

# Dimensionieren I

Jorit Geurts - jgeurts@student.ethz.ch

Version: 30. September 2021

Template by Micha Bosshart - bmicha

## 1 Grundproblem der Kontinuumsmechanik

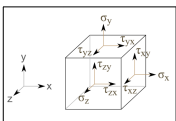
### 1.1 Gleichgewichtsbedingungen des Kontinuums GGB

Für kleine Deformationen und linearelastisches isotropes Materialverhalten

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} + f_1 = 0$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} + f_2 = 0$$

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + f_3 = 0$$



### 1.2 Stoffgleichung SG

Annahmen: Linear, Elastisch (keine viskoelast.), Isotrop

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2G} \cdot \sigma_{12}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \quad \epsilon_{13} = \frac{1}{2G} \cdot \sigma_{13}$$

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{11})] \quad \epsilon_{23} = \frac{1}{2G} \cdot \sigma_{23}$$

Für Umformungen:  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$       $\nu = 0$  für Stab

### 1.3 Kinematische Relationen KR

Geometrische Approximation  $\rightarrow$  stimmt für kleine Dehnungen und kleine Rotationen.

$$\epsilon_{11} = u_{1,1} \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1})$$

$$\epsilon_{22} = u_{2,2} \quad \epsilon_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1})$$

$$\epsilon_{33} = u_{3,3} \quad \epsilon_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2})$$

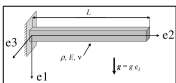
### 1.4 Randbedingungen RB

Es existiert nur selten eine analytische Lösung für GGB, SG und KR unter Berücksichtigung der RB.

- Statische RB  $\sigma_{ij}(x, y, z)$
- Kinematische RB  $u_i(x, y, z)$

$\rightarrow$  Approximation durch Strukturtheorien oder FEM

**Am Balken**



Obere und Untere Balkenränder:  $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$   
Längsseiten:  $\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$

Freies Ende:  $\sigma_{22} = \sigma_{21} = \sigma_{23} = 0$

Einspannung:  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ ,  $(u_{1,2} \neq 0, \text{ da in 3D})$

**Umformung der RB** Bsp:  $\sigma_{11} = 0$   
 $\rightarrow 0 = u_{1,1} + \frac{1-\nu}{1-2\nu}(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3})$  (Aus 1.5)

### 1.5 Differentialgleichungen DGL und Umformungen

Die 15 Gleichungen (GGB, SG KR) und 15 Unbekannten lassen sich auf 3 Differentialgleichungen für die Komponenten des Verschiebungstensors  $u_i$  reduzieren.

$$\frac{1}{2}u_{i,kk} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{1-2\nu}\right)u_{k,ki} + \frac{1+\nu}{E}f_i = 0$$

Spannungen können als Funktion vom Verschiebungsvektor aus GGB, SG und KR dargestellt werden.

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu} \left( u_{1,1} + \frac{\nu}{1-2\nu}(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}) \right)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1+\nu} \left( u_{2,2} + \frac{\nu}{1-2\nu}(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}) \right)$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{1+\nu} \left( u_{3,3} + \frac{\nu}{1-2\nu}(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}) \right)$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}(u_{1,2} + u_{2,1})$$

$$\sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)}(u_{1,3} + u_{3,1})$$

$$\sigma_{23} = \frac{E}{2(1+\nu)}(u_{2,3} + u_{3,2})$$

$\nu = 0$  für Stab

### 1.6 Herleitung der DGL (1)

Inversion der SG:

$$(1+\nu)\sigma_{11} = E\epsilon_{11} + \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

gleich für  $\sigma_{22}$  und  $\sigma_{33} \rightarrow 3$  Gleichungen. Addition der 3 Gle.:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \frac{E}{1-2\nu}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})$$

Zurück einsetzen in (2)

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu} \left( \epsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \right)$$

gleich für  $\sigma_{22}$  und  $\sigma_{33} \rightarrow 3$  Gleichungen. Aus SG:

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\epsilon_{12} \quad \sigma_{13} = \dots \quad \sigma_{23} = \dots$$

Fasse (3) und (4) mit Indexschreibweise,  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

und  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  zusammen:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk}$$

Setzte (5) in GGB ein:

$$u_{1,11} \left( 1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \right) + \frac{1}{2}u_{1,22} + \frac{1}{2}u_{1,33}$$

$$+ \left( \frac{\nu}{1-2\nu} + \frac{1}{2} \right) (u_{2,21} + u_{3,31}) + \frac{f_1(1+\nu)}{E} = 0$$

Umformen liefert:

$$\frac{1}{2}[u_{1,11} + u_{1,22} + u_{1,33}] + (u_{1,11} + u_{2,21} + u_{3,31}).$$

$$\left( \frac{\nu}{1-2\nu} + \frac{1}{2} \right) + \frac{f_1(1+\nu)}{E} = 0$$

Letzter Term in Indexschreibweise = DGL (1)

### 1.7 Zulässigkeit und Verträglichkeit

- Spannungsfeld  $\sigma_{ij}(x, y, z)$  zulässig falls: **GGB** und statische **RB** erfüllt
- Verschiebungsfeld  $u_i(x, y, z)$  zulässig falls: stetig und kinematische **RB** erfüllt
- Spannungsfeld und Verschiebungsfeld verträglich falls: **SG** erfüllt

### 2 Strukturtheorie des Balkens

### 2.1 Statistische Formulierung

**Ansatz** Balkenränder sind Kräftefrei ( $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ).  $\sigma_{xx} \neq 0$  aus  $M_z$  und  $\tau_{xy} \neq 0$  aus  $Q_y$ .

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_z(x)}{I} \cdot y$$

**Vorgehen**

- Beanspruchung am Balken ermitteln (*Mech II*)
- Spannungen  $\sigma_{xx}$  und  $\tau_{xy}$  aus Beanspruchung berechnen (*Mech II*). (Muss GGB erfüllen.)
- Dehnungen  $\epsilon$  mit SG ermitteln

### 2.2 Kinematische Formulierung

**Ansatz** Wähle für die Verschiebungslinien  $u_y(x)$ ,  $u_x(x)$  und  $u_z(x)$  einen Ansatz, der die kinematischen **RB** erfüllt.

$$\text{Bsp. } u_y(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2, \quad u_x(x) = \dots$$

**Vorgehen**

- Wenn möglich Koeffizienten mit kinematischen **RB** bestimmen.
- Spannungen  $\sigma_{ij}$  mit SG ermitteln (1.5)
- Verfahren von Ritz um die restlichen Koeffizienten zu finden. Wähle die Koeffizienten so, dass die potentielle Energie  $E_{pot}$  minimiert wird.

### 2.3 Vergleich

**Formulierung**

Ansatz für

Erfüllt

Berechne

Versuche zu EF

Teilweise NEF

NEF

Steifigkeitskonstante

$\sigma$  aus Bean.

GGB, SRB

SG  $\rightarrow \epsilon$ , u

KRB

KR\*

$K_{\sigma} < K_s$

zu weich

$K_u > K_s$

zu steif

$\sigma$  aus Bean.

