Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institute for Dynamic Systems and Control
IDSC
Institut für Dynamische Systeme und Regelungstechnik

**Autoren:** C. Küttel, M. Reinders **Dozent:** L. Guzzella

151-0591-00 **Regelungstechnik 1** (HS 2019) **Zusammenfassung der Vorlesung**

**Kapitel 5** **Analyse von Linearen Systemen - Teil II**

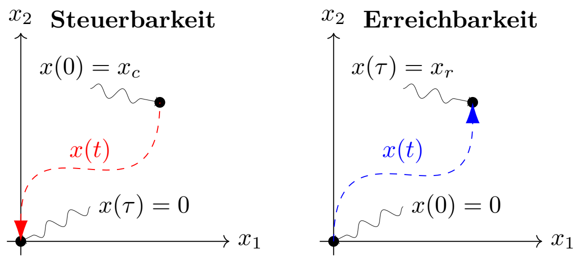
Bei Fragen: hraffael@ethz.ch, morettog@ethz.ch, 15. November 2019

Gegeben sei ein Lineares Zeit Invariantes (LZI) System:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\cdot x(t) + b\cdot u(t) & A\in\mathbb{R}^{n\times n}, b\in\mathbb{R}^{n\times 1} \\ y(t) &= c\cdot x(t) + d\cdot u(t) & c\in\mathbb{R}^{1\times n}, d\in\mathbb{R} \\ x(0) &= x_0 & \end{aligned} \qquad (1)$$

## 1 Steuerbarkeit / Erreichbarkeit

Ein Punkt $x_c \in \mathbb{R}^n$ ist steuerbar, falls ein Eingangssignal $u(t)$ existiert das den Zustandsvektor des Systems von $x(0) = x_c$ zum Zustand $x(\tau) = 0$ (zum Ursprung) in endlicher Zeit $\tau$ bringt. Falls alle Punkte in $\mathbb{R}^n$ steuerbar sind, heisst das System vollständig steuerbar. Ein System ist potentiell stabilisierbar, falls alle nicht-steuerbaren Zustände asymptotisch stabil sind.




Ein Punkt $x_r \in \mathbb{R}^n$ ist erreichbar, falls ein Eingangssignal $u(t)$ existiert, das den Zustandsvektor des Systems von Zustand $x(0) = 0$ zum Zustand $x(\tau) = x_r$ in endlicher Zeit $\tau$ bringt. Falls alle Punkte in $\mathbb{R}^n$ erreichbar sind, heisst das System vollständig erreichbar.

Wichtig: Für LZI Systeme sind die Teilräume der erreichbaren und steuerbaren Zustände identisch.

Das System ist vollständig steuerbar/erreichbar, wenn die **Steuerbarkeitsmatrix** $\mathcal{R}$ (reachability/controllability matrix) vollen Rang hat.

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} b, & A\cdot b, & A^2\cdot b, & \dots, & A^{n-1}\cdot b \end{bmatrix}$$

**Beispiel:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da $\text{rank}(\mathcal{R}) = 1 < n$, ist das System nicht vollständig erreichbar. Aus $\{A, b\}$ folgt, dass der zweite Zustand nicht direkt vom Eingang beeinflusst wird ($b$) und dass er nur abhängig von sich selber ist ($A$): $\dot{x}_2 = A_{22}\cdot x_2$, mit Eigenwert $\lambda_2 = A_{22} = -1$. Daraus folgt, dass der zweite Zustand unabhängig stabil ist und somit ist das System $\{A, b\}$ stabilisierbar.

## 2 Beobachtbarkeit

Ein System ist vollständig beobachtbar wenn man mit der Messung des Ausgangssignals $y(t)$, $t \in [0, \tau]$, $\tau > 0$ eindeutig auf den Anfangszustand $x(0)$ des Systems schliessen kann.

