ETH Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institute for Dynamic Systems and Control
IDSC Institut für Dynamische Systeme und Regelungstechnik

Autoren: C. Küttel, M. Reinders **Dozent:** L. Guzzella

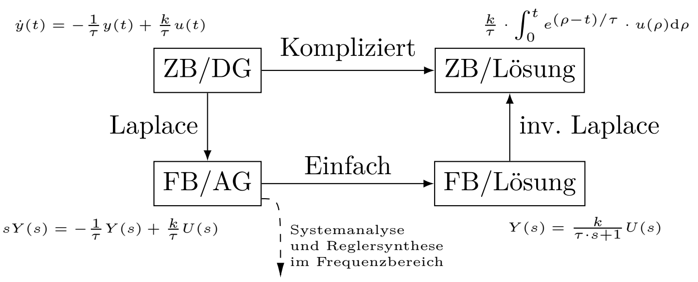
151-0591-00 **Regelungstechnik 1** (HS 2019) **Zusammenfassung der Vorlesung**

Kapitel 6 **Laplace-Transformation I**

Bei Fragen: hraffael@ethz.ch, morettog@ethz.ch, 14. November 2019

1 Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation ermöglicht es, eine Differentialgleichung (DG) im Zeitbereich (ZB) in eine algebraische Gleichung (AG) im Frequenzbereich (FB) umzuwandeln. Die Algebraische Gleichung im Frequenzbereich lässt sich oft einfacher lösen als die Differentialgleichung im Zeitbereich. Die Lösung im Frequenzbereich lässt sich mit der inversen Laplace-Transformation in den Zeitbereich zurückwandeln. Die inverse Laplace-Transformation ist jedoch oft nicht nötig, da Aussagen über das System auch im Frequenzbereich möglich sind. Zudem können Regler direkt im FB ausgelegt werden.



Die Laplace-Transformation eines Zeitsignals $x(t)$ ist:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^\infty x(t) \cdot e^{-s \cdot t} \mathrm{d}t,$$

mit $s = \sigma + j \cdot \omega$. Die Laplace-Transformation ist eine Generalisierung der Fourier-Transformation. Setzt man $s = j \cdot \omega$, erhält man die Fourier-Transformation.

Wichtige Eigenschaften

Linearität	:	$\mathcal{L}\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} = a \cdot X_1(s) + b \cdot X_2(s)$	
Ähnlichkeit	:	$\mathcal{L}\{\frac{1}{a} \cdot x(\frac{t}{a})\} = X(s \cdot a)$	
Verschiebung	:	$\mathcal{L}\{x(t - T)\} = e^{-T \cdot s} \cdot X(s)$	
Dämpfung	:	$\mathcal{L}\{x(t) \cdot e^{a \cdot t}\} = X(s - a)$	
Ableitung t	:	$\mathcal{L}\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t)\} = s \cdot X(s) - x(0)$	(1)
n-te Abl. t	:	$\mathcal{L}\{\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}\} = s^n \cdot X(s) \ \left(\frac{\mathrm{d}^k x(t=0)}{\mathrm{d}t^k} = 0 \ \forall k\right)$	(2)
Ableitung s	:	$\mathcal{L}\{t \cdot x(t)\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} X(s)$	
Integration t	:	$\mathcal{L}\{\int_0^t x(\tau) \mathrm{d}\tau\} = \frac{1}{s} \cdot X(s)$	
Integration s	:	$\mathcal{L}\{\frac{1}{t} \cdot x(t)\} = \int_s^\infty X(\sigma) \mathrm{d}\sigma$	
Faltung t	:	$\mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(s) \cdot X_2(s)$[1]	
Faltung s	:	$\mathcal{L}\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = X_1(s) * X_2(s)$	
Anfangswert	:	$\lim_{t \to 0_+} x(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot X(s)$	(3)
Endwert	:	$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0_+} s \cdot X(s)$	(4)

[1] Der Operator $*$ repräsentiert die Faltung (convolution) zweier Signale, definiert als: $x_1 * x_2(t) = \int_0^t x_1(t - \rho) \cdot x_2(\rho) \mathrm{d}\rho$.

