Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institute for Dynamic Systems and Control
IDSC
Institut für Dynamische Systeme und Regelungstechnik

Autoren: C. Küttel, M. Reinders **Dozent:** L. Guzzella

151-0591-00 **Regelungstechnik 1** (HS 2019) **Zusammenfassung der Vorlesung**

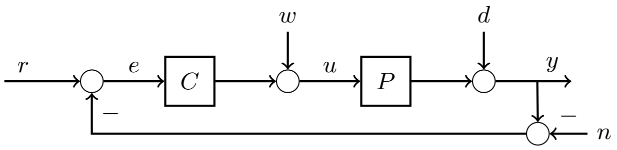
Kapitel 9.1-9.4 **Analyse von Regelsystemen**

Bei Fragen: hraffael@ethz.ch, morettog@ethz.ch, 21. November 2019

1 Definitionen

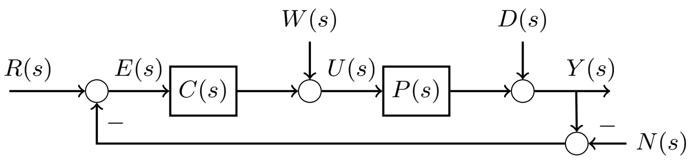
Signale im Regelkreis:

$r(t)$:Referenz (Sollzustand des Systems)
$w(t)$:Störung der Eingangsgrösse u
$d(t)$:Störung der Ausgangsgrösse y
$n(t)$:Sensorrauschen

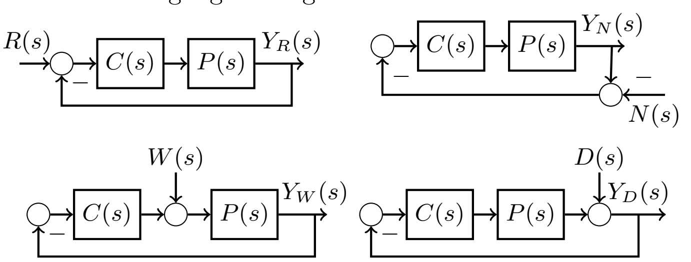


Standardregelstruktur mit Störgrössen w und d.

Das Konzept einer Übertragungsfunktion kann erweitert werden, um die Beziehung zwischen zwei beliebigen Signalen zu beschreiben. Dafür wird der Regelkreis zunächst in den Frequenzbereich transformiert:



Ziel ist, die Ausgangsgrösse $Y(s)$ als Funktion des Reglers $C(s)$, der Regelstrecke $P(s)$ und der Eingänge $R(s)$, $N(s)$, $D(s)$, und $W(s)$ zu schreiben. Durch die Linearität der Reglerstruktur und unter Annahme von unkorrelierten Eingängen können die Eingangsbeiträge einzeln betrachten werden:



Daraus folgt:

$$Y_R(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} \cdot R(s), \qquad Y_N(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} \cdot N(s)$$

$$Y_W(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)} \cdot W(s), \qquad Y_D(s) = \frac{1}{1+P(s)C(s)} \cdot D(s)$$

Die gesamte Ausgangsgrösse $Y(s)$ lautet somit:

$$Y(s) = Y_R(s) + Y_N(s) + Y_W(s) + Y_D(s) \tag{1}$$

Es werden Komponenten von Gl. (1) neu definiert:

Kreisverstärkung	: $L(s) = P(s) \cdot C(s)$	$(e \to y)$
Sensitivität	: $S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$	$(d \to y,\ r \to e)$
Komplementäre Sensitivität	: $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$	$(r \to y,\ n \to y)$

Mit diesen Definitionen können wir die Beziehung zwischen allen Eingangssignalen und dem Ausgang kompakt schreiben:

$$Y(s) = S(s) \cdot [D(s) + P(s) \cdot W(s)] + T(s) \cdot [R(s) + N(s)]$$

2 Stabilität des geschlossenen Regelkreises

Für geschlossene Regelkreise muss das Konzept der Stabilität erweitert werden. Ein System ist *intern stabil*, wenn alle Übertragungsfunktionen, welche die Eingänge w, d, r in den Regelkreis auf die Ausgange u, y, e abbilden, asymptotisch stabil sind $(Re(\lambda_i) < 0, i = 1, \dots, n)$. Die Beziehungen zwischen diesen Signalen sind gegeben durch:

$$\begin{bmatrix} U(s) \\ Y(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(s) & -S(s)\cdot C(s) & S(s)\cdot C(s) \\ S(s)\cdot P(s) & S(s) & T(s) \\ -S(s)\cdot P(s) & -S(s) & S(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W(s) \\ D(s) \\ R(s) \end{bmatrix}$$

D.h. die Übertragungsfunktionen $S(s)$, $T(s)$, $S(s) \cdot C(s)$, und $S(s) \cdot P(s)$ dürfen nur asymptotisch stabile Pole haben.

