

# Zusammenfassung RT I

Micha Bosshart - bmicha@ethz.ch

Version: 5. August 2021

## Definitionen

### Systemklassifikation ThB01

<b>SISO</b> Input/Output scalar	<b>MIMO</b> Input/Output vektoriell
<b>Linear</b> Änderung des Ausgangs ist proportional zur Änderung des Eingangs.	<b>Nichtlinear</b> $\Sigma(\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2) \neq \alpha \cdot \Sigma(u_1) + \beta \cdot \Sigma(u_2)$
<b>Kausal</b> Ein kausales System hängt nicht von Eingängen in der Zukunft ab.	<b>Akausal</b> $y(t) = u(t+5)$ $\int_{-\infty}^{t+1} u(t) dt$ <b>ÜF:</b> Zähler hat höhere Ordnung als Nenner
<b>Statisch</b> Der Ausgang bei statischen Systemen zur Zeit $t^*$ hängt nur vom Eingang zur Zeit $t^*$ ab. $y(t) = 3 \cdot u(t)$ $y(t) = \sqrt{u(t)}$	<b>Dynamisch</b> DGL $\rightarrow$ Dynamisch $y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$ $y(t) = u(t - \tau) \quad \forall \tau \neq 0$
<b>Zeitinvariant</b> Zeitinvariante Sys geben bei gleichen Eingängen zu unterschiedlichen Zeitpunkten und gleicher Anfangsbedingung die gleichen Ausgänge. $y(t) = \frac{d}{dt} u(t)$ $y(t) = 3 \cdot u(t)$	<b>Zeitvariant</b> $y(t) = \sin(t) \cdot u(t)$ $y(t) = u(t) + t$

### Modellierung ThB01

### Drehimpulserhaltung ThB01

$$\frac{d}{dt}(J_B \dot{\theta}) = \Sigma_i T_i$$

Die momentane Winkelbeschleunigung  $\ddot{\theta}$  eines Körpers mit Trägheitsmoment  $J_B$  und Ruhepunkt B ist durch die Summe der momentan anliegenden Momente  $T_i$  bestimmt.

## Normieren und Linearisieren

### Zustandsgleichung erster Ordnung ThB02

Umwandlung nichtlinearer DGL — Equation Of Motion

$$m \cdot \ddot{\xi}(t) = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - k_3 \cdot \xi(t)^3 - d(t) \cdot \dot{\xi}(t)$$

in Zustandsgleichung erster Ordnung mit,

$$\dot{z} = f(z, v), \quad w = g(z, v)$$

wobei  $z(t)$  der Zustandsvektor,  $v(t)$  die Eingangsgrösse und  $w(t)$  die Ausgangsgrösse ist.

Es folgt:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \ddot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2(t) \\ g \cdot \sin(\alpha) - \frac{k_3}{m} \cdot z_1(t)^3 - \frac{1}{m} \cdot v(t) \cdot z_2(t) \end{bmatrix}$$
$$w(t) = z_1(t)$$

### Normierung ThB02

$$x_i(t) = \frac{z_i(t)}{z_{i,0}}, \quad u(t) = \frac{v(t)}{v_0}, \quad y(t) = \frac{w(t)}{w_0}$$

Durch Ersetzen von  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$ ,  $v(t)$  und  $w(t)$  im nichtlinearen Modell resultiert das normierte nichtlineare Modell.

Es folgt:

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t), u(t))$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{z_{2,0}}{z_{1,0}} \cdot x_2(t) \\ \frac{g}{z_{2,0}} \cdot \sin(\alpha) - \frac{k_3 \cdot z_{1,0}^3}{m \cdot z_{2,0}} \cdot x_1(t)^3 - \frac{v_0}{m} \cdot u(t) \cdot x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = g_0(x(t), u(t)) = \frac{z_{1,0}}{\omega_0} \cdot x_1(t)$$

### Berechnen Ruhelage $\{x_e, u_e\}$ ThB02

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = f(x_e, u_e)$$

Es folgt:

$$u_e = \text{beliebig}, \quad x_e = \begin{bmatrix} x_{1,e} \\ x_{2,e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{k_3 \cdot z_{1,0}^3}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

### Linearisieren ThB02

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_e, u_e}$$

$$b \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{0,1}}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{0,n}}{\partial u} \end{bmatrix}_{x_e, u_e}$$

$$c \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_0}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_0}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_e, u_e}, \quad d \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_0}{\partial u} \end{bmatrix}$$

Es folgt:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{z_{2,0}}{z_{1,0}} \\ -\frac{3 \cdot k_3 \cdot z_{1,0}^3 \cdot x_{1,e}^2}{m \cdot z_{2,0}} & -\frac{v_0}{m} \cdot u_e \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{v_0}{m} \cdot x_{2,e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} \frac{z_{1,0}}{\omega_0} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d = [0]$$

## Allgemeine Lösung LZI System

### Lineares Zeitinvariantes System ThB03

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t) \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$
$$y(t) = c \cdot x(t) + d \cdot u(t) \quad c \in \mathbb{R}^{1 \times n}, d \in \mathbb{R}$$
$$x(0) = x_0$$

Die allgemeine Lösung der Zustandsgrösse  $x(t)$ :

$$x(t) = e^{A \cdot t} \cdot x_0 + \int_0^t e^{A \cdot (t-\rho)} \cdot b \cdot u(\rho) d\rho$$

daraus folgt für die Ausgangsgrösse  $y(t)$ :

$$y(t) = \underbrace{c \cdot e^{A \cdot t} \cdot x_0}_{\text{I}} + \underbrace{\int_0^t e^{A \cdot (t-\rho)} \cdot b \cdot u(\rho) d\rho}_{\text{II}} + \underbrace{d \cdot u(t)}_{\text{III}}$$

Die **natürliche Antwort** des Systems (*I*) ist **unabhängig** von  $u$ . Der Eingang  $u$  trägt einerseits zum Beitrag der **Systemdynamik** (*II*) bei und andererseits zum **Feedthrough Term** (*III*).