GGB, SRB

SG  $\rightarrow \sigma$

KRB

SRB

GGB\*\*

$K_u > K_s$

zu steif

\*  $u_{y,y} \neq \epsilon_{yy}$ ,  $u_{z,z} \neq \epsilon_{zz}$   
\*\*  $\sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = \sigma_{xx,x} \neq 0 \rightarrow$  Schlechte Approx mit nur einer Funktion. Approximation wird besser durch besseren Ansatz und mehrere Elemente. Für beide nicht **exakt**. **Bemerkte:** Verschiebungsansatz führt zu Normalspannungen senkrecht zur Balkenachse.

### 3 Energiesätze

#### 3.1 Definitionen

**Deformationsenergie** (:= gilt für lin.elastisch)

$$U = \iiint_V \left( \oint_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \right) dV := \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV$$

**Potential der äusseren Kräfte** Summe nicht vergessen!

$$V = - \iiint_V f_i u_i dV - \sum_a F_a \cdot u_a$$

**Potentielle Energie**

$$E_{pot} = U + V$$

**Komplementäre Deformationsenergie**

$$U_k = \iiint_V \left( \oint_0^{\sigma_{ij}} \epsilon_{ij} d\sigma_{ij} \right) dV := \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV$$

$U_k = U$  für lin. elast.

$U_k < U$  für nicht lin. elast.

#### 3.2 Satz vom Minimum der potentiellen Energie SMPE

Aus der Menge der zulässigen Verschiebungsfelder  $u_i^*(x, y, z)$  und der damit verträglichen Spannungsfelder  $\sigma_{ij}^*(x, y, z)$  macht das wirkliche Verschiebungsfeld  $u_i(x, y, z)$  die potentielle Energie minimal.

$$E_{pot}(u_i) < E_{pot}(u_i^*)$$

**Anwendung**

- ① zulässiger Ansatz für  $u_i$  wählen

- ②  $\epsilon_{ij}$  mit (1.3) und (1.5) ermitteln.  $\sigma_{ij}$  braucht nicht zulässig zu sein.

- ③  $E_{pot}$  berechnen

- ④ **Verfahren von Ritz:** Koeffizienten ermitteln, die minimalen  $E_{pot}$  ergeben. Wenn a und b die Koeffizienten sind:

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial E_{pot}}{\partial b} = 0$$

### 3.3 Satz vom Minimum der komplementären Deformationsenergie SMkDE

Aus der Menge der zulässigen Spannungsfelder  $\sigma_{ij}^*(x, y, z)$  und damit verträglichen  $\epsilon_{ij}$  macht das wirkliche Spannungsfeld  $\sigma_{ij}(x, y, z)$  die komplementäre Deformationsenergie minimal.

$$U_k(\sigma_{ij}) < U_k(\sigma_{ij}^*)$$

**Anwendung**

- ① Zulässiger Ansatz für  $\sigma_{ij}$  wählen.

- ②  $\epsilon_{ij}$  aus SG berechnen.  $\epsilon_{ij}$  muss nicht zulässig sein.

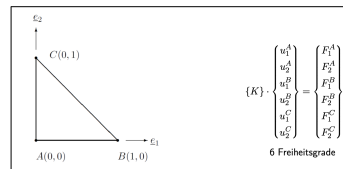
- ③  $U_k(\sigma_{ij})$  berechnen.

- ④ **Verfahren von Ritz:** Koeffizienten ermitteln, die minimalen  $U_k$  ergeben. Wenn a und b die Koeffizienten sind:

$$\frac{\partial U_k}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial U_k}{\partial b} = 0$$

### 3.4 Methode der finiten Elemente FE

Diskretisierung einer Struktur, Aufteilung in Elemente und dazugehörigen Knoten. Beziehung zwischen Verschiebungsfreiheitsgrade der Knoten  $u$  und äusseren Kräften an den Knoten  $F$  über globale Steifigkeitsmatrix  $C$  beschrieben.



$$\text{Anzahl Einträge} = \text{Anzahl Freiheitsgrade}$$

**Vorgehen** um  $C$  mit **SMPE** zu bestimmen.

- ① Wähle zulässigen Ansatz für Verschiebung. Bsp:  $u_1(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + c$  und  $u_2 = \dots$

- ② Koeffizienten  $a, b, \dots$  als Verschiebung der Knotenpunkte ausdrücken. Bsp:  $u_1 = (u_1^B - u_1^A)x_1 \cdot \frac{1}{L_1} + (u_1^C - u_1^A)x_2 \cdot \frac{1}{L_2} + u_1^A$  oft  $L_i = 1$

- ③ Mit (1.3)  $\epsilon_{ij}$  und mit (1.5)  $\sigma_{ij}$  berechnen.

- ④  $E_{pot}$  berechnung und **Verfahren von Ritz** anwenden.

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial u_i^k} = \frac{\partial U + \partial V}{\partial u_i^k} = 0 \rightarrow \frac{\partial U}{\partial u_i^k} = -\frac{\partial V}{\partial u_i^k}$$

und ermittle  $F_i^k(u_i^k)$ . Falls keine inneren Kräfte wirken:

$$-\frac{\partial V}{\partial u_i^k} = F_i^k = \frac{\partial U}{\partial u_i^k} \stackrel{z.B.}{=} 3u_1^B + 2u_1^C$$

- ⑤ Fasse die Koeffizienten (z.B. 3 und 2) in der Matrix  $K$  zusammen. Einträge der Zeilen aus  $F_i^k = \dots$  ablesen.

### 4 Strukturtheorie der Scheibe

### 4.1 Scheibe

**Definition** Dünnwandige ebene Struktur mit Belastung in der Ebene.

**Infinitesimales Element**

$N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}$ : Kräfte pro Längeneinheit ( $\rightarrow$  Spannungen  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$  über Dicke  $t$  integriert)

**Annahmen**

a Ebener Spannungszustand ( $\sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz} = 0$ )

b Übrige Spannungskomponenten sind in  $z$ -Richtung konstant verteilt

c keine Volumenkräfte

a und b sinnvoll weil keine Biegung und  $t \ll$  planare Dimension. GGB (1) - (3) mit a,b,c. GGB reduziert sich zu:

$$\sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} = 0 \quad \sigma_{yy,y} + \tau_{xy,x} = 0$$

**Airy'sche Spannungsfunktion  $F(x, y)$**

$F(x, y)$  erfüllt GGB falls:

$$\sigma_{xx} = F_{,yy}, \quad \sigma_{yy} = F_{,xx}, \quad \tau_{xy} = -F_{,xy}$$

$F(r, \phi)$  erfüllt GGB falls

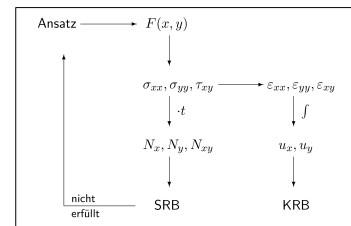
$$\sigma_{\phi\phi} = F_{,rr}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}F_{,r} + \frac{1}{r^2}F_{,\phi\phi} \quad \tau_{r\phi} = \frac{1}{r^2}F_{,\phi} - \frac{1}{r}F_{,\phi r}$$

**Bipotential (Scheiben-) Gleichung**

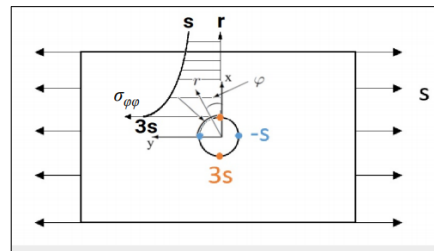
Folgt aus  $F(x, y)$  und Kompatibilitätsbedingung ( $\epsilon_{xx,yy} + \epsilon_{yy,xx} = 2\epsilon_{xy,xy}$ )

$$F_{,yyyy} + F_{,xxxx} + 2F_{,xxyy} = 0 \quad (\Delta\Delta F = 0)$$



Das Grundproblem ist nicht für alle **RB** erfüllt. Sorgt für Minimierung der komplementären Deformationsenergie.