Ein LZI System ist dann vollständig beobachtbar, wenn die **Beobachtbarkeitsmatrix** $\mathcal{O}$ (observability matrix) vollen Rang hat.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ c\cdot A \\ c\cdot A^2 \\ \vdots \\ c\cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

**Beispiel:**

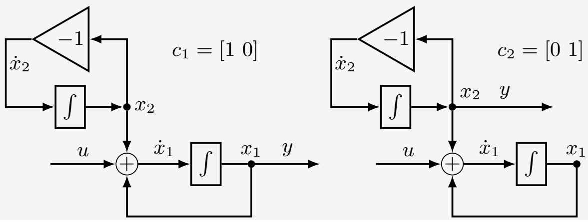
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Es sei möglich entweder $x_1$, oder $x_2$ zu messen.

$$\mathcal{O}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Falls man $x_1$ misst, ist das System vollständig beobachtbar: $\text{rank}(\mathcal{O}_1) = 2$. D.h. man kann durch messen von $x_1$ auf die Anfangsbedingungen $x_1(0)$ und $x_2(0)$ schliessen. Falls man nur $x_2$ misst, erhält man $\text{rank}(\mathcal{O}_2) = 1$. Das System ist somit nicht vollständig beobachtbar.

Die grafische Darstellung der zwei beschriebenen Systeme macht deren Eigenschaften bzgl. Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit direkt ablesbar durch den Informationsfluss der Variablen im Diagramm.




## 3 Koordinatentransformationen

Ein Zustandsraum mit Koordinaten $x$ kann durch eine (von unendlich vielen) Koordinatentransformation in anderen Koordinaten $\tilde{x}$ beschrieben werden:

$$\begin{aligned} x(t) &= T\cdot\tilde{x}(t) \qquad T\in\mathbb{R}^{n\times n}, \det(T)\neq 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{x}(t) &= T^{-1}\cdot A\cdot T\cdot\tilde{x}(t) + T^{-1}\cdot b\cdot u(t) \\ y(t) &= c\cdot T\cdot\tilde{x}(t) + d\cdot u(t) \end{aligned}$$

Fundamentale Sytemeigenschaften (Stabilität, Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, I/O-Verhalten) sind transformationsinvariant (unabhängig von der Wahl der Koordinaten $x$), d.h. sie bleiben nach einer Koordinatentransformation erhalten.

# 4 Input/Output (I/O) Darstellung

Eine Zustandsraumdarstellung $\{A, b, c, d\}$ beschreibt das gesamte System (die Zustände $x(t)$ und den Ausgang $y(t)$) für gegebene $x(0)$ und $u(t)$. Oftmals ist man nur am I/O Zusammenhang $u(t) \rightarrow y(t)$ interessiert. Dann eignet sich eine I/O-Beschreibung wie folgt:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 \cdot y^{(1)}(t) + a_0 \cdot y(t) = \\ b_m \cdot u^{(m)}(t) + \ldots + b_1 \cdot u^{(1)}(t) + b_0 \cdot u(t) \qquad (2)$$

wobei $y^{(r)}(t)$ die $r$-te zeitliche Ableitung von $y(t)$ ist.

Eine I/O Darstellung hat keine physikalischen Koordinaten mehr, weshalb alle Anfangsbedingungen auf null gesetzt werden: $y^{(n)} = 0 \; \forall n$.

# 5 Zustandsraum Normalformen

Falls man eine I/O Systembeschreibung (Gl. (2)) in eine Zustandandsraumdarstellung (Gl. (1)) umwandeln möchte, müssen Koordinaten $x$ gewählt werden. Dafür gibt es unendlich viele Möglichkeiten. Zustandandsraumdarstellung in Koordinaten $x$, welche sich für Analyse-Methoden besonders eignen, werden als Normalformen oder kanonische Formen bezeichnet.

Eine wichtige Normalform ist die **Reglernormalform**. Für ein I/O-System nach Gl. (2) ist diese definiert als:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & d \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & & -a_{n-1} & 1 \\ \hline b_0 & \cdots & b_m & 0 & & \cdots & d \end{array}\right],$$

und erlaubt u.A. das direkte Ablesen der Differentialgleichungen (Gl. (2)) aus den Systemmatrizen.

