Autoren: C. Küttel, M. Reinders **Dozent:** L. Guzzella

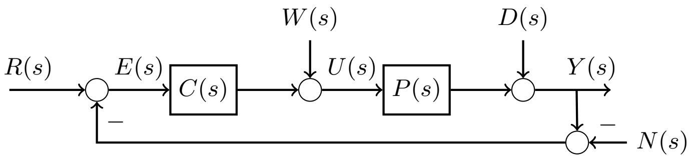
151-0591-00 **Regelungstechnik 1** (HS 2019) **Zusammenfassung der Vorlesung**

Kapitel 10.1-10.4 Spezifikationen von Regelungssystemen - II

Bei Fragen: hraffael@ethz.ch, morettog@ethz.ch, 6. Dezember 2019

1 Statischer Nachlauffehler

Bis jetzt wurde jeweils $Y(s)$ als Funktion der Eingänge $R(s)$, $W(s)$, $D(s)$, und $N(s)$ betrachtet. Im Folgenden wird besprochen, wie sich der Fehler $e(t)$ im eingeschwungenen Zustand verhält. Dazu wird der Regelkreis im Frequenzbereich betrachtet:



Ähnlich wie bei der Ausgangsgrösse $Y(s)$ kann man $E(s)$ als Funktion der Eingänge beschreiben[1]:

$$\begin{aligned} E(s) &= E_R(s) \quad + E_N(s) \quad + E_D(s) \quad + E_W(s) \\ &= S(s)R(s) + S(s)N(s) - S(s)D(s) - S(s)P(s)W(s) \\ &= S(s) \cdot [R(s) + N(s) - D(s) - P(s) \cdot W(s)] \end{aligned}$$

Man betrachtet Referenzen und Störungen die als Sprünge $h(t)$ auf den Fehler abgebildet werden[2]:

$$h(t) = 1,\ t > 0 \quad \rightarrow \quad H(s) = \frac{1}{s}$$

Mit dem Endwerttheorem (final value theorem) kann man den Fehler auf eine Sprungantwort nach langer Zeit berechnen:

$$e^h_\infty = \lim_{t\to\infty} e^h(t) = \lim_{s\to 0_+} s \cdot S(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0_+} S(s) = S(0)$$

Man schreibt $S(0)$ als Funktion des offenen Regelkreises $L(0)$:

$$e^h_\infty = S(0) = \frac{1}{1 + L(0)} \tag{1}$$

$L(0)$ hängt vom Systemtyp k der Kreisverstärkung $L(s)$ ab:

$$L(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{s^k \cdot (s^{n-k} + a_{n-1-k} \cdot s^{n-1-k} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0)} \tag{2}$$

Aus Gl. (1) und Gl. (2) ist ersichtlich, dass für $L(0)$ und somit e^h_∞ zwei Fälle vorliegen:

$$\begin{aligned} &k = 0 \qquad \Rightarrow L(0) \rightarrow \tfrac{b_0}{a_0} \qquad \Rightarrow e^h_\infty = \tfrac{a_0}{a_0 + b_0} \\ &k > 0 \qquad \Rightarrow L(0) \rightarrow \infty \qquad \Rightarrow e^h_\infty \rightarrow 0 \end{aligned}$$

In anderen Worten kann ein System mit Systemtyp $k > 0$ einem Sprung nach langer Zeit fehlerfrei folgen, und somit Sprungartige Störungen unterdrücken. Für ein Systemtyp $k = 0$ wird die Antwort $y(t)$ des Systems vom angewandten Sprung abweichen.

[1] Die Eingänge werden dabei als unkorreliert behandelt und ihr Einfluss wird individuell betrachtet.

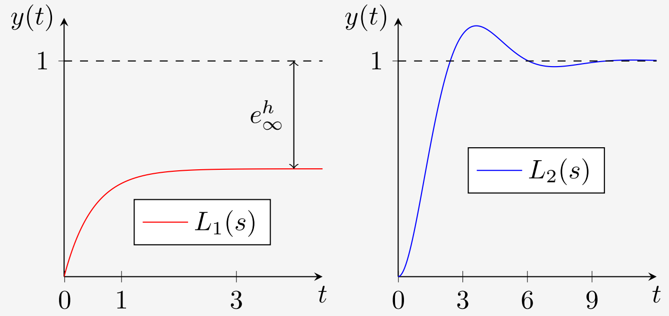
[2] $R(s)$ und $D(s)$ werden durch $S(s)$ abgebildet. Das Rauschen $n(t)$ hat in der Regel Mittelwert 0 und induziert dadurch im Mittel keinen Fehler.