## Systemantworten - 1.Ordnung

### System 1. Ordnung ThB03

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot x(t) + \frac{k}{\tau} \cdot u(t), \quad y(t) = x(t)$$

Mit Zeitkonstante  $\tau$  und Eingangsstärke  $k$ .

$$\Sigma(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

### Impulsantwort ThB03

$$u(t) = \delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

Es folgt die allgemeine Lösung:

$$y_{\delta}(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left( x_0 + \frac{k}{\tau} \right)$$

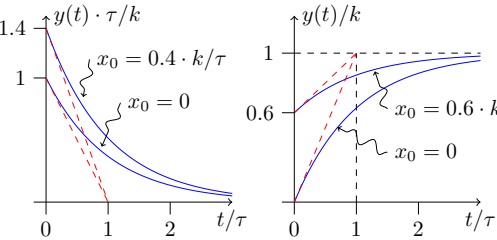
### Sprungantwort ThB03

$$u(t) = h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Es folgt die allgemeine Lösung:

$$y_h(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot x_0 + k \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

### Systemantworten - Impuls / Sprung ThB03



## Systeme 2. Ordnung

### Allgemeine Form ThB06

$$\Sigma(s) = k \cdot \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2} \quad \Sigma(0) = 1$$

Das System hat zwei Pole:

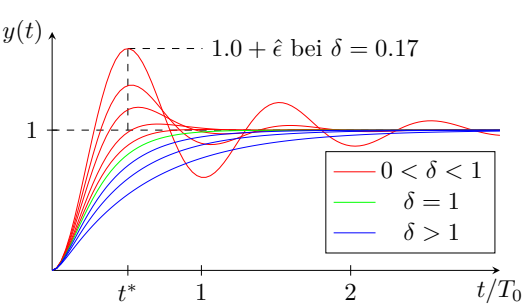
$$s_{1,2} = \pi_{1,2} = \omega_0 \cdot (-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1})$$

Der Parameter  $\delta$  wird als **Dämpfungsparameter** bezeichnet.

- Für  $|\delta| < 1$  wird werden die Pole komplex. (Überschiessen)
- Für  $|\delta| > 1$  wird werden die Pole reel.

Der Parameter  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  entspricht der **natürlichen Frequenz**, mit  $T_0$  als **natürliche Periode**.

Die Zeitnormierte Sprungantwort für verschiedene  $\delta$  sieht wie folgt aus:

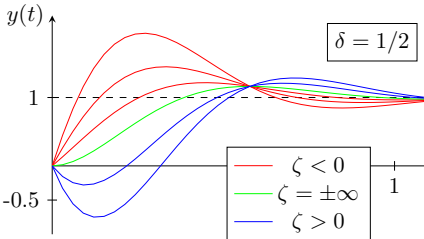


Eigenschaften des Dämpfungsparameters  $\delta$ :

$\delta \in (0, 1)$	<b>Unterkritisch gedämpft</b> Komplexe Pole Überschiessen
$\delta = 1$	<b>Kritisch gedämpft</b> Schnellstmögliches Konvergieren Kein Überschiessen
$\delta > 1$	<b>Überkritisch gedämpft</b> Reelle Pole Kein Überschiessen

### Nullstelleneinfluss ThB06

- Je kleiner  $|\zeta|$ , desto stärker der Einfluss dieser Nullstelle. ( $\rightarrow$  Überschuss)
- Nullstelle nahe an einem Pol schwächt Einfluss des Pols.
- Für  $\zeta > 0$  gibt es einen **Undershoot**. (Nicht-minimalphasig)  $\rightarrow$  Durch Änderung der Messgrösse, kann eine nicht-minimalphasige Nullstelle minimalphasig werden.



## Systemanalyse - LZI

Ein **vollständig steuerbar** und **vollständig beobachtbares** System ist **minimal**.

### Steuerbarkeit/ Erreichbarkeit ThB04

Das System ist vollständig steuerbar/ erreichbar, wenn die **Steuerbarkeitsmatrix**  $\mathcal{R}$  **vollen Rang** hat.

Für LZI Systeme gilt steuerbar = erreichbar

$$\mathcal{R} = [b, \quad A \cdot b, \quad A^2 \cdot b, \quad \dots, \quad A^{n-1} \cdot b]$$

Ein Punkt  $x_c \in \mathbb{R}^n$  ist **steuerbar**, falls ein  $u(t)$  existiert, das den Zustandsvektor des Systems von  $x(0) = x_c$  zum Zustand  $x(\tau) = 0$  in endlicher Zeit  $\tau$  bringt.

Falls alle Punkte in  $\mathbb{R}^n$  steuerbar sind, heisst das System **vollständig steuerbar**.

Ein System ist **potentiell stabilisierbar**, falls alle nicht-steuerbaren Zustände asymptotisch stabil sind.

Ein Punkt  $x_r \in \mathbb{R}^n$  ist **erreichbar**, falls ein  $u(t)$  existiert, das den Zustandsvektor des Systems vom Zustand  $x(0) = 0$  zum Zustand  $x(\tau) = x_r$  in endlicher Zeit  $\tau$  bringt.

Falls alle Punkte in  $\mathbb{R}^n$  erreichbar sind, heisst das System **vollständig erreichbar**.

Beobachtbarkeit ThB04

Das System ist vollständig beobachtbar, wenn die **Beobachtbarkeitsmatrix**  $\mathcal{O}$  (observability matrix) **vollen Rang** hat.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ c \cdot A \\ c \cdot A^2 \\ \vdots \\ c \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

Das System ist **vollständig beobachtbar**, wenn man mit der Messung des Ausgangssignals  $y(t), t \in [0, \tau], \tau > 0$  eindeutig auf den Anfangszustand  $x(0)$  des Systems schliessen kann.

System Darstellungen

I/O Darstellung ThB04

$$y^{(n)}(t) + \dots + a_2 \cdot y^{(2)}(t) + a_1 \cdot y^{(1)}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot u^{(m)}(t) + \dots + b_2 \cdot u^{(2)}(t) + b_1 \cdot u^{(1)}(t) + b_0 \cdot u(t)$$

Die I/O Darstellung hat keine physikalische Koordinaten mehr, weshalb alle Anfangsbedingungen auf Null gesetzt werden:  
 $y^{(n)} = 0, \forall n$

Zustandsraum Normalform - Reglernormalform ThB04

Umwandlung von I/O Darstellung zu Zustandsraumdarstellung mittels kanonischer Koordinaten.

