ist Grundlage für eine der wichtigsten Methoden zur Systemanalyse in der Regelungstechnik.

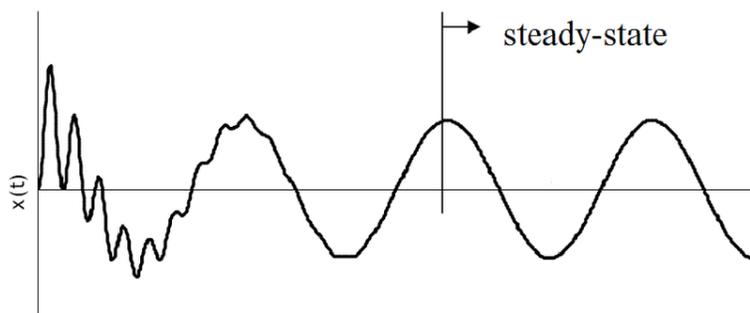


Abbildung 11: Darstellung des eingeschwingenen Zustand

Achtung die vertikale Achse ist bei uns der Output $y(t)$!

⁴Dieser Zustand wird Steady State genannt.

⁵Eine Berechnung findet sich im Buch auf Seite 313.

4.3 Stabilität

Die Lösung aus Gleichung (36) ist im allgemeinen sehr schwierig zu berechnen (nur numerisch möglich). Wir wollen aber trotzdem qualitative Aussagen über das System machen können. Eines der wichtigsten Merkmale eines System ist die Stabilität, sprich bleiben die Zustände bzw. Ausgänge endlich oder divergieren sie ins Unendliche. Zur Bestimmung der Stabilität eines Systems gibt es zwei Methoden.

- Lyapunov Stabilität: Dabei wird das System angeschaut bei einem Input $u(t) = 0$ und einer kleinen Auslenkung aus der Gleichgewichtslage $x(0) \neq 0$
- BIBO Stabilität: Dabei wird das System betrachtet, bei welchem $x(0) = 0$ ist und der Input $u(t)$ beschränkt ist, sprich $|u(t)| \leq M < \infty \forall t$

Die Lyapunov Stabilität betrachtet nur die inneren Zustände und wird in diesem Kapitel betrachtet.

Die BIBO Stabilität betrachtet auch den Eingang und wird in einem Späteren Kapitel betrachtet.

4.3.1 Lyapunov Stabilität

Die Lyapunov Stabilität besagt uns ob die inneren Zustände des System $x(t)$ stabil sind.

Für nicht lineare zeit variante Systeme ist die Berechnung zu schwierig und wird daher nicht betrachtet.

Die Lyapunov Stabilität eines linearen zeit invarianten System ist immer im Bezug auf einen Gleichgewichtspunkt⁶. Lineare zeit invariante Systeme haben einen einzigen Gleichgewichtspunkt oder einen ganzen Unterraum als "Gleichgewichtsumterraum". Weiter ist Lyapunov Stabilität ist ein *globales* Konzept, sprich ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist für alle finiten Startwerte von $x(0)$ stabil.

Für ein lineares System folgender Form, wobei der Input $u(t) = 0$ gesetzt wird,

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t), \quad x(0) = x_0, \quad 0 < \|x_0\| < \infty$$

ist die Lyapunov Stabilität wie folgt definiert.

Das System ist⁷:

- Asymptotisch stabil wenn: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$;
- Stabil wenn: $\|x(t)\| < \infty \quad \forall t \in [0, \infty]$;
- Instabil wenn: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty$;

Anders gesagt ist ein System asymptotisch stabil, wenn es aus einer Ausgangslage/Startpunkt $x(0) = x_0 \neq 0$ für $t \rightarrow \infty$ von selbst zurück in Ursprung konvergiert.

Stabil ist ein System, wenn die Zustände zwar nicht in den Ursprung konvergieren, aber endlich bleiben. Zum Beispiel um den Ursprung kreisen.

4.3.2 Berechnung der Lyapunov Stabilität

Die Berechnung der Stabilität erfolgt anhand der Eigenwerte. Da man $u(t) = 0$ gesetzt hat, lautet die Lösung

$$x(t) = e^{A \cdot t} \cdot x(0) \tag{48}$$

Die Matrix A kann nun durch eine Eigenwert Transformation diagonalisiert werden ($x = V \cdot \tilde{x}$)⁸.

Das Resultat der Transformation lautet wie folgt.

$$\tilde{x}(t) = V^{-1} \cdot e^{A \cdot t} \cdot V \cdot \tilde{x}(0) = e^{\tilde{A} \cdot t} \cdot \tilde{x}(0) \tag{49}$$

Wobei $\tilde{A} = V^{-1} \cdot A \cdot V$ eine Diagonalmatrix ist mit den Eigenwerten der Matrix A .

⁶Der Bezug auf einen Gleichgewichtspunkt ist auch bei nicht linearen Systemen gegeben.

⁷Wobei die Norm $\|\cdot\|$ de Euklidische Länge ist.

⁸Ein genaues Vorgehen wurde in der Linearen Algebra besprochen.

Daraus folgt die Matrix

$$e^{\tilde{A} \cdot t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \cdot t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n \cdot t} \end{bmatrix}, \quad \lambda_i = \sigma_i + j \cdot \omega_i \in \mathbb{C} \quad (50)$$

Daraus ergibt sich die Koordinatentransformation.

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \tilde{x}_1(0) \\ e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot \tilde{x}_2(0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n \cdot t} \cdot \tilde{x}_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\sigma_1 \cdot t} \cdot (\cos(\omega_1 \cdot t) + j \cdot \sin(\omega_1 \cdot t)) \cdot \tilde{x}_1(0) \\ e^{\sigma_2 \cdot t} \cdot (\cos(\omega_2 \cdot t) + j \cdot \sin(\omega_2 \cdot t)) \cdot \tilde{x}_2(0) \\ \vdots \\ e^{\sigma_n \cdot t} \cdot (\cos(\omega_n \cdot t) + j \cdot \sin(\omega_n \cdot t)) \cdot \tilde{x}_n(0) \end{bmatrix} \quad (51)$$

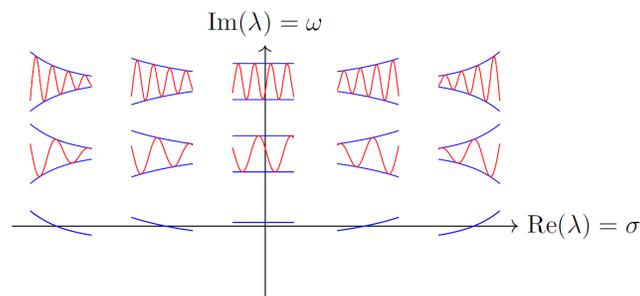


Abbildung 12: Eine graphische Darstellung der Lyapunov Stabilität

Aus dieser Transformation kann direkt ein Zusammenhang zwischen den Eigenwerten von A und der Stabilität des System geschlossen werden.

Das System ist

- **asymptotisch stabil** dann und nur dann (iff) wenn alle Eigenwerte einen Realteil $\sigma_i < 0$ haben.
- **stabil** wenn alle Eigenwerte einen Realteil $\sigma_i \leq 0$ haben, aber kein Eigenwert einen Realteil $\sigma_i > 0$ hat.
- **instabil** wenn **ein** Eigenwerte einen Realteil $\sigma_i > 0$ hat.

Damit haben wir *nur* die Stabilität des *linearen* System eruiert. Für das nicht lineare System gilt das *Lyapunovsches Stabilitäts Prinzip*.

Das Lyapunovsches Stabilitäts Prinzip

Ist ein linearisiertes System um einen isolierten Gleichgewichtspunkt asymptotisch Stabil ist, so ist auch das nicht lineare System um diesen Gleichgewichtspunkt stabil.

Wenn das linearisierte System instabil ist, so ist auch das nicht lineare System instabil.

Wenn das linearisierte System nur stabil ist, kann keine Aussage über das nicht linearisierte System gemacht werden.

5 System Analyse II

Neben der Stabilität sind die Erreichbarkeit und die Beobachtbarkeit zwei weitere wichtige Systemeigenschaften. Es werden auch wieder nur lineare, zeit invariante und endlich dimensionale Systeme betrachtet.

- Erreichbarkeit: Kann ein Zustand $x_i(t)$ durch einen bestimmten Input $u(t)$ erreicht werden.
- Beobachtbarkeit: Kann auf einen gewissen Anfangszustand $x(0)$ geschlossen werden, mit Hilfe des Ausgang $y(t)$.

Die Beobachtbarkeit und die Erreichbarkeit sind systemspezifische Informationen, welche nichts mit dem Input bzw. dem Output zu tun haben.

5.1 Erreichbarkeit

Ein Punkt $x_r \in \mathbb{R}^n$ heisst *erreichbar* wenn ein bestimmter Input $u(x_r)$ existiert, damit man von der Anfangsbedingung $x(0)$ in endlicher Zeit τ zum Punkt $x(\tau) = x_r$ gelangt. Wenn alle Punkte in \mathbb{R}^n erreichbar sind, ist das System komplett erreichbar.

Analog ist die Kontrollierbarkeit gegeben, wenn man in endlicher Zeit τ vom Punkt $x(0) = x_c$ durch eine Inputsignal $u(x_c)$ in den Ursprung gelangt $x(\tau) = 0$.

Für lineare, zeit invariante (LTI) System sind diese Unterräume identisch.

Zur Bestimmung der Erreichbarkeit muss man die Erreichbarkeitsmatrix berechnen und ihren Rang überprüfen¹. Die Erreichbarkeitsmatrix berechnet sich wie folgt.

$$\mathcal{R}_n = [b \quad A \cdot b \quad A^2 \cdot b \quad \dots \quad A^{n-1} \cdot b] \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (52)$$

Ein System ist dann vollständig erreichbar/kontrollierbar wenn die Matrix \mathcal{R}_n vollen Rang n hat.

Wenn der Rang $r < n$ ist, ist nur der r -dimensionale Unterraum erreichbar.

Bild einfügen

5.2 Beobachtbarkeit

Bei der Beobachtbarkeit geht es um die Frage, ob man durch das analysieren des Output $y(t)$, auf die Anfangsbedingung $x(0)$ schliessen kann. Da man nur an der Anfangsbedingung interessiert ist, kann man $u(t) = 0$ annehmen.

Die Beobachtbarkeit wird anhand der Beobachtbarkeitsmatrix eruiert. Diese berechnet sich wie folgt².

$$\mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} c \\ c \cdot A \\ c \cdot A^2 \\ \vdots \\ c \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (53)$$

Ein System ist dann vollständig beobachtbar wenn die Matrix \mathcal{O}_n vollen Rang n hat.

Wenn der Rang $r < n$ ist, ist nur der r -dimensionale Unterraum beobachtbar.

¹Eine Herleitung ist im Buch auf Seite 58.

²Eine Herleitung ist im Buch auf Seite 65.

Wenn man die Prämisse akzeptiert, dass man ein System in die vier Zustände unterteilen kann, muss folglich eine Koordinatentransformation⁴ $x = T \cdot \tilde{x}$ existieren, welche die Zustände voneinander trennt. Das resultierende System hat dann folgende Form.

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix} \quad T^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ 0 \\ \tilde{b}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c \cdot T = [0 \quad 0 \quad \tilde{c}_3 \quad \tilde{c}_4] \quad (54)$$

Aus der Abbildung 13 ist ersichtlich, dass nur der Zustand \tilde{x}_3 einen Einfluss auf den Ausgang hat. Folglich sind auch nur $\{\tilde{A}_{33}, \tilde{b}_3, \tilde{c}_3\}$ ⁵ relevant für das Input-Output Verhalten vom System. Das quadrupel $\{\tilde{A}_{33}, \tilde{b}_3, \tilde{c}_3\}, d$ nennt man auch die **minimale Realisation** vom System.

Die anderen Zustände $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_4\}$ sind für das Systemverhalten nicht relevant, dürfen aber nicht vergessen werden, da sie instabil sein könnten.

⁴Wichtig ist dabei zu wissen, dass die Eigenschaften des System *transformationsinvariant* sind. Sprich die Eigenschaften wie z.B. Stabilität bleiben erhalten.

⁵Alle Zustände \tilde{x}_i , \tilde{c}_i und \tilde{b}_i sind im Allgemeinen Vektoren. \tilde{A} ist folglich eine Matrix.

5.5 Input-Output (I/O) Beschreibung

Bislang haben wir nur die State Space Beschreibung von Systemen angeschaut, welche folgende Form hat.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= A \cdot x(t) + b \cdot u(t) \\ y(t) &= c \cdot x(t) + d \cdot u(t)\end{aligned}$$

Die Zustandsraumdarstellung beschreibt die innere Struktur vom System, also die "inneren Reservoirs" wie sie im Kapitel 2 besprochen wurden. Weiter ist diese Beschreibung sehr geeignet um in MatLab zu arbeiten.

Doch oft sind diese Informationen nicht relevant, da man für die Regelung nur das Input-Output Verhalten $u(t) \rightarrow y(t)$ analysieren will. Dafür wird die Input-Output Beschreibung eingeführt.

Die I/O Beschreibung hat im allgemeinen folgende Form⁶.

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot y^{(1)}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot u^{(m)}(t) + \dots + b_1 \cdot u^{(1)}(t) + b_0 \cdot u(t) \quad (55)$$

Die realen Koeffizienten $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ sind für alle realen Systeme mit $m \leq n$ welche man in der Praxis antrifft bekannt.