# 6 Zustandsraumzerlegung

Die Sets von erreichbaren ($\mathcal{R}$) und/oder beobachtbaren ($\mathcal{O}$) Punkten sind invariante Unterräume im Zustandsraum. Durch eine geeignete Koordinatentransformation $x = T \cdot \widetilde{x}$ kann der gesamte Zustandsraum in die invarianten Unterräume $\{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, \widetilde{x}_4\}$ in Abb. 1 zerlegt werden.

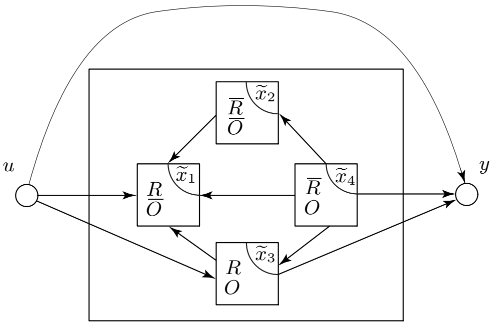



Abb. 1: Invariante Unterräume eines LZI Systems: $R$ erreichbar, $\bar{R}$ nicht erreichbar, $O$ beobachtbar, $\bar{O}$ nicht beobachtbar.

Wie ersichtlich in Abb. 1 sind zur Beschreibung des I/O-Verhaltens eines Systems nur die Zustände $\widetilde{x}_3$ relevant (gleichzeitig erreichbar und beobachtbar)[1], denn alle anderen Zustände werden entweder nicht von Eingang beeinflusst oder beeinflussen den Ausgang nicht. Die Anzahl $n$ Zustände im Unterraum $\widetilde{x}_3$ entspricht der minimalen Anzahl Zustände, die zur Beschreibung des I/O-Verhaltens nötig sind, d.h. $\widetilde{x}_3 \in \mathbb{R}^{n_{\min} \times 1}$. Deshalb wird die Darstellung des Systems in den Koordinaten $\widetilde{x}_3$ **minimale Zustandsraumdarstellung** genannt.

Für gegebene Koordinaten mit $n > n_{\min}$, enthält die Zustandsraumdarstellung nicht steuerbare oder nicht beobachtbare Zustände. Falls diese im realen physikalischen System existieren, können sie sehr wichtig sein, da ihre Initialwerte den Systemausgang direkt beeinflussen können und sie, falls sie instabil sind, nicht stabilisiert werden können.

**Beispiel:** Bestimme, ob das System $\{A, b\}$ steuerbar ist, ohne die Erreichbarkeitsmatrix $\mathcal{R}$ zu berechnen.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eine einfache Darstellung von *diagonalisierbaren*[2] Systemen ergibt sich durch eine Hauptachsentransformation, $A = V \cdot D \cdot V^{-1}, x = V^{-1} \cdot \widetilde{x} \rightarrow \dot{\widetilde{x}} = D \cdot \widetilde{x} + V^{-1} \cdot b \cdot u$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\widetilde{x}}_1 \\ \dot{\widetilde{x}}_2 \\ \dot{\widetilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \\ \widetilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

Dabei ist $V$ die Matrix der Eigenvektoren von $A$ und $D$ eine Matrix mit den Eigenwerten von $A$ auf der Diagonalen: $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.
In diesen Koordinaten wird klar das dass System einen Zustand $\widetilde{x}_3$ hat, der instabil ($\lambda_3 = 1$) und nicht steuerbar ($b_3 = 0$) ist.

[1] Zur Erinnerung: in der I/O-Beschreibung gilt $\widetilde{x}_i(0) = 0 \; \forall i$

[2] Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist diagonalisierbar falls sie Rang $n$ hat $\Leftrightarrow$ falls sie $n$ linear unabhängige Eigenvektoren hat.