

1 Frequenzantworten

In Kapitel 4 wurden zwei verschiedene Eingangsgrößen eingeführt: Der Sprung $h(t)$ und der Impuls $\delta(t)$. Als nächstes wird die harmonische Eingangsgrösse eingeführt:

$$u(t) = \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi),$$

wobei α die Amplitude, ω die Frequenz in $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, und ϕ die Phasenverschiebung ist. Der Ausgang eines Systems $\Sigma(s)$ mit harmonischen Eingang hat die Form:

$$y(t) = y_{\text{transient}}(t) + y_{\infty}(t)$$

Unter der Annahme, dass das System $\Sigma(s)$ linear, zeitinvariant und asymptotisch stabil ist, gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{transient}}(t) \rightarrow 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow y_{\infty}$$

Die asymptotische Systemantwort ist ein verstärkter und phasenverschobener cosinus bei derselben Frequenz wie der Eingang:

$$y_{\infty}(t) = m(\omega) \cdot \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi + \varphi(\omega))$$

Die Verstärkung $m(\omega)$ und die Phasenverschiebung $\varphi(\omega)$ sind systemabhängig. Es gilt:

$$y_{\infty}(t) = |\Sigma(j\omega)| \cdot \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi + \angle \Sigma(j\omega)) \quad (1)$$

D.h. die Verstärkung entspricht der Systemverstärkung bei der Eingangsfrequenz und die Phasenverschiebung entspricht der Systemphase bei der Eingangsfrequenz.

Wichtig! Lineare Systeme generieren keine neue Frequenzen. Dies ist in Gl. (1) ersichtlich. Es kommen immer dieselben Frequenzen aus dem System, wie in das System gehen. D.h. die Phasenverschiebung und Verstärkung ist nur frequenzabhängig und somit eine Eigenschaft des Systems.

Beispiel 1 Gegeben sei:

$$\Sigma(s) = \frac{s+8}{s^2+6s+8} = \frac{(s+8)}{(s+2) \cdot (s+4)} \quad (2)$$

Berechne die asymptotische Frequenzantwort y_{∞} auf den Eingang:

$$u(t) = \cos(8 \cdot t)$$

Ohne etwas zu rechnen, kennt man die Form von y_{∞}

$$y_{\infty} = |\Sigma(8j)| \cdot \cos(8 \cdot t + \angle \Sigma(8j))$$

Einsetzen von $s = 8j$, liefert:

$$\Sigma(8j) = \frac{(8j+8)}{(8j+2) \cdot (8j+4)} \quad (3)$$

Die Magnitude ist:

$$|\Sigma(8j)| = \frac{|(8j+8)|}{|(8j+2)| \cdot |(8j+4)|} = \frac{\sqrt{8^2+8^2}}{\sqrt{8^2+2^2} \cdot \sqrt{8^2+4^2}}$$

= 0.1534, und die Phase ist:

$$\begin{aligned} \angle \Sigma(8j) &= \angle(8j+8) - \angle(8j+2) - \angle(8j+4) \\ &= \arctan\left(\frac{8}{8}\right) - \arctan\left(\frac{8}{2}\right) - \arctan\left(\frac{8}{4}\right) \end{aligned}$$

= -1.648 rad. Die asymptotische Frequenzantwort ist folglich:

$$y_{\infty}(t) = 0.1534 \cdot \cos(8 \cdot t - 1.648)$$

Beispiel 2 Als nächstes wird mit einem Beispiel illustriert, wie man viele Frequenzen eines Systems auf einmal testen könnte. Betrachte Abb. 1. Die Masse m ist mit einer Feder mit Federkonstante k_F und einem Dämpfer mit Dämpferkonstante c_D verbunden. Das System kann mit einer Kraft $u(t)$ aktuiert werden.

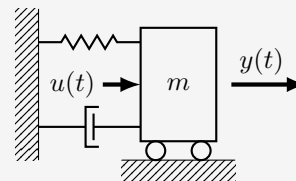


Abb. 1: Aktuiertes Feder-Dämpfer System.

Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= u(t) - F_{\text{Feder}} - F_{\text{Dämpf}} \\ &= u(t) - k_F y - c_D \dot{y} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Sigma(s) = \frac{1/m}{s^2 + \frac{c_D}{m}s + \frac{k_F}{m}} \quad (4)$$

Mit $k_F = 1$, $c_D = 1$, $m = 0.25$, folgt:

$$\Sigma(s) = \frac{4}{s^2 + s + 4} = \frac{4}{(s + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}j)(s + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}j)}$$

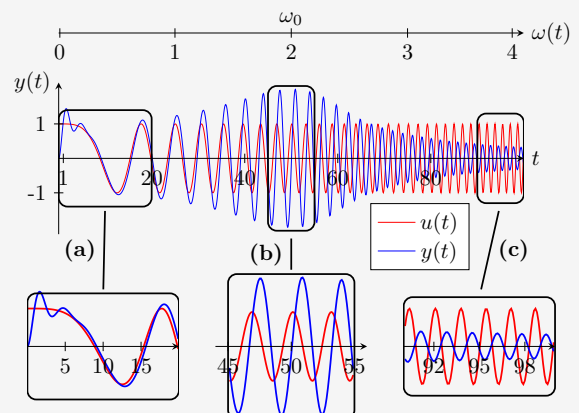
Das System ist *asymptotisch stabil* nach Lyapunov, und erfüllt somit die Bedingung um mit Methoden der Frequenzanalyse betrachtet zu werden.

Als Eingangssignal wird $u(t) = \cos(\omega(t) \cdot t)$ gewählt, wobei:

$$\omega(t) = \frac{4}{100} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t.$$

D.h. über 100 Sekunden hinweg werden alle Frequenzen von 0 bis $4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ getestet. Die Systemantwort sieht wie folgt aus:

Abb. 2: Rot: input $u(t)$, blau: output $y(t)$



Man bemerke folgende Eigenschaften des Systems:

(a) Bei $\omega = 0$ springt der Wert des Eingangssignals von 0 auf 1. Das Feder-Dämpfer System erfährt etwas ähnliches wie eine Sprungantwort. Aufgrund der Eigenwerte mit negativem Realteil, konvergiert das System schnell zur harmonischen Systemantwort. Ausserdem ist bei tiefen Frequenzen ersichtlich, dass die Phase des Ausgangs quasi der Phase des Eingangs entspricht.

(b) Die natürliche Frequenz des Systems ist bei $\omega_0 = \sqrt{4} = 2$. Da $\omega(t)$ linear gewählt wurde ($\omega \in [0, 4]$), folgt: $\omega_0 = \omega(t = 50)$. Aus der Antwort ist ersichtlich, dass $y(t)$ in der Nähe der natürlichen Frequenz die grösste Magnitude hat. Ausserdem ist der Ausgang gegenüber dem Eingang phasenverschoben.

(c) Bei sehr hohen Frequenzen kann das Feder-Dämpfer System nicht mehr schnell genug auf die Anregung reagieren, und die Amplitude seiner Schwingung nimmt ab. Zusätzlich ist bei hohen Frequenzen ersichtlich, dass die Phase des Ausgangs um ca. $-\pi$ verschoben ist.

Es gibt verschiedene Methoden, wie man die Magnitude $m(\omega)$ und Phasenantwort $\varphi(\omega)$ von Systemen $\Sigma(s)$ repräsentieren kann. Im folgenden werden zwei Methoden beschrieben: Bode Diagramme und Nyquist Diagramme.

2 Bode Diagramme

Bei Bodediagrammen werden die Magnitude $m(\omega) = |\Sigma(j \cdot \omega)|$ und die Phase $\varphi(\omega) = \angle \Sigma(j \cdot \omega)$ gegenüber einer logarithmischen Frequenzskala eingezeichnet. Dabei ist die Magnitude üblicherweise in Dezibel, und die Phase in Grad dargestellt.

Umrechnung zwischen dezimal und dezibel

$$|\Sigma(s)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10} |\Sigma(s)|$$

$$|\Sigma(s)| = 10^{\frac{|\Sigma(s)|_{\text{dB}}}{20}}$$

Dezimalskala	Dezibelskala
100	40
10	20
5	13.97...
2	6.02...
1	0
$1/\sqrt{2}$	-3.0103
0.1	-20
0.01	-40
0	-Inf

Tabelle 1: Einige wichtige Skalenumrechnungen

Beispiel: System erster Ordnung

Viele reale Regelkreise können als Systeme erster Ordnung approximiert werden. Ein solches System reagiert auf tiefe Frequenzen, die kleiner als die Eckfrequenz (Cutoff-Frequency) $\omega_c = 1/\tau$ sind. Bei Anregungsfrequenzen höher als ω_c verhindert die Trägheit des Systems eine starke Änderung des Ausgangs. Ausserdem reagiert das System für $\omega > \omega_c$ zunehmend verzögert, wie an der Phase des Bode-Diagramms ersichtlich ist. Ein wichtiges Merkmal: die Magnitude bei $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ ist immer bei $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3$ dB.