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & d \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & 1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \dots & d \end{array} \right]$$

Übertragungsfunktion ThB05

Ergibt **minimale Darstellung** unseres System. Nicht minimale Zustände werden gekürzt.

$$\Sigma(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b = \frac{c \cdot Adj(sI - A) \cdot b}{det(sI - A)} = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0}$$

$$\Sigma(s) = c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b$$

$$adj \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Cramer's Rule

$$M^{-1} = Adj(M) / det(M)$$

$$[Adj(M)]_{j,i} = (-1)^{i+j} \cdot det(\hat{M}(i,j))$$

$$\hat{M}(i,j) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

i-te Zeile

j-te Kolonne

Frequenzgang / Frequenzantwort

Frequenzantwort ThB07

Harmonische Eingangsgrösse:

$$u(t) = \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$

Amplitude  $\alpha$ , Frequenz  $\omega$  in rad/s, Phasenverschiebung  $\phi$   
Der Ausgang eines Systems  $\Sigma(s)$ :

$$y(t) = y_{\text{transient}}(t) + y_{\infty}(t)$$

Unter der Annahme, dass  $\Sigma(s)$  **linear**, **zeitinvariant** und **asymptotisch stabil** ist, gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{transient}}(t) \rightarrow 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow y_{\infty}$$

Es gilt:

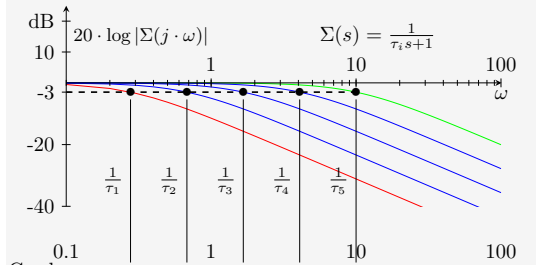
$$y_{\infty}(t) = m(\omega) \cdot \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi + \varphi(\omega))$$

Die Verstärkung  $m(\omega)$  und die Phasenverschiebung  $\varphi(\omega)$  sind systemabhängig:

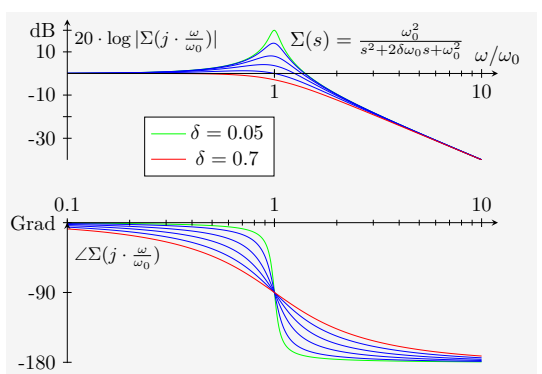
$$y_{\infty}(t) = |\Sigma(j\omega)| \cdot \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi + \angle \Sigma(j\omega))$$

Bode Diagramme ThB07

Bode Diagramm 1.Ordnung:



Bode Diagramm 2.Ordnung:



**Vorsicht!** Die **resonante Frequenz** (maximale Verstärkung) ist nicht bei der natürlichen Frequenz  $\omega/\omega_0 = 1$ , sondern bei:

$$\omega_{max} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \delta^2}, \quad \delta \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Umrechnung zwischen dezimal und dezibel

$$|\Sigma(s)|_{dB} = 20 \cdot \log_{10} |\Sigma(s)|$$

$$|\Sigma(s)| = 10^{\frac{|\Sigma(s)|_{dB}}{20}}$$

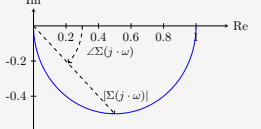
Dezimalskala	Dezibelskala
100	40
10	20
5	13.97
2	6.02
1	0
1/√2	-3.0103
0.1	-20
0.01	-40
0	-∞

Nyquist Diagramme ThB07

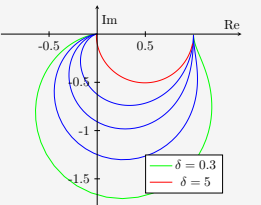
Ein allgemeines System 1. Ordnung bei der Frequenz  $s = j\omega$  hat folgende Magnitude und Phase:

$$|\Sigma(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}}$$
$$\angle \Sigma(j\omega) = -\arctan(\tau \cdot \omega)$$

Nyquist Diagramm 1.Ordnung:



Nyquist Diagramm 2.Ordnung:



Einfluss Pole und Nullstellen im Bode Diagramm ThB07

Pole/Zero Type	Magnitude	Phase
$Re(\pi_i) \leq 0 \rightarrow$ stable pole	-20 dB/dec	-90°
$Re(\pi_i) > 0 \rightarrow$ unstable pole	-20 dB/dec	+90°
$Re(\zeta_i) \leq 0 \rightarrow$ minphase zero	+20 dB/dec	+90°
$Re(\zeta_i) > 0 \rightarrow$ non-minphase zero	+20 dB/dec	-90°
$e^{-s \cdot \tau} \rightarrow$ Time delay	0 dB/dec	$-\omega \tau$

Bode's Law ThB07

The gradient of the magnitude plot ( $\kappa \cdot 20dB/dec$ ) determines the phase shift ( $\kappa \cdot \frac{\pi}{2}$ )

Gilt für Systeme mit  $\kappa \geq 2$

Asymptotische Eigenschaften von Frequenzantworten ThB08

Struktur einer allgemeinen Übertragungsfunktion:

$$\Sigma(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^k \cdot (s^{n-k} + a_{n-1-k} \cdot s^{n-1-k} + \dots + a_1 \cdot s + a_0)}$$

Systemtyp  $k$

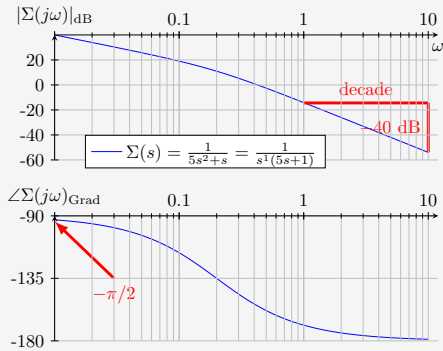
Der Systemtyp  $k$  entspricht der **Vielfachheit offener Integratoren** ( $\frac{1}{s^k}$ ) des Systems. Die Phase bei  $\omega = 0$  ist als folgende Funktion definiert:

$$\angle \Sigma(s) = \begin{cases} -k \cdot \frac{\pi}{2} & , \operatorname{sgn}\left(\frac{b_0}{a_0}\right) > 0 \\ -\pi - k \cdot \frac{\pi}{2} & , \operatorname{sgn}\left(\frac{b_0}{a_0}\right) < 0 \end{cases}$$

