

1 Elektrostatik

1.1 Allgemein

Es gibt **positive** und **negative** Ladungen. **Gleiche** Ladungen **stossen** sich ab. **Ungleiche** Ladungen **ziehen** sich an. Kraftwirkung ist **kugelsymmetrisch**. Ladung ist eine **Eigenschaft** eines Körpers. Ladung ist **quantifiziert**, sprich es gibt eine Elementarladung $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ [C]}$.

1.2 Coulomb'sches Gesetz

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \tag{1}$$

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r^2}, \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \tag{2}$$

1.2.1 Superposition

$$\vec{F} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N Q_i \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|^3} \tag{3}$$

$$\vec{F} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}'}{|\vec{r}_1 - \vec{r}'|^3} dV' \tag{4}$$

1.2.2 Dielektrizitätskonstante

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \tag{5}$$

1.3 Elektrisches Feld

Beschreibt die **Kraft** auf die **Ladung von 1C** am **Punkt r_0** .
Einheit: $[E] = \left[\frac{V}{m}\right] = \left[\frac{N}{C}\right]$.

1.3.1 Definition

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{Q} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = Q \cdot \vec{E}(\vec{r}) \tag{6}$$

1.3.2 Berechnung

diskrete Ladungsverteilung:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N Q_i \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} \tag{7}$$

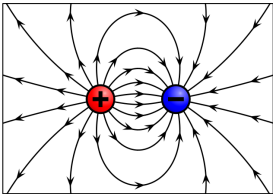
kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}'}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|^3} dV' \tag{8}$$

1.4 Feldlinien

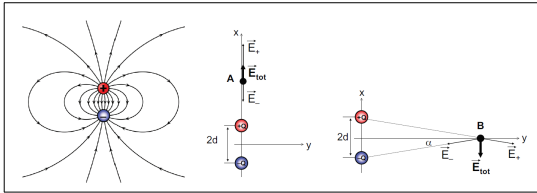
Feldlinien = **Darstellung des elektrischen Feld**

- können sich nicht schneiden
- Dichte ist proportional zur Feldstärke
- Immer **von plus zu minus**



1.5 Elektrischer Dipol

- Zwei **gleiche** Ladungen mit **unterschiedlichem Vorzeichen** im Abstand von **2d**.
- Ladungsneutral
- Im Fernfeld nimmt er mir r^{-3} ab.



Allgemein:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[(+Q) \frac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} + (-Q) \frac{\vec{r} + \vec{d}}{|\vec{r} + \vec{d}|^3} \right] \tag{9}$$

1.5.1 Punkt A: Verbindungsachse

Allgemein:

$$\vec{E}(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4|x|d}{(x-d)^2(x+d)^2} \vec{e}_x \tag{10}$$

Fernfeld:

$$\vec{E}(x) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Qd\vec{e}_x}{|x|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{|x|^3} \tag{11}$$

1.5.2 Punkt B: Mittelachse

Allgemein:

$$\vec{E}(y) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d \cdot Q \vec{e}_x}{(y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{12}$$

Fernfeld:

$$\vec{E}(y) \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2dQ\vec{e}_x}{|y|^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{|y|^3} \tag{13}$$

1.5.3 Einheit

$$\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{|x|^3} \right] = \frac{Nm^2}{C^2} \frac{Cm}{m^3} = \frac{N}{C} \tag{14}$$

1.5.4 Punktdipol

Zeigt **von der positiven zur negativen** Ladung.

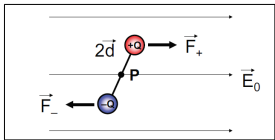
$$\vec{p} = Q \cdot 2\vec{d}, \quad |\vec{p}| = Cm \tag{15}$$

1.5.5 Allgemeines Fernfeld

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}|^3} \right) \tag{16}$$

1.6 Dipol im elektrischen Feld

Wenn ein Dipol in einem elektrischen Feld ist, wirkt ein **Drehmoment** auf den Dipol.



$$\text{Drehmoment: } \vec{M} = Q \cdot 2\vec{d} \times \vec{E}_0 = \vec{p} \times \vec{E}_0 \tag{17}$$

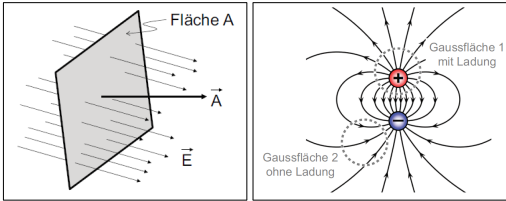
$$\text{potentielle Energie: } E_{el} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0 \tag{18}$$

2 Gesetz von Gauss

2.1 Elektrischer Fluss

Anzahl Feldlinien durch eine Fläche.

$$\text{Einheit: } [\Phi_E] = \left[\frac{Nm^2}{C} \right]$$



2.1.1 Definition

Allgemein:

$$\Phi_E = \int_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}' \tag{19}$$

homogenes Feld:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = |\vec{E}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos \theta \tag{20}$$

Gesetz von Gauss: Elektrischer Fluss durch eine **geschlossene Oberfläche** ist gleich der **enthaltenen Ladung**.

2.2 Berechnung

$$\oint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}' = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{21}$$

Superposition, diskrete Ladungsverteilung:

$$\oint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}' = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i \tag{22}$$

Superposition, kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$\oint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') dV' \tag{23}$$

Differential Form: **erste Maxwell Gleichung**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{24}$$

ρ ist die Volumenladungsdichte $[\rho] = \left[\frac{C}{m^3} \right]$

2.3 Wichtige elektrische Felder

nicht leitende Kugel:

ausserhalb: gleich wie Punktladung

$$E(r) = \frac{Q_{Kugel}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{25}$$

innerhalb:

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{Q_{Kugel} r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \tag{26}$$

unendlich ausgedehnte ebene Platte: (nicht leitend)

$$E(r) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{27}$$

σ ist die Flächenladungsdichte der Platte $[\sigma] = \left[\frac{C}{m^2} \right]$

unendlich langer gerader Draht: (nicht leitend)

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \tag{28}$$

λ ist die Längenladungsdichte vom Draht $[\lambda] = \left[\frac{C}{m} \right]$

Leiterschleife auf x-Achse: Radius R und Abstand x vom Ursprung

$$E(x) = \frac{x\lambda R}{2\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}} \tag{29}$$

Kugelkondensator mit zwei Dielektrika:

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_0 + \epsilon)r^2} \tag{30}$$

3 Potential und Spannung

3.1 Elektrisches Potential

- konservatives Feld (Arbeit ist wegunabhängig)

Elektrisches Feld	Gravitationsfeld
Ladung	Masse
Elektrisches Potential	Höhe über Meer
Spannung	Höhendifferenz
Elektrisches Feld	Gefälle
Feldlinien	Falllinien

3.1.1 Elektrostatische Energie

Allgemein:

$$E_{el} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} Q \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{31}$$

Homogenes Feld:

$$E_{el} = -Q \vec{E} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{32}$$

3.1.2 Elektrostatistisches Potential

Elektrostatistische Energie aus dem **Unendlichen**. manchmal auch r_0 .

$$\Phi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \tag{33}$$

- elektrisches Feld zeigt in Richtung **abnehmendes** Potential
- Ladungen bewegen sich **immer** in Richtung niedriger potentieller Energie

Umwandlung vom Potential in Potentielle Energie:

$$E_{pot} = -Q \cdot \Delta\Phi = -Q \cdot (\Phi_1 - \Phi_2) \tag{34}$$

3.1.3 Elektrische Spannung

Differenz zweier Potentiale:

$$U = \frac{E_{el}}{Q} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{35}$$

$$[U] = \left[\frac{J}{C} \right] = [V] = [V_{olt}] \tag{36}$$

3.1.4 wichtige Potentiale

Potential einer Punktladung **Q**:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \tag{37}$$

Potential eines Punktdipol:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{d} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \tag{38}$$

Potential einer kontinuierlichen Ladungsverteilung:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{39}$$

Superpositionsprinzip:

$$\Phi_{Gesamt} = \sum_i \Phi_i \tag{40}$$

4 Feldgleichung der Elektrostatik

4.1 Äquipotentiallinien/-Flächen

- Stellen Flächen / Linien mit gleichem Potential dar
- senkrecht auf Feldlinien
- Können sich bei einem Sattelpunkt kreuzen
- Min und Max Potential da wo E-Feld null ist

4.2 Feldgleichungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) \tag{41}$$

$$\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = -\Delta\Phi(\vec{r}), \quad \text{Poisson Gleichung} \tag{42}$$

5 Leitende Körper

1. elektrisches Feld im Inneren = 0
2. elektrisches Feld steht senkrecht zur Oberfläche
3. Gesamte Ladung befindet sich an der Oberfläche
4. Oberfläche ist eine Äquipotentialfläche
5. äusseres elektrisches Feld im Allgemeinen nur numerisch lösbar

$$\vec{n} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{f})}{\varepsilon_0}, \quad \text{und} \quad \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (43)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0 = \text{const.} \quad (44)$$

5.1 Krümmungsradius

Desto grösser die Oberflächenladungsdichte, desto grösser ist das elektrische Feld. Die Oberflächenladungsdichte ist grösser für kleinere Radien (Krümmungsradius).

$$\text{elektrisches Feld} \propto \frac{1}{\text{Krümmungsradius}} \quad (45)$$

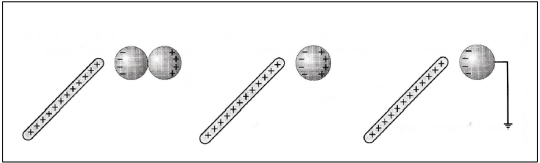
für zwei verbundene Leitende Kugeln: (Q_1, R_1 & Q_2, R_2)

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_2}{R_2} \quad (46)$$

$$|E_1| = \frac{\Phi}{R_1}, \quad |E_2| = \frac{\Phi}{R_2}, \quad \sigma_i = \frac{\Phi\varepsilon_0}{R_i} \quad (47)$$

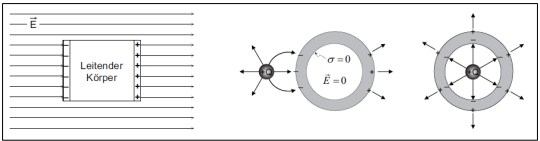
5.2 Influenz

Elektrische Leiter verschieben die Ladungen so, dass das elektrische Feld im Inneren oder Äusseren = 0 ist (**Influenz**). Dies kann auch zur **Erdung** genutzt werden.



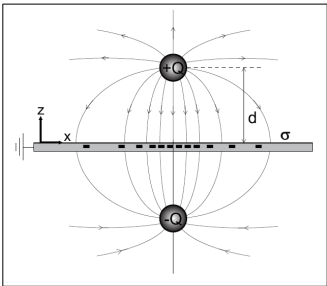
5.3 Abschirmung

Hohle Körper werden wirken dann **Abschirmend**, sprich im Inneren ist kein elektrisches Feld. Falls ein Loch vorhanden ist, kann das elektrische Feld etwa soweit eindringen wie das Loch gross ist.



5.4 Prinzip der Spiegelladung

Eine Probeladung induziert auf einem elektrischen Leiter eine Flächenladung, die dasselbe Feld generiert wie eine spiegelbildliche Probeladung mit entgegengesetztem Vorzeichen. Weiter gilt die **Superposition**.



6 Dielektrika

6.1 Kondensator

6.1.1 Plattenkondensator

elektrisches Feld:

$$\vec{E} = \frac{(+\sigma)}{2\varepsilon_0} (+\vec{n}) + \frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0} (-\vec{n}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n} = \frac{Q}{A\varepsilon_0} \vec{n} \quad (48)$$

Spannung:

$$U = \int_0^d \vec{E} d\vec{r} = |\vec{E}|d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{Qd}{A\varepsilon_0} \quad (49)$$

Positive Ladung ist bei der positiven Seite der Spannungsquelle. Feld zeigt von der positiven zur negativen Seite.

6.1.2 Kapazität

Mass für das Ladungsvermögen bei gegebener Spannung.

$$C = \frac{Q}{U}, \quad \left[\frac{C}{V} \right] = [Farad] = [F] \quad (50)$$

Plattenkondensator: Rein geometrische Grösse.

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{A\varepsilon_0}{d} \quad (51)$$

Zylinderkondensator: $R_1 > R_2$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \quad (52)$$

Kugelkondensator: $b > a$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad (53)$$

6.1.3 Energie im Kondensator

$$E_{el} = \int_0^Q U(Q') dQ' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} U^2 C \quad (54)$$

Plattenkondensator:

$$E_{el} = \frac{Q^2 d}{2A\varepsilon_0} = \frac{U^2 A\varepsilon_0}{2d} \quad (55)$$

6.1.4 Energiedichte: elektrischen Feld

Allgemein:

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\vec{E}|^2$$

Plattenkondensator:

$$w = \frac{E\varepsilon_0 L}{V} = \frac{U^2 A\varepsilon_0}{2d(A\cdot d)} = \frac{U^2 \varepsilon_0}{2d^2}$$

6.1.5 Schaltung von Kondensatoren

Parallel Schaltung:

$$C_{\text{gesamt}} = \sum_i C_i$$

Serie Schaltung:

$$\frac{1}{C_{\text{gesamt}}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

6.2 Kondensator im Dielektrikum

$$U = \frac{U_0}{\varepsilon_r}, \quad \varepsilon_r = \frac{|\vec{E}_0|}{|\vec{E}|}, \quad C = \frac{Q\varepsilon_0}{U_0} = C_0 \varepsilon_r \quad (56)$$

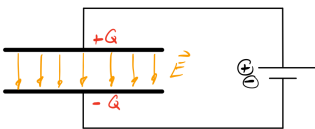
ε_r ist eine dimensionslose Zahl für welche gilt $\varepsilon_r \geq 1$. Im Allgemeinen können für alle Berechnungen ε_0 durch ε ersetzt werden, wobei $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ ist.

Reihenschaltung: $|\vec{E}_o| = \frac{1}{\varepsilon_r} |\vec{E}_u|$

$$U = \frac{d}{2} |\vec{E}_o| + \frac{d}{2} |\vec{E}_u| = \frac{d}{2} \frac{1}{\varepsilon_r} |\vec{E}_u| + \frac{d}{2} |\vec{E}_u| \quad (57)$$

$$|\vec{E}_u| = \frac{2\varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} \frac{U}{d} \quad (58)$$

6.2.1 Kondensator mit Spannung



6.2.2 Kondensator Paradox

Wenn zwei Kondensatoren sich gegenseitig aufladen, wird die Energie halbiert. Energie geht durch den Widerstand verloren. Die verlorene Energie ist immer gleich (egal wie gross der Widerstand ist). Bei höherem Widerstand dauert es einfach länger.