### 4.2 Scheibe mit Loch



**Allgemeine Lösung** für Scheibe mit Loch, einer *uniformen, uniaxialen* Zugbelastung und einem Ansatz  $F(r, \phi)$  der die *Bipotentialgleichung* erfüllt.

$$\sigma_{rr} = \frac{s}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} - \cos(2\phi) \right) \left( 1 + 3\frac{a^4}{r^4} - 4\frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \frac{s}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} + \cos(2\phi) \right) \left( 1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right)$$

$$\tau_{r\phi} = \frac{s}{2} \left( 1 - 3\frac{a^4}{r^4} + 2\frac{a^2}{r^2} \right) \sin(2\phi)$$

Daraus folgt

$a$ ;  $\phi = 0, \pi$  :  $\sigma_{\phi\phi} = 3s$  → **Kerbfaktor**  
 $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$  :  $\sigma_{\phi\phi} = -s$   
 $\forall \phi \in \mathbb{R}$  :  $\sigma_{rr} = 0$   $\tau_{r\phi} = 0$

**Vorgehen** um Spannungen an einem Punkt  $P(r, \phi)$  zu finden.

- Gegebenen Lastfall als Superposition von *uniformen, uniaxialen* Belastungen (=Hauptspannungen) schreiben.  

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \quad \alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$$

$$\alpha_{1,2} \text{ in } \sigma_\xi(\alpha) \text{ einsetzen} \rightarrow \sigma_1(\alpha_1), \sigma_2(\alpha_2)$$
- Alle resultierenden Lastfälle (z.B.  $I, II, \dots$ ) mit denselben Variablen (z.B.  $\phi_I$  und  $r_I$ ) schreiben.  
*Bsp:*  $\phi_I = \phi_{II} + \frac{\pi}{2}$
- Lösungen  $\sigma_{rr}, \sigma_{\phi\phi}, \tau_{r\phi}$  für Lastfälle  $I, II, \dots$  mit *allgemeiner Lösung* berechnen und addieren (Superposition)
- Resultat zurück transformieren → Belastung für den ursprünglichen Lastfall und  $P$  einsetzen

#### Basiswechsel Spannungsfeld

$$\sigma_\xi(\alpha) = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sigma_\eta(\alpha) = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tau_{\xi\eta}(\alpha) = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

### 4.3 Scheibe mit Riss

#### Ansatz

Spannungsfreie Rissanten  $\sigma_{\phi\phi} = \tau_{r\phi} = 0$

**Nahfeld Lösung** für Scheibe mit Riss, einer *uniformen, uniaxialen* Zugbelastung und einem Ansatz  $F(r, \phi)$  der GGB erfüllt. ( $r \ll L, a$ )

$$\sigma_{rr} = \frac{3}{4} A_2 r^{-\frac{1}{2}} \left( 5 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3}{2}\phi\right) \right)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \frac{3}{4} A_2 r^{-\frac{1}{2}} \left( 3 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\phi\right) \right)$$

$$\tau_{r\phi} = \frac{3}{4} A_2 r^{-\frac{1}{2}} \left( \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\phi\right) \right)$$

Physikalisch nicht möglich:  $u_i(r=0) = 0, \sigma_{ij}(r=0) = 0$

Physikalisch möglich:  $\lim_{r \rightarrow 0} U = 0$

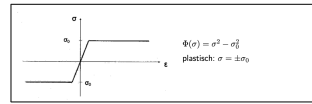
## 5 Materialverhalten

### 5.1 Plastizität

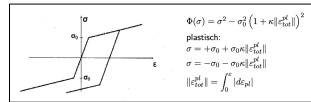
Fließbedingung im 1D Spannungszustand

$\Phi(\sigma) < 0 \rightarrow$  elastisch,  $\Phi(\sigma) = 0 \rightarrow$  plastisch

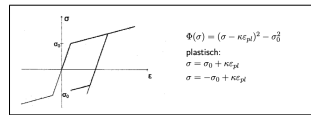
- Ideal elastisch plastisch



- Lineare *isotrope* Verfestigung



- Lineare *kinematische* Verfestigung (Bauschinger Effekt)



Fließbedingung im 3D Spannungszustand

$$\sigma = \sigma_{Mises}^{vgl} \text{ oder } \sigma = \sigma_{Tresca}^{vgl}$$

### 5.2 Festigkeitshypothese

$$\sigma_{Tresca}^{vgl} = |\max(\sigma_i) - \min(\sigma_j)| = 2\tau_{max}$$

$\sigma_i$  und  $\sigma_j$  sind **Hauptspannungen nach Mohr**

$$\sigma_{Mises}^{vgl} =$$

$$\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} + 3(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2)}$$

Grösse nicht verschwindende Normalspannung

Einsetzen in 5.1 → Von Mises'sche Fließbedingung ( $\tau_{ij} = 0$ )

$$\Phi_{Mises} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_0^2 = 0$$

#### Bemerge

- $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \rightarrow \sigma_{Mises}^{vgl} = \sigma_{Tresca}^{vgl} = 0$
- Grösste Schubspannung =  $\frac{1}{2}$  · Streckgrenze (Tresca)
- Zugversuch: *Tresca* konservativer (Grenzfläche von Sechseck schneller erreicht als von Ellipse). Torsionsversuch: *Mises* konservativer

#### Vorgehen

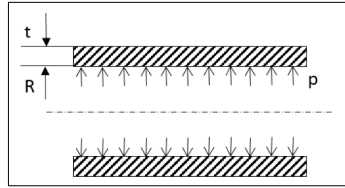
- Hauptspannungen bestimmen (z.B. mit *Kesselformel*)
- in Definition von  $\sigma_{Mises}$  bzw.  $\sigma_{Tresca}$  einsetzen
- Wenn nötig  $d \ll a, b$  (Plattendimensionen) benutzen zum Umformen und Approximieren. z.B. bei Kessel:

$$R_m = R, \quad \left(1 + \frac{d}{R}\right) = 1, \dots$$

- Überprüfen ob Fließbedingung erreicht (5.1)

## 5.3 Kesselgleichung

Für dünnwandige Behälter mit  $t \ll R$ .



