Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institute for Dynamic Systems and Control
IDSC
Institut für Dynamische Systeme und Regelungstechnik

Autoren: C. Küttel, M. Reinders **Dozent:** L. Guzzella

151-0591-00 **Regelungstechnik 1** (HS 2019) **Zusammenfassung der Vorlesung**

Kapitel 11+12.2 **Reglerauslegung**

Bei Fragen: hraffael@ethz.ch, morettog@ethz.ch, 12. Dezember 2019

1 PID-Regler

Bisher wurde in Beispielen jeweils ein Proportionalregler (P-Regler) $C(s) = k_p$ verwendet. In diesem Kapitel wird der P-Regler durch einen Integral-Term (I-Teil), und durch einen Derivative-Term (D-Teil) erweitert. Dieser PID-Regler wird in der Praxis sehr häufig verwendet.

Die Reglerstruktur wird zunächst im Zeitbereich betrachtet:

$$u_{\mathrm{PID}}(t) = k_p \cdot \left(\underbrace{e(t)}_{\text{P-Term}} + \underbrace{\frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(\tau)\, d\tau}_{\text{I-Term}} + \underbrace{T_d \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e(t)}_{\text{D-Term}} \right)$$

Der I-Term wird betragsmässig grösser, je länger ein einseitiger Fehler (z.B. $e(t) > 0$) vorhanden ist. Der D-Term wirkt auf schnelle Änderungen im Fehlersignal. Ein Nachteil des D-Terms ist, dass er Rauschen auf dem Fehlersignal $e(t)$ verstärkt.

Eine Transformation in den Frequenzbereich ergibt:

$$C_{\mathrm{PID}}(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s\right) = \frac{U(s)}{E(s)}$$

Wie bereits erwähnt wird $u(t)$ durch den D-Term sehr empfindlich auf Rauschen. Man kann im Frequenzbereich hohe Frequenzen ganz einfach unterdrücken, indem man eine hochfrequente doppelte Nullstelle an den Regler hängt. Dieser Term wird roll-off Term genannt:

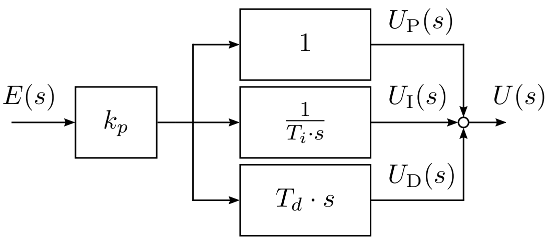
$$C_{\mathrm{PID}}(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s\right) \cdot \underbrace{\frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^2}}_{\text{roll-off}}$$

Als Übertragungsfunktion ergibt sich:

$$C_{\mathrm{PID}}(s) = k_p \cdot \overbrace{\underbrace{\left(\frac{T_d \cdot T_i \cdot s^2 + T_i \cdot s + 1}{T_i \cdot s}\right)}_{\text{nicht kausal}} \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^2}}^{\text{kausal}}$$

Ohne den roll-off Term wäre die Übertragungsfunktion $\frac{U(s)}{E(s)}$ nicht kausal und entsprechend nicht praktisch realisierbar. Um $u(t)$ ohne roll-off zu berechnen, bräuchte man Zukunfswerte des Fehlersignals $e(t)$.

PID-Regler in Standardform im Frequenzbereich



Proportionales Verhalten (P-Term)

$$u_{\mathrm{P}}(t) = k_p \cdot e(t), \quad U_{\mathrm{P}}(s) = k_p \cdot E(s)$$

Der P-Term reagiert auf den momentanen Wert des Fehlers $e(t)$. Die Stärke der Reaktion ist proportional zur Grösse des momentanen Fehlers.

Integratives Verhalten (I-Term)

$$u_{\mathrm{I}}(t) = \frac{k_p}{T_i} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad U_{\mathrm{I}}(s) = \frac{k_p}{T_i} \cdot \frac{1}{s} \cdot E(s)$$