6.2.3 Kondensator mit Dielektrikum

Die Spannung wird zu:

$$U_{neu} = E_n \cdot (d - d_M) + \frac{E_n}{\varepsilon_r} \cdot d_M$$

Mit $Q = \text{const} \Rightarrow E_{neu} = E_0$

$$U_{neu} = E_0 \cdot (d - d_M) + \frac{E_0}{\varepsilon_r} \cdot d_M$$

$$C_{neu} = \frac{Q_0}{U_n} = \frac{\varepsilon_0 A}{d + d_M \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1 \right)}$$

Mit $U = \text{const} \Rightarrow U_{neu} = U_0$

$$U_n = E_n \cdot (d - d_M) + \frac{E_n}{\varepsilon_r} d_M$$

$$Q_n = E_n \cdot A\varepsilon_0$$

$$C_n = \frac{Q_n}{U_0} = \frac{\varepsilon_0 A}{d + d_M \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1 \right)}$$

6.2.4 Kondensator mit Metallplatte

Der Integrationsweg der Spannung verkürzt sich:

$$U_{neu} = E_{neu} \cdot (d - d_M)$$

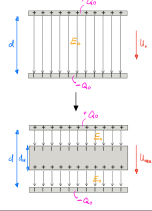
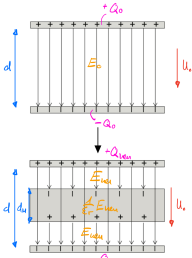
Mit $Q = \text{const} \Rightarrow E_{neu} = E_0$

$$U_{neu} = E_0 \cdot (d - d_M) < U_0$$

Mit $U = \text{const} \Rightarrow U_{neu} = U_0$

$$E_{neu} = \frac{U_0}{d - d_M}$$

$$Q_{neu} = E_{neu} \cdot A\varepsilon_0$$



6.3 Elektrische Polarisisation

6.3.1 Verschiebungspolarisation

- Atomkern und Elektronen verschieben sich infolge des elektrischen Feld.
- eher schwach
- $\varepsilon_r = 1 \dots 10$
- **nicht Temperaturabhängig**
- kommt bei jedem Molekül vor
- α nimmt mit der Grösse der Moleküle zu

6.3.2 Orientierungspolarisation

- Polare Moleküle wie z.B. H_2O werden entlang des elektrischen Feld orientiert.
- stark
- $\varepsilon_r = 10 \dots 100$
- **Temperaturabhängig**, nimmt ab mit steigender Temperatur
- kommt nur bei Molekülen mit permanentem Dipol vor
- α ist Temperaturabhängig und Dipolmoment des Molekül

6.3.3 Polarisation

α = Polarisierbarkeit

mittleres Dipolmoment:

$$\langle \vec{p} \rangle = \alpha \vec{E}, \quad \vec{E} \neq \vec{E}_0, \quad \vec{E} \text{ bereits abgeschwächt} \quad (59)$$

Gesamte Polarisation:

$$\vec{P} = \frac{N}{V} \langle \vec{p} \rangle = \frac{N}{V} \alpha \vec{E} = \sigma \vec{n} \quad (60)$$

N ist die Anzahl Atome und V ist das Volumen, σ = Oberflächenladung

6.3.4 Prinzip der Oberflächenladung

$$\vec{E}_{\text{Polarisation}} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n} = -\chi_e \vec{E} \quad (61)$$

Elektrische Suszeptibilität:

$$\chi_e = \frac{|\vec{E}_p|}{|\vec{E}|} \quad (62)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p = \vec{E}_0 - \chi_e \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 \frac{1}{1 + \chi_E} \quad (63)$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e \quad (64)$$

7 Elektrischer Strom

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{dQ}{dt}, \quad I = [A] = \left[\frac{C}{s} \right] \quad (65)$$

Ladungsträger:

- Elektronen im Metall
- Ionen in Salzen bzw. Lösungen
- Teilchenstrahlen im Vakuum

technische Stromrichtung: Bewegungsrichtung der **positiven** Ladungen
physikalische Stromrichtung: Bewegungsrichtung der **negativen** Ladungen

7.1 Ursache des elektrischen Strom

Beschleunigung aufgrund des elektrischen Feld.
(m = Elektronenmasse)

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{Q}{m} \vec{E} \quad (66)$$

7.2 Driftgeschwindigkeit

Geschwindigkeit der Elektronen im Leiter.
Meist sehr langsam (z.B. Kupfer $v_d = 0.074 \frac{mm}{s}$).

$$\vec{v}_D = -\frac{\vec{I}}{n \cdot e \cdot A} = -\frac{\vec{j}}{e \cdot n}, \quad n = \frac{N}{V} = \frac{N}{A \cdot L} \quad (67)$$

7.3 elektrischer Widerstand

Stromdichte: $[\vec{j}] = \left[\frac{A}{m^2} \right]$

$$\vec{j} = \frac{\vec{I}}{A} \quad (68)$$

spezifische Leitfähigkeit:

$$\sigma = \frac{|\vec{v}_D| \cdot e \cdot n}{|\vec{E}|} = \frac{|\vec{j}|}{|\vec{E}|}, \quad [\sigma] = \frac{1}{\Omega m} \quad (69)$$

spezifischer Widerstand:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{j}|}, \quad [\rho] = \Omega m \quad (70)$$

elektrischer Widerstand:

$$R = \rho \frac{L}{A} = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{j}|} \frac{L}{A} = \frac{U}{I}, \quad [R] = \Omega \quad (71)$$

elektrischer Leitwert:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}, \quad [G] = \frac{1}{\Omega} = S \quad (72)$$

7.4 Ohm'sches Gesetz, $U = R \cdot I$

- Widerstand unabhängig von der angelegten Spannung
- Driftgeschwindigkeit proportional zur angelegten Spannung
- Zusammenstoss der Elektronen mit den Kernen führt zum Widerstand, es wird Wärme freigesetzt
- Widerstand ist temperaturabhängig, steigt bei steigender Temperatur

7.4.1 Elektrische Leistung

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{U \Delta Q}{\Delta t} = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R} \quad (73)$$

Effektiv Werte: $X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X^2 dt}$

8 Magnetismus

- Vektorfeld, mit **geschlossenen** Feldlinien
- Werden durch elektrische Ströme verursacht
- **gleiche** Pole **stossen** sich ab
- **ungleiche** Pole **ziehen** sich an
- es gibt **nur Dipole**
- Feldlinien gehen vom **Nord** zum **Südpol**

8.1 Biot-Savart Gesetz

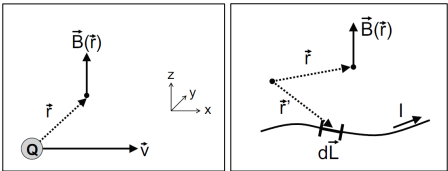
einzelne Ladung:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q \cdot \vec{v} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (74)$$

- \vec{v} : Geschwindigkeitsvektor
- \vec{r} : Abstand zur Ladung

konstanter Strom:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I \cdot d\vec{L}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (75)$$



Volumen:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (76)$$

Integrations Betrachtung:

$$(\cdot)' = \text{ Draht, } (\cdot) = \text{ Beobachter} \quad (77)$$

8.2 Magnetischer Dipol

Fundamentale Einheit des Magnetismus.

magnetisches Dipolmoment: $[\vec{m}] = [Am^2]$

$$\vec{m} = I\vec{A}, \quad \text{für eine Leiterschleife:} \quad \vec{m} = I\pi R^2 \vec{n} \quad (78)$$

Drehmoment auf den Dipol:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_0 \quad (79)$$

Energie im Dipol:

$$E_{pot} = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0 \quad (80)$$

Magnetfeld im Fernfeld:

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3\vec{e}_r(\vec{m} \cdot \vec{e}_r) - \vec{m}}{|\vec{r}|^3} \quad (81)$$

Magnetische Dipole werden durch Leiterschleifen gebildet, welche im nächsten Abschnitt beschrieben werden.

8.3 Wichtige Magnetfelder

8.3.1 unendliche langer gerader Leiter:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(\vec{I} \times \vec{e}_r)}{|\vec{r}|} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \vec{e}_\varphi \quad (82)$$

\vec{e}_r = Einheitsvektor in radiale Richtung
 \vec{e}_φ = Einheitsvektor in Wickelrichtung

8.3.2 Torus

$$H = \frac{NI}{2\pi R_0} \rightarrow B = \frac{\mu_r \mu_0 NI}{2\pi R_0} \quad (83)$$

8.3.3 Leiterschleife

Zentrum:

$$B_z(z=0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z \quad (84)$$

Mittelachse Allgemein:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z \quad (85)$$

Mittelachse Fernfeld:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2|z|^3} \vec{e}_z \quad (86)$$

Beliebiges Fernfeld:

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3\vec{e}_r(\vec{m} \cdot \vec{e}_r) - \vec{m}}{|\vec{r}|^3} \quad (87)$$

8.3.4 Zylinderspule

Zylinderspule mit N Windungen.

$\frac{N}{L}$ = Windungsdichte

Allgemein:

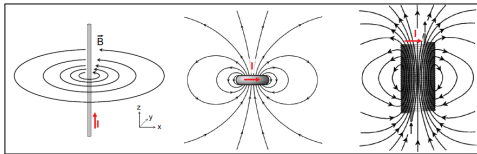
$$\begin{aligned} B_z(z) &= \frac{N\mu_0 I}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{R^2}{[R^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} dz' \vec{e}_z \\ &= \frac{N\mu_0 I}{2L} \left[\frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2}} - \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 - (z - \frac{L}{2})^2}} \right] \end{aligned} \quad (88)$$

Im Zentrum der Spule: (z=0)

$$B_z(0) = \frac{N\mu_0 I}{2L} \frac{L}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2})^2}} \quad (89)$$

Zentrum einer Langer Spule:

$$B_z(0) \stackrel{L \gg R}{\approx} \frac{N}{L} \mu_0 I = \mu_0 j_a \quad (90)$$



8.4 Gesetz von Gauss für Magnetfelder

Magnetischer Fluss: $[\Phi_M] = [Wb] = [Tm^2] = [Weber]$

$$\Phi_M = \int_A \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' \quad (91)$$

Gesetz von Gauss:

$$\oint_A \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = 0 \quad (92)$$

Differential Form:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (93)$$

Da magnetische Feldlinien geschlossen sind, ist die Anzahl in ein Volumen hin einlaufender Feldlinien immer gleich der aus dem Volumen herausführenden Feldlinien.

8.4.1 Durchflutungsgesetz

Der Strom durch eine Fläche ist gleich gross wie das magnetische Feld tangential entlang des Flächenrand.

$$\oint_L \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{L}' = \mu_0 I \quad (94)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \mu_r \vec{j}(\vec{r}) \quad (95)$$

9 Lorentzkraft / Ampere'sches Gesetz

9.1 Lorentzkraft

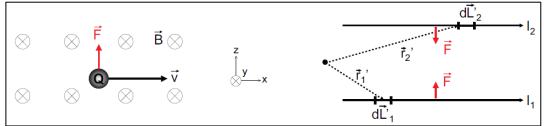
$$\vec{F}(\vec{r}) = Q \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (96)$$

$$\vec{F} = \int_L I d\vec{L}' \times \vec{B}(\vec{r}') \quad (97)$$

9.2 Ampere'sches Gesetz

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1 \vec{v}_1 \times (Q_2 \vec{v}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (98)$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{I_1 d\vec{L}'_1 \times (I_2 d\vec{L}'_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (99)$$



9.3 Halleffekt

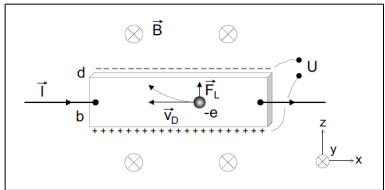
Ladungsteilung in einem Leiter aufgrund eines externen Magnetfeld. Daraus entsteht eine Spannung (**Hallspannung**).

$$U = \frac{IBb}{enbd} = \frac{IB}{end} \quad (100)$$

Mit n = Ladungsträgerdichte $[\frac{1}{m^3}]$

Diese kommt vom Kräftegleichgewicht: $v_D = -\frac{I}{enA}$

$$\vec{F}_{Lorentz} \stackrel{!}{=} \vec{F}_{Coulomb} \\ e \underbrace{\frac{I}{en}}_{=A} \underbrace{\frac{bd}{bd}}_{=v_D} B \stackrel{!}{=} e \underbrace{\frac{U}{b}}_{E=U/b} \quad (101)$$



10 Eigenschaften Magnetismus

10.1 Magnetisierung

relative magnetische Feldkonstante:

$$\mu_r = \frac{|\vec{B}|}{|\vec{B}_0|}, \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_M = \mu_r \vec{B}_0 \quad (102)$$

magnetische Suszeptibilität:

$$\chi_m = \frac{|\vec{B}_M|}{|\vec{B}_0|} = \mu_r - 1 \quad (103)$$

$$B = \chi_m B_0 \quad (104)$$

magnetische Erregung:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \quad \text{magnetische Erregung} \quad (105)$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}_M}{\mu_0}, \quad \text{Magnetisierung} \quad (106)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (107)$$

Die Einheit der magnetischen Erregung und der Magnetisierung ist Henry $[H] = [M] = 1 \frac{A}{m}$.

10.1.1 Klassifizierung von Materialien:

- Materialien welche das Magnetfeld **abschwächen** sind **diamagnetisch**.
- Materialien welche das Magnetfeld **verstärken** sind **paramagnetisch**.
- Materialien welche das Magnetfeld **sehr stark verstärken** sind **ferromagnetisch**.
- Ferromagnetische Materialien können auch eigene Magnetfelder bilden.

10.2 Atomarer Ursprung Magnetismus

Paramagnetismus: Materialien mit ungepaarten Elektronen (atomarer Dipol) sind paramagnetisch. Die atomaren Dipole richten sich nach einem äusseren Feld aus und verstärken es. Die Kraft eines Paramagneten zeigt in Richtung höhere Flussdichte. Es wirkt kein Dipolmoment auf einen Paramagneten.