Freie Enden:  $\sigma_\phi = p \frac{R}{t}, \sigma_r = \sigma_x = 0$

Geschlossene Enden:  $\sigma_\phi = p \frac{R}{t}, \sigma_r = 0, \sigma_x = p \frac{R}{2t}$   
 Berücksichtigung des Innendrucks →  $\sigma_r = -p$

$$\sigma_{Mises}^{frei} = p \frac{R}{t}, \quad \sigma_{Mises}^{gesch} = \sqrt{\frac{3}{4}} p \frac{R}{t}$$

#### Geometrische Fehlerabschätzung

Für  $\sigma_\phi$ : Verwenden von  $R_m$  statt  $R$  ist eine konservative Annahme.  $\sigma_x^{gesch}$  ohne Approximation der Schnittfläche:

$$\sigma_x^{(geo, gesch)} = \frac{R^2}{(R+t)^2 - R^2} p$$

**kugelförmig**  $\sigma_\varphi\varphi = \sigma_\theta\theta = \frac{R}{2t} P; \quad \sigma_{rr} = 0$

## 5.4 Belastung und Spannungsverteilung

**Deformationsgesteuerte**  $\epsilon \uparrow \downarrow$   
 vorgespannte Schraube  
 thermische Spannungen

**Kraftgesteuerte**  $\sigma \uparrow \downarrow$   
 Gewicht, Kessel  
 Zentrifugalspannung

\* Beim Überschreiten von  $R_{p0.2}$  oft weniger Reserve → konservativere Dimensionierung.

#### Reserven

- $\frac{\epsilon_B}{\epsilon_0}$  = für Deformationsgesteuerte Belastung
- $\frac{\sigma_B}{\sigma_0}$  = für Kraftgesteuerte Belastung

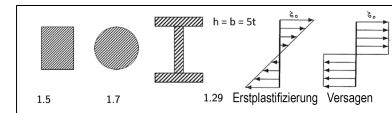
Für viele Metalle  $\frac{\epsilon_B}{\epsilon_0} \gg \frac{\sigma_B}{\sigma_0}$

**Spannungsverteilung homogen:** Plastifizierung in der ganzen Struktur falls Fließgrenze überschritten. → Versagen (Bsp: Zug bei ideal elastisch plastisch)

**Spannungsverteilung als lineare Funktion:** Fließgrenze an einer Stelle überschritten. Rest bleibt elastisch. → Versagen erst bei grösserer Belastung. (Bsp: Biegung bei ideal elastisch plastisch)

### 5.5 Formfaktor

$$\text{Formfaktor: } f = \frac{M_{Versagen}}{M_{Plast}}$$



$\sigma$  Plastifizierung :=  $\sigma_0$

**Berechnung** von  $M_{Plast}$  \*

Sobald  $\sigma(y) = \pm \frac{h}{2} \sigma_0 \rightarrow \sigma(y) = \sigma_0 \frac{2}{h} y$

$$M_{Plast} = \iint \sigma_0 \frac{2}{h} y \cdot y dA \stackrel{b \text{ konst}}{=} b \int \sigma_0 \frac{2}{h} y^2 dy$$

$$\stackrel{b \times h}{=} b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_0 \frac{2}{h} y^2 dy = \sigma_0 \frac{h^2}{6} b = \sigma_0 \frac{2}{h} b \cdot I$$

**Berechnung** von  $M_{Versagen}$  \*

$\sigma(y > 0) = \sigma_0, \sigma(y < 0) = -\sigma_0$

$$M_{Vers} = \int \int \sigma(y) \cdot y dA$$

$$b \stackrel{\text{konst.}}{=} b \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_0 \cdot y dy + b \int_{-\frac{h}{2}}^0 -\sigma_0 \cdot y dy \stackrel{b \times h}{=} \sigma_0 \frac{h^2}{4} b$$

Falls nötig Integral der durch Summe der Teilflächen bilden.  
*Bsp:* H-Träger (Höhe  $h$ , Dicke  $s$ , Breite  $b$ )

$$M_{versagen} = 2s \int_0^{\frac{h-2s}{2}} \sigma_0 x_2 dx_2 + 2b \int_{\frac{h-2s}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_0 x_2 dx_2$$

\* Für elastisch idealplastisch und Belastung durch ein Biegemoment

### 5.6 Plastischer Formfaktor

$$\text{Plastischer F: } K_p = \frac{\text{vollplastische Traglast}}{\text{elastische Grenzlast}} = \frac{s_2}{s_1}$$

Vollplastische Traglast: aus Grenzlastanalyse  
 Elastische Grenzlast: wenn maximale  $\sigma_v$  den Wert  $R_p$  erreicht. Für Scheibe mit Loch, wobei die Breite viel Grösser ist als das Loch gilt:

$$\sigma_{Mises}^{max}(s_1) = \sigma_0$$

$$\sigma_{Mises}^{min}(s_2) = \sigma_0 \quad \text{oft die Belastung}$$

## 6 FKM Richtlinien

### 6.1 Definition

Ziel des Nachweises: Zeigen dass

$$a_{SK} = \frac{\sigma_v}{\sigma_{SK} / J_{ges}} < 1$$

- $\sigma_v$  Vergleichsspannung im Nachweispunkt *NP* (Tres, vMis)
- $\sigma_{SK}$  Materialfestigkeit, Bauteilspezifisch
- $J_{ges}$  gesamt Sicherheitsfaktor

### 6.2 Mehrachsigkeit

$$h = \frac{\frac{1}{3} S_{pur}[T]}{\sigma_{Mises}^{vgl}} \quad [T]: \text{ Spannungstensor im } NP$$

Falls  $h > 1.33 \rightarrow$  Zusätzlicher Nachweis zu  $a_{SK}$  erforderlich.

### 6.3 Bauteilfestigkeit $\sigma_{SK}$

Bauteilspezifische Materialfestigkeit

$$\sigma_{SK} = R_p \cdot n_{pl}$$

mit Fließgrenze des Bauteils  $R_p$

$$R_p = K_{d,p} \cdot K_A \cdot R_{P,N}$$

wobei

- $K_{d,p}$ : Technologischer Grösseneinflussfaktor (0.92 für Normalglühen)  $< 1$
- $K_A$  Anisotropie des Materials (1 falls keine Anisotropie)  $< 1$
- $R_{P,N}$  Fließgrenze der Normprobe (nicht vom Bauteil)

und

$$n_{pl} = \min \left( \sqrt{\frac{E \cdot \epsilon_{etr}}{R_p}}; K_p \right)$$

mit

$\epsilon_{etr} \approx$  Bruchdehnung  
 $K_p$  Plastischer Formfaktor (siehe 5.6)  
 $E, R_p$  z.B. aus  $\sigma/\epsilon$ -Diagramm

### 6.4 Sicherheitsfaktor

$$J_{ges} = J_s \cdot \left( J_z \cdot \max \left( \frac{J_m \cdot R_p}{R_m}; J_p \right) \right)$$

- $J_s$  Lastfaktor (1 für sichere Lastannahme)  $> 1$
- $J_z$  Sicherheit für geschweisste Teile oder Guss. (= 1 wenn nicht gegeben)
- $J_p$  Sicherheit gegen Fließen

$J_m$ $J_p$	↑ Schadensfolgen ↑ Wahrscheinlichkeit	↑ S ↓ W	↓ S ↑ W	↓ S ↓ W
	2 1.5	1.8 1.35	1.75 1.3	1.6 1.2

## 7 Zyklische Belastung

### 7.1 Ermüdung

**Ermüdungsproblem:** progressiver Schädigung durch zyklische Belastung führt zu einem Anriss und es entsteht ein Dauerbruch.