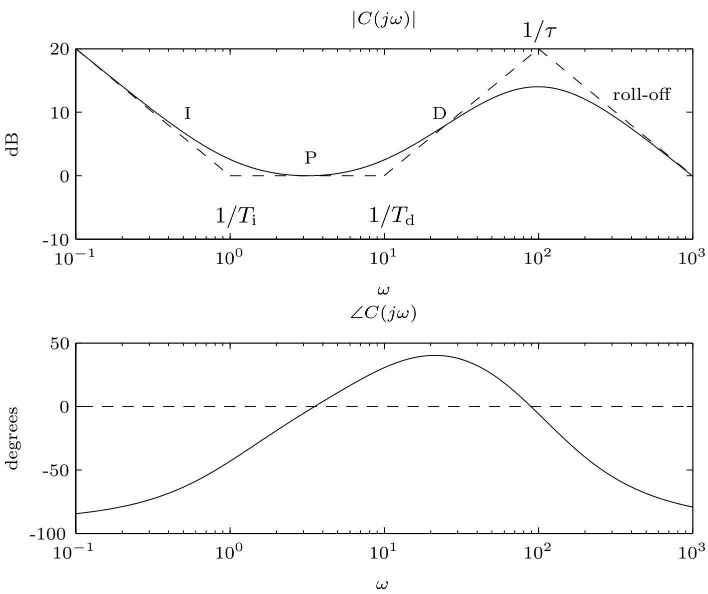
Der I-Term reagiert zum Zeitpunkt t proportional auf den kumulierten Fehler, für $t \in [0, t]$. Falls ein statischer Nachlauffehler vorhanden ist, wird dieser aufintegriert, und der Reglerausgang wird immer grösser, bis kein Fehler mehr vorhanden ist. Ein Nachteil des Integrators ist, dass der Reglerausgang theoretisch beliebig gross werden kann.

Derivatives Verhalten (D-Term)

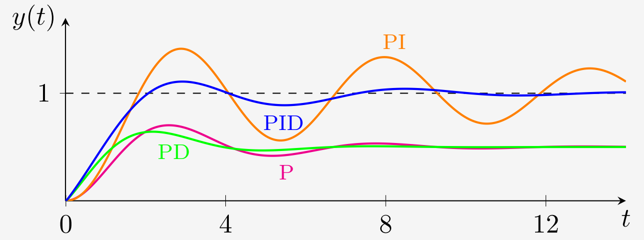
$$u_{\mathrm{D}}(t) = k_p \cdot T_d \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e(t), \quad U_{\mathrm{D}}(s) = k_p \cdot T_d \cdot s \cdot E(s)$$

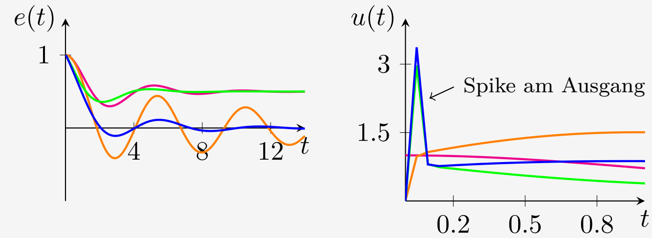
Der D-Term wirkt antizipierend, er reagiert zum Zeitpunkt t auf die momentane Änderungsrate des Fehlers. Der D-Term wirkt wie ein Dämpfer gegen ein schnelles Erhöhen oder Verringern des Fehlers. Eine starke Änderung im Fehler resultiert in einem erhöhten Reglerausgang. Falls die Änderung zu stark ist, kann der gewünschte Reglerausgang grösser als der grösstmögliche Eingang eines Systems werden.

Bodediagramm eines PID-Reglers mit roll-off



Beispiel: Regegelung eines Systems zweiter Ordnung





Es ist ersichtlich, dass ein statischer Fehler durch den Integrator eliminiert werden kann. Der D-Term ermöglich es, schneller auf die Fehleränderung zu reagieren, jedoch wird dadurch der Reglerausgang auch grösser.

PID-Regler Parameter Tuning nach Ziegler Nichols

Die Parameter k_p, T_i, und T_d können durch extensives Testen des Systems bestimmt werden. Ein anderer Ansatz ist, der von Ziegler-Nichols. Hier geht man davon aus, dass das System $P(s)$ ein System erster Ordnung mit zusätzlicher relativ kleiner Totzeit ist:

$$P(s) \approx \frac{k}{\tau \cdot s + 1} \cdot e^{-T \cdot s}, \quad \text{wobei}: \frac{T}{T + \tau} \overset{!}{<} 0.3$$

Zur Bestimmung der Ziegler-Nichols Parameter startet man mit einem reinen P-Regler und erhöht die Verstärkung k_p soweit, bis der geschlossene Regelkreis grenzstabil wird bei der Verstärkung k_p^* (Pole von $T(s)$ auf der imaginären Achse). Falls die Modellannahme ungefähr stimmt, oszilliert das grenzstabile System bei k_p^* mit einer Periode von T^*. Man kann diese Parameter des grenzstabilen System in folgende Tabellen einsetzen um Reglerparamter für verschiedene PID Kombinationen zu erhalten.