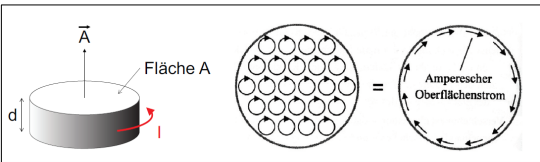
Diamagnetismus: Material mit keinen ungepaarten Elektronen ist diamagnetisch. Durch die Lorentzkraft und die Bewegung der Elektronen wird die Kreisbahn der Elektronen geändert. Dadurch gleichen sich die Dipole nicht wieder aus und das äussere Feld wird abgeschwächt. Dieser Effekt tritt bei allen Materialien auf (auch bei paramagnetischen). Die Kraft zeigt in Richtung tiefere Flussdichte. (werden herausgezogen)

Ferromagnetismus: Extremfall des Paramagnetismus. Alle atomaren Dipole richten sich gegenseitig aus (langreichweitige magnetische Ordnung). Das äussere Magnetfeld wird enorm verstärkt.

	Diamagnetismus	Paramagnetismus	Ferromagnetismus
Ursache	Magnetfeld verstärkt/schwächt atomare Kreisströme	Unkompensierte atomare Kreisströme generieren Dipol	Kollektive Ausrichtung von atomaren Dipolen
Wirkung	Magnetfeld wird abgeschwächt	Magnetfeld wird verstärkt	Magnetfeld wird enorm verstärkt
Stärke	Sehr schwach	schwach	Sehr stark
Relative magnetische Permeabilität	$\mu_r < 1$	$\mu_r > 1$	$\mu_r \gg 1$
Suszeptibilität	$\chi_m < 0$	$\chi_m > 0$	$\chi_m \gg 0$
Temperaturabhängig?	Nein	Nimmt mit steigender Temperatur ab	Verschwindet, wenn Curietemperatur überschritten wird

10.3 Oberflächenströme

Das Magnetfeld eines Körpers mit Magnetisierung \vec{M} ist identisch mit dem Magnetfeld der zugehörigen Längensstromdichte \vec{j}_A eines Ringstroms I, welcher an der Oberfläche des Körpers um diesen herumläuft.



$$\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V} = \frac{I\vec{A}}{Ad} = \vec{n} \times \vec{j}_A \quad (108)$$

\vec{n} ist der Normalenvektor der Seitenfläche.

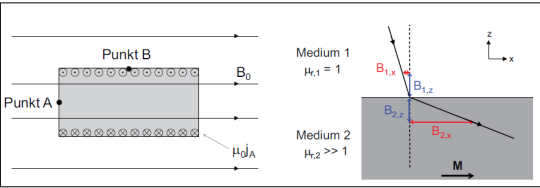
Dipolmoment einer homogen magnetisierten Kugel:

$$\vec{m} = 4\pi R^3 \frac{\vec{M}}{3} \quad (109)$$

10.4 Grenzflächen

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0, \quad \text{senkrechte Komponente} \quad (110)$$

$$\vec{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = -\mu_0 \vec{j}_A \quad \text{parallele Komponente} \quad (111)$$



10.4.1 Magnetische Abschirmung

Tritt ein Magnetfeld von einem unmagnetischen Material ($\mu_r \approx 1$) in ein ferromagnetisches Material über ($\mu_r \gg 1$), so ändert die Grenzfläche die Richtung der Feldlinien.

Für die senkrechte Komponente gilt.

$$B_{2,z} = B_{1,z} \quad (112)$$

Für die parallele Komponente gilt.

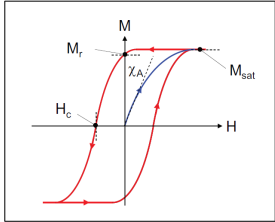
$$B_{2,x} = B_{1,x} + \mu_0 j_A = B_{1,x} + \mu_0 M_2 \approx \mu_{r,2} B_{1,x} \quad (113)$$

10.5 Ferromagnetismus

für den Ferromagnetismus gilt:

$$\vec{M} \neq \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (114)$$

- M_{sat} ist die Sättigungsmagnetisierung
- M_r ist die Remanezmagnetisierung
- H_c ist das Koerzitivfeld
- Anfangssteigung: χ_A



10.5.1 Magnetische Anisotropie

Wenn ein Material nicht in alle Richtungen gleich magnetisierbar ist. Ursachen:

- Kristallstruktur
- Geometrie

$$E = KV \sin^2(\theta) \quad (115)$$

- E: Anisotropieenergie
- K: Anisotropieparameter
- V: Volumen
- θ : Winkel zwischen Magnetachse und Magnetisierung

10.5.2 Curie-Temperatur

Temperatur ab welcher ein Ferromagnet zu einem gewöhnlichen Paramagneten wird.

11 Magnetische Induktion

Zeitliche veränderliche Magnetfelder erzeugen elektrische Felder und damit auch Ströme.

11.1 Faraday'sche Induktionsgesetze

- Spannung ist proportional zur Fläche der Schleife
- Spannung ist proportional zur Magnetfeldstärke
- Vorzeichen der Spannung wechselt mit dem Vorzeichen des Magnetfeld
- Spannung ist proportional zur Geschwindigkeit, mit der die Fläche oder das Magnetfeld geändert wird.
- Daumen in Richtung des B-Feld: Finger sind die positive Umlaufrichtung. (Wenn negatives Vorzeichen, dann geht die Spannung und der Strom in die andere Richtung.)
- **Asymmetrien bei den Formen beachten (Wenn Asymmetrisch kann Rotation auch eine Spannung induzieren)**

Induktionsspannung: Vorzeichen von $\frac{d\vec{A}}{dt}$ beachten.

$$U = - \frac{d}{dt} \int_A \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = - \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (116)$$

Für Radiale Verteilung:

$$\oint_{\partial A} \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A} \quad (117)$$

Differentialform:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} \quad (118)$$

Drehstab: Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ und Länge l

$$U_{ind} = \frac{d}{dt} \int_0^l B \theta r dr = \frac{d}{dt} B \theta \frac{1}{2} l^2 = \frac{1}{2} B \omega l^2 \quad (119)$$

11.2 Lenz'sche Regel

Die induzierte Spannung und der induzierte Strom sind so gerichtet, dass sie gegen die Ursache wirken.

11.2.1 Beispiel zwei Leiterschleifen

Zwei weit entfernte ($z \gg R$) Leiterschleifen. Durch die Unter fließt ein Strom I_1 . In der Oberen wird dadurch ein Magnetfeld induziert (7.14) und ein magnetischer Fluss.

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_1 R^2}{2z^3} \Rightarrow \Phi_M = \pi R^2 B = \frac{\mu_0 I_1 \pi R^4}{2z^3} \quad (120)$$

$$(A) \quad I_1 = \text{const. und } z = \text{const.}$$

$$U_2 = - \frac{d\Phi_M}{dt} = 0 \quad (121)$$

$$(B) \quad z = \text{const. aber } \frac{dI_1}{dt} > 0$$

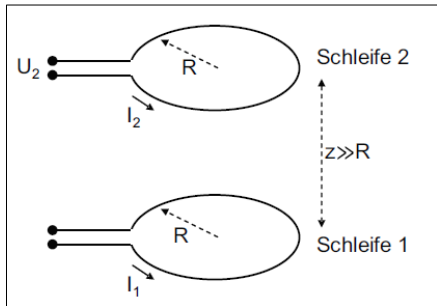
$$U_2 = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 I_1 \pi R^4}{2z^3} \right) = - \frac{\mu_0 I_1 \pi R^4}{2z^3} \frac{dI_1}{dt} < 0 \quad (122)$$

Das durch U_2 erzeugte Magnetfeld, schwächt das erste Magnetfeld und damit I_1 ab. (erfüllt Lenz)

$$(C) \quad I_1 = \text{const. aber } \frac{dz}{dt} > 0, (\text{Auseinanderbewegen})$$

$$U_2 = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 I_1 \pi R^4}{2z^3} \right) = \frac{3\mu_0 I_1 \pi R^4 v}{2z^4} > 0 \quad (123)$$

Das durch U_2 erzeugte Magnetfeld, verhindert das Auseinanderbewegen der Leiterschleifen. (erfüllt Lenz)



11.2.2 Wirbelströme

Wird ein elektrischer Leiter durch ein inhomogenes Magnetfeld gezogen, ändert sich der magnetische Fluss und es entstehen lokale Ströme. Diese Ströme werden Wirbelströme genannt. Diese Wirbelströme führen zu Leistungsverlusten und sind proportional zu:

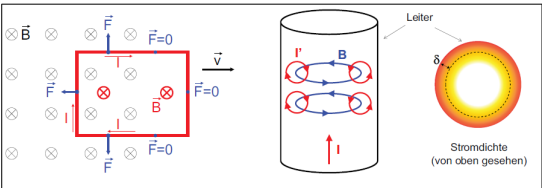
- Geschwindigkeit
- Stärke des Magnetfeld
- Dicke des Leiters
- Leitfähigkeit des Leiters

Schlitzte **verringern** die Wirbelströme und Bremsleistung.

11.2.3 Skineffekt

Hochfrequente Ströme fließen nur durch eine dünne Oberflächenschicht des Leiters. Durch den Hochfrequenten Strom werden Magnetfelder erzeugt, welche wiederum Kreisströme an der Oberfläche erzeugen. Die Tiefe δ bis zu welcher nennenswerte Ströme auftreten nimmt mit der Wurzel der Frequenz ab.

$$\delta \propto \frac{1}{\sqrt{f}}$$



11.3 Induktivität

$$\text{Induktivität: } [L] = [\text{Henry}] = [H] = \left[\frac{Tm^2}{A} \right]$$

$$L = \frac{\Phi_M}{I} = \frac{1}{I} \int_A \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' \quad (124)$$

Gegeninduktion von zwei Leiterschleifen:

$$L = \frac{\Phi_M}{I_1} = \frac{BA}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R^4}{2z^3} \quad (125)$$

Selbstinduktion einer langen Spule: ($l \gg R$)

$$L = \frac{N^2 \mu_0 \pi R^2}{l} \quad (126)$$

Spannung aufgrund der Induktion

$$U_I = -L \frac{dI}{dt} I(t) \quad (127)$$

11.4 Energie des Magnetfeld

Analog zur Energie im Kondensator kann Energie im Magnetfeld gespeichert werden.

11.4.1 Energie in einer Induktivität

In einer Induktivität wird über die Zeit T kontinuierlich die Spannung von 0 auf I_0 erhöht. Die Energie ist die Leistung $P = UI$ während der Zeit T: ($I(t) = I_0 \frac{t}{T}$ und $U(t) = L \frac{dI}{dt} = \frac{LI_0}{T}$)

$$E_{mag} = \int_0^T P(t) dt = \int_0^T \frac{LI_0^2 t}{T^2} dt = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad (128)$$

Eine Spule mit N Windungen:

$$E_{mag} = \frac{1}{2} LI_0^2 = \frac{N^2 \mu_0 \pi R^2 I_0^2}{2l} \quad (129)$$

Die Grösse I_0 kann durch das zugehörige Feld bestimmt werden:

$$B = \mu_0 I_0 \frac{N}{L} \quad (130)$$

11.4.2 Energiedichte des Magnetfeldes

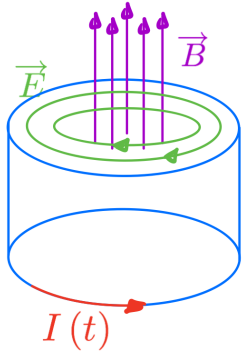
$$w = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \quad (131)$$

11.4.3 Spule mit zeitabhängigem Strom

Wir haben eine Spule mit bekannten Dimensionen, die von einem Strom: $I(t) = \alpha t$ durchflossen wird. Wir nehmen an, dass das Feld homogen in der Spule verteilt ist und durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$B(t) = \frac{N}{\ell} \mu_0 I(t) = n \mu_0 I(t) n = \frac{N}{\ell}$$

Das zeitlich veränderliche Magnetfeld induziert ein elektrisches Feld welches folgendermassen aussieht:



Dieses elektrische Feld lässt sich mit dem Wissen der Richtung und dem Faradayschen Induktionsgesetz berechnen:

$$\oint_L \vec{E}(r) dl = 2\pi a |E| \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A} = a^2 \pi \frac{dB}{dt} B(t)$$

Wobei a der Radius ist, an welchem wir das E-Feld berechnen.

$$\Rightarrow |E|(a) = \frac{1}{2} a \frac{dB}{dt} B(t) = \frac{1}{2} a n \mu_0 \frac{dI}{dt} I(t) = \frac{1}{2} a n \mu_0 \alpha$$

Die Selbstinduktivität ist gegeben durch:

$$L = \frac{N\phi_A}{I}$$

Wobei ϕ_A der Fluss durch eine Querschnittsfläche ist:

$$\phi_A = \pi R^2 n \mu_0 I$$

Die Selbstinduktivität ist also:

$$L = \frac{N\pi R^2 n \mu_0 I}{I} = n N R^2 \pi \mu_0$$

Die Induzierte Spannung durch den eigenen Fluss ist gegeben durch:

$$U = - \frac{d}{dt} N\phi_A = -N \cdot R^2 n \mu_0 \pi \alpha$$

Der Poynting Vektor beim Radius a zeigt in Richtung Zentrum und hat den Betrag:

$$S(t) = \frac{1}{2} n^2 a \alpha \mu_0 I(t)$$

Richtung und Betrag kombiniert ergeben:

$$\vec{S}(t) = - \frac{1}{2} n^2 a \alpha \mu_0 I(t) \cdot \vec{e}_r$$

12 Maxwell Gleichungen

12.1 Erzeugung der Felder

12.1.1 Ursache elektrischer Felder

- elektrische Ladungen
- zeitliche änderndes Magnetfeld

12.1.2 Ursache magnetischer Felder

- elektrischer Strom
- zeitlich änderndes elektrisches Feld

12.2 Erweitertes Kraftgesetz

Kraft auf eine Probeladung in elektrischen und magnetischen Feldern.

$$\vec{F}(\vec{r}) = Q_0 \left[\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \right] \quad (132)$$

\vec{r} : Position
 \vec{v} : Geschwindigkeit

12.3 Maxwell Gleichungen

12.3.1 Erste Maxwell'sche Gleichung

Gesetz von Gauss:

$$\oint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}' = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (133)$$

12.3.2 Zweite Maxwell'sche Gleichung

Gesetz von Gauss für Magnetfelder:

$$\oint_A \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (134)$$

12.3.3 Dritte Maxwell'sche Gleichung

Faraday'sches Induktionsgesetz

$$\oint_L \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{L}' = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' \quad (135)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{d\vec{B}(t)}{dt} \quad (136)$$

12.3.4 Vierte Maxwell'sche Gleichung

Erweitertes Durchflutungsgesetz:

$$\oint_L \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{L}' = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}' \quad (137)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}(t)}{dt} \quad (138)$$

12.4 Maxwell'schen Gleichung im Nah- und Fernfeld

12.4.1 Maxwell Gleichungen Nahfeld

- nahezu statische Felder
- kurze Distanzen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (139)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) \approx \mu_0 \vec{j} \quad (140)$$

12.4.2 Maxwell Gleichung Fernfeld

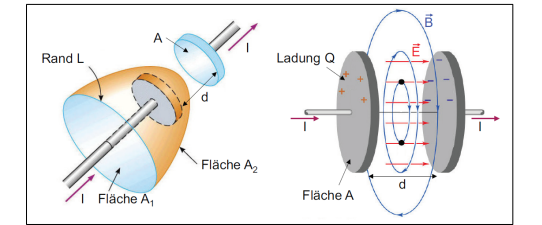
- hochfrequente Felder
- grosse Distanzen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{d\vec{B}(\vec{r})}{dt} \quad (141)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) \approx \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}(t)}{dt} \quad (142)$$

12.5 Maxwell'scher Verschiebungsstrom

Zeitliche Änderung der Feldstärke.



