Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institute for Dynamic Systems and Control
IDSC
Institut für Dynamische Systeme und Regelungstechnik

Autoren: C. Küttel, M. Reinders **Dozent:** L. Guzzella

151-0591-00 **Regelungstechnik 1** (HS 2019) **Zusammenfassung der Vorlesung**

Kapitel 3 **Normierung und Linearisierung**

Bei Fragen: hraffael@ethz.ch, morettog@ethz.ch, 14. November 2019

Beispiel: Betrachte Abb.1. Die Masse m ist an einer Feder mit Federkonstante k_F aufgehängt. Man kann ein Gasfluss mit Geschwindigkeit $v(t)$ von unten einstellen. Die Kraft der Anströmung auf die Masse m sei proportional zum Quadrat der relativen Geschwindigkeit. Die Gleichgewichtsposition des Objekt bei gegebenem v_e sei bei p_e. Die Position des Systems ist die Ausgangsgrösse und wird mit einem Sensor gemessen.

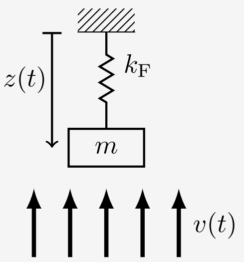


Abb. 1: Angeströmte, aufgehängte Masse

$$m\ddot{z} = F_\mathrm{G} - F_\mathrm{Feder} - F_\mathrm{Wind}$$

$$= mg - k_\mathrm{F} z - k(\dot{z} + v(t))^2$$

Dieses Beispiel wird in den folgenden Abschnitten normiert und linearisiert.

1 Zustandsgleichung erster Ordnung

In diesem Abschnitt wird erklärt, wie man eine nichtlineare Differentialgleichung (Gl. (1)) in eine Zustandsgleichung erster Ordnung (Gl. (2)) umwandelt. Aus dem Modellierungsschritt erhält man generell nichtlineare Differentialgleichungen der Ordnung n:

$$q(z^{(n-1)}, \dots, z^{(1)}, z^{(0)}, v) = z^{(n)} \tag{1}$$

$$\dot{z} = f(z, v), \quad w = g(z, v), \tag{2}$$

wobei $z(t)$ der Zustandsvektor, $v(t)$ die Eingangsgrösse, und $w(t)$ die Ausgangrösse ist. $f(.)$ und $g(.)$ sind generell nichtlineare Funktionen.

Beispiel $$\frac{1}{m}(mg - k_\mathrm{F} z - k(\dot{z} + v(t))^2) = \ddot{z}.$$

Durch die Wahl

$$\begin{aligned} z &= \begin{bmatrix} z^{(0)} & z^{(1)} & \dots & z^{(n-2)} & z^{(n-1)} \end{bmatrix}^\mathrm{T} \\ &= \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_{n-1} & z_n \end{bmatrix}^\mathrm{T} \end{aligned} \tag{3}$$

lässt sich Gl. (1) in eine Zustandsgleichung erster Ordnung umwandeln. Aus Gl. (3) und Gl. (1) folgt

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} z^{(1)} & z^{(2)} & \dots & z^{(n-1)} & z^{(n)} \end{bmatrix}^\mathrm{T}. \\ &= \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & q(z_n, \dots, z_2, z_1, v) \end{bmatrix}^\mathrm{T} \\ &= f(z, v). \end{aligned}$$

Beispiel

$$z = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} z_2 \\ \frac{1}{m}(mg - k_\mathrm{F} z_1 - k(z_2 + v(t))^2) \end{bmatrix}$$

2 Normierung

Die Grössen im Zustandsvektor z weisen verschiedene Einheiten auf. Die Normierung dient einerseits einer vereinfachten Interpretation und andererseits zur Vorbeugung von numerischen Problemen. Falls der Betrachter die physikalischen Grössen bevorzugt und die Numerik kein Problem darstellt, kann man den Normierungsschritt überspringen.

$$z_i(t) = z_{i,0} \cdot x_i(t), \qquad z_{i,0} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

In Vektornotation

$$z = T \cdot x, \quad T = \mathrm{diag}(z_{1,0}, \dots, z_{n,0})$$

Die Ein- und Ausgangsgrösse werden analog normiert:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 \cdot u(t) \qquad v_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ w(t) &= w_0 \cdot y(t) \qquad w_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Generell gilt

$$\begin{aligned} T \cdot \dot{x} &= \dot{z} = f(z, v) \\ w_0 \cdot y &= w = g(z, v) \end{aligned}$$

Nun normiert man das System:

$$\dot{x} = T^{-1} \cdot f(T \cdot x, v_0 \cdot u) = f_0(x, u) \tag{4}$$

$$y = w_0^{-1} \cdot g(T \cdot x, v_0 \cdot u) = g_0(x, u) \tag{5}$$

Die Einheit der normierten Gleichung (4) ist $\left[\frac{1}{s}\right]$.

Beispiel:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \frac{1}{m}(mg - k_\mathrm{F} z_1 - k(z_2 + v(t))^2) \end{bmatrix}$$

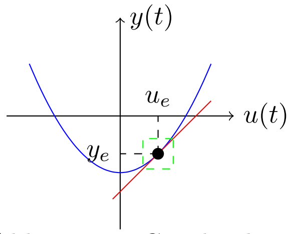
Es liege im Interesse des Betrachters, dass die normierte Position x_1 der Masse m im Gleichgewichtszustand p_e (bei Wind v_e), $x_{1,e} = 1$ entspreche. Ausserdem weiss der Betrachter, dass gilt: $0 < v(t) < v_\mathrm{max}$. Dies ist hilfreich, um die Eingangsgrösse in die Region $0 < u(t) < 1$ zu normieren. Die maximale Geschwindigkeit $\dot{z}_\mathrm{max}$ sei h :

$$T = \begin{bmatrix} p_e & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}, \quad v(t) = v_\mathrm{max} \cdot u(t)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{h}{p_e} \cdot x_2 \\ \frac{1}{h \cdot m}(mg - k_\mathrm{F} \cdot p_e \cdot x_1 - k(h \cdot x_2 + v_\mathrm{max} \cdot u(t))^2) \end{bmatrix}$$

3 Linearisierung von nichtlinearen Systemen

Das normierte nichtlineare System wird nun um den Gleichgewichtspunkt linearisiert. Die Linearisierung vereinfacht die Analyse um den Gleichgewichtspunkt.