**Relativer Grad**  $r = n - m$  — (Steigung für  $\omega \rightarrow \infty$ )

$$\frac{\partial |\Sigma(j\omega)_{dB}|}{\partial \log(\omega)} = -r \cdot 20dB/dec, \quad \omega \rightarrow \infty$$

**Beispiel:** System  $\Sigma(s)$  mit  $k = 1, r = 2 - 0 = 2$



Systemidentifikation

Systemmodelle ThB08

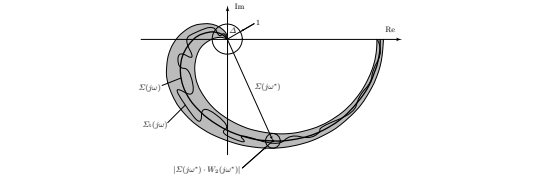
- White box model:** Es existiert eine explizite Darstellung der Physik des Systems mit bekannten Parameterwerten.
- Grey box model:** Es existiert eine explizite Darstellung des Systems mit unbekannten Parameterwerten.
- Black box model:** Es existiert keine explizite Darstellung der Physik des Systems.

Modellsicherheit	
Nichtparametrische Unsicherheit	ThB08

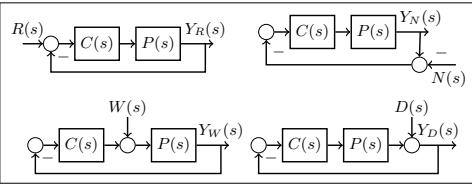
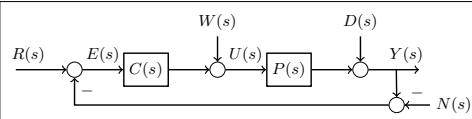
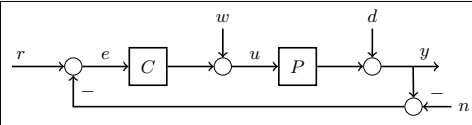
Die wahre Übertragungsfunktion  $\Sigma_t(s)$  liegt in der Menge  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{S} = \{\Sigma(s) \cdot (1 + \Delta \cdot W_2(s)) \mid |\Delta| \leq 1, \angle \Delta \in [-\pi, \pi]\}$$

- $\Sigma(s)$ : Nominelle ÜF, durch (imperfekte) Systemmodellierung gefunden.
- $\Delta$ : Unsicherheitsgenerator: Kreis in der komplexen Ebene.
- $W_2(s)$ : ÜF der Unsicherheit; quantifiziert die frequenz-abhängige Unsicherheit des Modells.



Analyse von Regelsystemen	
Signale im Regelkreis:	ThB09



$$Y_R(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \cdot R(s)$$

$$Y_N(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \cdot N(s)$$

$$Y_W(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} \cdot W(s)$$

$$Y_D(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} \cdot D(s)$$

Die gesamte Ausgangsgrösse  $Y(s)$  ergibt sich somit aus:

$$Y(s) = Y_R(s) + Y_N(s) + Y_W(s) + Y_D(s)$$

Kreisverstärkung:

$$L(s) = P(s) \cdot C(s) \quad (e \rightarrow y)$$

Sensitivität:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (d \rightarrow y, r \rightarrow e)$$

Komplementäre Sensitivität:

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (r \rightarrow y, n \rightarrow y)$$

Mit diesen kompakten Schreibweisen ergibt sich die folgende Beziehung:

$$Y(s) = S(s) \cdot [D(s) + P(s)W(s)] + T(s) \cdot [R(s) + N(s)]$$

Stabilität	
Lyapunov Stabilität - $x(0) = x_0 \neq 0$	ThB03

Lyapunov Stabilität bezieht sich auf das GGW der Zustände.

Stabilität nach Lyapunov erlaubt die Stabilitätsanalyse von Gleichgewichtspunkten (GGWP) von linearen und linearisierten Systemen. (A, b, c, d) Falls das System **Asymptotisch stabil** oder **instabil** ist, gilt dies auch für die Stabilität desselben GGWP im **nichtlinearen** System.

**Wichtig:** Falls ein GGWP eines linearisierten Systems einen **EW = 0** besitzt, lässt sich **keine** Aussage über die Stabilität desselben GGWP im **nichtlinearen** System machen.

$EW(A) \equiv \sigma_i + j\omega_i$
1. <b>Asymptotisch stabil:</b> $\sigma_i < 0$ , für <b>alle</b> EW(A)
2. <b>Stabil:</b> $\sigma_i \leq 0$ , min. ein EW(A) = 0
3. <b>Instabil:</b> $\sigma_i > 0$ , min. ein EW(A) > 0

- Für  $\omega_i \neq 0$  oszilliert das System.
- Asymptotisch stabil**  $\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \rightarrow 0$

BIBO Stabilität - $x(0) = 0$	ThB06
------------------------------	-------

BIBO Stabilität bezieht sich auf das I/O Verhalten von  $\Sigma(s)$

Ein System ist BIBO stabil, falls für die Impulsantwort  $\sigma(t)$  folgendes gilt:

$$\int_0^\infty |\sigma(t)| dt < \infty$$

Ein System mit Übertragungsfunktion  $\Sigma(s)$  ist **BIBO stabil**, falls alle **Pole  $\pi_i$  negativen Realteil** haben.

Anmerkung: Die Pole von  $\Sigma(s)$  entsprechen den EW von A falls das System vollständig steuerbar und beobachtbar, also **minimal** ist.

Stabilität des geschlossenen Systems:	ThB09
---------------------------------------	-------

Für geschlossene Regelkreise ist die Stabilität gegeben, falls **alle ÜF asymptotisch stabil** sind ( $Re(\lambda_i) < 0, i = 1, \dots, n$ ). Die Beziehungen zwischen den Signalen sind gegeben durch:

$$\begin{bmatrix} U(s) \\ Y(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(s) & -S(s) \cdot C(s) & S(s) \cdot C(s) \\ S(s) \cdot P(s) & S(s) & T(s) \\ -S(s) \cdot P(s) & -S(s) & S(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W(s) \\ D(s) \\ R(s) \end{bmatrix}$$

Falls  $P(s)$  **und**  $C(s)$  nur asymptotisch stabile Pole haben, genügt es, die asymptotische Stabilität von  $S(s)$  **und**  $T(s)$  zu prüfen um die **interne Stabilität** zu garantieren.