In der I/O Beschreibung sind keine physikalischen Eigenschaften/Koordinaten vorhanden. Daher können auch alle Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ gesetzt werden. Weiter beinhaltet die I/O Beschreibung keine Informationen über die inneren Zustände im System bzw. über die interne Physik.

5.5.1 I/O Beschreibung \rightarrow Zustandsraumdarstellung

Wenn man eine Zustandsraumdarstellung braucht, kann man diese aus der I/O Beschreibung ableiten. Dafür benutzt man kanonische Koordinaten. Die resultierende Zustandsraumdarstellung sieht dann folgendermassen aus⁷.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_n] \quad (56)$$

Oft wird folgende Darstellung verwendet.

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{A}{c} & \frac{b}{d} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \hline -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & 1 \\ b_0 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \quad (57)$$

Die Transformation von der Zustandsraumdarstellung zur I/O Beschreibung wird im folgenden Kapitel anhand der Laplace Transformation eingeführt.

⁶Dabei ist mit $y^{(n)}$ die n -te Ableitung nach der Zeit gemeint.

⁷Eine Herleitung ist im Buch auf Seite 71.

6 Laplace Transformation

Bis jetzt haben wir alle Berechnungen und Analysen im Zeitbereich gemacht. Doch wie man gesehen hat ist das Lösen einer Differentialgleichung nicht sehr einfach. Aus diesem Grund werden wir das Problem vom Zeitbereich in den Frequenzbereich überführen¹. Der Vorteil dieser Transformation besteht darin, dass die lineare Differentialgleichung zu einer einfach lösbaren algebraischen Gleichung wird. Es gehen aber keine Informationen verloren, da die Laplace Transformation eine *lineare* Transformation². Die wichtigsten Transformationen sind in Tabellen aufgelistet und müssen nicht von Hand berechnet werden.

6.1 Transferfunktion

Wendet man die Laplace Transformation auf die Zustandsraumdarstellung an und setzt $d = 0$ wird aus der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A \cdot x(t) + b \cdot u(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= c \cdot x(t) \end{aligned} \quad (58)$$

die algebraische Gleichung

$$\begin{aligned} s \cdot X(s) - x_0 &= A \cdot X(s) + b \cdot U(s) \\ Y(s) &= c \cdot X(s) \end{aligned} \quad (59)$$

Man kann die Gleichungen (59) nach $X(s)$ auflösen und erhält

$$Y(s) = c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b \cdot U(s) + c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot x_0 \quad (60)$$

Man sieht direkt, dass der Output eine lineare Kombination vom Input und der Anfangsbedingung ist. Wenn man annimmt, dass die Anfangsbedingungen³ $x = 0^4$ sind, erhält man:

$$\boxed{Y(s) = c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b \cdot U(s) = \Sigma(s) \cdot U(s)} \quad (61)$$

Somit hat man eine mathematische Beschreibung für das System $\Sigma(s)$.

$$\Sigma(s) = c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b \quad (62)$$

Die Inverse einer Matrix zu berechnen ist meist mühsam, weshalb wir uns der Cramerschen Regeln⁵ verhalfen.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)}} \quad (63)$$

Die Übertragungsfunktion nimmt dann folgende Form an

$$\boxed{\Sigma(s) = \frac{c \cdot \text{Adj}(sI - A)^{-1} \cdot b}{\det(sI - A)} = \frac{b(s)}{a(s)}} \quad (64)$$

$b(s)$ und $a(s)$ sind dabei beliebige Polynome und es ergibt sich

$$\Sigma(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0} \quad (65)$$

¹Im Frequenzbereich wird mit komplexen Zahlen gerechnet.

²Die Laplace Transformation wird in Analysis III behandelt und daher nicht weiter vertieft.

³Beachtet, dass A eine Matrix und x ein im allgemeinen ein Vektor ist

⁴Diese Annahme ist gut Begründet, da man in den meisten Fällen durch eine geeignete Koordinatentransformation die Anfangsbedingung gleich 0 setzen kann.

⁵Für die Berechnung bis $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ kann man die Adjunktenformel verwenden.

6.1.1 Eigenschaften der Transferfunktion

Wie bereits erwähnt beschreibt die Transferfunktion den Zusammenhang zwischen Input und Output, aber sagt nichts über die internen Zustände $x(t)$ aus.

Aus der Transferfunktion kann man durch die Inverse Laplace Transformation die I/O Beschreibung berechnen. Die Berechnung wird auf der Seite 86 im Buch durchgeführt, wird hier aber nicht genauer betrachtet, da sie nicht relevant ist für diesen Kurs.

6.1.2 Pole und Nullstellen der Transfer Function

Aus dem Grundsatz der linearen Algebra kann man die Polynome $a(s)$ und $b(s)$ auch als die Produkte ihrer Nullstellen schreiben.

$$\Sigma(s) = b_m \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (s - \zeta_j)}{\prod_{i=1}^n (s - \pi_i)} \quad (66)$$

wobei die komplexen Zahlen ζ_i die Nullstellen der Transfer Function sind und die komplexen Zahlen π_i die Pole der Transfer Function sind.

Aus der Cramerschen Regel geht hervor, dass $a(s)$ das charakteristische Polynom der Matrix A ist. Daraus kann man schliessen, dass alle Pole der Transferfunktion auch Eigenwerte der Matrix A sind.

Der Umkehrfall ist nicht gegeben, da eine Pol-Nullstellen-Kürzung stattfinden kann.

Eine solche Pol-Nullstelle-Kürzung bedeutet, dass die Zustandsraumdarstellung $\{A, b, c, d\}$ nicht die minimale Realisation der Transferfunktion $\Sigma(s)$ ist. Dies bedeutet in der Zustandsraumdarstellung nicht beobachtbare und/oder nicht kontrollierbare Zustände vorhanden sind, welche kein Einfluss auf das Input Output Verhalten haben und daher gekürzt werden müssen.

6.2 Lösung der Transferfunktion

Wir haben jetzt aus der linearen Differentialgleichung durch die Laplace Transformation eine algebraische Gleichung im Frequenzbereich erhalten. Diese Gleichung kann nun verwendet werden um die Differentialgleichung zu lösen. Dafür wird die Inverse Laplace Transformation auf $Y(s)$ angewendet⁶.

$$\frac{d}{dt}x = f(x, t) \xrightarrow[\text{Transformation}]{\text{Laplace}} Y(s) = \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt}x = f(x, t) \right\} = \Gamma(s) \xrightarrow[\text{Transformation}]{\text{Inverse Laplace}} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Gamma(s)\} \quad (67)$$

Das direkte Anwenden der Inversen Laplace Transformation ist im Allgemeinen sehr schwierig und wird daher nicht empfohlen.

Besser ist es, die Transferfunktion durch eine Partialbruchzerlegung in einzelne Brüche zu unterteilen und diese einzeln zu transformieren⁷. Ganz Allgemein Ausgedrückt erhält man

$$Y(s) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k}}{(s - \pi_i)^k} \quad (68)$$

wobei ϕ_i die Vielfachheit der Polstellen sind und die Residuen $\rho_{i,k}$ wie folgt berechnet werden⁸

$$\rho_{i,k} = \lim_{s \rightarrow \pi_i} \frac{1}{(\phi_i - k)!} \cdot \left(\frac{d^{(\phi_i - k)}}{ds^{(\phi_i - k)}} (Y(s) \cdot (s - \pi_i)^{\phi_i}) \right) \quad (69)$$

Auf die einzelnen Partialbrüche kann man nun Inverse Laplace Transformation anwenden und erhält

$$y(t) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k}}{(k-1)!} \cdot t^{k-1} \cdot e^{\pi_i t} \cdot h(t) \quad (70)$$

Spezialfall: Für die Impulsantwort ist die Lösung gleich der natürlichen Systemantwort, da $\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = 1$ daraus wird $Y(s) = \Sigma \cdot 1$ und daher gilt $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Sigma(s)\}$.

⁶ $f(x, t)$ und $\Gamma(s)$ sind beliebige Funktionen und werden nur zur schematischen Darstellung eingesetzt.

⁷Eine genaue Herleitung ist im Buch auf Seite 96.

⁸Die Berechnung sieht sehr kompliziert aus, wird aber fast nie durchgeführt.

6.3 Static Gain

Die Laplace Transformation beschreibt grob gesagt das schwingende (Imaginärteil) und das exponentiell abfallende (Realteil) Verhalten des System. Wenn wir wissen wollen wie sich das System im statischen Fall verhält, sind der Imaginärteil (kein Schwingen) und der Realteil (kein exponentieller Abfall) gleich Null, $s = 0$.

Dieser Zustand wird auch **Static Gain** genannt. Der Fall $Y(s = 0)$ ist äquivalent mit $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$, wobei der Input $u(t) = h(t)$ die Step Funktion ist.

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0+} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0+} s \cdot \Sigma(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0+} \Sigma(s) = \Sigma(0)} \quad (71)$$

Wir haben gesehen, dass die Transferfunktion aus durch zwei Polynome beschrieben werden kann

$$\Sigma(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0} \quad \rightarrow \quad \Sigma(0) = \frac{b_0}{a_0} \quad (72)$$

6.4 BIBO Stabilität

Wir haben in einem früheren Kapitel die Lyapunov Stabilität eingeführt. Diese geht vorallem auf die Inneren Zustände des Systems ein.

Nun wollen wir die BIBO Stabilität einführen, welche die Stabilität des Input Output Verhalten beschreibt. Dies ist darin begründet das bei der Transferfunktion eine Pol-Nullstellen-Kürzung durchgeführt werden kann und somit nicht beobachtbare und/oder nicht erreichbare Zustände gekürzt werden können.

Ein System ist BIBO Stabil dann und nur dann wenn für alle finiten Inputs $|u(t)| < M_1$ eine finiter Output $|y(t)| < M_2$ resultiert für alle Zeiten $0 \leq t \leq \infty$.
BIBO steht für **B**oundend **I**nput **B**oundend **O**utput.

Diese Voraussetzung kann auf die Impulsantwort angewendet werden und daraus resultiert folgende Bedingung

$$\int_0^{\infty} |\sigma(t)| dt < \infty \quad \text{wobei} \quad |\sigma(t)| = \text{Systemausgang bei einem Dirac-Stoss} \quad (73)$$

Diese Bedingung kann nur erfüllt werden, wenn alle Pole Realteil kleiner Null haben.
In allen anderen Fällen ist das System BIBO Instabil.

Diese Aussage kann mit Hilfe der Impulsantwort bewiesen werden. Die Impulsantwort eines System ist gleich der "natürlichen" Systemantwort. Wenn man nun die Lösung aus Gleichung (70) einsetzt und die Pole als $\pi_i = \sigma_i + j \omega_i$ geschrieben werden und die Eulerform verwendet wird erhält man

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k}}{(k-1)!} \cdot t^{k-1} \cdot e^{\sigma_i \cdot t} \cdot (\cos(\omega_i \cdot t) + j \cdot \sin(\omega_i \cdot t)) \cdot h(t) \quad (74)$$

Das Integral $\int_0^{\infty} |\sigma(t)| dt$ kann nur kleiner null sein, wenn die Realteile σ_i kleiner null sind.

6.4.1 BIBO und Lyapunov im Vergleich

Obwohl die BIBO Stabilität und die Lyapunov Stabilität andere Aspekte der Systeme betrachten gibt es dennoch Verbindungen.⁹ Für Systeme mit minimaler Realisation gelten folgende Sachen:

- Lyapunov asymptotisch stabil \iff BIBO stabil
- Lyapunov stabil \Rightarrow Nicht BIBO stabil
- Lyapunov instabil \Rightarrow Nicht BIBO stabil
- Lyapunov stabil oder instabil \Leftarrow Nicht BIBO stabil

Für Systeme mit nicht erreichbaren oder nicht beobachtbaren Zustände gilt:

- Lyapunov asymptotisch stabil \Rightarrow BIBO stabil
- Lyapunov stabil \Rightarrow ?
- Lyapunov instabil \Rightarrow ?
- ? \Leftarrow BIBO stabil
- Lyapunov stabil oder instabil \Leftarrow Nicht BIBO stabil

⁹Fragezeichen bedeuten, dass keine Aussage gemacht werden kann.

6.5 Einfluss von Polen und Nullstellen

Die Position der Pole und Nullstellen in der komplexen Ebene haben einen grossen Einfluss auf das dynamisch Verhalten des System. Um den Einfluss von Polen und Nullstellen auf das Systemverhalten zu analysieren wird ein System zweiter Ordnung betrachtet¹⁰.

$$\Sigma(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2} \quad (75)$$

Für $\delta > 0$ und $\omega_0 > 0$ hat das System einen Static Gain $\Sigma(0) = 1$.

Weiter hat diese System folgende Pole

$$\pi_{1,2} = \left(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}\right) \cdot \omega_0 \quad (76)$$

Die Parameter $\omega_0 = 2 \cdot \frac{\pi}{T_0}$ und δ repräsentieren die Eigenfrequenz und Dämpfung des Systems¹¹.