Beispiel: Sprungantworten und Systemtyp:

$$L_1(s) = \tfrac{1}{s+1}\ (k = 0), \qquad L_2 = \tfrac{1}{s(s+1)}\ (k = 1)$$

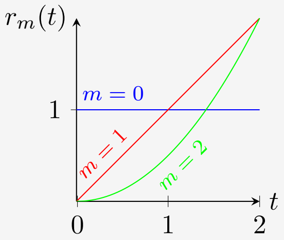
$$T_1(s) = \tfrac{s+1}{s+2}, \qquad T_2 = \tfrac{s(s+1)}{s^2+s+1}$$

Das erste System hat Systemtyp $k = 0$ und weist somit einen Fehler in der Sprungantwort auf: $S(0) = \frac{1}{1+L_1(0)} = \frac{1}{2}$. Der zweite offene Regelkreis $L_2(s)$ ist Systemtyp $k = 1$. ($L_2(s)$ strebt für $s \to 0$ linear gegen ∞.) Daraus folgt, dass das zweite System fehlerfrei zum Sprung konvergiert.



Beispiel: Das Konzept des statischen Nachlauffehlers kann auch auf Referenzen höherer Ordnung[3] erweitert werden:

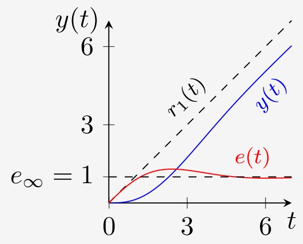
$$r_m(t) = \frac{1}{m!} \cdot t^m,\ t \geq 0,\ m \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$



Ähnlich wie beim speziellen Fall der Sprungantwort ergibt sich mit Hilfe der Ordnung der Referenz m, und der Anzahl der offenen Integratoren von $L(s)$ (Systemtyp k) eine Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned} m < k \quad &\rightarrow \quad e_\infty = \lim_{s\to 0^+} \tfrac{1}{s^m \cdot (1 + L(s))} = 0 \\ m > k \quad &\rightarrow \quad e_\infty = \lim_{s\to 0^+} \tfrac{1}{s^m \cdot (1 + L(s))} = \infty \\ m = k \quad &\rightarrow \quad e_\infty = \lim_{s\to 0^+} \tfrac{S(s)}{s^k} \notin \{0, \infty\} \end{aligned}$$

Beispielhaft wird eine Rampenantwort ($m = 1$) des zweiten Systems $T_2(s)$ ($k = 1$) aus dem vorherigen Beispiel betrachtet. Da $k = m$ gilt, hat die Rampenantwort einen statischen Nachlauffehler.



$$S_2(s) = \frac{s(s+1)}{s^2 + s + 1}$$

$$\Rightarrow e_\infty = \lim_{s\to 0^+} \frac{S(s)}{s^k} = 1$$

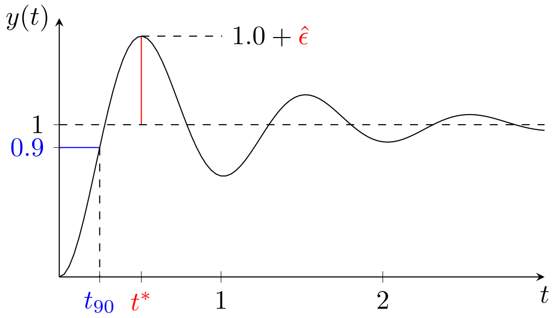
[3] Die Referenz $r_0(t)$ entspricht der Sprungantwort $h(t)$, $r_1(t)$ entspricht der Rampe $p(t)$, $r_2(t)$ einer quadratisch ansteigenden Fuktion, usw.

2 Spezifikationen basierend auf Systemen 2. Ordnung

Es wird angenommen, dass der geschlossene Regelkreis $T(s)$ einem System zweiter Ordnung entspricht:

$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2}.$$

Dies ist für sinnvolle geschlossene Regelkreise eine gute Annahme, es verlangt asymptotische Stabilität und erlaubt ein Überschwingen. Der geschlossene Regelkreis $T(s)$ zweiter Ordnung soll Spezifikationen in der Anstiegszeit t_{90} und im relativen Überschwingen $\hat{\epsilon}$ erfüllen:



Die Spezifikationen von $\hat{\epsilon}$ und t_{90} können erfüllt werden, in dem man Anforderungen an die typischen Parameter eines Systems 2ter Ordnung aufstellt:

$$\delta = \frac{-\ln(\hat{\epsilon})}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\hat{\epsilon})}}, \quad \omega_0 = (0.14 + 0.4 \cdot \delta) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{t_{90}}$$

Im nächsten Schritt werden die Spezifikationen an $T(s)$ in Anforderungen an die Kreisverstärkung $L(s)$ umgewandelt, unter Anwendung von $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$.