Stabilität geschlossener Regelkreis  $\rightarrow$  Pole von  $T(s)$  sollen negativen Realteil haben.

Nyquist Theorem	
Definition	ThB09

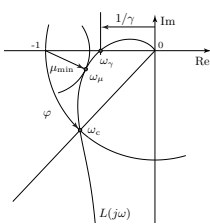
Das Nyquist-Theorem kann die **asymptotische Stabilität** eines **geschlossenen** Regelkreissystems  $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$  durch Analyse seiner Kreisverstärkung  $L(s)$  (**offener** Regelkreis!) voraussagen. **Voraussetzungen:**

- Keine **Modellunsicherheit**  $W_2(s)$
- Keine **Kürzungen** von instabilen Polen/ nicht-minimalphasigen Nullstellen in  $L(s)$

Nominelles Stabilitätskriterium	ThB09
$n_c \stackrel{!}{=} \frac{n_0}{2} + n_+$	

- $n_c$ : Anzahl Umrundungen von  $L(j\omega)$  um den Punkt  $(-1 + j0)$ , wenn  $\omega$  zwischen  $(-\infty, \infty)$  variiert wird. (GGUZ positiv)
- $n_0$ : Anzahl Pole von  $L(s)$  mit Realteil = 0
- $n_+$ : Anzahl Pole von  $L(s)$  mit Realteil  $> 0$

Phasen- und Verstärkungsreserve	ThB09
---------------------------------	-------



- $\gamma$ : Verstärkungsreserve zu  $(-1 + 0j)$  bei  $\angle L(j\omega) = -180^\circ$
- $\varphi$ : Phasenabstand zu  $-180^\circ$  bei der Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$
- $\mu$ : kleinste Distanz zwischen  $(-1 + 0j)$  und  $L(j\omega)$   
 $\mu = \min_\omega |1 + L(j\omega)| = \frac{1}{\max_\omega |S(j\omega)|}$

Robustes Nyquist Theorem	ThB09
--------------------------	-------

Die wahre Kreisverstärkung des Systems  $L_t(s)$  liegt in der Menge  $\mathcal{S}_L$ :

$$\mathcal{S}_L = \{L(s) \cdot (1 + \Delta \cdot W_2(s)) \mid |\Delta| \leq 1, \angle \Delta \in [-\pi, \pi]\}$$

Es wird angenommen, dass  $L(s)$  und  $L_t(s)$  dieselbe Anzahl instabile ( $n_+$ ) und stabile ( $n_0$ ) Pole haben.

Kriterium:

$$|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|, \forall \omega \in [0, \infty)$$

Design von Regelungssystemen	
Frequenzbedingungen - Closed Loop	ThB10

**Frequenzeigenschaften von Störungen und Rauschen**  
Intrinsische Kopplung von  $T(s)$  und  $S(s)$ :

$$T(s) + S(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} + \frac{1}{1 + L(s)} = 1$$

Die Einflüsse des Rauschens ( $N$  für Noise) und der Störung ( $D$  für Disturbance) auf den Ausgang sind wie folgt:

$$Y(s) = Y_D(s) + Y_N(s) = S(s) \cdot D(s) + T(s) \cdot N(s)$$

- Rauschen* normalerweise bei *hohen* Frequenzen ( $\omega > \omega_n$ )
- Störungen* normalerweise bei *tiefen* Frequenzen ( $\omega < \omega_d$ )

Daraus folgt:

**Für niedrige Frequenzen:**

$$|S(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right| \overset{!}{<} 1 \quad \Rightarrow \quad |L(j\omega)| \gg 1$$

**Für hohe Frequenzen:**

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| \overset{!}{<} 1 \quad \Rightarrow \quad |L(j\omega)| \ll 1$$

Global betrachtet, über alle  $\omega$ , muss  $S(s)$  für alle stabilen geschlossenen Regelkreise folgende Gleichung erfüllen:

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \cdot \sum_{i=1}^{n_+} \pi_i^+,$$

wobei  $n_+$  die Anzahl der instabilen Pole  $\pi^+$  von  $L(s)$  ist.

**Beschränkungen der Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$**  ThB10

**Durchtrittsfrequenz:** Schnittpkt. 0-Linie im Bode Diagramm

$$|L(j\omega_c)| = 0dB = 1$$

**Bandbreite - Closed Loop:** Mass für höchste Frequenz des Eingangssignals die Regelkreis verfolgen kann.

$|T(j\omega_b)| = -3dB \approx 0.7,$

$\omega_b \approx \omega_c$

• **Beschränkung durch Modellunsicherheit:**  
Aus dem robustem Stabilitätskriterium folgt:

$$|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|, \quad \forall \omega \in [0, \infty)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| < \left| \frac{1}{W_s(j\omega)} \right|$$

$$\Rightarrow |T(j\omega)| < |W_2^{-1}(j\omega)|$$

$$\omega_c \stackrel{!}{<} \frac{1}{10} \cdot \omega_2$$

$$|W_2(j\omega_2)| = 1$$

• **Beschränkung durch Totzeit  $\tau$ :**

$$L_\tau(s) = C(s) \cdot P(s) \cdot e^{(-\tau_c + \tau_p) \cdot s} = C(s) \cdot P(s) \cdot e^{-\tau \cdot s}$$

$$\omega_c \stackrel{!}{<} \frac{1}{2} \cdot \omega_\tau = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tau}$$

Konservativer:  $\frac{1}{5}$

• **Beschränkung durch nicht-minimalphasige (NMP) Nullstellen  $\omega_{c+}$ :**

$$\omega_c \stackrel{!}{<} \frac{1}{2} \cdot \omega_{c+}$$

Konservativer:  $\frac{1}{5}$

• **Beschränkung durch instabile Pole  $\pi^+$ :**

$$\omega_c \stackrel{!}{>} 2 \cdot \omega_{\pi^+}$$

wobei  $\omega_{\pi^+}$  der schnellste instabile Pol von L(s) ist (Pol mit dem grössten positiven Realteil)  
Konservativer: 5