Falls $P(s)$ und $C(s)$ nur asymptotisch stabile Pole haben, genügt es also, die asymptotische Stabilität von $S(s)$ und $T(s)$ zu überprüfen um die interne Stabilität zu garantieren.

3 Nyquist Theorem

Durch das Nyquist-Theorem kann die asymptotische Stabilität eines geschlossenen Regelkreissystems $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ durch Analyse seiner Kreisverstärkung $L(s)$ (offener Regelkreis) bestimmt werden. Dabei wird angenommen, dass keine Modellunsicherheit $W_2(s)$ vorhanden ist.

Nominelles Stabilitätskriterium von Nyquist:

Der geschlossene Regelkreis, mit Übertragungsfunktion $T(s)$, ist asymptotisch stabil, falls für $L(s)$ gilt:

$$\boxed{n_c = \frac{n_0}{2} + n_+} \tag{2}$$

n_c : Anzahl Umrundungen von $L(j\omega)$ um den Punkt $(-1 + j0)$, wenn ω zwischen $(-\infty, \infty)$ variiert wird.
n_0 : Anzahl Pole von $L(s)$ mit Realteil $= 0$
n_+: Anzahl Pole von $L(s)$ mit Realteil > 0

Wichtig: Stabilität nach Nyquistkriterium gilt nur, falls keine Kürzungen von instabilen Polen mit nichtminimalphasigen Nullstellen auftreten in $L(s) = C(s) \cdot P(s)$. Andernfalls kann nicht von $L(s)$ auf die interne Stabilität des geschlossenen Regelkreises geschlossen werden.

Vorgehen zur Auswertung des Stabilitätskriteriums

1. Betrachte das Nyquistdiagramm von $L(j\omega)$ in der komplexen Ebene mit $\omega \in [0, \infty)$.

2. Spiegle das Diagramm um die reelle Achse. Die gespiegelte Kurve enspricht dem Bereich $\omega \in (-\infty, 0]$. Die kombinierte Kurven entpricht also $L(j\omega)$, $\omega \in (-\infty, \infty)$

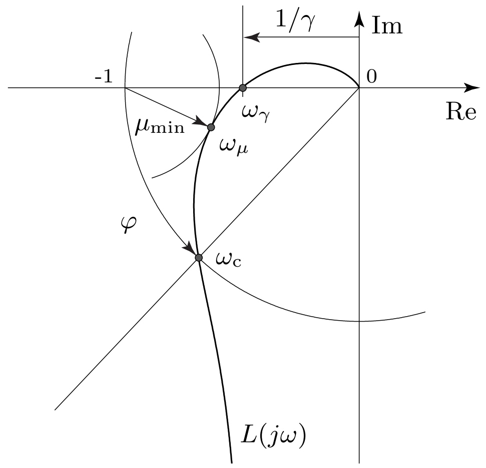
3. Zähle n_c, die Anzahl Umrundungen von $L(j\omega)$ um den Punkt $(-1 + j0)$, wenn ω von $-\infty$ bis ∞ variiert wird. Ein Umlauf in $\circlearrowleft$ wird positiv gezählt, und in $\circlearrowright$ negativ.

Detailierte Anleitung zum Zählen der Umrundungen

Betrachten einen Zeiger dessen Basis auf dem Punkt $(-1 + j0)$ liegt und dessen Kopf auf $L(j\omega)$, $\omega \to -\infty$ zeigt. Folge mit dem Kopf des Zeigers der Kurve $L(j\omega)$ von $\omega \to -\infty$ bis $\omega \to +\infty$ und zähle die Anzahl Umdrehungen um den Punkt $(-1 + j0)$, die der Zeiger dabei vollzieht.

4 Verstärkungsreserve und Phasenreserve

Falls $L(s)$ eines Systems Gl. (2) nicht erfüllt, hat das resultierende $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ instabile Pole. Falls ein $L(s)$ Gl. (2) erfüllt, ist ein Mass für die Robustheit der Stabilität also: "Wie nahe sind wir an einer weiteren Umdrehung?".



Es werden drei Robustheitsmasse eingeführt: die Verstärkungsreserve γ, die Phasenreserve φ, und der kritische Abstand μ

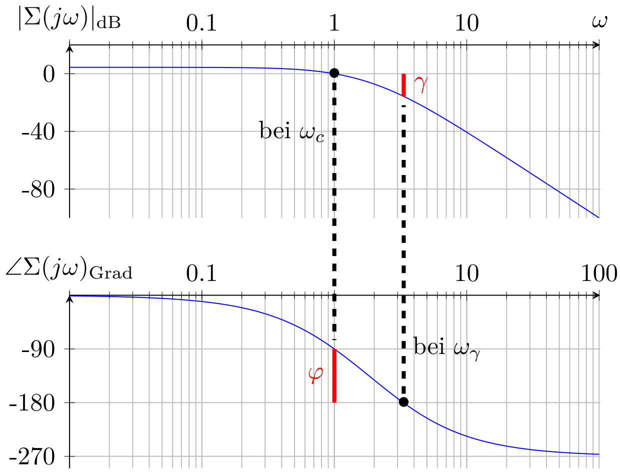
γ : Verstärkungsreserve zu $(-1+0j)$ bei $\angle L(j\omega) = -180°$
φ : Phasenabstand zu $-180°$ bei der Durchtrittsfrequenz ω_c
μ : kleinste Distanz zwischen $(-1+0j)$ und $L(j\omega)$
$\mu = \min_\omega \left|1 + L(j\omega)\right| = \frac{1}{\max_\omega \left|S(j\omega)\right|}$