Die Anforderungen des geschlossenen Regelkreises können in Anforderungen an die Durchtrittsfrequenz ω_c und die Phasenreserve φ der Kreisverstärkung $L(s)$ umformuliert werden:

$$\omega_c = \omega_0 \cdot \sqrt{\sqrt{4 \cdot \delta(\hat{\epsilon})^4 + 1} - 2 \cdot \delta(\hat{\epsilon})^2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\sqrt{\sqrt{4 \cdot \delta(\hat{\epsilon})^4 + 1} - 2 \cdot \delta(\hat{\epsilon})^2}}{2 \cdot \delta(\hat{\epsilon})}\right)$$

Die obigen Gleichungen können für $0.45 < \delta < 1$ sehr gut mit den folgenden vereinfachten Zusammenhängen angenähert werden:

$$\omega_c \approx \frac{1.7}{t_{90}}$$

$$\varphi \approx 71^\circ - 117^\circ \cdot \hat{\epsilon}$$

Somit sind Spezifikationen des geschlossenen Regelkreises $T(s)$ in Anforderungen an den offenen Regelkreis $L(s)$ umformuliert worden.

Geschlossene Regelkreise mit Charakteristiken, welche einer Dämpfung ausserhalb des Bereiches $0.45 < \delta < 1$ entsprechen sind in der Praxis nicht relevant, weil sie entweder sehr stark überschwingen oder extrem langsam sind.

3 Frequenzbereich - Spezifikationen

Die Störung $D(s)$ und das Rauschen $N(s)$ werden durch die Sensitivität $S(s)$ und durch die komplementäre Sensitivität $T(s)$ auf den Ausgang abgebildet:

$$Y(j\omega) = S(j\omega) \cdot D(j\omega) + T(j\omega) \cdot N(j\omega)$$

Um die Auswirkung von Störungen und Rauschen um die Durchtrittsfrequenz ω_c zu minimieren, beschränkt man den Maximalwert von $S(s)$ und $T(s)$.

$$\|S\|_\infty < S_{\max}, \quad \|T\|_\infty < T_{\max}, \quad S_{\max}, T_{\max} > 1, \qquad (3)$$

wobei per Definition $\|\Sigma\|_\infty = \max_\omega |\Sigma(j\omega)|$.

Die Bedingungen in Gl. (3) werden in Anforderungen an die Kreisverstärkung $L(s)$ umgewandelt:

$$\|S\|_\infty < S_{\max} \Leftrightarrow L(j\omega) \notin \left\{ |1+z| \leq \frac{1}{S_{\max}} \middle| z \in \mathbb{C} \right\} \qquad (4)$$

$$\|T\|_\infty < T_{\max} \Leftrightarrow L(j\omega) \notin \left\{ \left| \frac{T_{\max}^2}{T_{\max}^2 - 1} + z \right| \leq \frac{T_{\max}}{T_{\max}^2 - 1} \middle| z \in \mathbb{C} \right\} \qquad (5)$$

Die geometrische Interpretation von Gl. (4) ist, dass $L(j\omega)$ nicht in einen in -1 zentrierten Kreis mit Radius $\frac{1}{S_{\max}}$ eintreten darf.

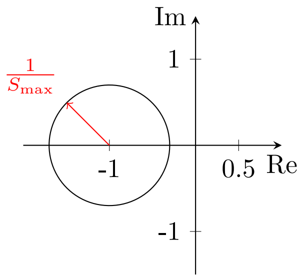


Abb. 1: Darstellung der nicht zulässigen Region aus Gl. (4)

Die geometrische Interpretation von Gl. (5) ist, dass $L(j\omega)$ nicht in einen in $\frac{-T_{\max}^2}{T_{\max}^2-1}$ zentrierten Kreis mit Radius $\frac{T_{\max}}{T_{\max}^2-1}$ eintreten darf.

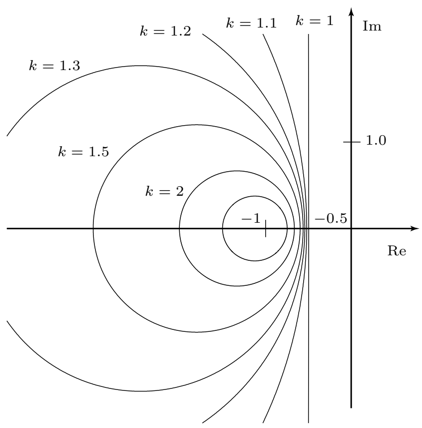


Abb. 2: Darstellung der nicht zulässigen Region aus Gl. (5) mit $k = T_{\max}$

Wenn $S_{\max}$ und $T_{\max}$ verringert werden, wird eine zunehmende Teilmenge der komplexen Ebene für $L(j\omega)$ nicht zulässig. Für $T_{\max} \to 1$ ist die gesamte komplexe Ebene links von $-\frac{1}{2}$ ausgeschlossen.