Zusätzlich für instabile Pole  $\pi_i^+$  **mit Modellunsicherheit  $W_2(s)$**

$$\left| W_2(\pi_i^+) \right| < 1, \quad \forall i$$

**Zusammenfassend für alle Beschränkungen:**

$$\max \{ 10 \cdot \omega_d, 2\omega_{\pi^+} \} < \omega_c$$

$$\omega_c < \min \left\{ \frac{1}{10} \cdot \omega_n, \frac{1}{10} \cdot \omega_2, \frac{1}{2} \cdot \omega_\tau, \frac{1}{2} \cdot \omega_{c+} \right\}$$

**Statischer Nachlauffehler für  $r(t), d(t), n(t)$**  ThB11

$$E(s) = S(s) \cdot (R(s) + N(s) - D(s) - P(s) \cdot W(s))$$

Statischer Nachlauffehler auf **Sprungantwort:**

$$e_\infty^h = \lim_{t \rightarrow \infty} e^h(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot S(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0^+} S(s) = S(0)$$

$$e_\infty^h = S(0) = \frac{1}{1 + L(0)}$$

$L(0)$  hängt vom Systemtyp  $k$  und der Kreisverstärkung  $L(s)$  ab:

$$L(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^k \cdot (s^{n-k} + a_{n-1-k} \cdot s^{n-1-k} + \dots + a_1 \cdot s + a_0)}$$

Es ergeben sich zwei Fälle für  $e_\infty^h$ :

$k = 0$

$\Rightarrow L(0) \rightarrow \frac{b_0}{a_0}$

$\Rightarrow e_\infty^h = \frac{a_0}{a_0 + b_0}$

$k > 0$

$\Rightarrow L(0) \rightarrow \infty$

$\Rightarrow e_\infty^h \rightarrow 0$

**Statischer Nachlauffehler für  $w(t)$**  ThB11

Statischer Nachlauffehler auf **Sprungantwort** ( $w(t) = h(t)$ ):

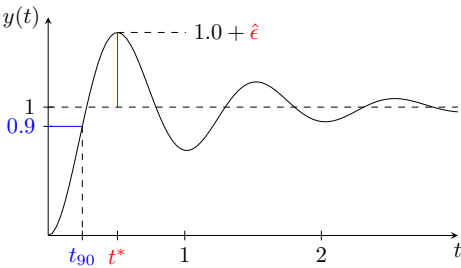
$$e_\infty^h = \lim_{t \rightarrow \infty} e^h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} -s \cdot S(s) P(s) W(s) \\ = \lim_{s \rightarrow 0} -s \cdot \frac{P(s)}{1 + P(s) \cdot C(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{-P(0)}{1 + P(0) \cdot C(0)}$$

$$\text{Für } e_\infty = 0 \text{ folgt } |C(0)| = \infty$$

**Spezifikationen - System 2. Ordnung** ThB11

Es wird **angenommen**, dass der geschlossene Regelkreis  $T(s)$  einem System **2. Ordnung** entspricht:

$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2} \quad T(0) = 1$$



$$\delta = \frac{-\ln(\hat{\epsilon})}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\hat{\epsilon})}}, \quad \omega_0 = (0.14 + 0.4 \cdot \delta) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{t_{90}}$$

$$\omega_c = \omega_0 \cdot \sqrt{\sqrt{4 \cdot \delta(\hat{\epsilon})^4 + 1} - 2 \cdot \delta(\hat{\epsilon})^2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{\sqrt{4 \cdot \delta(\hat{\epsilon})^4 + 1} - 2 \cdot \delta(\hat{\epsilon})^2}{2 \cdot \delta(\hat{\epsilon})} \right)$$

Die obigen Gleichungen können für  $\delta \in (0.45, 1)$  folgendermassen vereinfacht werden:

$$\omega_c \approx \frac{1.7}{t_{90}}, \quad \varphi \approx 71^\circ - 117^\circ \cdot \hat{\epsilon}$$

**Frequenzbereich - Spezifikationen** ThB11

Um die **Auswirkungen von Störungen und Rauschen** um die Durchtrittsfrequenz zu minimieren, beschränkt man  $S(s)$  und  $T(s)$  mit einem **Maximalwert**.

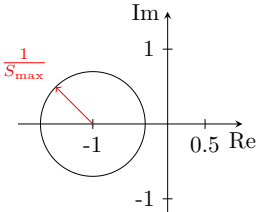
$$\|S\|_\infty < S_{max}, \quad \|T\|_\infty < T_{max}, \quad S_{max}, T_{max} > 1,$$

wobei per Definition  $\|\Sigma\|_\infty = \max_\omega |\Sigma(j\omega)|$  Die Bedingungen werden in Anforderungen an die Kreisverstärkung  $L(s)$  umgewandelt:

$$\|S\|_\infty < S_{max} \Leftrightarrow L(j\omega) \notin \left\{ |1 + z| \leq \frac{1}{S_{max}} \mid z \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\|T\|_\infty < T_{max} \Leftrightarrow$$

$$L(j\omega) \notin \left\{ \left| \frac{T_{max}^2}{T_{max}^2 - 1} + z \right| \leq \frac{T_{max}}{T_{max}^2 - 1} \mid z \in \mathbb{C} \right\}$$



**Reglerauslegung** ThB12

**PID-Regler** ThB12

PID-Reglerstruktur im Zeitbereich:

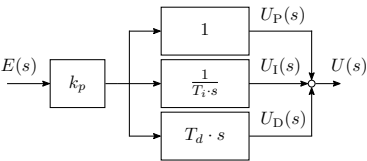
$$u_{PID}(t) = k_p \cdot \left( \underbrace{e(t)}_{\text{P-Term}} + \underbrace{\frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\text{I-Term}} + \underbrace{T_d \cdot \frac{d}{dt} e(t)}_{\text{D-Term}} \right)$$

Transformation in den Frequenzbereich:

$$C_{PID}(s) = k_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right) = \frac{U(s)}{E(s)}$$

$u(t)$  wird durch den D-Term sehr empfindlich auf **Rauschen**. Unterdrücken des Rauschens bei hohen Frequenzen mittels **roll-off Term**:

$$C_{PID}(s) = k_p \cdot \underbrace{\left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right)}_{\text{akausal}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^2}}_{\text{roll-off}}$$



**Proportionales Verhalten (P-Term)** ThB12

$$u_P(t) = k_p \cdot e(t), \quad U_P(s) = k_p \cdot E(s)$$

Der P-Term reagiert auf den **momentanen** Wert des Fehlers  $e(t)$ . Die Stärke der Reaktion ist **proportional** zur Grösse des momentanen Fehlers.