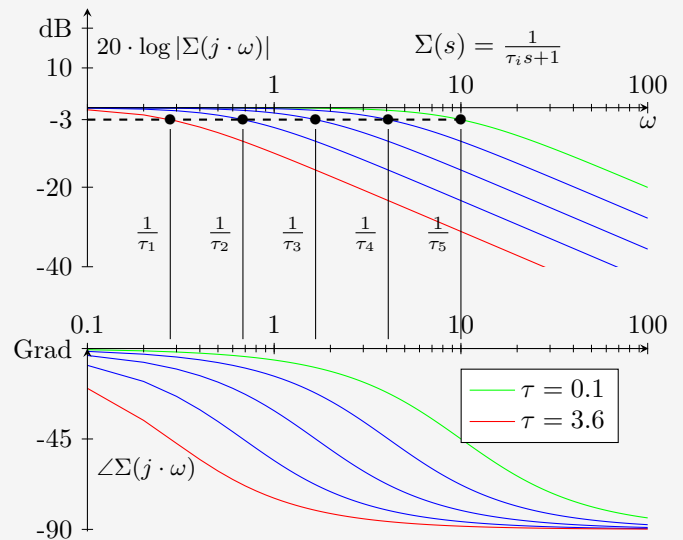


Abb. 3: Bode-Diagramme von Systemen erster Ordnung.

Beispiel: System zweiter Ordnung

Viele mechanischen Systeme zeigen resonantes Verhalten (grössere Verstärkung bei mittleren Frequenzen als bei tiefen - eine sogenannte Resonanzüberhöhung). Solche Systeme werden oft als Systeme zweiter Ordnung approximiert.

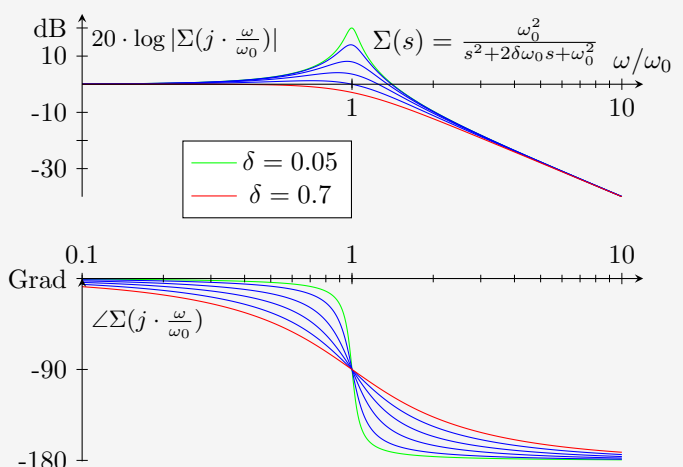


Abb. 4: Frequenznormiertes Bode-Diagramm für ein System 2. Ordnung bei unterschiedlichen Dämpfungsparametern.

Vorsicht! Die resonante Frequenz (maximale Verstärkung) ist nicht bei der natürlichen Frequenz $\omega/\omega_0 = 1$, sondern bei:

$$\omega_{\max} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \delta^2}, \quad 0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Jedoch gilt für kleine Dämpfungsparameter $\omega_{\max} \approx \omega_0$. Ausserdem zeigen Systeme 2. Ordnung für $\delta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ kein resonantes Verhalten.

Vergleich Abb. 2 und Abb. 4 | Beide Abbildungen beinhalten dieselbe Information, jedoch dient das Bode-Diagramm zur vereinfachten Nutzung. Bei tiefen Frequenzen wurde in Abb. 2 identifiziert, dass quasi keine Phasenverschiebung und eine Verstärkung von 1 vorzufinden ist. Dies lässt sich direkt am Bode-Diagramm in Abb. 4 ablesen. Um die natürliche Frequenz ist in Abb. 2 eine starke Verstärkung ersichtlich. Zusätzlich könnte man eine Phase von $-\pi/2$ errahnen. Am Bode-Diagramm ist die Phase von -90 Grad direkt ersichtlich.

Einfluss von Polen und Nullstellen auf das Bode Diagramm

Standardelemente	Änderung im Bode Diagramm	
	Verstärkung	Phase
Stabiler Pol	-20 dB/dec bei ω_c	-90° bei ω_c
Instabiler Pol	-20 dB/dec bei ω_c	$+90^\circ$ bei ω_c
Minimalphasige NS	$+20 \text{ dB/dec}$ bei ω_c	$+90^\circ$ bei ω_c
Nicht-Minimalphasige NS	$+20 \text{ dB/dec}$ bei ω_c	-90° bei ω_c
Delay um τ [s] ($\forall \omega [\text{rad/s}]$)	0 dB/dec	$-180/\pi \cdot \omega \cdot \tau^\circ$

Für Pole oder Nullstellen mit Vielfachheit grösser als eins, muss sowohl die Änderung der Verstärkung wie auch die gesamte Phasenänderung mit der Vielfachheit multipliziert werden. Beispielsweise führt eine doppelte minimalphasige Nullstelle zu einer Steigung von $+40 \text{ dB/Dekade}$ und eine Phasenänderung von $+180^\circ$.