Wichtige Signaltransformationen

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
$h(t)$	$\frac{1}{s}$
$h(t) \cdot t^n \cdot e^{\alpha \cdot t}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$h(t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$h(t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$h(t) \cdot \sinh(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$h(t) \cdot \cosh(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$

Als nächstes werden Eigenschaften der Laplace-Transformation mit Beispielen erklärt.

Eigenschaft Gl. (1): Ableitungen im Zeitbereich werden zu algebraischen Grössen im Frequenzbereich. Insbesondere lässt sich mit Gl. (1) die Lösung einer Zustandsgleichung erster Ordnung finden:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t), \quad y(t) = c \cdot x(t), \quad x(0) = 0$$

Unter Anwendung von Gl. (1) gilt:

$$s \cdot X(s) = A \cdot X(s) + b \cdot U(s), \quad Y(s) = c \cdot X(s)$$

was umgeformt werden kann zu:

$$Y(s) = c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b \cdot U(s) = \Sigma(s) \cdot U(s), \tag{5}$$

wobei $\Sigma(s)$ Übertragungsfunktion heisst. $\Sigma(s)$ ist im Allgemeinen ein Bruch rationaler Funktionen, wobei der Nenner bei physikalischen Systemen mindestens die Ordnung des Zählers hat ($n \geq m$):

$$\Sigma(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c \cdot \mathrm{Adj}(sI - A) \cdot b}{\det(sI - A)} = \frac{b_m \cdot s^m + \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \cdots + a_0}$$

Der Nenner $\det(sI - A)$ entspricht der charakteristischen Gleichung der Matrix A. D.h. Stabilitätseigenschaften der GGWP lassen sich am Nenner ablesen.

Beispiel: Betrachte Abb. 1. Die Masse m ist mit einer Feder mit Federkonstante k_F und einem Dämpfer mit Dämpferkonstante c_D verbunden. Das System kann mit einer Kraft $u(t)$ aktuiert werden.

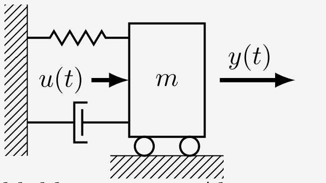


Abbildung 1: Aktuiertes Feder-Dämpfer System.

Impulserhaltung:

$$m\ddot{y} = u(t) - F_\mathrm{Feder} - F_\mathrm{Dämpf} = u(t) - k_\mathrm{F} y - c_\mathrm{D}\dot{y} \quad (6)$$

Durch die Wahl $x_1 = y$, und $x_2 = \dot{y}$, folgt:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_\mathrm{F}/m & -c_\mathrm{D}/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Durch die Wahl $k_\mathrm{F} = 1$, $c_\mathrm{D} = 1$, $m = 1$, und Ausgangsgrösse x_1, erhält man folgende Systemmatrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \; d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Mit Gl. (5) lässt sich die Übertragungsfunktion finden:

$$\text{es gilt: } K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \rightarrow K^{-1} = \frac{1}{\det(K)} \cdot \begin{bmatrix} k_{22} & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{11} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow c \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s(s+1)+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Sigma(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \qquad (7)$$

Die Übertragungsfunktion lässt sich auch direkt durch Transformation von Gl. (6) (mit Gl. (2)), berechnen:

$$m \cdot s^2 \cdot Y(s) = U(s) - k_\mathrm{F} \cdot Y(s) - c_\mathrm{D} \cdot s \cdot Y(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \Sigma(s) = \frac{1}{ms^2 + c_\mathrm{D} s + k_\mathrm{F}} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