**Fragestellung:** Wieviele Belastungszyklen bis zum Anriss  $N_{zul}$  bei gegebener  $\Delta\sigma$  Spannungsschwingbreite oder Dehnungsschwingbreite  $\Delta\epsilon$ .

### 7.2 Dauerfestigkeit und Zeitfestigkeit

Im Wöhler Diagramm für verschiedene  $R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o}$  ablesbar. (Aus Ermüdungsversuchen)

- bis  $10^3 - 10^4$  Zyklen: LCF, Kurzzeitfestigkeit  
Materialverhalten: inelastisch (elastoplastisch). (horizontal oder negative Steigung, links)
- $10^3 - 10^4$  bis  $10^6$ : HCF, Langzeitfestigkeit.  
Materialverhalten: elastisch, Beziehung  $\sigma \leftrightarrow \epsilon$  linear. (negative Steigung, mitte)
- ab  $10^6 - 10^7$ : Dauerfestigkeit -  $\sigma_W$ : Wechselfestigkeit (horizontal, rechts)

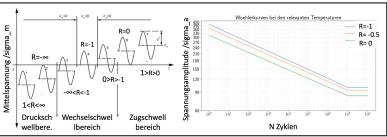
Im Wöhler Diagramm

**Einfluss der Mittelspannung auf Dauerfestigkeit**

$$\sigma_m = \frac{\sigma_u + \sigma_o}{2}; \quad R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o}$$

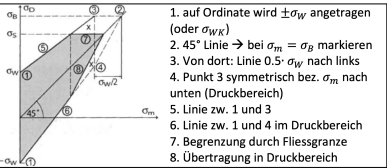
$$\sigma_m \uparrow, R \uparrow (\sigma_o > 0) \rightarrow N_{zul} \downarrow$$

**Wöhler Diagramm**



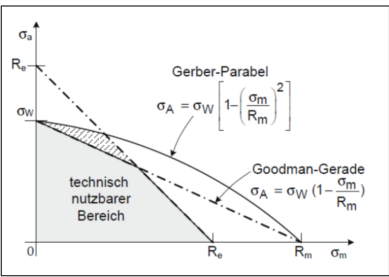
Aus Wöhler Kurven mit unterschiedlichen Mittelspannungen werden **Smith-** und **Haighdiagramme** erstellt.

**Smith Diagramm**

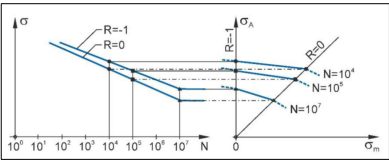


- auf Ordinate wird  $\pm \sigma_W$  angetragen (oder  $\sigma_{WK}$ )
- 45° Linie  $\rightarrow$  bei  $\sigma_m = \sigma_B$  markieren
- Von dort: Linie  $0.5 \cdot \sigma_W$  nach links
- Punkt 3 symmetrisch bez.  $\sigma_m$  nach unten (Druckbereich)
- Linie zw. 1 und 3
- Linie zw. 1 und 4 im Druckbereich
- Begrenzung durch Fließgrenze
- Übertragung in Druckbereich

**Haigh Diagramm**



Konstruktion Haigh Diagramm



	Smith	Haigh	Wöhler
ges.	$\sigma_a(\sigma_m)$	$\sigma_m(\sigma_a), \sigma_u(\sigma_m)$	$\sigma_a(N)$
geg.	$\sigma_w, R_m, R_e$ Dauerf.	$\sigma_w, R_m, R_e$ Dauerf.	...
fix.	$N$ (Fähigkeit)	$N$	$\sigma_m$

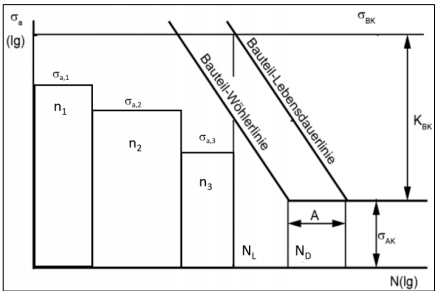
### 7.3 Kummulative Ermüdung

Belastung durch ein Mehrstufenkollektiv. Schadensakkumulation (Miners Regel):

$$D_{BK} = \sum_i \frac{n_i}{N_{Zul}(\Delta\sigma_i, \sigma_{m,i})}$$

**Vorgehen**

- Belastungsstufen identifizieren. In Schritt 2 - 4 einzeln behandeln.
- $\sigma_o$  und  $\sigma_u$ . Z.B. mit  $\sigma_m$  und  $\sigma_a$
- $R$  berechnen und  $N_i$  mit  $\sigma_a$  und  $R$  aus Wöhler Diagramm ablesen.
- #Zyklen/Zeiteinheit  $n_i$  berechnen. Z.B. aus Dauer  $t$  und Frequenz  $f$ :  $n_i = f_i \cdot t_i$
- Miner anwenden  $\rightarrow D_{BK}$
- $k \cdot D_{BK} = 1$  nach  $k$  auflösen  $\rightarrow k = \#$  Zeiteinheiten bis zum Bruch.



wenn:  $\Delta\sigma > 2 \cdot R_{p0.5}^{zykl.}$  dann  $\Delta\epsilon = A \cdot N_{zykl.}^b$ .

## 4 Kerben elastisch im Kerbgrund

Anriss erfolgt oft an Kerben, als Folge der Spannungs- und Dehnungskonzentrationen. An der kritischen Stelle herrscht meist ein **ebener Spannungszustand** (Spannungsfreie Oberfläche).