Wenn man nun am System eine Step Input anlegt ergibt sich.

$$Y(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2} \quad (77)$$

Durch die Substitutionen

$$\begin{aligned} \delta_0 &= -\delta \cdot \omega_0 \\ \omega_1 &= \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \delta^2}, \quad \delta < 1 \\ \omega_2 &= \omega_0 \cdot \sqrt{\delta^2 - 1}, \quad \delta > 1 \end{aligned} \quad (78)$$

erhält man zwei mögliche Lösungen

$$Y_a(s) = \frac{1}{s} - \frac{s - 2 \cdot \delta_0}{(s - \delta_0)^2 + \omega_1^2} = \frac{1}{s} - \frac{s - \delta_0}{(s - \delta_0)^2 + \omega_1^2} + \frac{\delta_0}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_1}{(s - \delta_0)^2 + \omega_1^2} \quad (79)$$

$$Y_b(s) = \frac{1}{s} - \frac{s - 2 \cdot \delta_0}{(s - \delta_0)^2 - \omega_2^2} = \frac{1}{s} - \frac{s - \delta_0}{(s - \delta_0)^2 - \omega_2^2} + \frac{\delta_0}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_1}{(s - \delta_0)^2 - \omega_2^2} \quad (80)$$

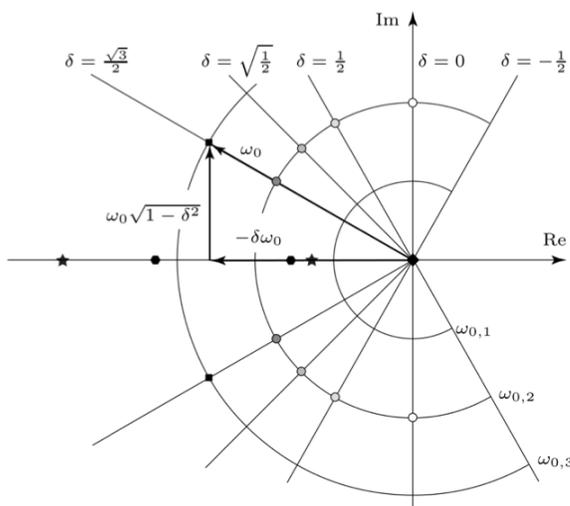


Abbildung 14: Darstellung der Pole für verschiedene Dämpfungsverhältnisse.

¹⁰Für Systeme höhere Ordnung kann man die linear Kombinationen von kleineren Systemen anschauen.

¹¹Diese wird man in Dynamics kennenlernen.

Transformiert man diese Lösungen in den Zeitbereich zurück, erhält man:

Fall a), unterkritische Dämpfung

$$y(t) = h(t) \cdot \left(1 + e^{\delta_0 \cdot t} \cdot \left(\frac{\delta_0}{\omega_1} \sin(\omega_1 \cdot t) - \cos(\omega_1 \cdot t) \right) \right) \quad (81)$$

Fall b), überkritische Dämpfung

$$y(t) = h(t) \cdot \left(1 + e^{\delta_0 \cdot t} \cdot \left(\frac{\delta_0}{\omega_2} \sinh(\omega_1 \cdot t) - \cosh(\omega_1 \cdot t) \right) \right) \quad (82)$$

Diese Outputs ergeben für verschieden δ folgende Kurven.

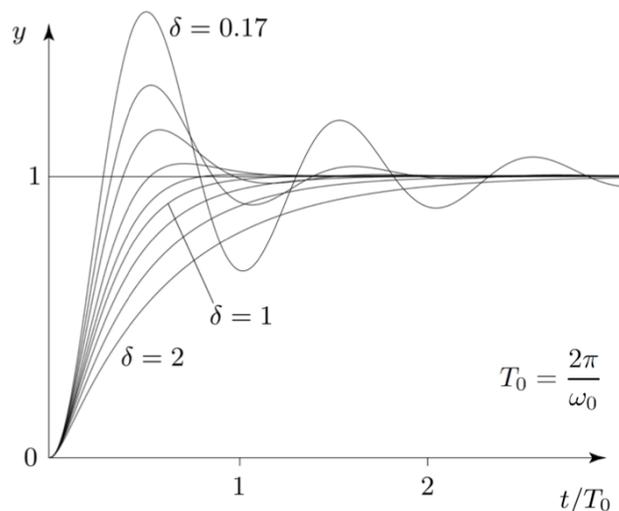


Abbildung 15: Verschiedene Sprungantworten eines Systems zweiter Ordnung

Die Wichtigsten Eigenschaften dieser Sprungantwort:

- Der Output hat eine Steigung von 0 bei $t = 0$ in nähert sich asymptotisch an den Endwert $y(\infty) = 0$ an.
- Der Output hat ein überschießen, für Systeme mit unterkritischer Dämpfung.
- Der Output des System wird skaliert durch die Perioden Zeit T_0 , deshalb sehen alle Plots mit dem selben Dämpfungsverhältniss gleich aus.

6.5.1 Pole

Für die Pole des Systems bedeutet dies:

- Für komplexe Pole ($\delta < 1$) schwingt die Sprungantwort
- Für reale Pole (überkritische Dämpfung, $\delta > 1$) konvergiert¹² die Antwort ohne Überschwingen
- Desto negativer (Realteil) des Pol, desto weniger Überschwingen, aber desto langsamere Konvergenz
- Das Ziel ist es einen guten Kompromiss zwischen schneller Konvergenz und kleinem Überschwingen zu finden

¹²Hier ist mit Konvergenz das Erstre Erreichen des Sollwert gemeint und nicht das konvergieren im unendlichen.

6.5.2 Nullstellen

Eine Nullstelle des System bedeutet, das bei der einer bestimmten Inputfrequenz der Output des Systems für alle Zeiten null ist.

Nullstellen haben folgenden Einfluss auf das Systemverhalten:

- Ein Nullstelle in der Nähe eines Pol, schwächt die Wirkung dieses Pol ab. Dies sieht man daran, dass der entsprechend Residuenterm (69) klein wird und daher nicht mehr einen grossen Einfluss hat.
- Desto näher die Nullstelle zum Ursprung ist, desto grösser ist der Einfluss dieser Nullstelle. Der Einfluss zeigt sich durch einen grösseren Überschuss des Ausgang.
- Positive Nullstellen bewirken ein Unterschiesen der Systemantwort und sind daher besonders gefährlich für die Regelung eines Systems. Diese positiven Nullstellen nennt man nichtminimalphasige Nullstellen.

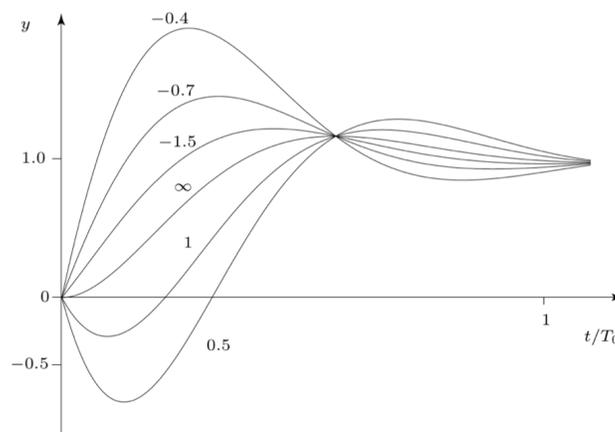


Abbildung 16: Einfluss der Nullstellen auf den Output

6.5.3 Nichtminimalphasige Nullstellen

Die wichtigste Erkenntnis über Nullstellen ist, dass Nullstellen instabil sein können. Dies bedeutet, dass im System ein Zustand instabil wird. Dies ist der Fall, wenn der Realteil der Nullstelle grösser 0 ist $0 < \text{Re}(\zeta_i)$.

Zu beobachten ist, dass diese nichtminimalphasigen Nullstellen ein Unterschiesen des Outputs verursachen, wie das in der Abbildung (16) gezeigt wird. Dies ist besonders gefährlich bei Feedback Controller.

Ein instabiles System (positive Polstellen) ist zwar nicht erwünscht, doch kann manchmal nicht umgangen werden, da ein Neuentwicklung nicht möglich oder zu teuer ist. Nichtminimalphasigen Nullstellen können hingegen, wenn möglich, durch eine andere Wahl von Aktuatoren oder Sensoren entfernt werden, da sie Eigenschaften der Vektoren b und c sind.

7 Frequenzantwort

Wir haben bis jetzt die Antwort im Zeitbereich eines System erster und zweiter Ordnung betrachtet. Zudem haben wir die Transferfunktion aus der Zustandsraumdarstellung berechnet.

In der Realität ist die direkte Berechnung der Zeitantwort eines Systems höherer Ordnung sehr schwierig und auch numerisch nicht einfach. Im Gegensatz dazu ist die Berechnung der Transferfunktion relativ einfach. Zudem gibt es viele numerische Tools wie z.B. MatLab zur Berechnung.

Daher wollen wir wissen, welche Informationen wir mit Hilfe der Transferfunktion über ein System herausfinden können. Dafür verwenden wir die harmonische Antwort des System.

Voraussetzung:

Zur Analyse im Frequenzbereich wird ein **asymptotisch stabiles, lineares und zeit-invariantes** System vorausgesetzt.

7.1 Harmonische Antwort

Mithilfe der harmonischen Antwort, auch Frequenzantwort genannt, kann man relativ viel über ein System und dessen Eigenheiten herausfinden. Dafür wird ein System mit dem harmonischen Input $u(t) = \cos(\omega \cdot t) \cdot h(t)$ angeregt. Der Output des System hat immer die gleiche Charakteristik. Nach einer anfänglich relativ willkürlichen transienten Phase, nähert sich das System an ein stabilen Ausgang folgender Form an.

$$y_{\infty}(t) = m(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi(\omega)) \quad (83)$$

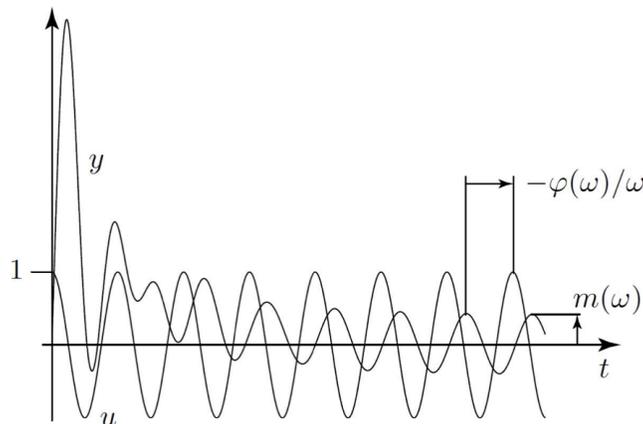


Abbildung 17: Frequenzantwort

Diese Lösung haben wir schon für ein System erster Ordnung berechnet. Dies gilt aber auch für Systeme höherer Ordnung. Eine Herleitung ist im Appendix.

Die folgenden drei Beobachtungen begründen die Stärke der Frequenzantwort als Mittel der Systemanalyse.

- In vielen Fällen kann die Frequenzantwort experimentell bestimmt werden. Diese Informationen ergeben ein sehr gutes nichtparametrisches Modell des System.
- Wenn man die Frequenzantwort hat, kann man durch das kombinieren einiger Standardelementen das System relativ gut parametrisch modellieren.
- Das Nyquist Theorem, welches später eingeführt wird, kann mit Hilfe der Frequenzantwort eine Verbindung der Stabilität zwischen dem open-loop und dem closed-loop System herstellen.

7.2 Graphische Darstellung der Frequenzantwort

Die Frequenzantwort kann man graphisch auf zwei Arten darstellen.

1. Als eine Frequenz implizite Darstellung durch das Nyquist-Diagramm
2. Als eine Frequenz explizite Darstellung durch das Bode-Diagramm.

7.2.1 Nyquist-Diagramm

Im Nyquist Diagramm wird die Kurve von $\Sigma(j\omega)$ direkt in die komplexe Ebene abgebildet, wobei der Real und Imaginärteil als Koordinaten verwendet werden $\Sigma(j\omega) = x(\omega) + jy(\omega)$.

Dabei taucht die Frequenz ω nicht explizit auf, sondern wird nur implizit durch den Kurvenverlauf angegeben. Man kann also nicht direkt für eine Frequenz ω sagen zu welchem Punkt diese Frequenz korrespondiert.

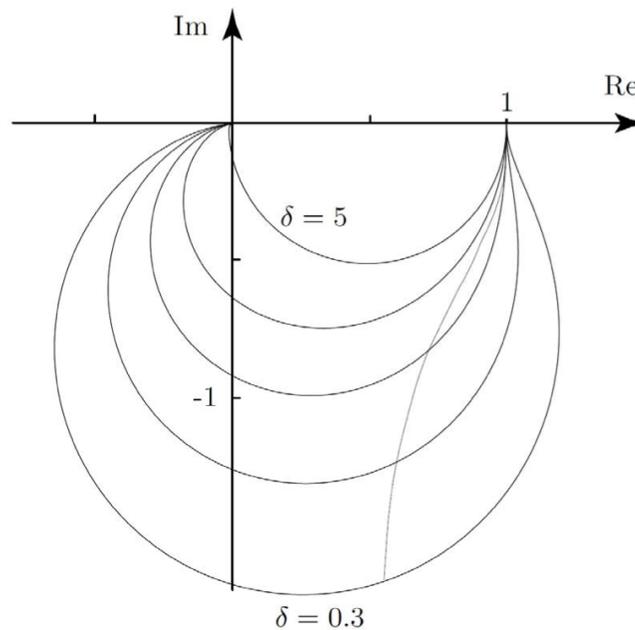


Abbildung 18: Nyquist Diagramm eines System 2. Ordnung

Ein Nyquist-Diagramm ist sehr schwierig zu zeichnen, speziell für Systeme höherer Ordnung, weshalb man diese Diagramm mithilfe von CACSD-Programmen¹ wie MatLab, macht. Diese Darstellung wird vor allem für qualitative Aussagen verwendet.

¹CACSD = Computer Aided Control Systems Design.