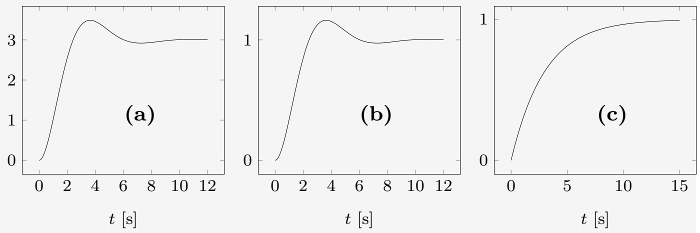
Übertragungsfunktionen haben die allgemeine Form:

$$\Sigma(s) = b_m \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m}(s - \xi_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s - \pi_i)}, \quad \xi_j, \pi_i \in \mathbb{C}$$

wobei π_i Pole und ξ_j Nullstellen genannt werden. Jeder Pol π_i entspricht entspricht einem Eigenwert λ_i von A.
Vorsicht: Nicht alle Eigenwerte von A sind Pole π_i von $\Sigma(s)$, da sich Nullstellen und Pole kürzen können! Wenn die Übertragungsfunktion aus einer minimalen Systemrealisierung $\{A, b, c, d\}$ berechnet wird, lassen sich keine Pole und Nullstellen aufheben. Das Kürzen von Termen ist somit ein Hinweis dafür, dass das System $\{A, b, c, d\}$ nicht beobachtbare oder nicht steuerbare Zustände enthält. Diese Zustände beinflussen das I/O Verhalten nicht.

Eigenschaften Gl. (3) und Gl. (4): Der Anfangs- und Endwert der Lösung im Zeitbereich lässt sich im Frequenzbereich berechnen. **Vorsicht:** Der Limes in Gl. (4) kann existieren obwohl das System nie zum GGWP konvergiert.

Beispiel: Gegeben sei das System in Gl. (7). Welches Diagramm zeigt die korrekte Sprungantwort?



Zunächst wird die Lösung im FB berechnet:

$$Y(s) = \Sigma(s) \cdot U(s), \quad U(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)}$$

Unter Anwendung von Gl. (3) und Gl. (4):

$$y(0_+) \overset{\text{def}}{=} \lim_{s\to\infty} s \cdot Y(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s^2+s+1} = 0$$

$$y(\infty) \overset{\text{def}}{=} \lim_{s\to 0_+} s \cdot Y(s) = \lim_{s\to 0_+} \frac{1}{s^2+s+1} = 1$$

Diagramme **(b)** und **(c)** haben beide einen Anfangswert 0 und einen Endwert 1. Diagramm **(a)** kann ausgeschlossen werden, da es gegen 3 konvergiert. Um zwischen **(b)** und **(c)** zu unterscheiden kann man die Pole von Gl. (7) betrachten. Für komplex-konjugierte Pole erwartet man eine oszillierende Ausgangsgrösse **(b)**. Für rein reelle Pole erwartet man keine Schwingungen in der Ausgangsgrösse **(c)**. Die Pole sind:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot j \;\Rightarrow \text{richtige Sprungantwort ist } \mathbf{(b)}$$

Beispiel: Endwert der Impulsantwort von $\sin(t)$:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \Sigma_{\sin}(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{mit} \quad u(t) = \delta(t)$$

Aus $U(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$, folgt $Y(s) = \Sigma_{\sin}(s)$ und somit gilt $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Sigma_{\sin}(s)\} = \sin(t)$[1]. Dieses Signal oszilliert für immer um den GGWP, was sich auch aus den Polen von $\Sigma_{\sin}(s)$ ablesen lässt: $s = \pm j$.
Mit Gl. (4) berechnet sich jedoch fälschlicherweise ein diskreter Endwert von $y(t)$:

$$y(\infty) \overset{\text{def}}{=} \lim_{s\to 0} \frac{s}{s^2+1} = 0$$

[1] Dieses Resultat gilt allgemein und ist sehr wichtig: Die Impulsantwort ist die Laplaceinverse des Systems ⇔ die Laplacetransformation der Impulsantwort ist die Übertragungsfunktion des Systems. Die Impulsantwort kann oft experimentell gemessen werden.