Regler	k_p	T_i	T_d
P	$0.5 \cdot k_p^*$	$\infty \cdot T^*$	$0 \cdot T^*$
PI	$0.45 \cdot k_p^*$	$0.85 \cdot T^*$	$0 \cdot T^*$
PD	$0.55 \cdot k_p^*$	$\infty \cdot T^*$	$0.15 \cdot T^*$
PID	$0.60 \cdot k_p^*$	$0.50 \cdot T^*$	$0.125 \cdot T^*$

2 Iterative Loop Shaping

Ein System, das mit einem PID-Regler ausgelegt wird, erfüllt unter Umständen nicht alle Designspezifikationen. Um gewisse Frequenzbänder nach Wunsch abzuändern, kann man einen beliebigen Regler zum Beispiel mit Lead/Lag-Elemente erweitern oder einen Regler von Grund auf neu erstellen.

Lead-Lag Elemente erster Ordnung

Der Term 'Lead-Lag' bezeichnet zwei Arten von Systemen mit gleicher Struktur und den zwei Parametern α und T:

$$C(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1}, \quad \alpha, T \in \mathbb{R}_+ \tag{1}$$

Der Wert von α definiert ob es sich um ein Lead- oder ein Lag-Element handelt:

$$\begin{array}{lcl} 0 < \alpha < 1 & \Leftrightarrow & \text{Lead-Element} \\ 1 < \alpha & \Leftrightarrow & \text{Lag-Element} \end{array}$$

Die Parameter α und T werden gezielt gewählt, sodass bei der Frequenz $\hat{\omega}$ eine maximale Phasenänderung von $\hat{\varphi}$ vorliegt:

$$\alpha = \left(\sqrt{\tan^2(\hat{\varphi}) + 1} - \tan(\hat{\varphi})\right)^2, \quad T = \frac{1}{\hat{\omega} \cdot \sqrt{\alpha}}$$

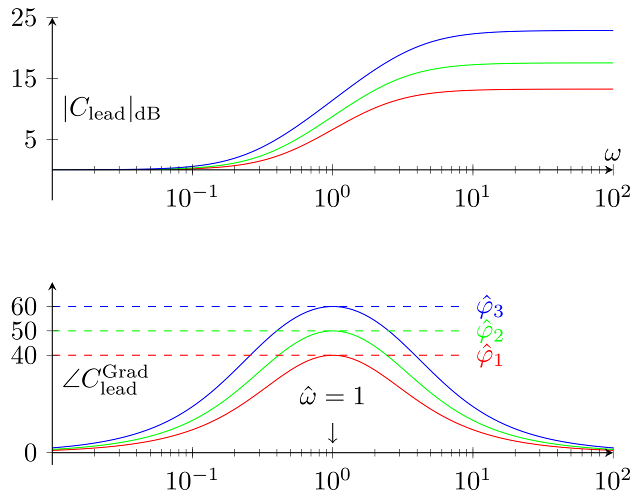


Abb. 1: Lead-Element für $\hat{\omega} = 1$ und $\hat{\varphi} = \{40, 50, 60\}$

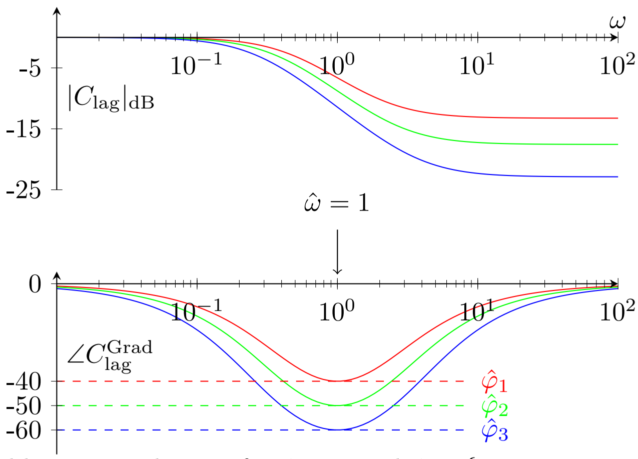


Abb. 2: Lag-Element für $\hat{\omega} = 1$ und $\hat{\varphi} = \{-40, -50, -60\}$

Ein Lag-Element mit $-\hat{\varphi}$ entspricht einer Spiegelung des Magnituden- und des Phasendiagramms des Lead-Elements mit $\hat{\varphi}$.