7.3 Bode-Diagramm

Das Bode-Diagramm ist eine Frequenz explizite Darstellung, dass heisst man kann für jede Frequenz direkt die Werte ablesen. Dabei besteht das Bode-Diagramm aus zwei Teilen. Zum einen wird der Betrag $m(\omega) = |\Sigma(j\omega)|$ und zum anderen die Phase $\varphi(\omega) = \angle\Sigma(j\omega)$ abgebildet. Diese Darstellung wird vor allem für quantitative Darstellungen verwendet.

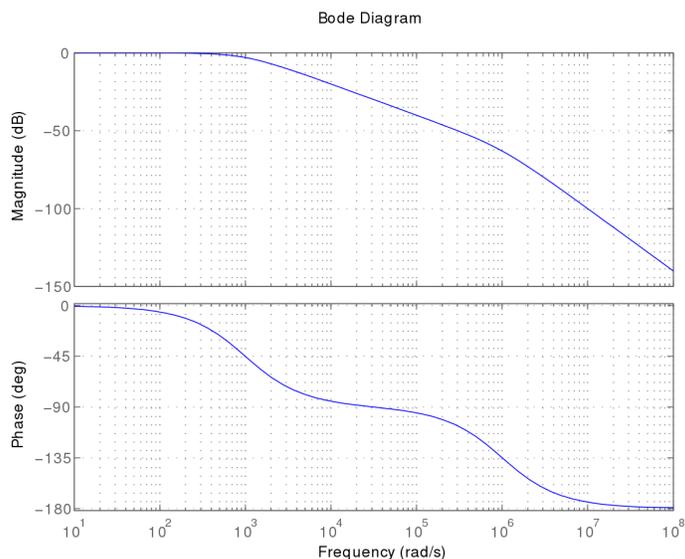


Abbildung 19: Bode-Diagramm

Die unabhängige Frequenz ω wird dabei oft in \log_{10} dargestellt, mit der Einheit $\frac{rad}{s}$. Der Betrag der Frequenzantwort wird dabei in dB angegeben.

$$m(\omega)_{dB} = |\Sigma(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log_{10} |\Sigma(j\omega)| \quad (84)$$

Die Phase wird normalerweise linear in Radian angegeben. Da Der Betrag und die Frequenz als \log_{10} gegeben ist, können System gut als Addition von Standardelementen gezeichnet werden.

$$\begin{aligned} 20 \cdot \log_{10} |\Sigma_1 \cdot \Sigma_2| &= 20 \cdot \log_{10} |\Sigma_1| + 20 \cdot \log_{10} |\Sigma_2| \\ \angle(\Sigma_1 \cdot \Sigma_2) &= \angle\Sigma_1 + \angle\Sigma_2 \end{aligned} \quad (85)$$

7.3.1 Regeln um Zeichnen vom Bode-Diagramm

Bode Diagramme kann man relativ einfach von Hand zeichnen. Dafür gibt es folgende Regeln, mit welchen man die Diagramme zeichnen kann.

Type	Magnitude Change	Phase Change
Stable Pole	-20 dB/dec	-90°
Unstable Pole	-20 dB/dec	+90°
Minimumphase zero	+20 dB/dec	+90°
Non-minimumphase zero	+20 dB/dec	-90°
Time Delay	0 dB/dec	$-\omega \cdot T$

Tabelle 1: Regeln zum Zeichnen vom Bode Diagramm

7.3.2 Bodes Law

Es stellt sich nun die Frage ob die Phase und der Betrag unabhängige Größen sind. Dies ist nicht der Fall und das Gesetz von Bode beschreibt diese Tatsache.

Das Gesetz von Bode gilt für Systeme welche asymptotisch stabil und minimalphasig sind, also weder Pol noch Nullstellen in der rechten komplexen Halbebene haben. Für diese Systeme gilt:

Der Gradient des Betrags bestimmt die Phasenverschiebung.

Mit Konkreten Zahlen aufgedrückt:

Ist die *Steigung* des Betrags $|\Sigma(j\omega)|$ über eine bestimmte Frequenz Dekade konstant mit $\kappa \cdot 20 \text{ dB/dec}$, so ist die Phasenverschiebung etwa $\kappa \cdot \pi/2$.

7.4 Asymptotische Systemeigenschaften

Aus der Frequenzantwort kann man sehr schnell den **Systemtyp k** und den **relativen Grad $r = n - m$** bestimmen. Dabei wird ein System durch die folgende allgemeine Transferfunktion dargestellt.

$$\Sigma(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^k \cdot (s^{n-k} + a_{n-1-k} \cdot s^{n-1-k} + \dots + a_1 \cdot s + a_0)}, \quad a_0 \neq 0$$

Diese Form soll Pole bei $s = 0$ hervorheben.

- der relative Grad eines System ist gegeben durch $r = n - m$
- Der Systemtyp ist gegeben durch die Zahl k

Die Zwei Zahlen können auch aus dem Bode Diagramm abgelesen werden.

7.4.1 Systemtyp k

Um den System Typ k zu bestimmen, wird die Phase für Frequenz $\omega \rightarrow 0$ betrachtet.

$$\Sigma(j\omega)|_{\omega=0} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{(j\omega)^k} = \frac{b_0}{a_0} \cdot (-j)^k \cdot \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega^k} \quad (86)$$

Die Phase ergibt sich dann als

$$\angle \Sigma(0) = \angle \left\{ \frac{b_0}{a_0} \right\} \cdot \angle \{ (-j)^k \cdot \infty \} = \left(\text{sign} \left(\frac{b_0}{a_0} \right) - 1 \right) \cdot \frac{\pi}{2} - k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (87)$$

Daraus ergibt sich

$$\angle \Sigma(0) = \begin{cases} -k \cdot \frac{\pi}{2} & \text{if } \text{sign} \left(\frac{b_0}{a_0} \right) > 0 \\ -\pi - k \cdot \frac{\pi}{2} & \text{if } \text{sign} \left(\frac{b_0}{a_0} \right) < 0 \end{cases} \quad (88)$$

Der Systemtyp k ist in anderen Worten auch die Vielfachheit der Pole im Ursprung bzw. der Anzahl offener Integratoren $\frac{1}{s^k}$.

7.4.2 Relativer Grad

Zur Bestimmung des Relativen Grades muss man die Steigung des Betrags für $\omega \rightarrow \infty$ betrachten.

$$\sigma(s) = \frac{b_m \cdot s^m}{s^n} + \mathcal{O} \quad (89)$$

Wenn man jetzt die Logarithmische Schreibweise verwendet und den Limes anwendet erhält man.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \log |\Sigma(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (\log |b_m \cdot (j\omega)^m| - \log |(j\omega)^n|) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (\log(b_m) + m \cdot \log(\omega) - n \cdot \log(\omega)) \quad (90)$$

Leitet man nun beide Seiten nach $\log(\omega)$ ab erhält man.

$$\frac{\partial}{\partial \log(\omega)} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \log |\Sigma(j\omega)| = m - n = -r \quad (91)$$

Daraus muss man schliessen, dass das Betrag Diagramm sich an eine Gerade mit Steigung $-r \cdot 20dB$ anschmiegt.

$$\boxed{\frac{\partial |\Sigma(j\omega)|_{dB}}{\partial \log(\omega)} = -r \cdot 20dB} \quad (92)$$

7.5 Systemidentifikation Mithilfe der Frequenzantwort

Da die Frequenzantwort meist relativ gut gemessen werden kann, wird jetzt angeschaut wie man aus einem Bodeplot die Transferfunktion ablesen kann. Dabei fügt man iterativ verschiedene Standartelemente zusammen.

Eine kleine Anleitung wie man am besten vorgehen soll:

1. Zuerst eine Mittelwert Kurve an die Frequenzantwort fitten.
2. Den Systemtyp k und Relativen Grad r bestimmen
3. Die einzelnen Abschnitte äussfindig machen, dadurch erhält man Additionen
4. Mit Tiefen Frequenzen anfangen dann zu höheren gehen
5. Das erste Element sollte ein Gain $k \neq 1$ haben, alle anderen schon.

Um das genaue Vorgehen besser zu verstehen, sollte man am Besten das Beispiel im Buch auf Seite 127 anschauen. Zudem sollte man sich die meist gebrauchten Standard Elemente mal anschauen.

7.6 Modell Unsicherheit

Ein Modell entspricht nie genau der Realität und wird immer mit Fehlern behaftet sein. Wir wollen diesen Fehler bzw. diese Unsicherheit mathematisch Beschreiben.

Da wir unser System mit einer komplexen Transferfunktion beschrieben haben, liegt es nahe das man auch für die Fehlerbeschreibung die gleiche Darstellungsart verwendet.

Dabei wird die Unsicherheit auch als eine Transferfunktion $W_2(s)$ beschrieben. Es wird angenommen, das das wahre System $\Sigma_t(s)$ Element eines Unterraum \mathcal{S} ist.

$$\Sigma_t(s) \in \mathcal{S} \quad (93)$$

Wobei der Unterraum \mathcal{S} alle plausiblen Transferfunktion beinhaltet und wie folgt definiert ist

$$\mathcal{S} = \{\Sigma(s) \cdot (1 + \Delta \cdot W_2(s)) \mid |\Delta| \leq 1, \angle \Delta \in [-\pi, \pi]\} \quad (94)$$

Wobei $\Sigma(s)$ das Nominalsystem, $W_2(s)$ die Systemunsicherheit und Δ der Unsicherheits-“Generator” ist.

Diese Definition der Unsicherheit resultiert in einem “Schlauch” der um das Nominalsystem geht und das wahre System beinhaltet.

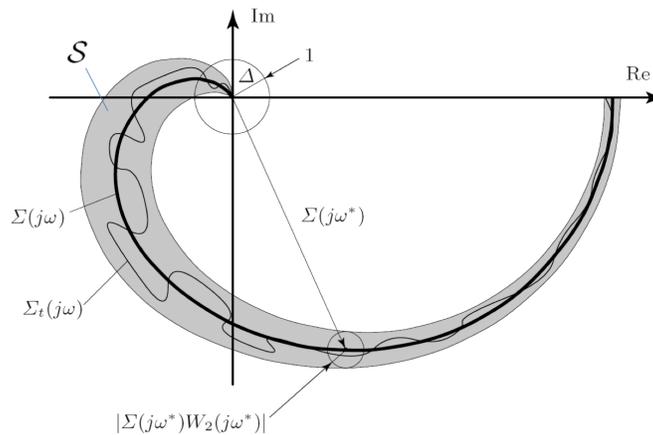


Abbildung 20: Unsicherheits Darstellung im Nyquist Diagramm

Die Systemunsicherheit zu berechnen ist im Allgemeinen sehr schwierig. Es werden meist 3 Ansätze zur Berechnung gewählt. Wir werden nur eine davon anschauen, die Anderen können im Buch ab Seite 130 nachgelesen werden.

7.6.1 Bestimmung der Unsicherheit durch die gemessenen Daten:

Dieser Ansatz basiert auf Daten aus Messungen am System.

- Man macht an einem System $k = 1, \dots, K$ Messungen
- Dabei werden bei jeder Frequenz $i = 1, \dots, I$ Messungen durchgeführt

Dadurch erhält man folgende Vektoren bzw. Matrizen.

$$\omega \in \mathbb{R}^I, \quad M \in \mathbb{R}^{I \times K}, \quad \Phi \in \mathbb{R}^{I \times K} \quad (95)$$

Wobei ω die Frequenzen, M die Magnituden $m_{i,k}$ und Φ die Phasen $\varphi_{i,k}$ der Messungen beinhalten.

Plots der Messungen haben meist eine charakteristische Form.

- Für höhere Frequenz ist die Messungen unsicherer.
- Die Phase ist im Allgemeinen weniger konsistent.