Anhand des jetzigen Durchflutungsgesetz ergibt sich:

$$\oint_L \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{L}' = \mu_0 I, \quad \text{Strom durch } A_1 \quad (143)$$

$$\oint_L \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{L}' = 0 \quad \text{Strom durch } A_2 \quad (144)$$

Diese müssten Gleich sein, **Widerspruch!!!**
Verschiebungsstrom: (ist real)

$$I_V = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon \frac{d}{dt} \int_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}' \quad (145)$$

13 Elektromagnetische Wellen

Durch kombinieren der Maxwell'schen Gleichungen, lässt sich im Fernfeld, eine Wellengleichung aufstellen.
Magnetische Welle:

$$\frac{d^2 \vec{B}(\vec{r})}{dt^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{B}(\vec{r}) \quad (146)$$

Elektrische Wellengleichung:

$$\frac{d^2 \vec{E}(\vec{r})}{dt^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}) \quad (147)$$

Wellengeschwindigkeit:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.998 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \quad (148)$$

- **Elektromagnetische Wellen sind die Fernwirkung beschleunigter Ladungen.**
- **Das elektrische Feld und das Magnetfeld einer elektromagnetischen Welle stehen senkrecht aufeinander und sind senkrecht zur Ausbreitungsrichtung**

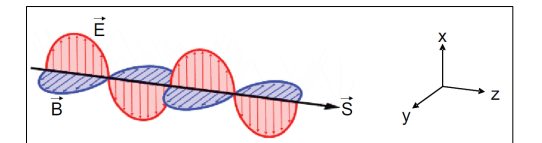
13.0.1 Poynting Vektor

Der Poynting Vektor gibt die Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Welle an. $[\vec{S}] = \left[\frac{W}{m^2} \right] = \left[\frac{N}{m \cdot s} \right]$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{E} \times \vec{H} \quad (149)$$

Der Poynting Vektor gibt auch den Betrag der Leistungsdichte an:

$$I = |\vec{S}| \quad (150)$$



14 Licht und Wellen

14.1 Wellengleichung

$$\frac{d^2 \psi(x, t)}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 \psi(x, t)}{dx^2} \quad (151)$$

c ist die **Wellengeschwindigkeit**

14.1.1 Harmonische Welle

mathematische Lösung:

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)} \quad (152)$$

physikalisch gemessen:

$$\psi(x, t) = \text{Re} \psi(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad (153)$$

ψ_0 ist die Amplitude und ω ist die Frequenz.

Lösung der Wellengleichung:

$$-\omega^2 \psi(x, t) = -c^2 k^2 \psi(x, t) \quad (154)$$

Wellengeschwindigkeit und Länge:

$$c = \frac{\omega}{|k|} \quad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (155)$$

Zeigrößen	Ortsgrößen
Kreisfrequenz ω	Wellenvektor k
Frequenz $f = \omega/2\pi$	Wellenzahl $\tilde{\nu} = k/2\pi$
Periodendauer $T = 1/f$	Wellenlänge $\lambda = 1/\tilde{\nu}$
Periodendauer $T = 2\pi/\omega$	Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$
Frequenz $f = \frac{1}{T}$	$k = 2\pi/\lambda$

rechtslaufende Welle \Rightarrow :

$$\psi(x, t) = \text{Re} \psi_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)} = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

linkslaufende Welle \Leftarrow :

$$\psi(x, t) = \text{Re} \psi_0 e^{i(\omega t + kx + \varphi)} = \psi_0 \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

Nur das relative Vorzeichen ist relevant!!!

Phase der Welle:

$$|\psi(x = 0, t = 0)| = \psi_0 \cos(\varphi) \quad (156)$$

Meist $\varphi = 0$, nur relevant beim Vergleichen zweier Wellen.

14.1.2 Superpositionsprinzip

Für gleiche $c = \frac{\omega}{|k|}$, können Wellen superponiert werden.

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^N \psi_{0,n} e^{i(\omega_n t - k_n x + \varphi_n)} \quad (157)$$

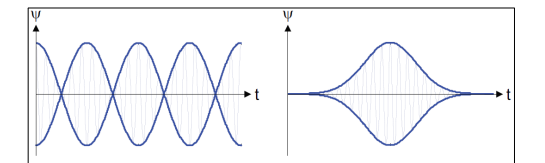
$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \psi_0 e^{i(\omega t - k(\omega) x + \varphi(\omega))} \quad (158)$$

Schwebung: (zwei Wellen mit fast gleichen Frequenzen)

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \psi_0 e^{i\omega_1 t} + \psi_0 e^{i\omega_2 t} = \psi_0 e^{i\bar{\omega} t} (e^{-i\Delta\omega t} + e^{i\Delta\omega t}) \\ &= \psi_0 e^{i\bar{\omega} t} 2 \cos(\Delta\omega t) = \psi_0 \cos(\bar{\omega} t - \bar{k} x) \cos(\Delta\omega t - \Delta k x) \end{aligned}$$

mittlere Frequenz	$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$
Hälfte der Frequenz	$\Delta\omega = \frac{1}{2} \omega_2 - \omega_1 $
Schwebungsfrequenz:	$f_S = f_2 - f_1$
Umhüllende:	$\cos(\Delta\omega t)$
Δk	$\frac{1}{2} k_2 - k_1 $
\bar{k}	$\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$

Gaußsförmiges Wellenpaket ist ein Spezialfall der Schwebung.



15 Energie, Leistung und Intensität

15.1 Intensität

I = Intensität, P = Leistung der Welle

Eindimensionale Welle:

$$\boxed{I = P}, \quad \text{eindimensionale Welle} \quad (159)$$

Zweidimensionale Welle:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{P}{2\pi r}, \quad \text{mit } U = \text{Umfang} \quad (160)$$

Dreidimensionale Welle:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}, \quad \text{mit } A = \text{Oberfläche} \quad (161)$$

Intensität durch Quadrat der Amplitude:

$$I = |\psi|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |\psi(\cdot, x, t')|^2 dt' = \frac{1}{2} \psi_0^2 \quad (162)$$

Amplitude als Funktion von r:

$$\text{Eindimensionale Welle: } \psi(x) = \psi_0 = \sqrt{2I} = \text{const.} \quad (163)$$

Zweidimensionale Welle:

$$\psi(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (164)$$

Dreidimensionale Welle:

$$\psi(r) \propto \frac{1}{r} \quad (165)$$

Mittlere Amplitude:

$$\psi_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_0|, \quad I = \psi_{rms}^2 \quad (166)$$

15.1.1 Seilwelle

Wellengleichung:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{T}{\mu} \frac{d^2 z^2}{dx^2} = c^2 \frac{d^2 z^2}{dx^2}, \quad \boxed{c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}} \quad (167)$$

$$\mu = \frac{m}{L}: \text{Massenbelegung} \quad T: \text{Kraft der Seilspannung}$$

Energiedichte einer Seilwelle:

$$w = \frac{E}{\Delta x} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \quad (168)$$

Leistung einer Seilwelle: $P = \frac{dE}{dt}$

$$P = \frac{dE}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{E}{\Delta x} c = \frac{1}{2} \mu c \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2_{max} \quad (169)$$

Zeit für eine Seilwelle mit Unterschiedlicher Massenbelegung:

$$dt = \frac{dx}{v(x)} \rightarrow T = \int_0^L \frac{dx}{v(x)} \quad (170)$$

15.2 Wellenimpedanz

Die Wellenimpedanz ist das Verhältnis von ausdenkender Kraft und Geschwindigkeit der Auslenkung

Wellenimpedanz einer Seilwelle:

$$Z = \frac{F_z}{\left(\frac{dz}{dt} \right)} = \frac{T}{c} = \sqrt{\mu T} \quad (171)$$

Ein Medium ist durch die Wellenimpedanz Z und Wellengeschwindigkeit c charakterisiert.

15.3 Dispersion

Frequenzabhängigkeit der Wellengeschwindigkeit. (Bisher konstant)

$$c = c(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)} \quad (172)$$

Im Allgemeinen erfüllt eine Welle in einem dispersiven Medium die Wellengleichung nicht mehr. Harmonische Wellen erfüllen sie noch, aber mit anderen Geschwindigkeiten.

Phasengeschwindigkeit:

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad (173)$$

Gruppengeschwindigkeit:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_p + k \frac{dv_p}{dk} \quad (174)$$

Ohne Dispersion gilt: $v_g = v_p = c$

15.4 Absorption

Energie Abgabe an das Medium \rightarrow die Intensität nimmt ab.

$$\psi(t) = \psi_0 e^{-t/\tau} \quad (175)$$

Wellengleichung mit Absorption: ($x = ct$)

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{-x/\delta_e} e^{i(\omega t - kx + \varphi)} = \psi_0 e^{-\alpha x/2} e^{i(\omega t - kx + \varphi)}$$

charakteristische Abfalldistanz bzw. Eindringtiefe:

$$\delta_e = c\tau = \frac{2}{\alpha} \quad (176)$$

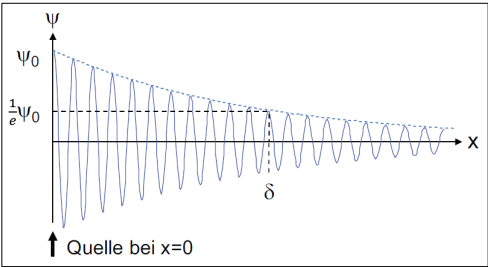
Absorptionskoeffizient:

$$\alpha = \frac{2}{\delta_e} \quad (177)$$

Abfall der Intensität:

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x} \quad (178)$$

Absorption und Dispersion treten immer zusammen auf. (Kramers-Kronig-Beziehung)
 τ ist die Zeit und δ_e die Eindringtiefe, bis welcher die Amplitude auf $\psi = \frac{1}{e} \approx 0.368$ gefallen ist.



16 Dreidimensionale Welle

Ebene Welle

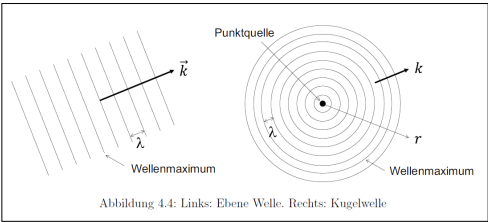
$$\psi(\vec{x}, t) = \psi_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \phi)} \quad (179)$$

Dreidimensionale Wellengleichung:

$$\frac{d^2 \psi(\vec{x}, t)}{dt^2} = c^2 \nabla^2 \psi(\vec{x}, t) = c^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \psi(\vec{x}, t)$$

Kugelwelle: $r = |\vec{x}|$

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(r, t) = \frac{\psi_0}{\sqrt{4\pi \cdot r}} e^{i(\omega t - kr + \varphi)} \quad (180)$$



16.1 Wellenarten

Transversalwelle:
Schwingung steht senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Zwei Freiheitsgrade können polarisiert werden.
z.B. Seilwellen oder elektromagnetische Wellen

Longitudinalwellen: Schwingung ist entlang der Ausbreitungsrichtung. Ein Freiheitsgrad
z.B. Schallwellen

17 Reflexion und Transmission

17.1 Grenzflächenübergang

Beim Übergang einer Welle von einem Medium ins andere wird im Allgemeinen ein Teil der Welle Reflektiert und ein Teil wird transmittiert (durchgelassen).

Beispiel an einer Seilwelle: μ_1, μ_2, T_1, T_2 und $t = 0$

$$\psi_A(x) = \psi_{0,A} e^{-ik_1 x + \varphi} \quad \text{links einlaufende Welle}$$

$$\psi_B(x) = \psi_{0,B} e^{+ik_1 x + \varphi + \pi} \quad \text{links reflektierte Welle}$$

$$\psi_C(x) = \psi_{0,C} e^{-ik_2 x + \varphi} \quad \text{rechts transmittierte Welle}$$

Achtung!!! Phasensprung bei Reflexion wenn $n_1 < n_2$ (dünner in dicker) Phasensprung von $+\pi$ ist gleich mit $-\psi(x, t)$

Reflektierte Welle Bsp.:

$$\psi_{refl.} = r \psi_0 \cos(\omega t - k_{ein} x_L + k_{ein} x + \pi) \quad (181)$$

Vorzeichenwechsel bei x da jetzt in andere Richtung läuft!