Lead-Lag Elemente zweiter Ordnung

Die Verwendung eines Elements erster Ordnung beeinflusst Frequenzen in der grösseren Umgebung von $\hat{\omega}$. Die Idee eines Elements zweiter Ordnung ist, dass der gewünschte Effekt an einer bestimmten Frequenz besser isoliert ist. Die Struktur erfordert die Parameter κ, ϵ, und ω_0:

$$C(s) = k \cdot \frac{s^2 + 2 \cdot \kappa \cdot \epsilon \cdot (1-\epsilon) \cdot \omega_0 \cdot s + (1-\epsilon)^2 \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \kappa \cdot \epsilon \cdot (1+\epsilon) \cdot \omega_0 \cdot s + (1+\epsilon)^2 \cdot \omega_0^2} \tag{2}$$

Zusätzlich zur Wahl der mittleren Frequenz $\hat{\omega}$ und der maximalen Phasenverschiebung $\hat{\varphi}$ kann man nun zusätzlich die Breite des Frequenzbands durch den Parameter ϵ wählen:

$$k = \frac{(1+\epsilon)^2}{(1-\epsilon)^2}, \quad \kappa = \frac{\cot(\hat{\varphi}/2)}{\sqrt{1-\epsilon^2}}, \quad \omega_0 = \frac{\hat{\omega}}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$$

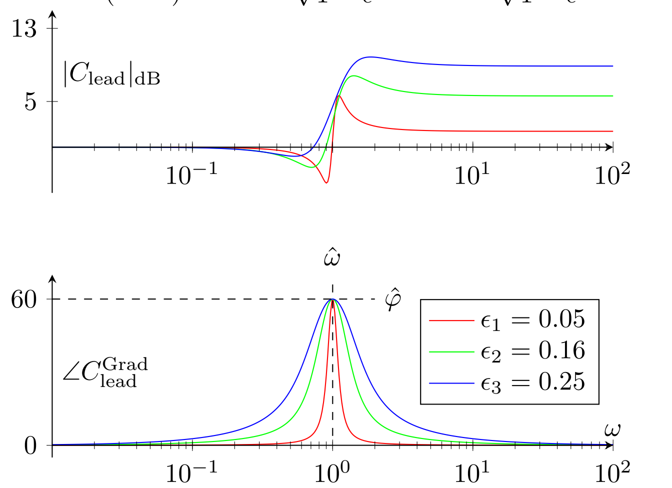


Abb. 3: Lead-Element zweiter Ordnung für $\hat{\omega} = 1$, $\hat{\varphi} = 60$, und $\epsilon = \{0.05, 0.16, 0.25\}$.

3 Inversion der Regelstrecke

Wenn die Regelstrecke $P(s) = \frac{n_p(s)}{d_p(s)}$ mit relativem Grad r asymptotisch stabil ist und nur minimalphasige Nullstellen enthält, kann ein Regler $C(s)$ gewählt werden, der die Dynamik der Regelstrecke exakt kompensiert und gleichzeitig in einer gewünschten Übertragungsfunktion $L(s)$ des offenen Regelkreises resultiert:

$$L(s) = P(s) \cdot \underbrace{P(s)^{-1} \cdot \overbrace{\frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^{r-1}}}^{\text{desired } L(s)}}_{C(s)}$$

$$\Rightarrow C(s) = P(s)^{-1} \cdot \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^{r-1}}$$

$$C(s) = \frac{d_p(s)}{n_p(s)} \cdot \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^{r-1}}$$

Der Regler invertiert die Dynamik der Regelstrecke, und somit haben die Pole und Nullstellen von $P(s)$ keinen Einfluss auf die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $L(s)$. Die übrigen Elemente von $C(s)$ stellen sicher, dass die gewünschte Übertragungsfunktion $L(s)$ des offene Regelkreis resultiert:

$$L(s) = \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^{r-1}}$$

Mit der Verstärkung $T_i = \omega_c^{-1}$ kann die gewünschte Durchtrittsfrequenz ω_c eingestellt werden. Zusätzlich wählen wir $\tau < T_i$ und $\omega_c < \omega_2$.