**Lokal elastisches Materialverhalten**

$$(\Delta\sigma_v < 2R_{p0.2}^{zyklisch})$$

Definitionen

- $K_F$  Kerbfaktor für zyklische Belastung
- $K_T$  Kerbfaktor
- $q$  Index der Kerbsensitivität ( $q < 1$ , empirischer Wert)

$K_F < K_T \rightarrow$  Beurteilung basierend auf der lokalen Spannungsamplitude mit der Wöhlerkurve aus umgekehrten Proben ist zu konservativ. Wir verwenden daher

$$\sigma_{max} = K_F \cdot \sigma_{nom} \quad \text{statt} \quad \sigma_{max} = K_T \cdot \sigma_{nom}$$

mit  $K_F = q \cdot (K_T - 1) + 1$

### 7.5 Kerben mit Plastifizierung im Kerbgrund

**Lokal inelastisches Materialverhalten** (LCF an Kerben)

Definitionen

- $\Delta s$  Schwingbreite der nom. Spannung (im Fernfeld)
- $\Delta\sigma_K$  Lokale Schwingbreite im Kerbgrund
- $\Delta\epsilon_K$  Lokale Schwingbreite im Kerbgrund

$$\Delta\sigma_K = K_\sigma \cdot \Delta s$$

$$\Delta\epsilon_K = K_\epsilon \cdot \Delta\epsilon \quad \text{mit} \quad \Delta\epsilon = \frac{\Delta s}{E}$$

mit

$$\Delta s \text{ klein} \rightarrow K_\epsilon = K_\sigma = K_T$$

$$\Delta s \text{ gross} \rightarrow K_\epsilon > K_\sigma \quad (K_\sigma \cdot K_\epsilon = K_T^2)$$

**Neuber Hyperbel**

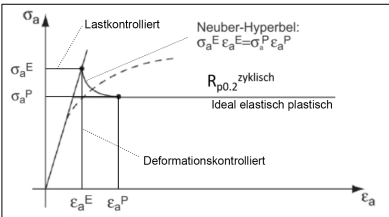
Möglichkeit zur Abschätzung von Dehnungsamplituden bei lokaler Plastifizierung im Kerbgrund. Neuber Hyperbel i.A. konservativ.

$$\sigma_{neu} \cdot \frac{\sigma_{neu}}{E} = R_{p0.5} \cdot \epsilon_{ert.}$$

$$\Rightarrow \sigma_{neu} = \sqrt{E \cdot R_{p0.5} \cdot \epsilon_{ert.}}$$

Voraussetzungen:

- $\sigma_a^E$  bekannt (aus finiten Elementen, oder Kerbfaktor)
- Ideal elastisch-plastisch
- Plastifizierung im Kerbgrund - Elastisch im Fernfeld



$$\sigma_a^E = K_T \cdot s \quad \epsilon_a^E = K_T \cdot e \quad \left( = \frac{\sigma_a^E}{E} = K_T \frac{s}{E} \right)$$

$$\sigma_a^P = R_e^{zykl.} \rightarrow \epsilon_a^P = \frac{\sigma_a^E \cdot \epsilon_a^E}{\sigma_a^P} = \frac{K_T^2 \cdot s}{R_e^{zykl.}} \cdot e = K_\epsilon \cdot e$$

$$\text{Daraus folgt: } \sigma_a^P = R_e^{zykl.} = K_\sigma \cdot s \rightarrow s = \frac{R_e^{zykl.}}{K_\sigma}$$

$$K_\sigma = \frac{R_e^{zykl.}}{s} \quad K_\epsilon = \frac{K_T^2 \cdot s}{R_e^{zykl.}} \quad K_\sigma \cdot K_\epsilon = K_T^2$$

## 8 Ermüdung

### 8.1 Ermüdungsfestigkeitsnachweis

Für krit. Stelle  $\rightarrow$  Hauptsp. (HS)  $\sigma_i \rightarrow$  Belastungs Kollektiv  $\rightarrow$  versch. Ampl.  $\sigma_{i,a,j} \rightarrow$  Max. Sp. Ampl. als Referenz  $\sigma_{i,a,max}$

1  $\rightarrow$  2 **Material spezifische Dauerfestigkeit**  $\sigma_W$

$$\sigma_W = F_W \cdot R_m \quad F_W \in [0.3, \dots, 0.4]$$

2  $\rightarrow$  3 **Einfluss Oberfläche und Kerben**  $\sigma_{WK}$

$$\sigma_{WK} = \frac{\sigma_W}{K_{WK}}$$

$$K_{WK} = \left( \left[ 1 + \frac{1}{K_F} \left( \frac{1}{K_R} - 1 \right) \right] \frac{1}{K_v} \right) \frac{1}{n_\sigma}$$

$n_\sigma(G_\sigma)$ : Stützz. aus Kerbwirk. Keine Kerbe:  $n_\sigma = 1$

$G_\sigma$ : Spann.abf. an Kerbe  $G_\sigma \uparrow, n_\sigma \uparrow$

$K_v$ : Randschichtfaktor  $> 1$  Norm. Zustand:  $K_v = 1$

$K_R$ : Rauheitsfaktor  $< 1$  Polierte Oberfl.:  $K_R = 1$

$K_F$ : Kerbwirkungszahl Stahl mit Kerbe:  $K_F = 2$

$n_\sigma \geq 1, q = 1 \rightarrow n_\sigma = 1$   $n_\sigma = 1$  ist konservativ

3  $\rightarrow$  4 **Einfluss der Mittelspannung**  $\sigma_{AK}$  (VS im Haigh Diag.)

$$\sigma_{AK} = \sigma_{WK} \cdot K_{AK}$$

$$K_{AK} < 1$$

Fall 1:  $\sigma_m = \text{const}$   $\sigma_a \geq \text{const}$ ; (Waschmaschine)

$$K_{AK,j} = 1 - M \frac{\sigma_{m,j}}{\sigma_{WK}}$$

Fall 2:  $\sigma_m = c \cdot \sigma_a$

$$K_{AK,j} = \frac{1}{1 + M \frac{\sigma_{m,j}}{\sigma_{a,j}}}$$

$M$  := Betrag der Steigung im Haigh Diagramm

4  $\rightarrow$  5 **Berücksichtigung:**  $N_{eff} \neq N_D$  (VS im Wöhler Diag.)

$$\sigma_{BK} = \sigma_{AK} \cdot K_{BK}$$

**Einstufenkollektiv:**

$$K_{BK} = \frac{\sigma_a^*(N_{eff})}{\sigma_w} = \left( \frac{N_D}{N_{eff}} \right)^{\frac{1}{K}}$$

**Mehrstufenkollektiv:**

$$K_{BK} = \left( \frac{A \cdot D_m \cdot N_D}{N_{eff}} \right)^{1/K}$$

$$\text{VS Wöhlerkurve: } A = \frac{1}{\sum \frac{n_j}{N_{eff}} \left( \frac{\sigma_{a,R,j}}{\sigma_{a,max}} \right)^K}$$

$$N_{eff} = \sum_k n_k \quad \sigma_{a,R,j} = \sigma_{a,j} \cdot \frac{K_{AK,max}}{K_{AK,j}}$$

$K$  := Steigung im Wöhler Diagramm

**Nachweis:**

$$\sigma_{BK} = \min\{K_{BK} \cdot \sigma_{AK}; \quad 0.75 \cdot R_p \cdot n_{pl}\} \quad (n_{pl} \text{ siehe 6.3})$$

$$1 > a_{BK,i} = \frac{\sigma_{i,a,max}}{\sigma_{BK}} \cdot J_D \quad (J_D \text{ siehe 6.4})$$

## 9 Kriechen

## 9.1 Definition und Ursachen

Kriechen tritt in metallischen Werkstoffen bei höheren Temperaturen ( $T > 0.3T_{Schmelz}$ ) auf.