Kann nur **Magnitude** beeinflussen.

**Integratives Verhalten (I-Term)** ThB12

$$u_I(t) = \frac{k_p}{T_i} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad U_I(s) = \frac{k_p}{T_i} \cdot \frac{1}{s} \cdot E(s)$$

Der I-Term reagiert zum Zeitpunkt t proportional auf den **kumulierten Fehler**, für  $t \in [0, t]$ .

Falls ein statischer Nachlauffehler vorhanden ist, wird dieser aufintegriert und der Reglerausgang wird immer grösser, bis kein Fehler mehr vorhanden ist.

**Nachteil:** Ausgang kann theoretisch **beliebig gross** werden.

Je grösser  $T_i$ , desto **langsamer** die Reaktion.

**Derivatives Verhalten (D-Term)** ThB12

$$u_D(t) = k_p \cdot T_d \cdot \frac{d}{dt} e(t), \quad U_D(s) = k_p \cdot T_d \cdot s \cdot E(s)$$

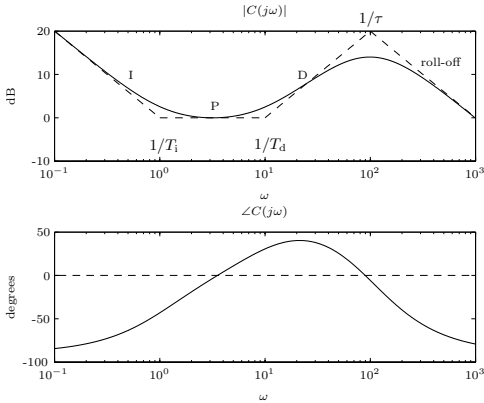
Der D-Term reagiert auf die **momentane Änderungsrate** des Fehlers.

Der D-Term wirkt wie ein **Dämpfer** gegen ein schnelles Erhöhen oder Verringern des Fehlers.

Falls die Veränderung stark ist, kann der Reglerausgang **grösser** als der **grösstmögliche** Eingang eines Systems sein.

Führt immer zu einem **Phasenverlust**.  
Faster **initial response** and less **oscillative**.

**Bode Diagramm eines PID-Reglers mit roll-off Term** ThB12



PID-Regler Parameter Tuning nach Ziegler Nichols ThB12

Annahmen:

- Stabiles System
- System  $P(s)$  ein System **erster Ordnung** mit zusätzlicher relativ **kleinen Totzeit**

$$P(s) \approx \frac{k}{\tau \cdot s + 1} \cdot e^{-T \cdot s}, \quad \text{wobei: } \frac{T}{T + \tau} \stackrel{!}{<} 0.3$$

$$T \stackrel{!}{<} 0.4 \cdot \tau$$

Zur Bestimmung der Parameter startet man mit einem reinen **P-Regler** und erhöht die Verstärkung  $k_p$  soweit, bis der geschlossene Regelkreis **grenzstabil** wird bei der Verstärkung  $k_p^*$  (Pole von  $T(s)$  auf der imaginären Achse). Falls die Modellannahme ungefähr stimmt, **oszilliert** das **grenzstabile** System bei  $k_p^*$  mit einer Periode von  $T^*$ .

Regler	$k_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.50 \cdot k_p^*$	$\infty \cdot T^*$	$0 \cdot T^*$
PI	$0.45 \cdot k_p^*$	$0.85 \cdot T^*$	$0 \cdot T^*$
PD	$0.55 \cdot k_p^*$	$\infty \cdot T^*$	$0.15 \cdot T^*$
PID	$0.60 \cdot k_p^*$	$0.50 \cdot T^*$	$0.125 \cdot T^*$

$$T^* = \frac{2\pi}{\omega^*}, \quad k_p^* = \frac{1}{|(P(j\omega^*))|}$$

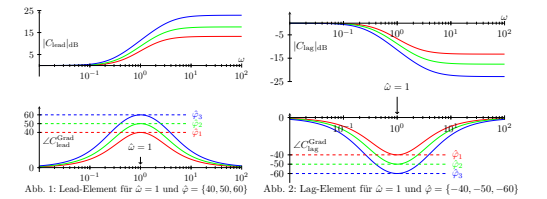
$$Im(P(j\omega^*)) \stackrel{!}{=} 0, \quad \angle P(j\omega^*) = -\pi$$

$$\angle(a + bj) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Iterative Loop Shaping

Ein System das mit einem PID-Regler ausgelegt wird, erfüllt unter Umständen nicht alle **Designspezifikationen**. Um bestimmte Frequenzbänder nach Wunsch abzuändern, kann man einen beliebigen Regler mit bestimmten **Elementen erweitern**, oder von Grund auf **neu erstellen**.

Lead-Lag Elemente 1.Ordnung ThB12



$$C(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1}, \quad \alpha, T \in \mathbb{R}_+$$

$0 < \alpha < 1$

$\Leftrightarrow$

Lead-Element

$1 < \alpha$

$\Leftrightarrow$

Lag-Element

Die Parameter  $\alpha$  und  $T$  werden gezieht gewählt, sodass bei der Frequenz  $\hat{\omega}$  eine **maximale Phasenänderung** von  $\hat{\varphi}$  vorliegt:

$$\alpha = \left( \sqrt{\tan^2(\hat{\varphi}) + 1} - \tan(\hat{\varphi}) \right)^2, \quad T = \frac{1}{\hat{\omega} \cdot \sqrt{\alpha}}$$

Ein Lag-Element mit  $-\hat{\varphi}$  entspricht einer **Spiegelung** des Magnituden- und des Phasediagramms des Lead-Elements mit  $\hat{\varphi}$ .