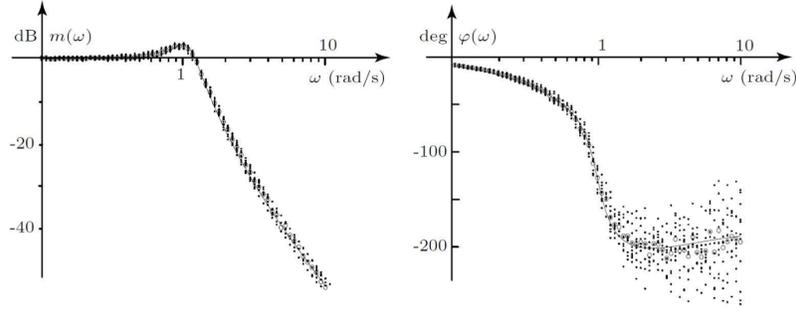


Abbildung 21: Gemessene Frequenzantworten des System

Man kann nun ein nominelles System an die Daten Fitten, welches im Allgemeinen folgende Form hat.

$$\Sigma(j\omega_i) = m_i \cdot e^{j \cdot \varphi_i}, \quad i = 1, \dots, I \quad (96)$$

Das “echte” System ist unbekannt, jedoch muss die folgende Gleichung laut Definition immer halten.

$$m_i^t \cdot e^{j \cdot \varphi_i^t} \in \{m_i \cdot e^{j \cdot \varphi_i} \cdot (1 + \Delta \cdot W_2(j\omega_i)) \mid |\Delta| \leq 1\}, \quad i = 1, \dots, I \quad (97)$$

Da für eine bestimmte Frequenz die Phase keine Rolle spielt, reicht es die Amplituden zu vergleichen. Daraus ergibt sich folgende Bedingung an W_2 .

$$\left| \frac{m_i^t \cdot e^{j \cdot \varphi_i^t}}{m_i \cdot e^{j \cdot \varphi_i}} - 1 \right| \leq |W_2(j\omega_i)|, \quad i = 1, \dots, I \quad (98)$$

Man kennt das echt System zwar nicht, jedoch kann man die Messung als Approximation des echten System anschauen. Dadurch ergibt sich die Approximation der Systemunsicherheit.

$$\left| \frac{m_{i,k} \cdot e^{j \cdot \varphi_{i,k}}}{m_i \cdot e^{j \cdot \varphi_i}} - 1 \right| < |W_2(j\omega_i)|, \quad i = 1, \dots, I, \quad k = 1, \dots, K \quad (99)$$

Wenn man alle diese Elemente plottet, resultiert daraus eine Kurve für $|W_2|$. Um die Funktion W_2 zu bestimmen,

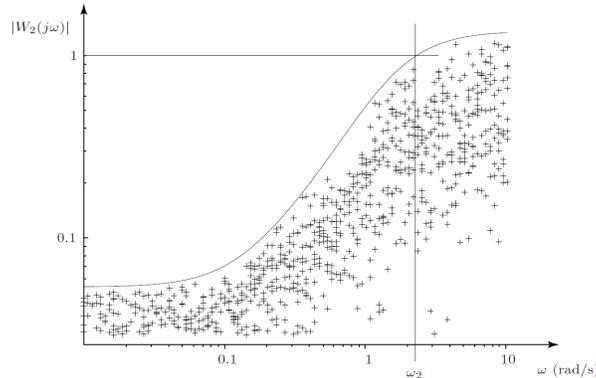


Abbildung 22: Unsicherheitsplot

fängt man mit einer einfachen Verstärkung $W_{2,0}(s) = k_W$ an, welche die Unsicherheit bei tiefen Frequenzen begrenzt. Anschließend werden verschiedene Lead Elemente hinzugefügt mit der Form.

$$W_{2,l} = W_{2,l-1} \cdot \frac{s/\omega_{a,l} + 1}{s/(k_l \cdot \omega_{a,l}) + 1}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (100)$$

Die Parameter $\omega_{a,l}$ definieren ab wann die Effekte des Lead Elemente beginnen. Man hat bei dieser Berechnung die Phase einfach ignoriert².

²Dies ist auch zulässig, da durch den Unsicherheits-“Generator” Δ das ganze Phasenspektrum von $[-\pi, \pi]$ abgedeckt wird, werden alle Phaseninformationen von W_2 aufgehoben.

8 Analyse von Feedback Systemen

Wir haben jetzt die Systeme mathematisch beschrieben, durch die Transferfunktion. Nun wird die Analyse der Systeme angeschaut. Dabei gehen wir insbesondere auf Feedback Systeme ein, da diese eine grosse Bedeutung in der Regelungstechnik haben.

Ab jetzt werden die Systeme nicht mehr allgemein als $\Sigma(s)$ sondern werden wie in Abbildung 16 in eine Strecke(Plant) $P(s)$ und einen Controller(Controller) $C(s)$ unterteilt.

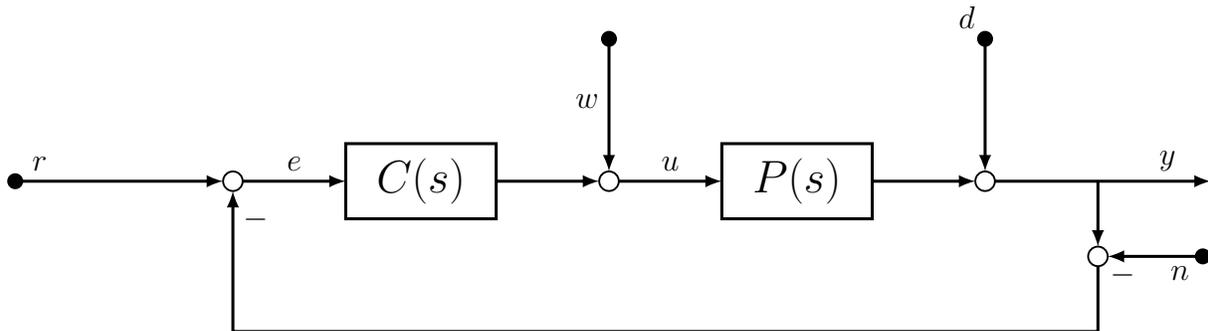


Abbildung 23: Standard Control System

Zur Analyse der Feedback Systeme müssen wir erst einige Definition einfügen.

Loop Gain $L(s)$: Die offene Transferfunktion vom Fehler zum Ausgang (ohne Feedback).

$$L(s) = P(s) \cdot C(s) \quad (101)$$

Closed Loop: geschlossene Transferfunktion (mit Feedback)

Dabei können zwei Arten von Closed Loop definiert werden.

- Vom Eingang zum Ausgang
- Von der Störung (d) zum Ausgang

Von der Störung zum Ausgang: $r = n = 0$

$$y = D(s) + P \cdot C \cdot (-y) \quad \rightarrow \quad y = D(s) + L(s) \cdot (-y) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{1 + L(s)} \cdot D \quad (102)$$

Der Term

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (103)$$

erhält dabei den Namen *Sensitivität*.

Vom Eingang zum Ausgang: $d = 0$

$$y = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \cdot R(s) \quad (104)$$

Der Term

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (105)$$

erhält dabei den Namen *komplementäre Sensitivität*.

Mit den eingeführten Definitionen, kann man das komplette dynamische Verhalten des System beschreiben.

$$Y(s) = S(s) \cdot (D(s) + P(s) \cdot W(s)) + T(s) \cdot (R(s) + N(s)) \quad (106)$$

Diese Gleichung beschreibt den Einfluss jedes einzelnen Eingang. Da das System linear ist, kann man die Einflüsse einzeln betrachten und anschließend superponieren.

Man sieht aber, dass man Kompromisse eingehen muss, da oft negative und positive Einflüsse durch die einzelnen Sensitivitäten beeinflusst sind. Zudem kann man für sehr grosse $1 \ll L(s)$ und sehr kleine $L(s) \ll 1$ folgende Approximationen annehmen.

$$|L(s)| \gg 1 \Rightarrow S(s) \approx \frac{1}{L(s)} \quad \text{and} \quad T(s) \approx 1 \quad (107)$$

$$|L(s)| \ll 1 \Rightarrow S(s) \approx 1 \quad \text{and} \quad T(s) \approx L(s) \quad (108)$$

Weiter erkennt man, dass

$$T(s) + S(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} + \frac{1}{1 + L(s)} = 1, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (109)$$

8.1 Stabilität eines Closed Loop System

Wie in Kapitel 7 gesehen, ist ein offenes System BIBO stabil, wenn alle Pole und Nullstellen in der linken komplexen Halbebene liegen. Für Closed Loop Systeme, gelten aber noch weiter Anforderungen an die Stabilität. Ein gutes Beispiel dazu ist im Buch auf Seite 144. Als Folge daraus ergibt sich folgende Regel.

Ein System ist dann und nur dann intern asymptotisch stabil, wenn alle neun Transferfunktionen asymptotisch stabil sind.

Die neun Transferfunktion sind in der folgenden Matrix enthalten.

$$\begin{bmatrix} U(s) \\ Y(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(s) & -S(s) \cdot C(s) & S(s) \cdot C(s) \\ S(s) \cdot P(s) & S(s) & T(s) \\ -S(s) \cdot P(s) & -S(s) & S(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W(s) \\ D(s) \\ R(s) \end{bmatrix} \quad (110)$$

Um nun zu überprüfen ob das System intern asymptotisch stabil ist, kann man folgende Bedingungen prüfen. Das Closed Loop System ist asymptotisch stabil, dann und nur dann wenn $1 + L(s)$ nur Nullstellen mit negativem Realteil haben und das man *keine* instabile, nichtminimalphasige Nullstellen oder Polstellen gekürzt hat.

Ab jetzt wird dies für alle System angenommen.

8.2 Nyquist Theorem

Mit dem Nyquist Theorem, kann man Testen ob ein Closed Loop System asymptotisch Stabil ist, indem man die offene Frequenzantwort $L(j\omega)$ untersucht.

Nyquist Theorem:¹

Lass n_+ die Anzahl Pole mit positivem Realteil und n_0 die Anzahl Pole mit null Realteil von der offenen Transferfunktion sein. Und lass n_c die Anzahl Umdrehungen um den Punkt -1 von $L(j\omega)$ in positive Richtung gezählt im Gegenuhrzeigersinn für $\omega \in [-\infty, \infty]$ sein. Dann ist das Closed Loop System asymptotisch und nur dann, wenn gilt

$$n_c = \frac{n_0}{2} + n_+$$

Dieses Theorem ist sehr nützlich, da man nur durch die Open Loop Transferfunktion $L(s) = P(s) \cdot C(s)$, welche linear in $C(s)$ ist, benötigt um die Stabilität zu prüfen. Dadurch kann man einfacher den Controller $C(s)$ auslegen. Zudem muss man nur die Frequenzantwort $L(j\omega) = P(j\omega) \cdot C(j\omega)$ kennen.

¹Denn Beweis dafür ist im Buch im Appendix B.3.

Einige Bemerkungen zum Theorem:

- Man weiss dass $L(s)$ auch als eine Rationale Funktion mit realen Koeffizienten ist. Daher gilt $L(-j\omega) = \overline{L(j\omega)}$. Dies Resultiert in einer Kurve, welche spiegelsymmetrisch zur reellen Achse ist.
- Wenn $n_0 > 0$ ist, heisst dies es gibt Pole bei welchen der Graf für 0^+ und 0^- gegen Unendlich geht. Diese Unstetigkeit zählt als eine halbe Umdrehung.
- Wenn der Graph von $L(s)$ weit am Punkt -1 vorbei geht, bedeutet dies, das System ist Robust und man erträgt grosse Modellunsicherheiten.
- Das Nyquist Theorem ist auch valid für Systeme mit einem Time Delay.

8.2.1 Robustheit eines System

Mit dem Nyquist Theorem kann man auch die Robustheit eines System angeben. Die Robustheit besagt wie gut ein System mit Modellunsicherheiten umgehen kann. Dabei können drei Werte definiert werden. Die *Phasenreserve* φ , die *Betragsreserve* γ und die *minimal return difference* μ_{min} .

Die *minimal return difference* ist wie folgt definiert.

$$\mu_{min} = \min_{\omega} |1 + L(j\omega)| \quad (111)$$

Man kann aber nur die Robustheit auf Phasendifferenzen *oder* Betragsdifferenz überprüfen, aber nie beide gleichzeitig.

Zur Bestimmung wird angenommen, dass das reale System folgende Form hat.

$$L_t(s) = e^{-\alpha \cdot \frac{s}{\omega_c}} \cdot k \cdot L(s) \quad (112)$$

wobei $L(s)$ das nominale System, α die Phasendifferenz und k die Betragsdifferenz ist. Die Stabilität des System ist weiterhin gegeben wenn, $\alpha < \varphi$ und $k < \gamma$.

Wenn beide Fehler gleichzeitig Auftreten, sind die Bedingungen für α und k nicht mehr gültig.

8.2.2 Robustes Nyquist Theorem

Das Nyquist Theorem wurde nur auf das nominale System angewendet. Man kann das Theorem aber auch auf das System mit Unsicherheit erweitern. Dafür wird die Modellunsicherheit verwendet, welche im Kapitel 7 eingeführt wurde. Diese kann neu geschrieben werden und es ergibt sich folgende Modellunsicherheit.

$$\mathcal{S}_L = \{P(s) \cdot C(s) \cdot (1 + W_2(s) \cdot \Delta) \mid |\Delta| \leq 1, \quad \angle \Delta \in [-\pi, \pi]\} \quad (113)$$

Man nimmt dabei an, dass das wahre System $L_t(s)$ und das nominale System $L(s)$ die gleiche Anzahl n_+ instabiler Pole und n_0 haben. **Robustes Nyquist Theorem:**

Der unsicher Closed Loop ist asymptotisch stabil, wenn das nominale System asymptotisch stabil ist und folgende Ungleichheit erfüllt ist.

$$|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|, \quad \forall \omega \in [0, \infty) \quad (114)$$

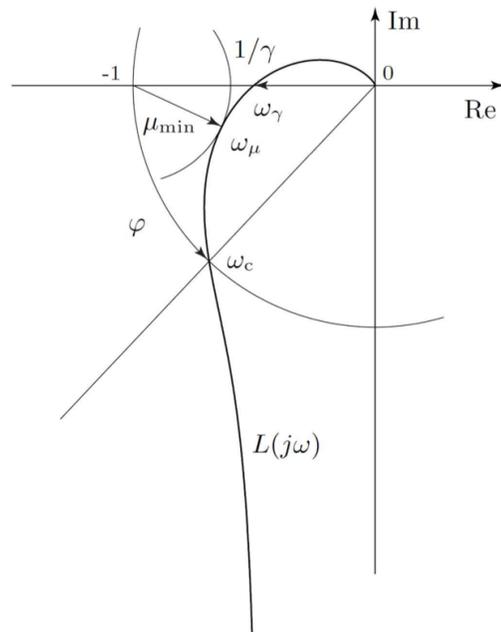
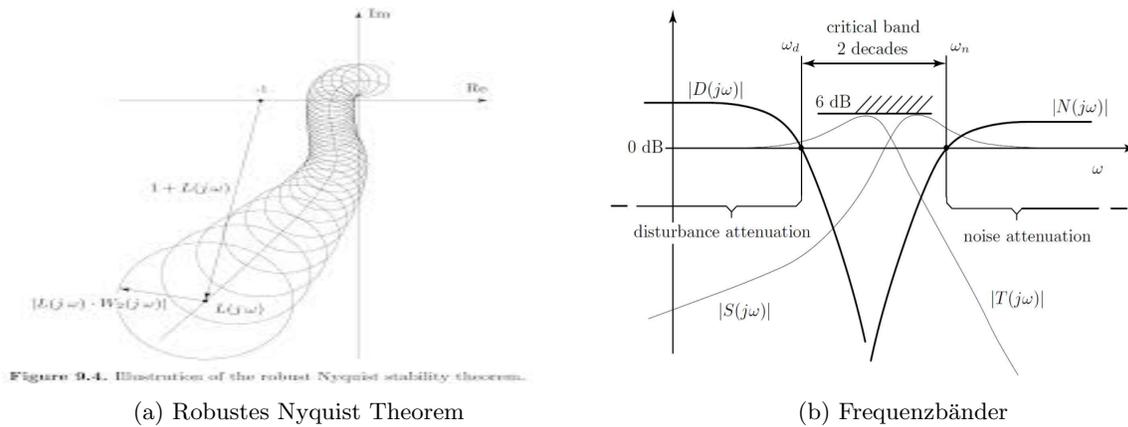


Abbildung 24: Nyquist Theorem

Diese Anforderung ergibt folgende Darstellung.