**Ursachen:** Bewegung von Versetzungen, Gleit- und Diffusionsphänomene.

**Folgen:** Inelastische Deformationen (auch bei „kleinen“ Spannungen); Schädigung. Zugversuch: Dehnratenabhängig.

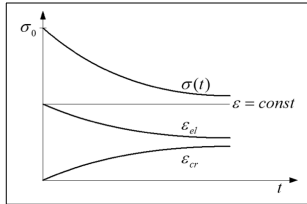
### 9.2 Relaxation Norton Modell

Kriechgesetz nach Norton:  $\dot{\epsilon}_{cr} = A \sigma^n = \text{const.}$

Für Sekundärkriechen:  $\dot{\epsilon}_{cr} = f(T, \sigma)$ ;

$\sigma = \text{const.} \Rightarrow \epsilon_{cr} = A \cdot \sigma^n \cdot t$

Für Relaxation:  $\epsilon_0 = \text{const.} \Rightarrow \dot{\epsilon}_0 = 0$



$$\epsilon \downarrow \Rightarrow \dot{\epsilon} \downarrow \quad \text{ges: } \sigma(t) \quad \text{geg: } \epsilon_{cr}, \epsilon_{el}$$

$$\epsilon_{cr} + \epsilon_{el} = \epsilon_0, \quad \dot{\epsilon}_{cr} + \dot{\epsilon}_{el} = 0 \Rightarrow A \sigma^n + \frac{\dot{\sigma}}{E} = 0$$

$$\sigma(t) = \left( \sigma_0^{1-n} - (1-n) A \cdot E \cdot t \right)^{\frac{1}{1-n}}$$

### 9.3 Kriechschädigung

**Time Fraction Rule/kumulative Schädigung**

Aufteilen der Spannungsgeschichte  $\sigma(t)$  in *diskrete Intervalle*  $\Delta t_n$  mit konstanter Spannung  $\sigma_n$  & zugehöriger Rupture-Time  $t_B(\sigma_n)$ .

$$D_{cr} = \sum_n \frac{\Delta t_n}{t_B(\sigma_n)} < 1$$

kontinuierliche Spannungsgeschichte:

$$D_{cr} = \int_0^t \frac{1}{t_B(\sigma(t))} dt < 1$$

**Ductility Exhaustion Method**

$$D_{cr} = \int_0^{\epsilon_{cr}} \frac{1}{\epsilon_{cr}(\dot{\epsilon}_{cr})} d\epsilon_{cr} < 1$$

mit

$$\bar{\epsilon}_{cr} = \epsilon_{cr}(t_{Ende}) = \epsilon_0 - \frac{\sigma(t_{Ende})}{E}$$

$$d\epsilon_{cr} = \dot{\epsilon} \cdot dt$$

$$D_{cr} = \int_0^t \frac{1}{\epsilon_{cr}(\dot{\epsilon}_{cr})} \dot{\epsilon}_{cr} \cdot dt$$

Approximation mit  $dt = \Delta t$

$$D_{cr} \approx \sum_{n=1}^{t_{Ende}/\Delta t} \frac{1}{\epsilon_{cr}(\dot{\epsilon}_{cr}(t_n))} \dot{\epsilon}_{cr}(t_n) \cdot \Delta t$$

$\bar{\epsilon}_{cr}$ : ersetzen durch  $\epsilon_{cr}(t_1)$  &  $d\epsilon_{cr} \Rightarrow \epsilon_{cr} dt$

Beobachtung:  $\epsilon_{cr}^B \downarrow$  mit zunehmender Hydrostatischer Belast.

**Lebensdauer**

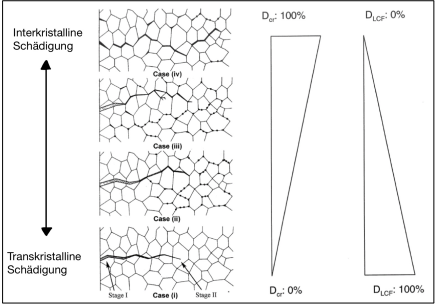
$$N \cdot D_{cr}^{BK} = 1$$

$N$ : Anzahl Zyklen bis zu Versagen (siehe Miner Regel)

	Kriechen	Relaxation
Spannung	konstant	sinkt
Dehnung	steigt	konstant

9.4 Interaktion Kriechen Ermüdung

Kriechen oder Relaxation innerhalb einer zyklischen Belastung führen zu niedriger  $N_{zul}$  für gleiche Dehnungsschwingbreite  $\Delta \varepsilon$ .  $D_{Cr} \uparrow \rightarrow N_{zul}(\Delta \varepsilon) \downarrow$



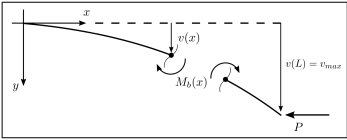
10 Stabilität

10.1 Stabilitätsprobleme

Stetiger oder plötzlicher Übergang zu stabilen aber meistens unerwünschten deformierten Zuständen. Übergang bei Platte weniger kritisch als bei Stab und Zylinder.

10.2 1D Stabilitätsprobleme

Balken axial belastet, gespannt.



**Vorgehen** um Knicklast  $P_K$  zu bestimmen

- 1 Biegemomentverlauf bestimmen  
 $M_b(x) = P(v_{max} - v(x))$
- 2 Krümmung aus Mech II berechnen  
 $v''(x) = \frac{M_b}{EI}$
- 3  $M_b(x)$  in  $v''(x)$  einsetzen und umformen  
 $v''(x) + \frac{P}{EI}v(x) = \frac{P}{EI}v_{max}$

- 4 homogene und partikuläre Lösung bestimmen und addieren (mit  $\kappa = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ ):  
 $v(x) = v_h + v_p = A \sin(\kappa x) + B \cos(\kappa x) + v_{max}$

- 5 Randbedingungen einsetzt  
 $v(0) = 0 \rightarrow B + v_{max} = 0$   
 $v'(0) = 0 \rightarrow A \cdot \kappa = 0$   
 $v(L) = v_{max} \rightarrow A \cdot \sin(\kappa L) + B \cdot \cos(\kappa L) + v_{max} = v_{max}$

- 6 Schreibe als Matrix A

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \kappa & 0 & 0 \\ \sin(\kappa L) & \cos(\kappa L) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ v_{max} \end{pmatrix} = 0$$

- 7 Damit GS nicht triviale Lösungen hat muss  $\det(A) = 0$   
 $\kappa L = \frac{\pi}{2} + n\pi \xrightarrow{n=0} \kappa = \frac{\pi}{2L}$

- 8 Definition von  $\kappa (= \sqrt{\frac{P}{EI}})$  einsetzen und nach P auflösen  
 $\kappa = \frac{\pi}{2L} \stackrel{!}{=} \sqrt{\frac{P}{EI}} \Rightarrow P = P_K = \frac{\pi^2}{4L^2} EI$