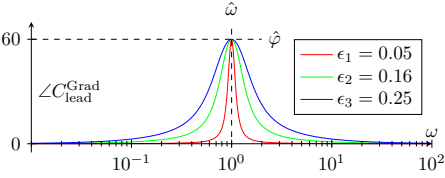
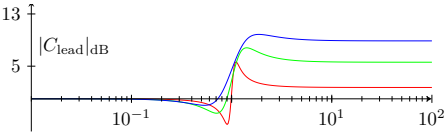
Lead-Lag Elemente 2. Ordnung ThB12

Die Verwendung eines **Elements erster Ordnung** beeinflusst Frequenzen in einer **grossen Umgebung** von  $\hat{\omega}$ . Bei einem Element zweiter Ordnung ist der gewünschte Effekt an einer bestimmten Frequenz besser **isoliert**.

$$C(s) = k \cdot \frac{s^2 + 2 \cdot \kappa \cdot \epsilon \cdot (1 - \epsilon) \cdot \omega_0 \cdot s + (1 - \epsilon)^2 \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \kappa \cdot \epsilon \cdot (1 + \epsilon) \cdot \omega_0 \cdot s + (1 + \epsilon)^2 \cdot \omega_0^2}$$

Zusätzlich zur mittleren Frequenz  $\hat{\omega}$  und der maximalen Phasenverschiebung  $\hat{\varphi}$  kann man nun die **Breite des Frequenzbands** durch den **Parameter**  $\epsilon$  wählen:

$$k = \frac{(1 + \epsilon)^2}{(1 - \epsilon)^2}, \quad \kappa = \frac{\cot(\hat{\varphi}/2)}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}, \quad \omega_0 = \frac{\hat{\omega}}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$$



Inversion der Regelstrecke ThB12

- Regelstrecke  $P(s)$  mit relativem Grad  $r$  ist **asymptotisch stabil**. (keine **instabile Pole**)
- Regelstrecke  $P(s)$  hat nur **minimalphasige Nullstellen**
- Zu riskant, wenn das nominale  $P(s)$  und wahre  $P_t(s)$  nicht die gleiche Anzahl **instabiler** Pole oder **NMP** Nullstellen haben.

$$L(s) = P(s) \cdot \underbrace{P(s)^{-1} \cdot \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^{r-1}}}_{C(s)}$$

Der Regler invertiert die Dynamik der Regelstrecke. Es folgt:

$$L(s) = \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^{r-1}}$$

Mit der Verstärkung  $T_i = \omega_c^{-1}$  kann die **gewünschte Durchtrittsfrequenz**  $\omega_c$  eingestellt werden. Zusätzlich wählen wir  $\tau < T_i$  und  $\omega_c < \omega_2$

Laplace ThB05

Laplace - Cheatsheet		ThB05
Wichtige Eigenschaften		
Ähnlichkeit	:	$\mathcal{L}\{\frac{1}{a} \cdot x(\frac{t}{a})\} = X(s \cdot a)$
Verschiebung	:	$\mathcal{L}\{x(t - T)\} = e^{-T \cdot s} \cdot X(s)$
Dämpfung	:	$\mathcal{L}\{x(t) \cdot e^{a \cdot t}\} = X(s - a)$
Ableitung $t$	:	$\mathcal{L}\{\frac{d}{dt}x(t)\} = s \cdot X(s) - x(0)$
$n$ -te Abl. $t$	:	$\mathcal{L}\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\} = s^n \cdot X(s)$
Ableitung $s$	:	$\mathcal{L}\{t \cdot x(t)\} = -\frac{d}{ds}X(s)$
Integration $t$	:	$\mathcal{L}\{\int_0^t x(\tau) d\tau\} = \frac{1}{s} \cdot X(s)$
Integration $s$	:	$\mathcal{L}\{\frac{1}{t} \cdot x(t)\} = \int_s^\infty X(\sigma) d\sigma$
Faltung $t$	:	$\mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(s) \cdot X_2(s)$
Faltung $s$	:	$\mathcal{L}\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = X_1(s) * X_2(s)$

Wichtige Signaltransformationen

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	$1$
$h(t)$	$\frac{1}{s}$
$h(t) \cdot t^n \cdot e^{\alpha \cdot t}$	$\frac{n!}{(s - \alpha)^{n+1}}$
$h(t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$h(t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$h(t) \cdot \sinh(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$h(t) \cdot \cosh(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$

Laplace Transformation ThB05

Anfangswert:	<div><math display="block">\lim_{t \rightarrow 0_+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)</math></div>
Endwerttheorem:	<div><math display="block">\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0_+} s \cdot X(s)</math></div>

$f(t)$

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

$1$

$\frac{1}{s}$

$e^{at} f(t)$

$F(s - a)$

$u(t - a)$

$\frac{e^{-as}}{s}$

$f(t - a)u(t - a)$

$e^{-as}F(s)$

$\delta(t)$

$1$

$\delta(t - t_0)$

$e^{-st_0}$

$t^n f(t)$

$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$

$f'(t)$

$sF(s) - f(0)$

$\int_0^t f(x)g(t - x)dx$

$F(s)G(s)$

$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$

$\frac{n!}{s^{n+1}}$

$$t^x \ (x \geq -1 \in \mathbb{R})$$

$\sin kt$

$\frac{k}{s^2 + k^2}$

$\sin^2 kt$

$\frac{2k^2}{s(s^2 + 4k^2)}$

$\cos kt$

$\frac{s}{s^2 + k^2}$

$\cos^2 kt$

$\frac{s^2 + 2k^2}{s(s^2 + 4k^2)}$

$e^{at}$

$\frac{1}{s - a}$

$\sinh kt$

$\frac{k}{s^2 - k^2}$

$\cosh kt$

$\frac{s}{s^2 - k^2}$

$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$

$\frac{1}{(s - a)(s - b)}$

$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$

$\frac{s}{(s - a)(s - b)}$

$te^{at}$

$\frac{1}{(s - a)^2}$

$t^n e^{at}$

$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$

$e^{at} \sin kt$

$\frac{k}{(s - a)^2 + k^2}$

$e^{at} \cos kt$

$\frac{s - a}{(s - a)^2 + k^2}$

$e^{at} \sinh kt$

$\frac{k}{(s - a)^2 - k^2}$

$e^{at} \cosh kt$

$\frac{s - a}{(s - a)^2 - k^2}$

$t \sin kt$

$\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$

$t \cos kt$

$\frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$

$t \sinh kt$

$\frac{2ks}{(s^2 - k^2)^2}$

$t \cosh kt$

$\frac{s^2 - k^2}{(s^2 - k^2)^2}$

$\frac{\sin at}{t}$

$\arctan \frac{a}{s} = \operatorname{arccot} \frac{s}{a}$