Allgemeine Übertragungsfunktionen

Gegeben sei eine Übertragungsfunktion als Serienschaltung:

$$\Sigma(s) = \Sigma_1(s) \cdot \Sigma_2(s)$$

Das Bode-Diagramm der Serienschaltung $\Sigma(s)$ lässt sich einfach aus den Bode-Diagrammen der einzelnen Subsysteme $\Sigma_1(s)$ und $\Sigma_2(s)$ konstruieren.

Die **Magnitude** der Serienschaltung $\Sigma(s)$ in Bode Diagramm ergibt sich aus der Summe der Magnituden der Subsysteme $\Sigma_1(s)$ und $\Sigma_2(s)$. Dies, weil dB eine logarithmische Einheit ist und somit gilt: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$.

$$\begin{aligned} |\Sigma(j\omega)| &= |\Sigma_1(j\omega)| \cdot |\Sigma_2(j\omega)| \\ (|\Sigma(j\omega)|)_{\text{dB}} &= (|\Sigma_1(j\omega)| \cdot |\Sigma_2(j\omega)|)_{\text{dB}} \\ |\Sigma(j\omega)|_{\text{dB}} &= |\Sigma_1|_{\text{dB}} + |\Sigma_2|_{\text{dB}} \end{aligned}$$

Die **Phase** der Übertragungsfunktion $\angle \Sigma(j\omega)$ wird in Grad oder Bogenmass angegeben. Da $e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\varphi_2} = e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$ gilt, ergibt sich auch die Phase der Serienschaltung als Summe der Phasen der einzelnen Subsysteme:

$$\angle \Sigma = \angle \Sigma_1 + \angle \Sigma_2$$

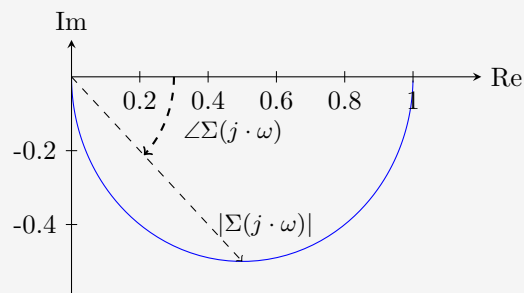
3 Nyquist Diagramme

Das Nyquist Diagramm ist die Darstellung des Frequenzganges (Magnitude und Phase über die Anregungsfrequenz ω) direkt in der komplexen Ebene.

Beispiel: System erster Ordnung

Ein allgemeines System 1. Ordnung bei der Frequenz $s = j\omega$ hat folgende Magnituden und Phasen:

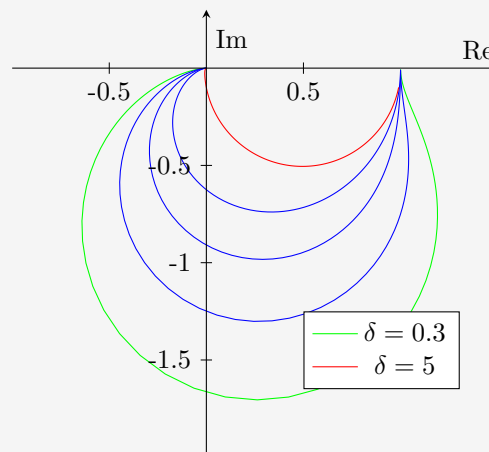
$$\begin{aligned} |\Sigma(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}} \\ \angle \Sigma(j\omega) &= -\arctan(\tau \cdot \omega) \end{aligned}$$



Beispiel: System zweiter Ordnung

Ein allgemeines System 2. Ordnung bei der Frequenz $s = j\omega$ hat folgende Magnituden und Phasen:

$$\begin{aligned} |\Sigma(j \cdot \omega)| &= \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \delta^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega^2}} \\ \angle \Sigma(j \cdot \omega) &= -\arctan\left(\frac{2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \end{aligned}$$



Das Nyquist Diagramm wird im Kapitel 9 im Zusammenhang mit der Stabilitätsanalyse eines Regelkreises nützlich. Wir werden sehen, dass Aussagen zum geschlossenen Regelkreis anhand des Nyquist Diagramms des offenen Regelkreises getroffen werden können.