Transmittierte Welle Bsp.:

$$\psi_{trans.} = t \psi_0 \cos(\omega t - k_{ein} x_L - k_{aus} x) \quad (182)$$

Stetigkeit der Amplituden: bei $x = 0$

$$\psi_{0,A} + \psi_{0,B} = \psi_{0,C} \quad (183)$$

Stetigkeit der vertikalen Kraft: bei $x = 0$

$$k_1 T_1 \psi_{0,A} - k_1 T_1 \psi_{0,B} = k_2 T_2 \psi_{0,C}$$

$$\frac{T_1}{c_1} \psi_{0,A} - \frac{T_1}{c_1} \psi_{0,B} = \frac{T_2}{c_2} \psi_{0,C} \quad (184)$$

$$Z_1 \psi_{0,A} - Z_1 \psi_{0,B} = Z_2 \psi_{0,C}$$

Reflexionskoeffizient: (Amplitude)

$$r = \frac{\psi_{0,B}}{\psi_{0,A}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (185)$$

Transmissionskoeffizient: (Amplitude)

$$t = \frac{\psi_{0,C}}{\psi_{0,A}} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = 1 + r \quad (186)$$

r kann negativ oder positiv sein!!!

17.2 Transmittierte und Reflektierte Leistung

Eingehende Leistung P_A wird zu:

Reflektierte Leistung:

$$P_B = \left(\frac{\psi_{0,B}}{\psi_{0,A}} \right)^2 P_A = r^2 P_A = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 P_A \quad (187)$$

Transmittierte Leistung: (Intensität)

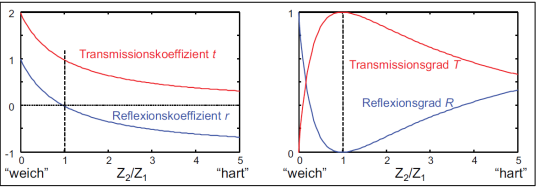
$$P_C = P_A - P_B = \left[1 - \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \right] P_A = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} P_A$$

Reflexionsgrad: (Intensität)

$$R = \frac{P_B}{P_A} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 = r^2 \quad (188)$$

Transmissionsgrad:

$$T = \frac{P_C}{P_A} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = \frac{Z_2}{Z_1} t^2 = 1 - R \quad (189)$$



Fall	Z_2	Amplitude der reflektierten Welle $\psi_{0,B}$	Amplitude der transmittierten Welle $\psi_{0,C}$	Transmittierte Leistung
Reflexion an hartem Medium („Wand“)	$Z_2 \rightarrow \infty$	$-\psi_{0,A}$	0	0%
Reflexion an weichem Medium („loses Ende“)	$Z_2 \rightarrow 0$	$\psi_{0,A}$	$2\psi_{0,A}$	0%
Impedanzanpassung	$Z_2 = Z_1$	0	$\psi_{0,A}$	100%

18 Stehende Wellen

Auslenkung nur eine Funktion vom Ort!

z.B. Musikinstrumente, Mikrowellenofen, Laser

18.1 Selbstüberlagerung

Ein Welle wird vollständig Reflektiert!

$$\psi(x, t) = \psi_A(x, t) + \psi_B(x, t) = -\psi_0 e^{i(\omega t + \varphi)} 2i \sin(kx)$$

$$\text{Re} \psi(x, t) = 2\psi_0 \sin(kx) \sin(\omega t + \varphi) \quad (190)$$

Die zeitliche und örtliche Schwingung sind voneinander separiert.

18.1.1 Stehende Welle: Gerader Fall

Seil beidseitig eingespannt.

Randbedingungen:

$$\sin(k \cdot 0) = 0, \quad \sin(k \cdot L) = 0 \quad (191)$$

Wellenlänge: Grundwellenlänge $\lambda = 2L$

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}, \quad k = k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (192)$$

Eigenfrequenz:

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n \frac{c}{2L} \quad (193)$$

18.1.2 Stehende Welle: Ungerader Fall

Seil einseitig eingespannt.

Randbedingungen:

$$\sin(k \cdot 0) = 0, \quad \sin(k \cdot L) = 1 \quad (194)$$

Wellenlänge:

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}, \quad k = k_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} \quad (195)$$

Eigenfrequenz:

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2L} \quad (196)$$



Die Schwingung $n = 1$ wird Grundschiwingung genannt, die Schwingungen $n > 1$ werden Oberschwingungen genannt.

erste Oberschwingung: $n = 2$

zweite Oberschwingung: $n = 3$

18.1.3 Differenzen

Gerader Fall:

$$\bullet f_{n+1} - f_n = \Delta f = \frac{c}{2L}$$

$$\bullet f_1 = 1 \frac{c}{2L} = \Delta f$$

Ungerader Fall:

$$\bullet f_{n+1} - f_n = \Delta f = \frac{c}{2L}$$

$$\bullet f_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2L} = \frac{1}{2} \Delta f$$

19 Akustische Wellen

Die akustische Welle ist charakterisiert durch die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage eines Mediumteilchens.

Auslenkung aus der Gleichgewichtslage:

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad (197)$$

Teilchengeschwindigkeit: (Schallschnelle)

$$v(x, t) = \frac{ds(x, t)}{dt} = v_0 \sin(\omega t - kx + \varphi) \quad (198)$$

Veränderung des lokalen Druck: (Schalldruck)

$$p(x, t) = p_0 + \delta p_0 \sin(\omega t - kx + \varphi) \quad (199)$$

$v_0 = -\omega s_0$:	Amplitude der Schallschnelle
δp_0 :	Amplitude des Schalldrucks
p_0 :	Gleichgewichtsdruck

19.1 Akustische Wellengleichung

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = -K \frac{d}{dt} \frac{dv}{dx} = -K \frac{d}{dx} \frac{dv}{dt} = \frac{K}{\rho} \frac{d^2 p}{dx^2} \quad (200)$$

Schallgeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad \lambda = \frac{c}{f} \quad (201)$$

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M p_0}{R T}$:	Dichte
$K = -V \left(\frac{dp}{dV} \right)$:	Kompressionsmodul

19.1.1 Schallgeschwindigkeit

In idealen Gasen gilt: $K = \gamma p_0$

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} \quad (202)$$

γ :	Isentropenkoeffizient, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$
R :	Ideale Gaskonstante, $R \approx 8.314 \frac{J}{mol K}$
M :	Molare Masse
m :	Masse
V :	Volumen
T :	Temperatur [K]

19.1.2 Akustische Impedanz

Akustische Impedanz:(Widerstand gegen die Ausbreitung der Schallwelle)

$$Z = \rho c = \sqrt{K \rho} = \frac{\delta p_0}{v_0} = \sqrt{\frac{\gamma M p_0^2}{R T}} \quad (203)$$

Wenn p = const. kürzt sich p_0 Raus bei den Reflexionskoeffizienten.

19.1.3 Schallpegel

Schallintensität: (Leistung pro Fläche)

$$I = \frac{1}{2} \rho c \left(\frac{ds}{dt} \right)_{max}^2 = \frac{1}{2} \rho c v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{(\delta p_0)^2}{Z} \quad (204)$$

Schallleistung: Intensität mal Fläche

$$P = I A = \frac{1}{2} A \rho c v_0^2 \quad (205)$$

Schallpegel:

$$L = \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (206)$$

$I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \frac{W}{m^2}$ ist die Hörschwelle eines Tones mit 1000 Hz.

19.2 Schallausbreitung in Rohren

Schallausbreitung in eindimensionaler Geometrie wobei die Querschnittsfläche A viel kleiner ist als die Wellenlänge λ ($\sqrt{A} \ll \lambda$). Schallwelle ist ähnlich wie eine Seilwelle.

Akustische Impedanz in Rohren: (Flussimpedanz)

$$Z_a = \frac{\delta p_0}{q_0} = \frac{\delta p_0}{(v_0 A)} = \frac{Z}{A} = \frac{\sqrt{K \rho}}{A} \stackrel{!}{=} \frac{\sqrt{K \rho}}{\pi R^2} \quad (207)$$

q_0 : Schallfluss, $q_0 = v_0 A$

(1): dünne Rohre mit Radius R

Ende	Impedanz	Schalldruck δp	Schallschnelle v
Geschlossenes Ende	$Z_a = \infty$	$ \delta p = \delta p_0$	$v = 0$
Offenes Ende	$Z_a \approx Z/\lambda^2$	$\delta p = 0$	$ v = v_0$

19.3 Stehende Wellen in Rohren

Gleich wie Seilwellen. Abrupte Änderung der Impedanz, führt zu Reflexion.

19.3.1 Resonanzfrequenz

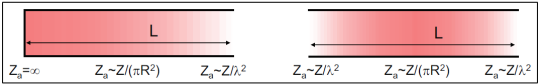
zwei offene oder zwei geschlossenen Enden:

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L} \quad (208)$$

ein geschlossenes und ein offenes Ende:

$$f_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2L} \quad (209)$$

L: Rohrlänge
z.B. Orgelpfeifen



19.4 Dopplereffekt und Überschall

19.4.1 Dopplereffekt

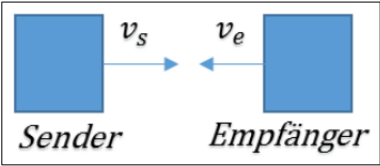
Sender oder Empfänger sind in Bewegung → Frequenzänderung. Dabei muss $v_E \approx c$ bzw. $v_S \approx c$.

Dopplereffekt:

$$f_E = f_S \left(\frac{c \pm v_E}{c \mp v_S} \right) \quad (210)$$

v_E :	Geschwindigkeit Empfänger
v_S :	Geschwindigkeit Sender
f_E :	Frequenz Empfänger
f_S :	Frequenz Empfänger

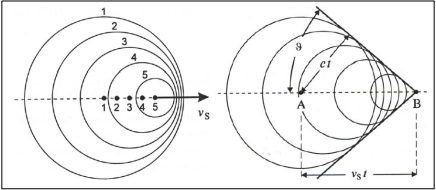
Obere Vorzeichen der Formel gelten für diese Situation:



19.4.2 Überschall

Mach'scher Kegel:

$$\sin \theta = \frac{ct}{v_S t} = \frac{c}{v_S}, \quad \text{Machzahl: } Ma = \frac{c}{v_S} \quad (211)$$



20 Elektromagnetische Wellen

20.1 Wellengleichung für EM-Wellen

Magnetische Welle:

$$\frac{d^2 \vec{B}(\vec{r})}{dt^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 \vec{B}(\vec{r}) \quad (212)$$

Elektrische Wellengleichung:

$$\frac{d^2 \vec{E}(\vec{r})}{dt^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) \quad (213)$$

Weiter Zusammenhänge:

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c_0}, \quad \vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{S} \quad (214)$$

20.1.1 Poynting Vektor

Der Poynting Vektor gibt die Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Welle an. $[\vec{S}] = \left[\frac{W}{m^2} \right] = \left[\frac{N}{m \cdot s} \right]$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{E} \times \vec{H} \quad (215)$$

Der Poynting Vektor gibt auch den Betrag der Leistungsdichte an:

$$I = |\vec{S}| \quad (216)$$

20.2 EM-Wellen im Vakuum

Wellenfunktionen:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \varphi)} \quad \vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \varphi)}$$

Meist werden die Vektoren weggelassen und man nimmt nur die Beträge!

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299'792'485 \frac{m}{s} = 2.998 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \quad (217)$$

Wellenimpedanz: (Widerstand gegen das Ausbreiten)

$$Z = \frac{E_0}{H_0} = \frac{E_0}{B_0 / \mu_0} \quad (218)$$

Im Vakuum gilt:

$$Z_0 = \mu_0 c_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.73 \Omega \quad (219)$$

Energiedichte:

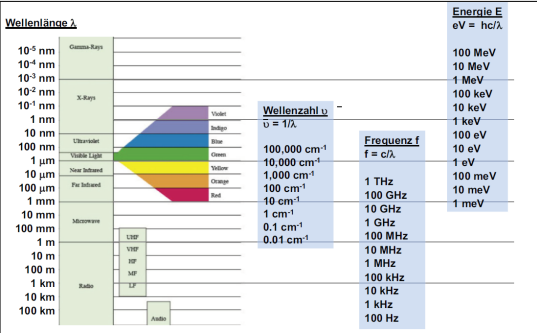
$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{E_0^2}{2} + \frac{1}{2 \mu_0} \frac{B_0^2}{2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2 \mu_0} B_0^2 \quad (220)$$

Intensität: ($I = \frac{P}{A}$, $P = \frac{dE}{dt}$)

$$I = \frac{1}{A} \frac{dE}{dt} = \frac{A c_0 \epsilon_0}{A} \frac{E_0^2}{2} = \frac{1}{2} c_0 \epsilon_0 E_0^2 \quad (221)$$

20.2.1 Elektromagnetisches Spektrum

Sichtbares Licht: $\lambda = 400 nm \dots 700 nm$



21 EM-Wellen in Materie

EM-Wellen werden in verlangsamt wenn sie durch eine Materie geht (Materie wird Polarisiert).

Lichtgeschwindigkeit in Materie:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r \mu_0 \epsilon_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c_0}{n} \quad (222)$$

Brechungsindex:

$$n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \geq 1 \quad (223)$$

μ_r und ϵ_r sind frequenzabhängig!

Wellenimpedanz in der Materie:

$$Z = \mu c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} Z_0 \quad (224)$$

Andere Größen:

$$k_n = n k_0, \quad \lambda_n = \frac{\lambda_0}{n}, \quad \omega_n = \omega_0 \quad (225)$$

nichtmagnetische Materialien: $\mu_r \approx 1$

$$n \approx \sqrt{\epsilon_r}, \quad Z \approx \frac{Z_0}{n} \quad (226)$$

Es wird sehr oft diese Vereinfachung verwendet!!!

Lichtgeschwindigkeit: $c_n = \frac{c_0}{n}$

Länge: $l_n = l_0 \cdot n$

21.0.1 Optisch Anisotropie

Anisotropes Material: *Es kommt zur Doppelbrechung wenn Lichtstrahl nicht entlang einer optischen Achse eintrifft → Zwei Lichtstrahlen werden sichtbar.*

Um das zu überprüfen, muss man den Einfallswinkel verändern und schauen ob dann immer noch nur ein Lichtstrahl sichtbar ist.

21.0.2 Lambert-Beer-Gesetz

EM-Wellen werden in einem Medium absorbiert → Intensität nimmt ab.