(a) Robustes Nyquist Theorem

(b) Frequenzbänder

Abbildung 25: Graphische Interpretation des robusten Nyquist Theorem

8.3 Einschränkungen vom Closed Loop System

Damit man ein System sinnvoll regeln kann, müssen einige Anforderungen an das System eingehalten werden.

8.3.1 Disturbance und Noise Einschränkung

Die erste Einschränkung hat den Ursprung in der Beziehung zwischen $S(s)$ und $T(s)$.

$$T(s) + S(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} + \frac{1}{1 + L(s)} = 1, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (115)$$

Durch dies Voraussetzung kann nur eine der Beiden viel kleiner als 1 sein. Diese Beziehung hat eine wichtige Konsequenz auf den Ausgang.

$$Y(s) = S(s) \cdot D(s) + T(s) \cdot N(s) \quad (116)$$

Wenn man dies auf den Betrag des Ausgang erweitert erhält man.

$$|Y(j\omega)| \leq |S(j\omega)| \cdot |D(j\omega)| + |T(j\omega)| \cdot |N(j\omega)| \quad (117)$$

Daraus folgt, dass man im *worst case* Szenario immer nur eine der Störungen unterdrücken kann. Der worst case ist sehr realistisch da die Störung und das Rauschen oft in andern Frequenzbändern liegen.

Die Abbildung (25) (b) zeigt genau diesen Zusammenhang, bei einem optimalen System, bei welchem die Störung unter einer bestimmten Frequenz $\omega < \omega_d$ und das Rauschen über einer bestimmten Frequenz $\omega > \omega_n$ liegen.

8.4 Einschränkungen an die Crossover Frequenz

Weiter kann man Anforderungen an die Crossover Frequenz stellen. Die Crossover Frequenz ist dabei die Frequenz bei welcher der Open Loop $L(j\omega)$ den Betrag 1 $|L(j\omega_c)| = 1 = 0 \text{ dB}$ annimmt. Die Crossover Frequenz vom Open Loop ist auch verbunden mit der Bandbreite ω_b von $T(s)$ und hat einen Einfluss auf das Systemverhalten im der Time Domain.

Die Einschränkungen an ω_c werden durch die Strecke und die Unsicherheit definiert. Dabei wird angenommen, dass das System maximal nur ein instabiler Pol π^+ und eine nichtminimalphasige Nullstelle ζ^+ hat (beide sind real).

$$P_3(s) = P_0(s) \cdot \frac{s - \zeta^+}{s - \pi^+} \quad (118)$$

wobei $P_0(s)$ ein stabiles und minimalphasiges System ist.

8.4.1 Einschränkungen durch die Modellunsicherheit

Im Falle des einfachsten Falls $P(s) = P_0(s)$, impliziert die Modellunsicherheit eine *obere Limite* and die Crossover Frequenz. Dies kann aus dem Robusten Nyquist Theorem abgeleitet werden.

$$|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|, \quad \forall \omega \in [0, \infty) \quad (119)$$

wird zu

$$\frac{|L(j\omega)|}{1 + |L(j\omega)|} < \frac{1}{|W_2(j\omega)|} \quad (120)$$

aus der Definition von $T(s)$ ergibt sich.

$$|T(j\omega)| < |W_2^{-1}(j\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (121)$$

Dabei haben wir gesehen, dass $|T(j\omega)|$ nur klein sein kann, wenn $|L(j\omega)|$ klein ist. Da aber $W_2(j\omega)$ mit steigendem ω grösser wird, wird $W_2^{-1}(j\omega)$ kleiner. Daraus folgt, dass ω_c ein oberes Limit hat, welches deutlich kleiner ist als ω_2 , bei welchem $|W_2(j\omega_2)| = 1 = 0 \text{ dB}$. Ab der Frequenz ω_2 kann das System um 100% daneben liegen.

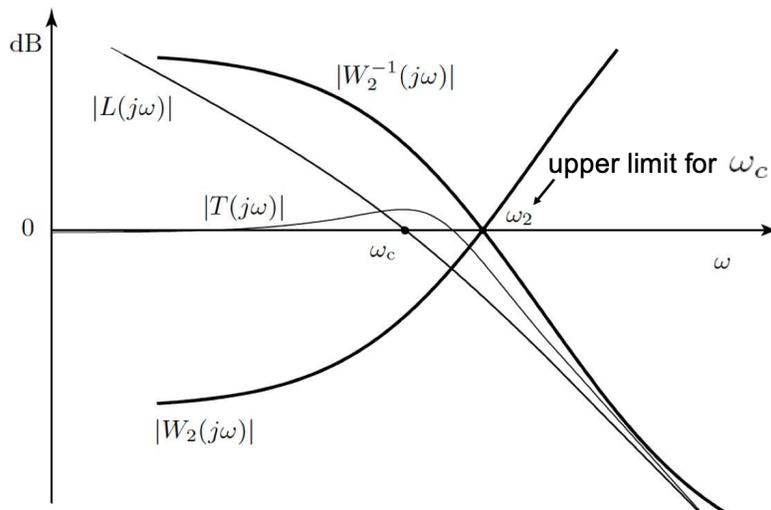


Abbildung 26: Crossover Frequenz im Vergleich zu ω_2

8.4.2 Einschränkungen durch nichtminimalphasige Nullstellen

Für Systeme mit nichtminimalphasigen Nullstellen ist das Frequenzband ebenfalls nach oben limitiert. Dies sieht man wenn man den einfachsten Regler $C(s) = k_p$ einsetzt. Für eine Strecke der Form $P(s) = n(d)/d(s)$, bei welcher die nichtminimalphasige Nullstelle auftritt, ergibt sich.

$$S(s) = \frac{d(s)}{d(s) + k_p \cdot n(s)}, \quad T(s) = \frac{k_p \cdot n(s)}{d(s) + k_p \cdot n(s)} \quad (122)$$

beide haben dabei das charakteristische Polynom

$$a(s) = d(s) + k_p \cdot n(s) \quad (123)$$

wie man sieht, nähern sich für $k_p \rightarrow \infty$ die Nullstellen, welche die Pole von $T(s)$ und $S(s)$ sind, an die Nullstellen von $n(s)$ an, welche die Nullstellen von der Strecke sind. Wenn nun eine oder mehrere dieser Nullstellen der Strecke nichtminimalphasig sind, wird das System für eine bestimmte Verstärkung $k_p = k_{p,crit}$ instabil. Daher ist die Bandbreite für die Crossover Frequenz begrenzt $\omega_c < \zeta^+$.

Time Delays sind ähnlich wie nichtminimalphasige Nullstellen, wobei man $\zeta^+ = 1/T$ wählt.

8.4.3 Einschränkungen durch instabile Pole

Bei Systemen mit instabilen Polen

$$P_2(s) = P_0(s) \cdot \frac{1}{s - \pi^+} \quad (124)$$

haben die Pole genau den umgekehrten Effekt wie nichtminimalphasige Nullstellen. Diese Systeme können nur stabilisiert werden, wenn die Crossover Frequenz des Open Loop $L(s)$ grösser als π^2 ist. Dies kann am besten durch ein Beispiel illustriert werden. Es sei das einfache System

$$P(s) = \frac{1}{a - s}, \quad a > 0 \quad (125)$$

mit einem instabilen Pol $\pi^+ = a$ und der Controller

$$C(s) = k_p \quad (126)$$

gegeben.

Dieses System hat laut dem Nyquist Diagramm eine instabile Nullstelle $n_+ = 1$, daher muss $n_c \stackrel{!}{=} 1$ gelten damit das System stabil ist. Die folgende Abbildung zeigt das Nyquist Diagramm von $L(j\omega)$ und $P(j\omega)$. Damit dies erfüllt

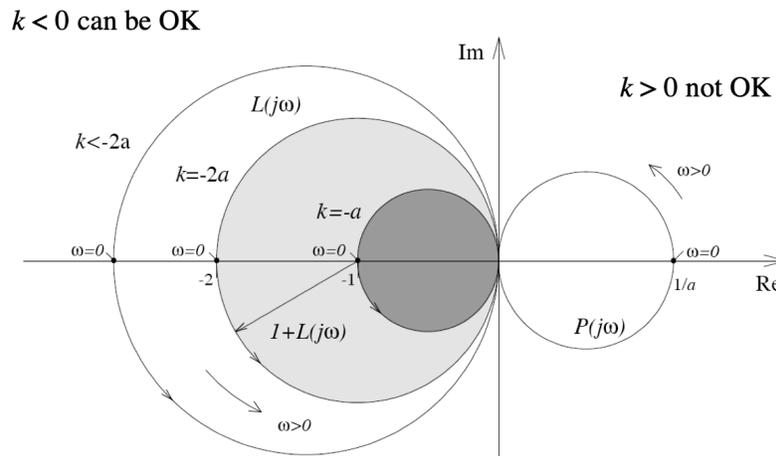


Abbildung 27: Plant und Loop Gain des System

ist, muss $k_p < -a$ sein. Wenn man nun die Crossover Frequenz für eine bestimmte Verstärkung k_p berechnet sieht man dass $\omega_c \propto a$ ist. Daraus folgt, desto grösser a desto grösser muss ω_c sein. Damit man keine Probleme bekommt, muss also ω_c grösser sein als π^+ .

8.4.4 Einschränkungen zusammengefasst

Damit man sicher ist, das es zu keinen Problemen kommt, führt man noch Sicherheiten zu den Einschränkungen ein. Dabei ergibt sich ein Frequenzband in welchem ω_c liegen sollte.

$$\omega_c = \left[\max(10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \pi^+), \min\left(\frac{\zeta^+}{2}, \frac{\omega_T}{2}, \frac{\omega_2}{5}, \frac{\omega_n}{10}\right) \right] \quad (127)$$

Dabei ist ω_d die vorgegebene maximale Disturbance Rejection Frequenz, π^+ die dominante(schnellste) Polstelle der Strecke, ζ^+ die dominante(langsamste) Nullstelle der Strecke, ω_T die Frequenz, welche durch den Time Delay gegeben ist, ω_2 die Frequenz ab der das Modell zu 100% falsch ist und ω_n die vorgegebene minimale Noise Rejection Frequenz. Für eine konservativere Systeme oder Modelle kann man.

$$\omega_c = \left[\max(10 \cdot \omega_d, 5 \cdot \pi^+), \min\left(\frac{\zeta^+}{5}, \frac{\omega_T}{5}, \frac{\omega_2}{10}, \frac{\omega_n}{10}\right) \right] \quad (128)$$

Es gibt noch weiter Einschränkungen welche im Buch ab Seite 150 beschrieben werden.

9 Spezifikationen für das Feedback System

In diesem Kapitel werden Anforderungen an die Leistung des Closed Loop System definiert. Ziel dieses Kapitels ist es ein Feedback Controller, welcher als nächstes eingeführte Anforderungen so gut wie möglich erfüllen kann. Zudem sollen diese Anforderungen auch für Personen, welche sich nicht mit Regelungstechnik auskennen, gut verständlich sein.

9.1 Nachlauffehler

Der statische Nachlauffehler ist der Fehler der für $t \rightarrow \infty$ übrig bleibt.

$$e_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (129)$$

Wenn man annimmt das alle Input Signale unabhängig von den anderen Signalen einen Einfluss auf das System haben, kann man sie auch einzeln untersuchen. Wenn man nun zur Einfachheit die Input Signale als $h(t)$, mit $\mathcal{L}(h(t) = \frac{1}{s})$, modelliert, resultiert daraus die Error Function

$$E(s) = S(s) \cdot (R(s) + N(s) - D(s) - P(s) \cdot W(s)) \quad (130)$$

für $r(t) = h(t)$ oder $n(t) = h(t)$ oder $d(t) = -h(t)$

$$E(s) = S(s) \cdot \frac{1}{s} \quad (131)$$

Wenn man das Laplace Endwert Theorem verwendet ergibt dies.

$$e_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot S(s) \cdot \frac{1}{s} = S(0) \quad (132)$$

Folglich ist nach Definition von $S(s)$

$$e_{\infty} = \frac{1}{1 + L(0)} \quad (133)$$

Dass heisst, desto grösser der statische Loop Gain $|L(0)|$ ist, desto kleiner ist $|e_{\infty}|$. Damit $|e_{\infty}| = 0$ gilt, muss das System $k > 0$ Ordnung haben. Folgende Tabelle beschreibt die mathematischen Voraussetzungen für die Standard Situation, $P(0) > 0$.