$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_0(x,u)\\ y &= g_0(x,u)\end{aligned} \quad \approx \quad \begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu\\ y &= cx + du\end{aligned}$$

Abb. 2: Graphische Interpretation der Eingangs-Ausgangslinearisierung. Nichtlineares System in blau. Linearisiertes System in rot.

Berechung der Gleichgewichtslage
Um das System zu linearisieren wird zuerst die Gleichgewichtslage berechnet. Im Gleichgewichtszustand gilt per Definition:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}\dot{x}_1 & \dots & \dot{x}_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}0 & \dots & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = f(x_e, u_e).$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in $x_1, x_2, \dots, x_n$ und u. Für einen gewünschten Zustand x_e lässt sich ein u_e berechnen. Dabei ist zu beachten, dass nicht alle gewünschten x_e möglich sind. Umgekehrt lässt sich für ein konstantes u_e der resultierende Gleichgewichtszustand x_e berechnen.

Beispiel:

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} \frac{h}{p_e} \cdot x_{2,e} \\ \frac{1}{h \cdot m}(mg - k_{\mathrm{F}} \cdot p_e \cdot x_{1,e} - k(h \cdot x_{2,e} + v_{\max} \cdot u_e)^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow x_{2,e} = 0, \quad u_e = \frac{1}{v_{max}}\sqrt{\frac{1}{k}(mg - k_{\mathrm{F}} p_e \cdot x_{1,e})},$$

mit $x_{1,e} = 1$.

Linearisierung
Um das System um den Gleichgewichtspunkt zu linearisieren, werden die Matrizen A, b, c, d berechnet:

$$A \overset{\text{def}}{=} \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_n} \end{bmatrix} \right|_{x_e, u_e} \qquad b \overset{\text{def}}{=} \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{0,1}}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{0,n}}{\partial u} \end{bmatrix} \right|_{x_e, u_e}$$

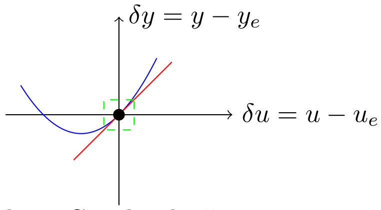
$$c \overset{\text{def}}{=} \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial g_0}{\partial x_1} & \frac{\partial g_0}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_0}{\partial x_n} \end{bmatrix} \right|_{x_e, u_e} \qquad d \overset{\text{def}}{=} \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial g_0}{\partial u} \end{bmatrix} \right|_{x_e, u_e}$$

Die Matrizen sind eine direkte Konsequenz der Taylorentwicklung[1] erster Ordnung von $\dot{x} = f_0(\delta x + x_e, \delta u + u_e)$ um x_e, u_e

$$\delta\dot{x} \approx \underbrace{f_0(x_e, u_e)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f_0(x_e, u_e)}{\partial x}}_{A} \delta x + \underbrace{\frac{\partial f_0(x_e, u_e)}{\partial u}}_{B} \delta u$$

[1] Analog für $y = g_0(\delta x + x_e, \delta u + u_e)$

Wichtig: Bei linearisierten Systemen betrachtet man nur die Dynamik der Differenzen mit Ursprung x_e, u_e und lässt das δ weg ($\delta x \overset{\text{def}}{=} x, \delta u \overset{\text{def}}{=} u, \delta y \overset{\text{def}}{=} y$)



$$\begin{aligned}\delta\dot{x} &= A\delta x + b\delta u\\ \delta y &= c\delta x + d\delta u\end{aligned}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu\\ y &= cx + du\end{aligned}$$

Abb. 3: Graphische Interpretation der Delta-Formulierung.

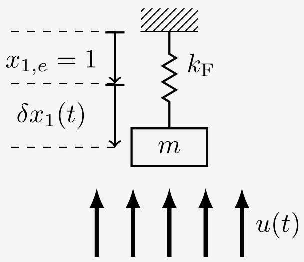
Beispiel: Das System wird nun um u_e, x_e linearisiert

$$A = \begin{bmatrix} 0 & h/p_e \\ -\frac{1}{h \cdot m} \cdot k_{\mathrm{F}} \cdot p_e & -\frac{1}{m} \cdot 2k \cdot (h \cdot x_{2,e} + v_{\max} \cdot u_e) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{h \cdot m} \cdot 2k \cdot v_{\max} \cdot (h \cdot x_{2,e} + v_{\max} \cdot u_e) \end{bmatrix}$$

Die Ausgangsgrösse ist die Position $z_1 = z$ der Masse. Wählt man die normierte Ausgangsgrösse $p_e \cdot y = z$, folgt

$$y = \frac{z}{p_e} = x_1 = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{c} \begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}, \quad d = 0.$$



Das normierte System hat die Gleichgewichtslage bei $x_{1,e} = 1$. Das linearisierte System beschreibt das originale nichtlineare Systemverhalten sehr genau für kleine Abweichungen $\delta x_1(t)$ um den linearisierten Punkt.