Transmittierte Intensität:

$$I(d) = I_0 e^{-\alpha d} \quad (227)$$

Extinktionskoeffizient:

$$E = -\log_{10}(e^{-\alpha d}) = \log_{10}(e) \cdot \alpha d \approx 0.434 \cdot \alpha d = \epsilon c d \quad (228)$$

α : Absorptionskoeffizient

d: Distanz im Material

ϵ : Extinktionskoeffizient

c: Konzentration eines Stoffes

21.0.3 Reflexion an Metalloberfläche

komplexer Wellenvektor:

$$\vec{k} = k - \frac{i\alpha}{2} \quad (229)$$

gedämpfte Welle:

$$E(x, t) = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \varphi)} \quad (230)$$

komplexer Brechungsindex:

$$\tilde{n} = \frac{\vec{k}}{k_0} = n - i \frac{\alpha}{2k_0} = n - i\kappa \quad (231)$$

$k_0 = \frac{\omega}{c_0}$: Wellenvektor im Vakuum

n : reeller Anteil des Brechungsindex

κ : komplexer Anteil des Brechungsindex

Durch komplexe Dielektrizitätskonstante: $\tilde{\epsilon}_r = \epsilon_r,1 + i\epsilon_r,2$

$$\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\epsilon}_r}, \quad n = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_r,1 + \epsilon_r,2} + \frac{1}{2} \epsilon_r,1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (232)$$

$$\kappa = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_r,1 + \epsilon_r,2} - \frac{1}{2} \epsilon_r,1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (233)$$

Reflexionsgrad bei Absorption: Von Medium $\kappa_1 = 0$ zu $\kappa_2 > 0$

$$R = \frac{|\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2|^2}{|\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2|^2} = \frac{(n_1 - n_2)^2 + \kappa_2^2}{(n_1 + n_2)^2 + \kappa_2^2} \quad (234)$$

Metalle absorbieren sehr gut $\kappa \gg 1$.

Frequenzabhängigkeit von ϵ_r :

$$\omega \rightarrow 0, \quad \epsilon_r(\omega) \rightarrow \infty \quad (235)$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad \epsilon_r(\omega) \rightarrow 0 \quad (236)$$

21.0.4 Reflexion und Transmission, senkrecht einfallende EM-Welle

Reflexionsgrad:

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \stackrel{\mu_1 \approx \mu_2}{\approx} \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = r^2 \quad (237)$$

Transmissionsgrad:

$$T = 1 - R = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = t^2 \quad (238)$$

21.0.5 Skin Depth (Eindringtiefe)

Eindringtiefe von Elektromagnetischen Wellen in ein Metall (Abschirmung).
Wellengleichung in einem Leiter mit Leitfähigkeit σ :

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} + \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{d\vec{E}}{dt} = c^2 \frac{d^2 \vec{E}}{dx^2} \quad (239)$$

Definition der Eindringtiefe:

$$\delta_e = \frac{2}{\alpha} = \frac{1}{\kappa k_0} = \frac{c_0}{\kappa \omega} \quad (240)$$

Eindringtiefe:

$$\delta_e \approx \left(\frac{c_0^2}{\omega^2} \frac{2\omega \epsilon_0}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{\omega \sigma \mu_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (241)$$

22 Brechung

Wellen die auf eine Grenzfläche treffen, werden zum Teil Reflektiert und zum Teil transmittiert.

Stetigkeit der Amplitude bei $x = 0$:

$$\psi_{0,A} e^{-ik_A y} + \psi_{0,B} e^{-ik_B y} = \psi_{0,C} e^{-ik_C y} \quad (242)$$

Dies muss für alle y gelten, darauf folgt:

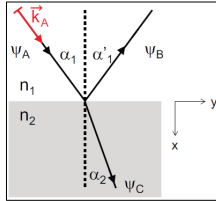
$$k_{A,y} = k_{B,y} = k_{C,y} \quad (243)$$

22.1 Reflexionsgesetz

$$\sin(\alpha_1) = \sin(\alpha'_1), \quad \alpha_1 = \alpha'_1 \quad (244)$$

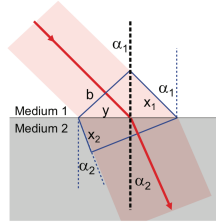
Einfallswinkel und Ausfallswinkel sind gleich!!

22.2 Brechungsgesetz von Snellius



22.2.1 Prinzip von Huygens

Jeder Punkt einer bestehenden Lichtwelle produziert eine neue Kugelwelle. Alle Kugelwellen summieren sich zu einer neuen Lichtwelle zum späteren Zeitpunkt.



Um das Brechungsgesetz mit dem Prinzip von Huygens herzuleiten betrachten wir einen Strahl der Breite b , der auf eine Mediengrenze trifft. Es gilt:

$$x_1 = c_1 \Delta t = \frac{c_0 \Delta t}{n_1}$$

$$x_2 = c_2 \Delta t = \frac{c_0 \Delta t}{n_2}$$

Trigonometrie ergibt uns:

$$\sin(\alpha_1) = \frac{x_1}{y} \quad \text{und} \quad \sin(\alpha_2) = \frac{x_2}{y}$$

Daraus folgt sofort:

$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$$

22.2.2 Prinzip von Fermat

Das Licht nimmt immer den schnellsten Weg, um von Punkt A zu Punkt B zu gelangen.

Um das Brechungsgesetz mit dem Prinzip von Fermat herzuleiten betrachten wir einen Strahl, der auf eine Mediengrenze trifft. Δt ist die Zeit, die der Strahl benötigt um von A nach B zu kommen. Es gilt:

$$\Delta t = \frac{l_1}{c_1} + \frac{l_2}{c_2}$$
$$= \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{x_2^2 + (y - y_1)^2}}{c_2}$$

Minimierung von Δt durch ableiten nach y_1 ergibt uns:

$$\frac{d\Delta t}{dy_1} = \frac{n_1 \sin(\alpha_1)}{c_0} - \frac{n_2 \sin(\alpha_2)}{c_0} = 0$$

Daraus folgt sofort:

$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$$

22.3 Totalreflexion

Für $n_1 > n_2$, kann bei $\alpha_1 \geq \alpha_{1,c}$ der Austrittswinkel $\alpha_2 > 90^\circ$ werden (Totalreflexion).

Bedingung:

$$n_1 \sin(\alpha_{1,c}) = n_2 \sin(90^\circ) \Rightarrow \sin(\alpha_{1,c}) = \frac{n_2}{n_1} \tag{245}$$

Kritischer Winkel:

$$\alpha_{1,c} = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \tag{246}$$

Kriterium Totalreflexion:

$$\sin(\alpha_1) \frac{n_1}{n_2} > 1 \tag{247}$$

22.4 Evaneszenz

Der "Transmittierte" Teil bei der Totalreflexion.

Wellenfunktion für $\alpha_1 \geq \alpha_{1,c}$:

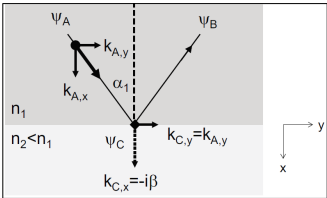
$$\psi_C(x, y) = \psi_{0,C} e^{-\beta x - i k_C y} \tag{248}$$

Die Welle nimmt exponentiell ab im neuen Medium und geht nicht schlagartig auf Null. β beschreibt diesen Abfall:

$$\beta = \sqrt{k_1^2 \sin^2(\alpha_1) - k_2^2} = k_1 \sqrt{\sin^2(\alpha_1) - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

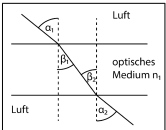
Eindringtiefe:

$$\delta = \frac{\lambda_1}{2\pi \sqrt{\sin^2(\alpha_1) - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} \tag{249}$$



22.4.1 Snellius in Serie

$\beta_1 = \beta_2$ (250)



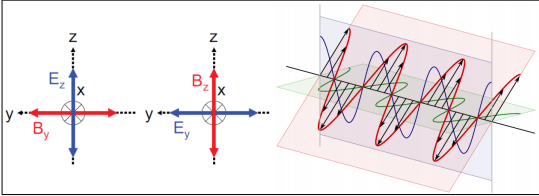
23 Polarisation

23.1 Linearpolarisation

Phasendifferenz: $\Delta\varphi = m\pi$, mit $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Wellenfunktion:

$$\vec{E}(x, t) = (\vec{E}_{0,y} \pm \vec{E}_{0,z}) e^{i(\omega t - kx + \varphi y)} \tag{251}$$

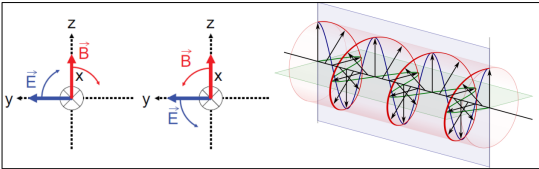


23.2 Zirkularpolarisation

Phasendifferenz: $\Delta\varphi = (m + \frac{1}{2})\pi$ und $|\vec{E}_{0,y}| = |\vec{E}_{0,z}|$

Wellenfunktion:

$$\vec{E}(x, t) = |\vec{E}_{0,y}|(\vec{e}_y \mp i\vec{e}_z)e^{i(\omega t - kx + \varphi y)} \tag{252}$$

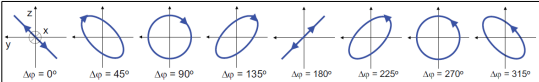


rechtsdrehend: $\Delta\varphi = 90^\circ$

linksdrehend: $\Delta\varphi = -90^\circ$

23.3 Elliptische Polarisation

Phasendifferenz: $\Delta\varphi \neq m\pi$



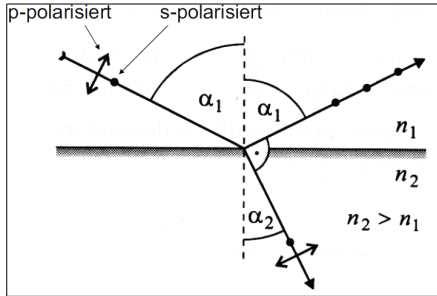
23.3.1 Polarisationsfilter

Polarisationsfilter lassen die eine Polarisation durch und die Andere nicht. Die transmittiert Intensität beträgt 50% = 0.5.

23.4 Transmission und Reflexion unter einem Winkel

horizontal Polarisiert: s-polarisiert

vertikal Polarisiert: p-polarisiert



Es muss gelten:

$$R = \left(\frac{Z_{2,\parallel} - Z_{1,\parallel}}{Z_{2,\parallel} + Z_{1,\parallel}} \right)^2 \tag{253}$$

23.4.1 Horizontal polarisierte Welle

Impedanzen:

$$Z_{1,s} = \frac{Z_0}{n_1 \cos(\alpha_1)}, \quad \text{einfallende Welle} \tag{254}$$

$$Z_{2,s} = \frac{Z_0}{n_2 \cos(\alpha_2)}, \quad \text{transmittierte Welle} \tag{255}$$

Reflexionsgrad:

$$R_s = \left(\frac{Z_{2,s} - Z_{1,s}}{Z_{2,s} + Z_{1,s}} \right)^2 = \left(\frac{n_1 \cos(\alpha_1) - n_2 \cos(\alpha_2)}{n_1 \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)} \right)^2$$

23.4.2 Vertikal polarisierte Welle

Impedanzen:

$$Z_{1,p} = \frac{Z_0 \cos(\alpha_1)}{n_1}, \quad \text{einfallende Welle} \tag{256}$$

$$Z_{2,p} = \frac{Z_0 \cos(\alpha_2)}{n_2}, \quad \text{transmittierte Welle} \tag{257}$$

Reflexionsgrad:

$$R_p = \left(\frac{Z_{2,p} - Z_{1,p}}{Z_{2,p} + Z_{1,p}} \right)^2 = \left(\frac{n_1 \cos(\alpha_2) - n_2 \cos(\alpha_1)}{n_1 \cos(\alpha_2) + n_2 \cos(\alpha_1)} \right)^2$$

23.4.3 Brewster-Gesetz

Winkel unter welchem die p-Welle gleich Null wird und die Welle komplett s-polarisiert ist.

n_1 : Brechungsindex "inneres/aktuelles Medium"

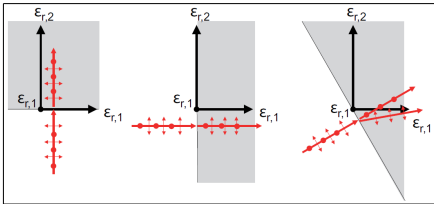
n_2 : Brechungsindex "äußeres Medium"

$$R_p(\alpha_{1,B}) = 0, \quad \alpha_{1,B} = \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \tag{258}$$

$n_2 > n_1$ gilt **nicht** allgemein. Kann auch $n_2 < n_1$.

23.5 Doppelbrechung

Durch anisotrope Materialien mit unterschiedlichen Brechungsindizes bzw. Dielektrizitätszahlen in unterschiedliche Raumrichtungen können drei verschiedene Effekte auftreten.



- (a) Der Strahl fällt entlang der optischen Achse ein. Das elektrische Feld ist senkrecht zur optischen Achse polarisiert und erfährt die gleiche Dielektrizitätskonstante. Der Kristall verhält sich wie ein normales Medium mit Brechungsindex n_1 . (linker Fall)
- (b) Der Strahl fällt senkrecht zur optischen Achse ein. Das elektrische Feld entlang der Achse erfährt eine andere Dielektrizitätskonstante als das elektrische Feld senkrecht zur Achse. Es tritt keine Doppelbrechung auf, aber eine Welle ist verlangsamt und die Polarisation wechselt von linear zu zirkular. (Mitte)
- (c) Der Strahl fällt unter beliebigem Winkel ein. Der eine Strahl (ordentlicher Strahl) wird unverändert transmittiert und dabei polarisiert, der andere Strahl (außerordentlicher Strahl) wird gebrochen und ist senkrecht dazu polarisiert. Doppelbrechung tritt auf. (rechter Fall)

Der wichtigste Fall ist (b). Falls der Gangunterschied zwischen den beiden Wellen nach passieren des Materials $\lambda/4$ beträgt, so hat sich die Phase der Wellen um $\Delta\varphi = 90^\circ$ verschoben und die Polarisation hat zwischen linear und zirkular gewechselt. Falls der Gangunterschied $\lambda/2$ beträgt, so hat sich die Phase der Wellen um $\Delta\varphi = 180^\circ$ verschoben und die Polarisation wechselt zwischen horizontal auf vertikal (oder zwischen zirkular rechts- und linksdrehend).

23.6 Systeme mehrere gestellten

Gesetz von Malus Drehung durch mehrere hintereinander gestellten Polarisatoren. Ist mit Intensitätsverlust verbunden.