Input Signal	$r(t), n(t), d(t)$	$w(t)$
static error is tolerable: $ e_{\infty} \leq e_{max}$	$\left \frac{1}{1+P(0) \cdot C(0)} \right \leq e_{max}$ $C(0) \geq \left(\frac{1}{e_{max}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{P(0)}$	$\left \frac{-P(0)}{1+P(0) \cdot C(0)} \right \leq e_{max}$ $C(0) \geq \left(\frac{1}{e_{max}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{P(0)}$
static error is <i>not</i> tolerable: $e_{\infty} = 0$	$P(s)$ or $C(s)$ have to be type $k \geq 1$	$C(s)$ has to be of type $k \geq 1$

Tabelle 2: Standardfall

9.2 Spezifikationen basierend auf ein System zweiter Ordnung

Mit dieser Methode kann man die Werte für den maximalen Überschuss $\hat{\epsilon}$ und die Antwortzeit t_{90} in Anforderungen an das Open Loop System umwandeln. Der maximale Überschuss und die Antwortzeit werden in der Abbildung 21 dargestellt.

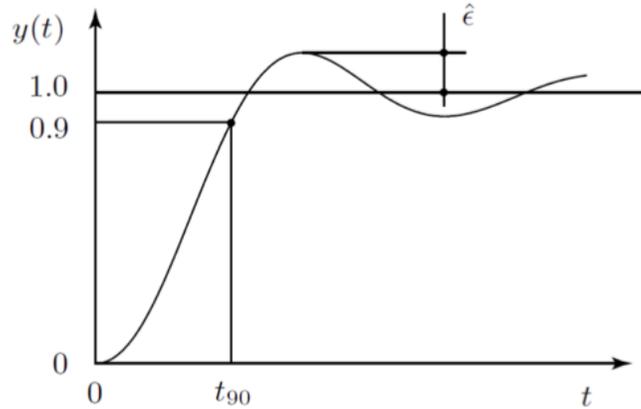


Abbildung 28: Overshoot and Response Time

Hier wird verwendet, dass sich viele Closed Loop System annäherungsweise wie ein System zweiter Ordnung verhalten.

$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 + \omega_0^2} \quad (134)$$

Man kann durch einige Berechnungen, welche im Buch auf Seite 168 durchgeführt wurden, folgende Gleichheiten zeigen.

$$\delta = \frac{-\ln(\hat{\epsilon})}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\hat{\epsilon})}} \quad (135)$$

$$\omega_0 = (0.14 + 0.4 \cdot \delta) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{t_{90}} \quad (136)$$

Um nun ω_0 und $\hat{\epsilon}$ in die Open Loop Elemente ω_c und φ umzuwandeln muss man erst $L(s)$ in Abhängigkeit von $T(s)$ aufschreiben.

$$L(s) = \frac{T(s)}{1 - T(s)} = \frac{\omega_0^2}{s \cdot (s + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0)} \quad (137)$$

Da einige im Buch auf Seite 169 aufgelistet Eigenschaften gelten, kann man folgende Gleichheit annehmen.

$$\boxed{\omega_c \approx \frac{1.7}{t_{90}}} \quad (138)$$

$$\boxed{\varphi \approx 71^\circ - 117^\circ \cdot \hat{\epsilon}} \quad (139)$$

Diese Approximation gilt nur für "Simple" Loop Gains und für $\delta \in [0.45, 1]$.

9.3 Frequenz Domain Spezifikationen

Diese Anforderungen im Zeitbereich sollen nun in Anforderungen im Frequenzbereich umgewandelt werden. Dabei stellt man Grenzen an $S(j\omega)$ und $T(j\omega)$. Wie man weiss ist der Ausgang

$$Y(s) = S(s) \cdot D(s) + T(s) \cdot N(s) \quad (140)$$

Als Ansatz zur Bestimmung der Spezifikationen, untersucht man vom worst case Szenario die Frequenzantwort. Dabei kann der Ausgang folgendermassen umgeschrieben werden.

$$Y(j\omega) = S(j\omega) \cdot D(j\omega) + T(j\omega) \cdot N(j\omega) \quad (141)$$

Man weiss das eine kleine Sensitivität $S(j\omega)$ eine gute Störungsunterdrückung und Reference Tracking hat und eine kleine komplementäre Sensitivität eine gute Rauschunterdrückung und eine gute Robustheit gegen Modellfehler. Man weiss aber, dass man nicht beide kleine wählen kann. Auch sind $|S(j\omega)|$ und $T(j\omega)$ um die Crossover Frequenz auch beide grösser als 1. Dies kann man in der Abbildung (25) (b) gut sehen. Diesen Peak sollte man so tief wie möglich halten damit keine Störungs- bzw. Rauschverstärkung stattfindet.

Eine gute Spezifikation könnte folgendermaßen aussehen.

$$\|S\|_\infty < S_{max}, \quad \|T\|_\infty < T_{max}, \quad S_{max}, T_{max} > 1 \quad (142)$$

Man kann für diese Spezifikationen Voraussetzungen an $L(j\omega)$ stellen.

$$\frac{1}{S_{max}} < 1 + L(j\omega) \quad (143)$$

10 Feedback Control Design

Bis jetzt haben wir die Systeme beschrieben und deren Stabilität angeschaut. Jetzt wollen wir sie Regeln, damit sie die von uns geforderten Spezifikationen einhalten können.

10.1 PID Controller

Die meisten Systeme, welche man in der Praxis antrifft, sind stabile nichtminimalphasige Tiefpass Systeme von kleiner Ordnung. Hierfür ist der PID sehr effektiv.

Ein PID Regler besteht aus drei Teilen.

- **Proportional Teil:** dieser Teil ist eine einfache Verstärkung

$$k_p \quad (144)$$

- **Integrator:** dieser Teil hat die Form:

$$\frac{1}{T_i \cdot s} \quad (145)$$

Er summiert den Fehler auf und arbeitet solange, bis kein Nachlauffehler vorhanden ist.

- **Derivative Teil:** dieser Teil leitet das Fehlersignal ab und hat die Form:

$$T_d \cdot s \quad (146)$$

Alle diese Teile zusammengesetzt ergeben den Controller.

$$C(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{s \cdot T_i} + s \cdot T_d \right) \quad (147)$$

Doch dieser Controller ist nicht realisierbar, da man durch umschreiben folgende Form erhält.

$$C(s) = k_p \frac{1 + T_i \cdot s + T_i \cdot T_d \cdot s^2}{T_i \cdot s} \quad (148)$$

Um diesem Problem entgegen zu wirken, wird ein Roll-Off Term angefügt, welcher erst in hohen Frequenzen etwas bewirkt.

$$\frac{1}{(s \cdot \tau + 1)^2} \quad (149)$$

Zusammengesetzt ergibt sich dann der fertige PID Controller.

$$C(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{s \cdot T_i} + s \cdot T_d \right) \cdot \frac{1}{(s \cdot \tau + 1)^2} \quad (150)$$

Das nachfolgende Bode Diagramm soll die verschiedenen Effekte des Reglers darstellen. Das System ist zwar unrealistisch, soll aber die Effekte gut darstellen.

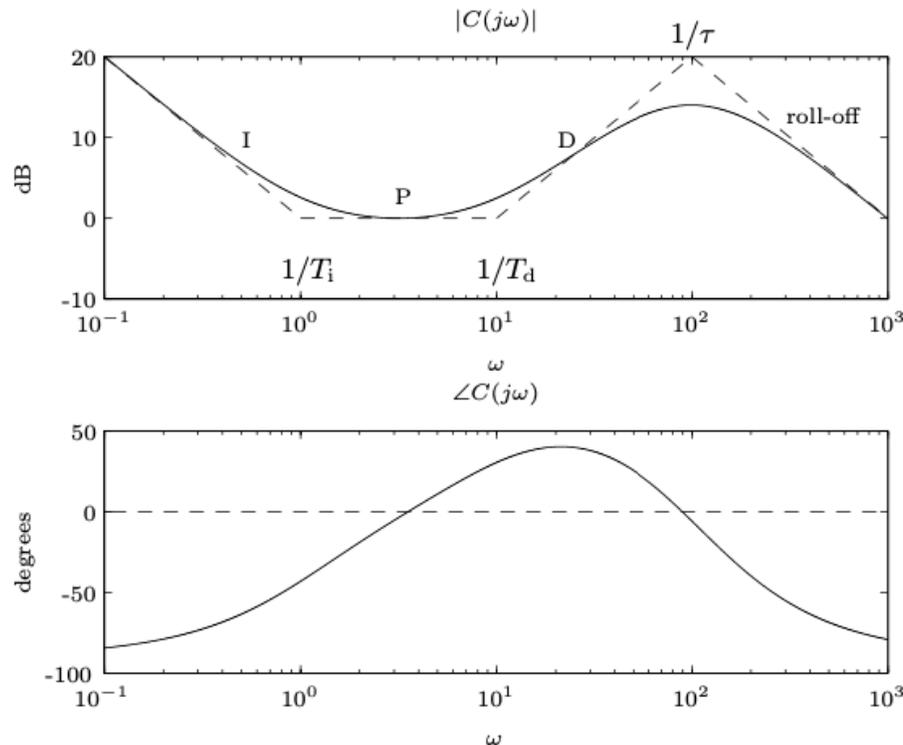


Abbildung 29: PID Regler im Bode Diagramm

Der Ableitungs-Teil ist oft da um hohe Sprünge vom Fehler zu bearbeiten, doch dieser wird meistens weggelassen, da bei Sprungantworten die Ableitung unendlich gross sein würde und dies zu einem Problem wird¹. Der PID Regler ist daher gut, weil viele System einen Low-Pass haben, sprich die Übertragung bei höheren Frequenzen ist sehr schlecht. Der PID Regler hat die gleichen Eigenschaften und passt sich daher gut der Strecken an.

10.2 PID Tuning

Mit den in diesem Abschnitte angeschauten Regeln, kann man die Parameter $\{k_p, T_i, T_d\}$ anhand von gemessenen Daten bestimmen. Die angeschauten Methoden, sind nur gut anwendbar in einigen bestimmten Fällen und können nicht als allgemeine Regel angeschaut werden. Man hat zur Entwicklung der Methoden folgendes System angenommen.

$$P(s) \approx \frac{k}{\tau \cdot s + 1} \cdot e^{-T \cdot s} \quad (151)$$

Wobei das Verhältnis $\frac{T}{(T+\tau)} < 0.3$ sein sollte.

¹Wird in Regelungstechnik II genauer besprochen

10.2.1 Ziegler Nichols

Die Grundüberlegung von Ziegler und Nichols war, das System mit einem PID Regler, wobei $T_i = \infty$ und $T_d = 0$, anzuregen. Anschließend wird k_p solange erhöht bis das System konstant schwingt.

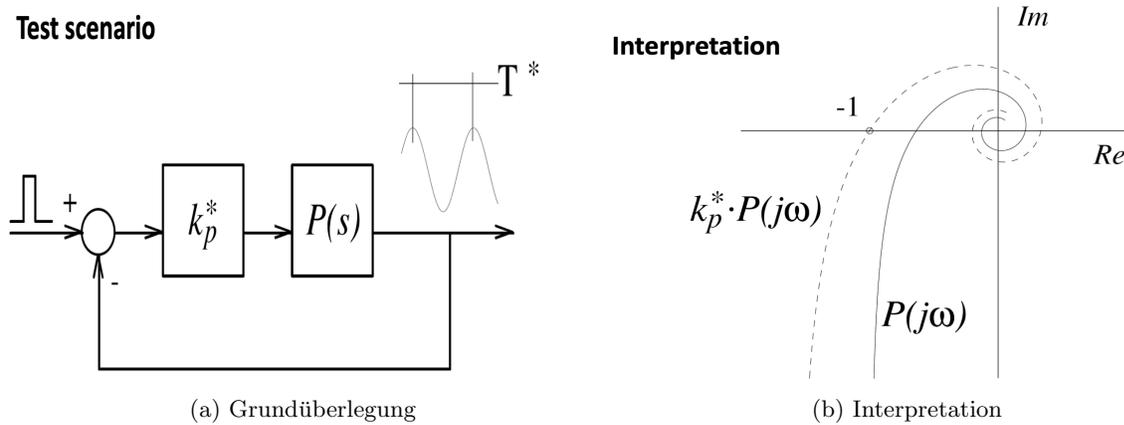


Abbildung 30: Ziegler Nichols Testvorgang

Die dadurch erhaltene kritische Verstärkung k_p^* und kritische Periode T^* werden, dann verwendet um die Parameter des PID Regler zu berechnen.

	k_p	T_i	T_d
P	$0.5 \cdot k_p^*$	$\infty \cdot T^*$	$0 \cdot T^*$
PI	$0.45 \cdot k_p^*$	$0.85 \cdot T^*$	$0 \cdot T^*$
PD	$0.55 \cdot k_p^*$	$\infty \cdot T^*$	$0.15 \cdot T^*$
PID	$0.60 \cdot k_p^*$	$0.50 \cdot T^*$	$0.125 \cdot T^*$

Dabei ist zu beachten, bei welchem Punkt das Nyquist Diagramm die Reale Achse schneidet. Ein kleines Beispiel: Man nehme das System.