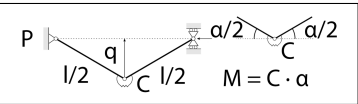
Für Balken axial belastet, an den Enden axial geführt (oben) und gelenkig gelagert (unten)

$$P_k = \frac{\pi^2}{L^2} EI$$

Bedingung für Plastifizierung vor Instabilität

$$R_e < \sigma_0 = \frac{P_K}{A}$$

10.3 1 Freiheitsgrad



GGW linearisiert:  $C \cdot \frac{4q}{l} - P \cdot q = 0 \rightarrow P_K = \frac{4C}{l}$   
GGW nicht linearisiert:  $2C \cdot \arcsin\left(\frac{2q}{l}\right) - P \cdot q = 0$

$\rightarrow P = P_K \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{q}{l}\right)^2 + \frac{6}{5} \left(\frac{q}{l}\right)^4 + \dots\right)$  mit  $P_K = \frac{4C}{l}$   
Bei nichtlinearer Betrachtung mehr als 1 Ruhelage bei  $P \geq P_K$  ( $q = 0$  oder  $q > 0$ )  $\rightarrow$  Verzweigungsproblem / "Bifurkation"

Stabilitätssatz von Lagrange:  
In einer Stablen GGW-Lage hat das Gesamtpotential  $E_p$  ein Minimum ( $E'_p = 0$ ;  $E''_p > 0$ ) (siehe 3.1)

10.4 Rayleigh'scher Quotient

$$P_k = \min(Q) \quad \text{mit} \quad Q := \frac{U}{X}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_b^2}{EI} dx \quad (\text{Mech II}), \quad X \approx \frac{1}{2} \int_0^L v'(x)^2 dx$$

**Vorgehen** gegeben: Zulässiges Verschiebungsfeld  $v(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$

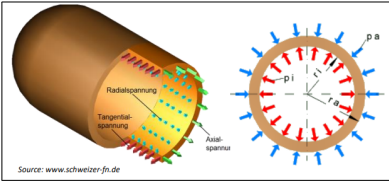
- 1 Berechne  $v''(x)$ :  $v''(x) = 6\alpha x + 2\beta$
- 2 Forme mit  $v''(x) = \frac{M_b}{EI}$  nach  $M_b$  um  
 $M_b = EI(6\alpha x + 2\beta)$
- 3 Setzte  $M_b$  in U ein  
 $U = EI(6\alpha^2 L^3 + 6\alpha\beta L^2 + 2\beta^2 L)$

- 4 Berechne X  
 $X = \frac{9}{10} \alpha^2 L^5 + \frac{3}{2} \alpha\beta L^4 + \frac{2}{3} \beta^2 L^3$

- 5 In Q einsetzen und setze  $\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = 0$  oder  $\frac{\partial Q}{\partial \beta} = 0$
- 6 gefundene  $\alpha_1(\beta)$  und  $\alpha_2(\beta)$  in Q einsetzen
- 7  $\rightarrow Q(\alpha_1), Q(\alpha_2) \quad P_k = \min(Q)$

11 Sonstiges

11.1 Kesselformel







$$\sigma_{\varphi\varphi} = p_i \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \left( \frac{r_a^2}{r_x^2} + 1 \right) - p_a \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \left( \frac{r_a^2}{r_x^2} + 1 \right)$$
$$\sigma_{rr} = -p_i \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left( \frac{r_a^2}{r_x^2} - 1 \right) - p_a \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \left( 1 - \frac{r_x^2}{r_a^2} \right)$$
$$\sigma_{zz} = \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

11.2 Hauptspannungen 2D

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2}$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2}$$

11.3 Knicken

Knickfälle	Fall 1	Fall 2	Fall 3	Fall 4
				
Knicklängenbeiwert	$\beta = 2$	$\beta = 1$	$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{2} = 0,7$	$\beta = 0,5$
Knicklänge $s$ $s = \beta \cdot L$	$s = 2 \cdot L$	$s = L$	$s = 0,7 \cdot L$	$s = 0,5 \cdot L$
kritische Knicklast	$F_{krit} = \frac{\pi^2}{4L^2} EI$	$F_{krit} = \frac{\pi^2}{L^2} EI$	$F_{krit} = \frac{2\pi^2}{L^2} EI$	$F_{krit} = \frac{4\pi^2}{L^2} EI$

11.4 Plastizität

Plastische Deformation: konstantes Volumen.

$$\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi} = 0$$

$\varepsilon_{\varphi\varphi} = x\%$  Zunahme Radius  
Volumen der Kugelwand:  $V = 4\pi R^2 t$   
Veränderung des Radius  $= \varepsilon_{\varphi\varphi}$

11.5 Formfaktor für symmetrische Körper

$M_{Versagen} = \frac{A}{2} \cdot \sigma_0 \cdot \Delta y$   
A = Fläche  
 $\Delta y$  = Abstand der Schwerpunkte der Teilkörper die entstehen wenn man den Körper an der Symmetrieachse teilt.

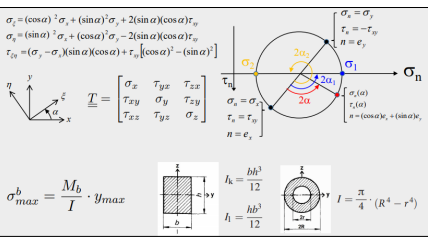
11.6 Größen

1bar = 0.1MPa, GPa = 10<sup>9</sup>Pa, MPa = 10<sup>6</sup>Pa

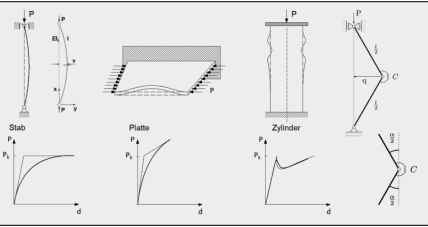
11.7 Mehrachsigkeit

$$h = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3\sigma_V} < 1.33$$
$$\sigma_V = \sigma_V^{Mises}$$

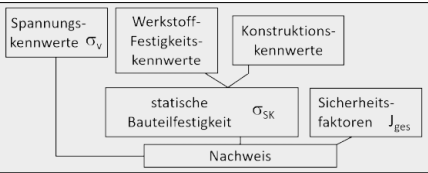
11.8 Mechanik II Grundlagen



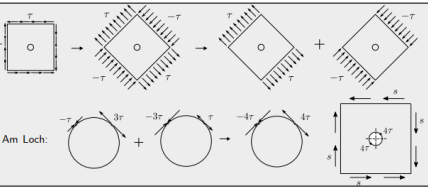
11.9 Stabilität



11.10 FKM Nachweis



11.11 Scheibe mit Loch



12 Finite Elemente

$$V = \sum F_i^k \cdot u_i^k$$

$$F_i^k = \sum K_{gh} u_x^y \Rightarrow K_{gh} h = \frac{\partial F_i^k}{\partial u_x^y}$$

Durch Minimierung der pot. Energie ergibt sich.

$$\frac{\partial U}{\partial u_e^f} - F_i^k = 0 \Rightarrow F_i^k = \frac{\partial U}{\partial u_e^f}$$

$$K_{gh} = \frac{\partial}{\partial u_x^y} \left( \frac{\partial U}{\partial u_e^f} \right)$$