Gesetz von Malus: Die Energie einer linear polarisierten Welle nimmt um $\cos^2(\beta)$ ab, wenn sie einen Polarisation passiert, der um den Winkel β relativ zur Welle polarisiert ist.

$$I_1 = c\epsilon_0 |\vec{E}_y|^2, \quad I_2 = I_1 \cos^2 \beta \tag{259}$$

Optische Aktivität Wenn man sehr viele kleine (Winkel) Polarisatoren hintereinander setzt, erfolgt kein Intensitätsverlust.

$$I_{n+1} = I_1 \cos^{2n} \left(\frac{\beta}{n} \right) \stackrel{n \gg 1}{\approx} I_1 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{n} \right)^2 \right]^2 \stackrel{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} I_1$$

24 Interferenz

24.1 Kohärenz

Zwei Wellen, deren Phasendifferenz an jede Ort und zu jeder Zeit gleich sind, heißen **kohärent**. (Kohärenz = Gleiche Frequenz.)

Im Allgemeinen haben Wellen nie genau die gleiche Frequenz sondern haben nur über der Kohärenzlänge oder **Kohärenzzeit** die gleiche Frequenz.

24.2 Superposition kohärenter Wellen

Wir betrachten die beiden Wellen:

$$\psi_A(x, t) = \psi_{0,A} \cdot e^{i(\omega t - kx + \varphi_A)}$$
$$\psi_B(x, t) = \psi_{0,B} \cdot e^{i(\omega t - kx + \varphi_B)}$$

Superposition zwei kohärenten Wellen:

$$\psi(x, t) = 2 \cos(\Delta\varphi) \overline{\psi} e^{i(\omega t - kx + \overline{\varphi})} + i 2 \sin(\Delta\varphi) \Delta\psi e^{i(\omega t - kx + \overline{\varphi})} \tag{260}$$

Realteil:

$$\text{Re}(\psi(x, t)) = 2 \cos(\Delta\varphi) \overline{\psi} \cos(\omega t - kx + \overline{\varphi}) - 2 \sin(\Delta\varphi) \Delta\psi \sin(\omega t - kx + \overline{\varphi}) \tag{261}$$

$\overline{\psi} = \frac{1}{2}(\psi_{0,A} + \psi_{0,B})$: mittlere Amplitude

$\Delta\psi = \frac{1}{2}(\psi_{0,A} - \psi_{0,B})$: halbe Amplitudendifferenz

$\overline{\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi_A + \varphi_B)$: mittlere Phase

$\Delta\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_A - \varphi_B)$: halbe Phasendifferenz

Für gleiche Amplituden: $(\psi_{0,A} = \psi_{0,B} = \psi_0)$

$$\psi(x, t) = 2 \cos(\Delta\varphi) \psi_0 e^{i(\omega t - kx + \overline{\varphi})} \tag{262}$$

$$\text{Re}\{\psi(x, t)\} = 2 \cos(\Delta\varphi) \psi_0 \cos(\omega t - kx + \overline{\varphi}) \tag{263}$$

Die Intensität:

$$I = |\psi|^2 = \frac{1}{2} \psi_0^2 4 \cos^2(\Delta\varphi) \tag{264}$$

Konstruktive Interferenz: $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

Gangunterschied: $\Delta\varphi = m\pi$

Distanzunterschied: $\Delta x = m\lambda$

Destruktive Interferenz: $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

Gangunterschied: $\Delta\varphi = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$

Distanzunterschied: $\Delta x = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$

24.2.1 Interferenz Allgemein

Wir haben zwei Wellen mit der gleichen Amplitude (können am selben Ort oder an verschiedenen Orten starten):

$$\psi_A = \psi_0 \cdot e^{-iA} \quad \psi_B = \psi_0 \cdot e^{-iB}$$

Die Superposition ergibt sich zu:

$$\psi = \psi_0 \left[2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{B-A}{2}\right) + i \cdot 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{B-A}{2}\right) \right]$$

$$\psi = 2\psi_0 \cos\left(\frac{B-A}{2}\right) \left[\cos\left(-\frac{A+B}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{A+B}{2}\right) \right]$$

Die Intensität, definiert als: $I = \frac{1}{2} \psi_0^2$ ist dann:

$$I = 2\psi_0^2 \cos^2\left(\frac{1}{2}(B-A)\right)$$

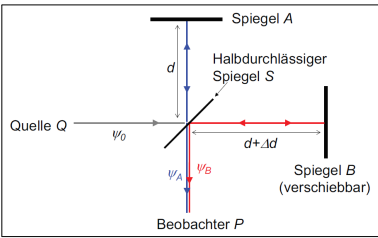
Für konstruktive Interferenz muss also gelten:

$$\frac{1}{2}(B-A) = m \cdot \pi$$

Für destruktive Interferenz muss also gelten:

$$\frac{1}{2}(B-A) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$$

24.3 Michelson-Interferometer



Welle zum Spiegel A: ($t = 0$ und $\varphi = 0$)

$$\psi_A(x) = \frac{1}{2} \psi_0 e^{-ik(2d+x)} \quad (265)$$

Welle zum Spiegel B: ($t = 0$ und $\varphi = 0$)

$$\psi_B(x) = \frac{1}{2} \psi_0 e^{-ik(2d+2\Delta d+x)} \quad (266)$$

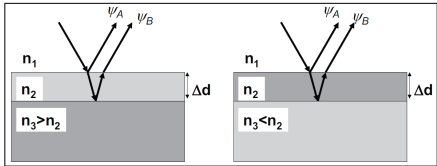
Überlagern ergibt:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi_A(x) + \psi_B(x) \\ &= \frac{1}{2} \psi_0 e^{-ik(2d+x)} (1 + e^{-ik2\Delta d}) \end{aligned} \quad (267)$$

Intensität:

$$I = |\psi_A + \psi_B|^2 = I_0 \cos^2(k\Delta d), \quad I_0 = \frac{1}{2} \psi_0^2 \quad (268)$$

24.4 Interferenz an dünnen Filmen



Reflexion Oberseite:

$$\psi_A(x) = -\psi_0 e^{-ik_1 x} \quad (269)$$

Reflexion Unterseite:

$$\psi_B(x) = -\psi_0 e^{-i(k_1 x + k_2 2\Delta d)} \quad \text{für } n_3 > n_2 \quad (270)$$

$$\psi'_B(x) = \psi_0 e^{-i(k_1 x + k_2 2\Delta d)} \quad \text{für } n_3 < n_2 \quad (271)$$

Überlagerte Wellen: ($\psi(x) = \psi_A(x) + \psi_B(x)$)

$$\psi(x) = -\psi_0 e^{-ik_1 x} (1 + e^{-ik_2 2\Delta d}) \quad \text{für } n_3 > n_2$$

$$\psi'(x) = -\psi_0 e^{-ik_1 x} (1 - e^{-ik_2 2\Delta d}) \quad \text{für } n_3 < n_2$$

Intensitäten: ($I = |\psi(x)|^2$)

$$I = \frac{1}{2} \psi_0^2 [2 + 2 \cos(k_2 2\Delta d)] \propto \cos(k_2 2\Delta d) \quad \text{für } n_3 > n_2$$

$$I' = \frac{1}{2} \psi_0^2 [2 - 2 \cos(k_2 2\Delta d)] \propto \cos(k_2 2\Delta d) \quad \text{für } n_3 < n_2$$

konstruktive Interferenz: ($m = 1, 2, 3, \dots$)

$$\Delta d = m \frac{\lambda_2}{2} \quad \text{für } n_3 > n_2 \quad (272)$$

$$\Delta d = \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_2}{2} \quad \text{für } n_3 < n_2 \quad (273)$$

Damit gleiche Intensität muss gelten:

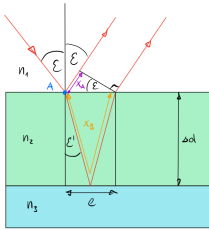
$$n_1 = \sqrt{n_0 \cdot n_2} \quad (274)$$

24.4.1 Interferenz am dünnen Film Herleitung unter Winkel ε

$$\sin(\varepsilon) = \frac{n_2}{n_1} \sin(\varepsilon')$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Beide Wellen starten bei Punkt A. Welle A wird direkt reflektiert und die Welle B wird erst an der zweiten Grenzfläche reflektiert.



Die beiden Wellen sind:

$$\psi_A = \psi_0 e^{-ik_1 x_A} \quad \psi_B = \psi_0 e^{-ik_2 x_B}$$

Die Intensität ist also:

$$I = 2\psi_0^2 \cos^2\left(\frac{k_2 x_B - k_1 x_A}{2}\right)$$

Nun muss noch die Geometrie betrachtet werden:

$$x_A = e \sin(\varepsilon) = 2\Delta d \tan(\varepsilon') \sin(\varepsilon) = 2\Delta d \frac{n_2 \sin(\varepsilon)}{\cos(\varepsilon')} \sin(\varepsilon)$$

$$x_B = 2\Delta d \frac{1}{\cos(\varepsilon')}, \quad \text{mit } \cos(\varepsilon') = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2(\varepsilon)}$$

Eingesetzt und vereinfacht ergibt sich für das Argument des Cosinus:

$$\frac{k_2 x_B - k_1 x_A}{2} = k_1 \Delta d \sqrt{\frac{n_2^2}{n_1^2} - \sin^2(\varepsilon)} \quad (275)$$

Dieses kann nun entweder mit der Bedingung für konstruktive oder destruktive Interferenz gleichgesetzt werden:

$$k_1 \Delta d \sqrt{\frac{n_2^2}{n_1^2} - \sin^2(\varepsilon)} = m\pi / \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$$

Achtung: Bei verschiedenen n_i die Phasensprünge betrachten:

1. Wenn zwei Phasensprünge, verändert sich nichts
2. Wenn ein Phasensprung, Destruktiv und Konstruktiv switchen, da

$$\frac{k_2 x_B - k_1 x_A}{2} + \frac{\pi}{2}$$

gerechnet wird und dann in 275

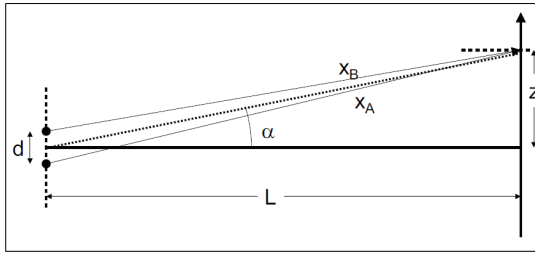
Die Geometrie bleibt genau die Gleiche, aber ψ_B sieht ein bisschen anders aus:

$$\psi_B = \psi_0 \cdot e^{-i \cdot (k_2 x_B - \pi)}$$

Dadurch ändert sich das Argument des \cos^2 zu:

$$k_1 \Delta d \sqrt{\frac{n_2^2}{n_1^2} - \sin^2(\varepsilon)} - \frac{\pi}{2}$$

24.5 Interferenz am Doppelspalt



Zwei Wellen von den Punkten A und B: ($t = 0$ und $\varphi = 0$)

$$\psi_A(x) = \psi_0 e^{-ikx_A} \quad \psi_B(x) = \psi_0 e^{-ikx_B}$$

Überlagerte Welle:

$$\psi(x) = \psi_0 e^{-ik \frac{1}{2}(x_A + x_B)} 2 \cos\left(\frac{k}{2}[x_A - x_B]\right)$$

Intensität:

$$I = |\psi(x)|^2 = 4I_0 \cos^2\left(\frac{k}{2}[x_A - x_B]\right), \quad I_0 = \frac{1}{2} \psi_0^2$$

Distanzdifferenz:

$$x_A - x_B = \frac{2dz}{\sqrt{L^2 + (z + \frac{1}{2}d)^2} + \sqrt{L^2 + (z - \frac{1}{2}d)^2}}$$

$$L \gg d \quad \frac{2dz}{2\sqrt{L^2 + z^2}} = d \sin(\alpha)$$

$$x_A - x_B \approx d \sin(\alpha)$$

Intensität in Abhängigkeit von α :

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= 4I_0 \cos^2\left(\frac{k}{2} d \sin(\alpha)\right) \\ &= 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin(\alpha)\right) = 4I_0 \cos^2(\Delta\varphi) \end{aligned}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\pi d}{\lambda} \sin(\alpha)$$

Interferenzmaxima:

$$\sin(\alpha_{max}) = m \frac{\lambda}{d} \quad \text{mit } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (277)$$

Interferenzminima:

$$\sin(\alpha_{min}) = m \frac{\lambda}{d} \quad \text{mit } m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots \quad (278)$$

Abstand zwischen zwei Intensitätsmaxima bzw. Minima:

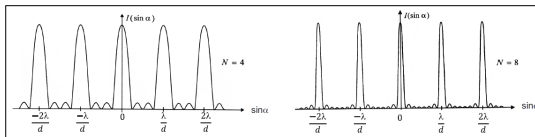
$$\sin(\Delta\alpha) = \frac{\lambda}{d} \approx \frac{\Delta z}{L} \quad (279)$$

24.6 Interferenz Mehrfachspalt

Intensität in Abhängigkeit von α und N (Anzahl) Spalten:

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2(N\Delta\varphi)}{\sin^2(\Delta\varphi)} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin(\alpha)\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin(\alpha)\right)} \quad (280)$$

Winkel für max und min wie beim Doppelspalt.