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^5} \quad (152)$$

Die kritische Voraussetzung lautet.

$$\angle P(j\omega^*) = -\pi \quad (153)$$

Für das gegebene System ergibt sich, zur Berechnung dieser Informationen lohnt es sich nochmal die komplexen Zahlen gut anzuschauen.

$$\angle P(j\omega^*) = 5 \cdot \angle \frac{1}{j\omega^* + 1} = -5 \cdot \arctan(\omega^*) \stackrel{!}{=} -\pi \quad (154)$$

daraus ergibt sich

$$\omega^* = \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow T^* = \frac{2\pi}{\omega^*} \quad (155)$$

Die kritische Verstärkung erhält man indem man die kritische Frequenz in den Betrag der Strecke einfügt.

$$k_p^* = \frac{1}{|P(j\omega^*)|} \quad (156)$$

Es gibt noch eine weitere Art nach Chien-Hrones-Reswick, diese ist aber meist ungenauer und daher wird nicht weiter auf diese Methode eingegangen. Diese Methode ist im Buch auf Seite 186 beschrieben.

10.2.2 Loop Shaping by Parameter Tuning

Ziegler Nichols hat aber seine Grenzen, da sie keine gute PID Controller Auslegung garantieren. Man kann jedoch iterativ die Parameter immer besser machen.

10.3 Iterative Loop Shaping

Ziel von Iterativen Verfahren ist es, die Leistung des Controller durch iteratives anpassen des Controllers zu verbessern. Dabei können entweder neue Teile hinzugefügt werden, oder die Parameter angepasst werden. Hier wird angeschaut wie durch hinzufügen von neuen Teilen die Leistung des Controllers verbessert werden kann.

10.3.1 First-Order Lead/Lag Element

Ein Lag Element erster Ordnung hat folgende Form.

$$C(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1}, \quad \alpha, T \in \mathbb{R}_+ \quad (157)$$

Wobei das Element ein Lead für $\alpha < 1$ und ein Lag Element für $\alpha > 1$ ist. Die Parameter α und T können anhand der gewünschten Frequenz $\hat{\omega}$ an welcher das Element wirken soll und der maximalen Phasenverschiebung $\hat{\varphi}$ bestimmt werden.

$$\alpha = \left(\sqrt{\tan^2(\hat{\varphi} + 1 - \tan(\hat{\varphi}))} \right)^2, \quad T = \frac{1}{\hat{\omega} \cdot \sqrt{\alpha}} \quad (158)$$

Typischerweise wird ein PI(D) Regler entworfen, doch dieser kann nicht allen Anforderungen erfüllen, daher werden mit Lead und Lag Elementen die Kurve so zurecht geformt, dass die Anforderungen erfüllt werden. Doch diese Lead und Lag Elemente haben auch Nachteile und zwar eine zusätzliche Phasenverschiebung und eine anhaltende Betragserhöhung, wie dies die folgende Abbildung zeigt.

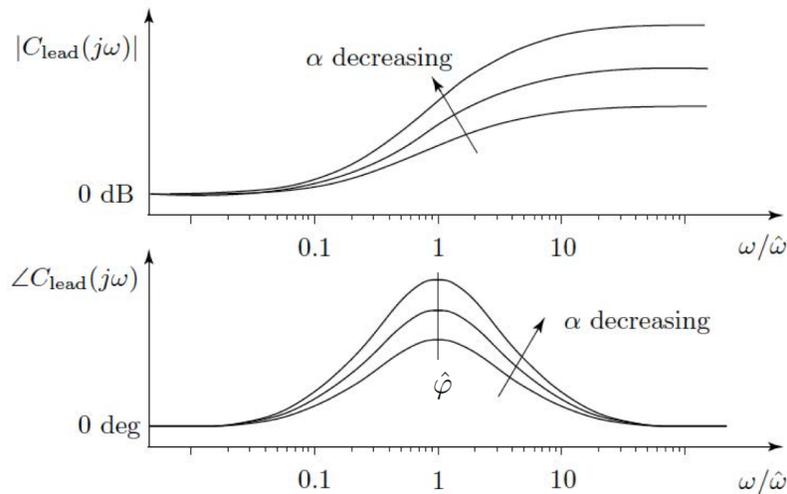


Abbildung 31: Lead Element erster Ordnung

10.3.2 Second-Order Lead/Lag Element

Um diesem Problem entgegen zu wirken, kann man auch ein Lead/Lag System zweiter Ordnung einbauen. Diese hat folgende Form.

$$C(s) = k \cdot \frac{s^2 + 2 \cdot \kappa \epsilon \cdot (1 - \epsilon) \cdot \omega_0 \cdot s + (1 - \epsilon)^2 \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \kappa \epsilon \cdot (1 + \epsilon) \cdot \omega_0 \cdot s + (1 + \epsilon)^2 \cdot \omega_0^2} \quad (159)$$

dabei wird k oft so gewählt um einen DC Gain von 1 zu erhalten.

$$k = \frac{(1 + \epsilon)^2}{(1 - \epsilon)^2} \quad (160)$$

Das Bode Diagramm eines solchen Controllers sieht folgendermaßen aus. Die typische Auslegung dieser Controller besteht darin die Parameter $\{\kappa, \epsilon, \omega_0\}$ zu finden damit:

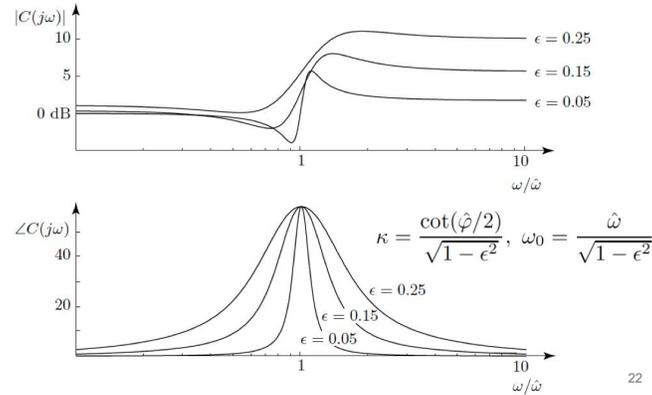


Abbildung 32: Lead Element zweiter Ordnung

- Das Lead Element die erwünschten Phasenverschiebung verursacht.
- Die Phasenverschiebung an der gewünschten Frequenz stattfindet.
- Die Phasenverschiebung über das passende Frequenzband passiert.

Das Erreichen des dritten Punktes ist in direkter Abhängigkeit des Parameters ϵ . Die anderen zwei können dann von diesem abgeleitet werden.

$$\kappa = \frac{\cot(\hat{\varphi}/2)}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}, \quad \omega_0 = \frac{\hat{\omega}}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \quad (161)$$

10.4 Plant-Inversion Methode

Mit dieser Methode soll ein möglichst robustes System erstellt werden. Diese Methode basiert auf der Überlegung, dass die Strecke folgende Form hat.

$$P(s) = \frac{n_p(s)}{d_p(s)} \quad (162)$$

Die Strecke ist dabei stabil und minimalphasig und hat einen relativen Grad r .

Wenn man nun eine gewünschte Form des Loop Gains erreichen will, welche folgende Form haben sollte,

$$L(s) = \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^{r-1}} \quad (163)$$

muss der Controller folgende Form haben.

$$C(s) = \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{d_p(s)}{n_p(s)} \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^{r-1}} \quad (164)$$

11 Appendix

11.1 Lineare Algebra:

Zur Bestimmung der Beobachtbarkeit und Erreichbarkeit werden folgende Begriffe verwendet:

- Rang(Rank): Die Anzahl(r) linear Unabhängigen Zeilen bzw. Spaltenvektoren. Die Spalten bzw. Zeilenvektoren einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{p \times q}$ wobei $q \leq p$, spannen einen r-dimensionalen Unterraum \mathbb{R}^p auf. Die Zahl r ist der Rang
- Bild(Image): Der r-dimensionale Unterraum \mathbb{R}^p heisst Bild von M.
- Kern(Kernel): Der k-dimensionale Unterraum von \mathbb{R}^q der durch die lineare Abbildung M in den Ursprung abgebildet wird, heisst Kern.

11.2 Herleitungen

11.2.1 Beobachtbarkeit

Ein System ist gegeben in folgender Form, wobei $u(t) = 0$:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x \quad (165)$$

$$y(t) = c \cdot x(t) \quad (166)$$

Wenn man den zweite Gleichung unendlich oft ableitet erhält man ein Gleichungssystem:

$$y(t) = c \cdot x(t), \quad \frac{d}{dt}y(t) = c \cdot A \cdot x(t), \quad \frac{d^2}{dt^2}y(t) = c \cdot A^2 \cdot x(t), \dots \quad (167)$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}y(t) \\ \vdots \end{bmatrix}_{t=0} = w(0) = \begin{bmatrix} c \\ c \cdot A \\ c \cdot A^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot x(0) = \mathcal{O} \cdot x(0) \quad (168)$$

Durch messen von $w(0)$ kann man jetzt auf die Anfangsbedingung $x(0)$ schliessen. Es gibt aber nur eine eindeutige Lösung wenn der Kern der Matrix leer ist. Wenn der Kern nicht leer ist, gibt es zwei Anfangsbedingungen, welche das Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} w(0) &= \mathcal{O} \cdot x_1(0) \\ w(0) &= \mathcal{O} \cdot x_2(0) \end{aligned} \quad (169)$$

Durch Subtrahieren der zwei Gleichungen erhält man:

$$\mathcal{O} \cdot (x_1 - x_2) = \mathcal{O} \cdot \Delta x = 0 \quad (170)$$

11.2.2 Static Gain

Zur Herleitung des Static Gain wird die Stepfunktion verwendet.

$$\mathcal{L}(h(t)) = \frac{1}{s} \quad (171)$$

Wenn man nun das Laplace Endwert Theorem anwendet.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0_+} s \cdot X(s) \quad (172)$$

Auf das Output Signal mit einer Step Function als Eingang ergibt das:

$$y(t = \infty) = \lim_{s \rightarrow 0_+} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0_+} s \cdot \Sigma(s) \cdot U(s) = \lim_{s \rightarrow 0_+} s \cdot \Sigma(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0_+} \Sigma(s) = \Sigma(s = 0) \quad (173)$$

Wir wissen das man die Transfer Function als zwei Polynome schreiben kann:

$$\Sigma(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0} \quad (174)$$

Wenn man jetzt $s = 0$ einsetzt bleiben nur noch die Koeffizienten a_0 und b_0 übrig.

$$\Sigma(s = 0) = \frac{b_0}{a_0} \quad (175)$$

Dieser Wert nennt man **Static Gain** eines Systems.

11.2.3 Harmonische Antwort höherer Ordnung

$$Y(s) = \Sigma(s) \cdot U(s) = \Sigma(s) \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad U(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Wenn man eine Partialbruchzerlegung durchführt, erhält man.

$$Y(s) = \Sigma(s) \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k}}{(s - \pi_i)^k} + \frac{\alpha \cdot s + \beta \cdot \omega}{s^2 + \omega^2}$$

Wenn man diese Signal wieder in die time domain zurückführt erhält man.

$$y(t) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k}}{(k-1)!} \cdot t^{k-1} \cdot e^{\pi_i \cdot t} + \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t) + \beta \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Für den Limes $t \rightarrow \infty$, unter der geforderten Bedingung

$$\operatorname{Re}(\pi_i) < 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$$

konvergiert die Summe $\sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \dots$ gegen null und man erhält wie erwünscht.

$$y_\infty(t) = \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t) + \beta \cdot \sin(\omega \cdot t) = m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

wobei

$$m = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Jetzt muss man noch die Koeffizienten α und β berechnen. Zur Berechnung von α und β wird zuerst der folgende Schritt durchgeführt:

$$\Sigma(s) \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k}}{(s - \pi_i)^k} + \frac{\alpha \cdot s + \beta \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} \quad / \cdot (s^2 + \omega^2)$$

Dies ergibt uns:

$$\Sigma(s) \cdot s = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k} \cdot (s^2 + \omega^2)}{(s - \pi_i)^k} + \alpha \cdot s + \beta \cdot \omega$$

Man hat vorhin gesehen, dass für $t \rightarrow \infty$ die Summe $\sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \dots$ gegen null konvergieren muss. Damit dies der Fall ist, muss $s \rightarrow j\omega$ sein. Daraus folgt.

$$\Sigma(j\omega) \cdot j\omega = \alpha \cdot j \cdot \omega + \beta \cdot \omega$$

und folglich

$$\Sigma(j\omega) = \alpha - j\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Aus dieser Rechnung folgt:

$$\alpha = \operatorname{Re}(\Sigma(j\omega)), \quad \beta = -\operatorname{Im}(\Sigma(j\omega))$$

Dies ergibt schließlich explizite Werte für m und φ in Abhängigkeit des System.

$$m = |\Sigma(j\omega)|, \quad \varphi = \angle \Sigma(j\omega)$$

Daher kann man jetzt die sogenannte steady state Antwort in Abhängigkeit des System angeben.

$$y_\infty(t) = |\Sigma(j\omega)| \cdot \cos(\omega \cdot t + \angle \Sigma(j\omega))$$

Diese Gleichung gilt auch für Systeme mit einem Time Delay der Form $e^{-s \cdot T}$.

$$y_\infty(t) = m(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi(t))$$

$$m(\omega) = |c \cdot (j\omega I - A)^{-1} \cdot b|$$

$$\varphi(\omega) = \angle (c \cdot (j\omega I - A)^{-1} \cdot b) - \omega \cdot T$$