Beispiel Das nominelle System $L(s)$ hat Phasenfehler α oder Verstärkungsfehler k gegenüber dem wahren System:

$$L_{t,\alpha}(s) = e^{-\alpha \cdot s/\omega_c} \cdot L(s), \quad L_{t,k}(s) = k \cdot L(s)$$

$L_{t,\alpha}$ ist stabil für $\alpha < \varphi$ und $L_{t,k}$ für $k < \gamma$. Falls beide Fehler gleichzeitig vorhanden sind, sind γ und φ keine guten Robustheitsmasse, sie messen beide nur eindimensional.

Auslesen der Reserven bei Bode-Diagrammen



5 Robustes Nyquist Theorem

Annahme: ein wahres Modell der linearen und zeitinvarianten Regelstrecke $P_t(s)$ existiert, ist aber wegen Modellierungsunsicherheit nicht bekannt. Stattdessen wurde ein Nominalmodell der Regelstrecke $P(s)$ und eine zugehörige multiplikative Unsicherheitübertragungsfunktion $W_2(s)$ gefunden. Der Regler $C(s)$ ist exakt bekannt. Die wahre Kreisverstärkung des Systems $L_t(s) = P_t(s) \cdot C(s)$ ist teil der Menge $\mathcal{S_L}$:

$$\mathcal{S_L} = \big\{ P(s) \cdot C(s) \cdot (1 + \Delta \cdot W_2(s)) \mid |\Delta| \le 1, \angle\Delta \in [-\pi, \pi] \big\} . \tag{3}$$

Es wird angenommen, dass $L(s)$ und $L_t(s)$ dieselbe Anzahl instabile (n_+) und stabile (n_0) Pole haben.

Robustes Stabilitätskriterium von Nyquist:

Das robuste Stabilitätskriterium von Nyquist wird aus dem nominalen Nyquist-Stabilitätskriterium abgeleitet: Falls nämlich das nominale Nyquist-Stabilitätskriterium Gl. (2) für jedes $L_t(j\omega) \in \mathcal{S_L}$ in Gl. (3) erfüllt ist, dann ist der Regelkreis garantiert asymptotisch stabil.

Umsetzung des robusten Stabilitätskriteriums: Durch betrachten der grössen Modellunsicherheit, d.h. mit $|\Delta| = 1$ und für alle möglichen Richtungen (Phasen) von Δ beschränken wir unsere Überlegung auf den schlimmstmöglichen Fall, d.h.

$$L_t(s) = L(s) + L(s) \cdot W_2(s) \tag{4}$$

Betrachte Abb. 2 und vergleiche mit Gl. (4). Um zusätzliche Umkreisungen des Punktes $(-1+0)j$ garantiert zu verhindern, darf der Unsicherheitsadius $|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)|$ (in rot) nie grösser als $|1 + L(j\omega)|$ (in blau) werden. Daraus folgt das robuste Stabilitätskriterium nach Nyquist:

$$\left|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega))\right| < \left|1 + L(j\omega)\right|, \forall\omega \in [0, \infty)$$

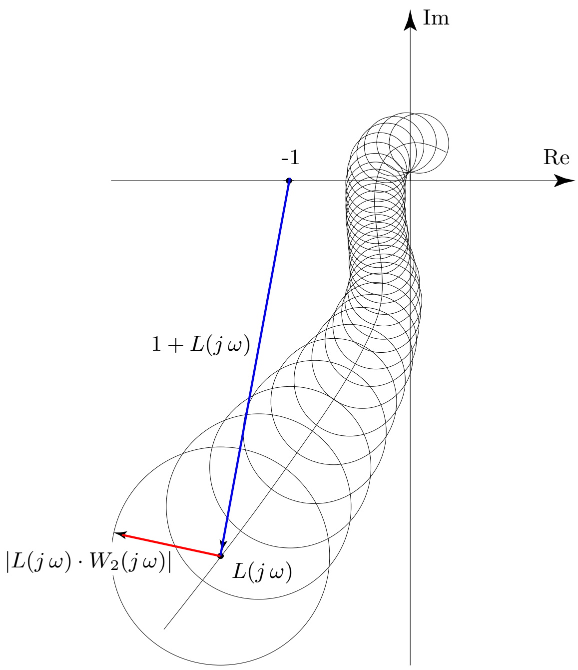


Abb. 2: Robustes Stabilitätskriterium nach Nyquist.