Für $\sin(\alpha) \rightarrow 0$ gilt $I(\alpha) \approx I_0 N^2$
 I_0 ist die Intensität pro Spalt

25 Beugung

25.1 Beugung am Einzelspalt

Huygens Prinzip:

"Beugung ist die Interferenz von unendlich Wellen." ($N \rightarrow \infty$)

I_{tot} ist die gesamte einfallende Intensität. $\Rightarrow I_0 = \frac{I_{tot}}{N}$,

Beugung am Einfachspalt:

$$I(\alpha) = I_{tot} \frac{\sin^2\left(\frac{b\pi}{\lambda} \sin(\alpha)\right)}{\left(\frac{b\pi}{\lambda} \sin(\alpha)\right)^2} \quad (281)$$

Beugungsmaxima: erste Ordnung: $m = \pm \frac{3}{2}$

$$\sin(\alpha_{max}) = m \frac{\lambda}{b} \quad \text{mit } m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots \quad (282)$$

Beugungsminima:

$$\sin(\alpha_{min}) = m \frac{\lambda}{b} \quad \text{mit } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (283)$$

25.2 Beugung am Mehrfachspalt

Beugung an vielen Spalten mit Abstand d, wobei $d \gg b$

$$I(\alpha) = I_{tot} \cdot \underbrace{\sin^2\left(\frac{b\pi}{\lambda} \sin(\alpha)\right)}_{\text{Beugung}} \cdot \underbrace{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin(\alpha)\right)}_{\text{Interferenz}}$$

$$\sin(\alpha_{max}) = \frac{\lambda}{d}$$

25.3 Beugung: allgemeine Blende

Wellengleichung:

$$\psi(\vec{r}) = \int_A \frac{\psi_0}{\sqrt{4\pi}|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' \quad (284)$$

Vereinfacht:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{\psi_0}{\sqrt{4\pi R}} e^{-ikR} \int_A e^{i(k_y y' + k_z z')} dy' dz' \quad (285)$$

Intensität:

$$I(y, z) = \frac{I_{tot}}{4\pi R^2} \left| \int_A e^{i(k_y y' + k_z z')} dy' dz' \right|^2 \quad (286)$$

25.4 Beugung an Lochblende

Intensität:

$$I(\alpha) = I_{tot} \left(\frac{2J_1(kR \sin(\alpha))}{kR \sin(\alpha)} \right)^2 = I_{tot} \left(\frac{2J_1(2\pi R/\lambda \sin(\alpha))}{2\pi R/\lambda \sin(\alpha)} \right)^2$$

$R = \frac{D}{2}$: Lochradius **Besselfunktion:** (J_1)

$$J_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin(\varphi)) d\varphi \quad (287)$$

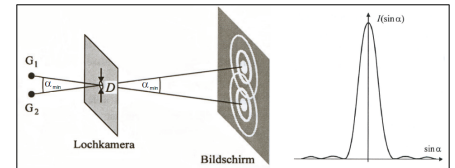
Beugungsminima:

$$\sin(\alpha_{min}) = m \frac{\lambda}{2R} \quad \text{mit } m = 1.22, 2.23, 3.24, \dots (+1.01)$$

25.4.1 Auflösungsvermögen

Kleinster Winkel unter welchem zwei Lichtquellen am Schirm unterschieden werden können.

$$\sin(\alpha_{min}) = 1.22 \frac{\lambda}{D} \stackrel{\lambda \ll D}{\approx} \alpha_{min} \approx \frac{z}{L} \quad (288)$$



Physik 2

Jorit Geurts jgeurts@student.ethz.ch
Version: 16. August 2021

1 Wellen-Teilchen Dualismus

1.1 Photon

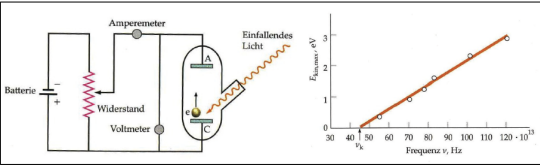
Licht kann auch als **quantifizierte** Energieteilchen beschrieben werden. Diese Teilchen heissen Photonen, Lichtquant oder Energiequant und haben **keine** Masse.

$$E = h\nu = \frac{h \cdot c}{\lambda} \quad (1)$$

Mit $\nu = \frac{c}{\lambda}$ als Frequenz des Lichts.

1.1.1 Photoelektrischer Effekt

Wenn man Photonen auf eine Metallisches Material schießt, werden Elektronen aus dem Metall gelöst. Dadurch kann eine Spannung zwischen zwei Metallplatten aufgebaut werden.



Kinetische Energie der Elektronen:

$$E_{kin} = \frac{m_e v_e^2}{2} = h\nu - W_{Austritt} = h\nu - \Phi_A \quad (2)$$

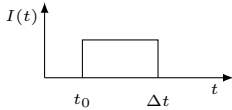
Spannung zwischen den Platten:

$$U = \frac{E_{Photon}}{e} \rightarrow E_{Photon} = U \cdot e \quad (3)$$

Erhöhung des Stromfluss durch Erhöhung der Intensität(=Erhöhung der Anzahl Photonen)
kritische Frequenz:

$$W_{Abl} = h \cdot \nu_k \Rightarrow \nu_k = \frac{W_{Abl}}{h} = \frac{c}{\lambda_k}$$

Stromfluss Verlauf: Start bei t_0 und Endspannung bei Δt



1.2 Weiter Formeln zum Photon

Relativistische Energie:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + (m c^2)^2} \quad (4)$$

Impuls: Relativistische Energie: $m \rightarrow 0$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (5)$$

Beschleunigungsspannung:

$$U = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{q} \quad (6)$$

1.2.1 Strahlungsdruck

Leistung eines Lasers: E = Energie und N = Anzahl Photonen

$$L = \frac{\Delta N}{\Delta t} E = I \cdot A = \frac{N \cdot E}{1s} \quad (7)$$

Kraft = Impulsänderung pro Zeit: $\Delta p = \Delta N p$

Absorption:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t} p = \frac{L}{c}$$

Reflexion:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t} 2p = 2 \frac{L}{c}$$

N = Anzahl Photonen und A = Fläche.

Strahlungsdruck:

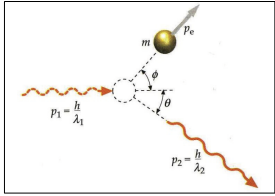
$$P = \frac{I}{c} = \frac{p \cdot N}{A \cdot 1s}$$

Intensität:

$$I = \frac{E \cdot N}{A \cdot 1s}$$

1.3 Compton Effekt

Ein ruhendes Elektron wird von einem hoch-energetischen Photon getroffen, wobei Energie- und Impulserhaltung gilt. Dieser Versuchsaufbau beweist, dass Photonen einen Impuls haben und bestätigt indirekt die Formel von Einstein $E = \sqrt{p^2 c^2 + (m c^2)^2}$.



Impulserhaltung: ($\vec{p}_e = 0$, da das Elektron in Ruhe ist)

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_e$$

Impuls des Elektron: (Impulserhaltung)

$$p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(\theta), \quad \text{wobei } p = |\vec{p}|$$

Energieerhaltung:

$$E_1 + E_{e,1} = E_2 + E_{e,2}$$

Energieerhaltung eingesetzt:

$$p_1 c + m_e c^2 = p_2 c + \sqrt{p_e^2 c^2 + (m_e c^2)^2}$$

Impuls des Elektron: (Energieerhaltung)

$$p_e^2 = p_1^2 - 2p_1 p_2 + p_2^2 + 2(p_1 - p_2)m_e c \quad (12)$$

1.3.1 Compton Wellenlänge

Impuls- und Energieerhaltung kombiniert:

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} = \frac{p_1 - p_2}{p_1 p_2} = \frac{1}{m_e c} (1 - \cos(\theta)) \quad (13)$$

Wellenlängen der Photonen:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos(\theta)) = \lambda_{Compton} \cdot (1 - \cos(\theta)) \quad (14)$$

Compton Wellenlänge:

$$\lambda_{Compton} = \frac{h}{m_e c} \quad (15)$$

Energien der Photonen:

$$\begin{aligned} \frac{E_2}{E_1} &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{1 + \frac{E_1}{(m_e c^2)} \cdot (1 - \cos(\theta))} \\ &= \frac{m_e c^2}{m_e c^2 + E_1 \cdot (1 - \cos(\theta))} \end{aligned} \quad (16)$$

Für $\theta = 90^\circ$ gilt:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_{Compton} \quad (17)$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{1 + \frac{E_1}{m_e c^2}} = \frac{m_e c^2}{m_e c^2 + E_1} \quad (18)$$

1.3.2 Compton - Winkel

Impulserhaltung in x & y Richtung:

$$x: \quad p_1 = p_e \cdot \cos(\Phi) + p_2 \cdot \cos(\theta)$$

$$y: \quad 0 = p_e \cdot \sin(\Phi) - p_2 \cdot \sin(\theta)$$

Auflösen nach $\tan(\Phi)$:

$$\tan(\Phi) = \frac{\sin(\theta)}{\frac{\Delta \lambda}{\lambda_1} + 1 - \cos(\theta)}$$

Ausserdem wissen wir:

$$\theta = \arccos \left(1 - \frac{\Delta \lambda}{\lambda_{Compton}} \right)$$

1.4 Materie und Bewegung

Genau wie Wellen Teilchencharakter, sprich einen Impuls und kinetische Energie, haben, können Teilchen Wellencharakter, sprich Beugung und Interferenz, haben.

1.4.1 De Broglie's Hypothese:

De Broglie Frequenz:

$$\nu = \frac{E_{kin}}{h} \quad (19)$$

De Broglie Wellenlänge:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}} \quad (20)$$

Achtung: Für Teilchen gilt $c = \lambda \nu$ nicht mehr. ($c \neq \lambda \nu$).

Die Hypothese gilt nicht für Teilchen die sich nahe der Lichtgeschwindigkeit bewegen (relativistische Teilchen)

1.4.2 Interferenz von Teilchen

Damit Teilchen ihre Welleneigenschaften aufzeigen, müssen die Experimente in der selben Größenordnung gemacht werden. Für Beugung und Interferenz an Spalten, müssen die Spalten der Platten oder Atomgitter etwa der De Broglie Wellenlänge entsprechen:

$$d \approx \lambda_{dB} \quad (21)$$

1.5 Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Die Wahrscheinlichkeit $P(x)$ ein Teilchen am Ort x anzutreffen ist das Betragsquadrat der Wellenfunktion.

Wahrscheinlichkeit:

$$P(x) = |\psi(x)|^2 = \psi^*(x) \cdot \psi(x) \quad (22)$$

Normierungsbedingung: (Teilchen muss sich irgendwo aufhalten)

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \cdot \psi(x) dx = 1$$

1.5.1 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Erwartungswert der Position x:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \cdot x \cdot \psi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot P(x) dx \end{aligned}$$

Erwartungswert des Impulses:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \cdot p \cdot \psi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \cdot \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \psi(x) dx \end{aligned}$$

Unschärfe der Position x:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x P(x) dx \right)^2} \end{aligned}$$

Unschärfe des Impulses:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}^2 P(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{p} P(x) dx \right)^2} \end{aligned}$$

1.6 Energie und Impuls: Teilchenwelle

Die Energie und der Impuls eines Teilchens sind durch Ableiten der Wellenfunktion bestimmt und sind daher Operatoren: ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$) **Energie:**

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \hat{E} \cdot \psi(x, t) \quad \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (23)$$

Impuls

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) = \hat{p} \cdot \psi(x, t) \quad \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (24)$$

Alternative Beschreibung der Energie:

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (25)$$

Bewegte Teilchen:

$$\Delta x' = \Delta v \cdot t \quad (26)$$

1.6.1 Heisenberg'sche Unschärferelation

Der Ort und der Impuls einer Welle sind nie gleichzeitig exakt bestimmbar. Unschärfe Impuls und Ort:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (27)$$

Unschärfe Zeit und Energie:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (28)$$

Oft gilt:

$$\Delta p = \sigma_p \left[\frac{kg \cdot m}{s} \right] \quad \Delta x = \sigma_x [m] \quad (29)$$

2 Energieniveaus

2.1 Schrödingergleichung

Schrödingergleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + E_{pot}(x, t) \cdot \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$$

Zeitunabhängige Schrödingergleichung:

Falls E_{pot} und $\psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t}$ nicht von der Zeit abhängen erhält man die folgende Gleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + E_{pot}(x) \cdot \psi(x) = E \cdot \psi(x) \quad (30)$$

TISE (Time Independent Schrödinger Equation):

$$\hat{H} \cdot \psi = E \cdot \psi \quad (31)$$

Hamilton Operator:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z) \quad (32)$$

2.2 Teilchen im Kasten

Für ein Teilchen im Kasten erhält man folgende Lösung:

Potentielle Energie:

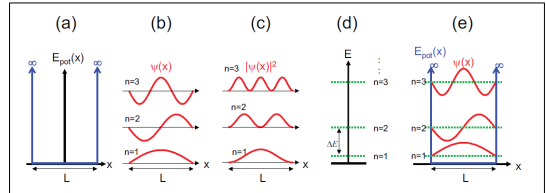
$$E_{pot}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 < x < L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \quad (33)$$

Randbedingungen:

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(L) = 0 \quad (34)$$

Lösung:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \quad (35)$$



2.2.1 Energieniveaus

Da nur bestimmte Wellenvektoren k_n erlaubt sind, sind auch nur bestimmte Energien E_n möglich:

Energieniveaus:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2}{8mL^2} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad (36)$$

Grundzustand des Teilchen im Kasten: ($n = 1$)

$$E_1 = E_R = \frac{\hbar^2}{8mL^2} \quad (37)$$

Energieniveaus in 3D:

$$E_{N_x, N_y, N_z} = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{N_x^2}{L_x^2} + \frac{N_y^2}{L_y^2} + \frac{N_z^2}{L_z^2} \right) \quad (38)$$

Für 2D oder 3D ist der erste angeregte Zustand wenn einer der Zustände angeregt ist. z.B. $\rightarrow n_x = 1$ und $n_y = 2$ oder $n_x = 2$ und $n_y = 1$
Aufnahme eines Photons: $E_x \rightarrow E_y$

$$\frac{\hbar c}{\lambda} = \frac{\hbar^2}{8mL^2} (y^2 - x^2) \quad x < y \quad (39)$$

2.2.2 Lösen der TISE

Lösen Sie die 3 dimensionale zeitinvariante Schrödingergleichung für den 3D Potentialkasten:

$$E_{pot} = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 < x < L, 0 < y < L, 0 < z < L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

TISE:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \Delta \psi(x, y, z) + E_{pot} \cdot \psi(x, y, z) = E \cdot \psi(x, y, z)$$

Ausserhalb des Potentialkastens:

$$\psi(x, y, z) = 0$$

Innerhalb des Potentialkastens:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = E \cdot \psi(x, y, z)$$

Ansatz Wellenfunktion:

$$\psi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

Einsetzen und durch $X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$ teilen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \right) = E(x, y, z)$$

Ansatz Energie:

$$E(x, y, z) = E_x(x) + E_y(y) + E_z(z)$$

Separieren (E_y, E_z gleich):

$$E_x(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

Ansatz für X :

$$X(x) = A \cdot \sin(k_x x) + B \cdot \cos(k_x \cdot x)$$

Einsetzen und Ableiten:

$$E_x(x) \cdot X(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (A \cdot \sin(k_x x) + B \cdot \cos(k_x x)) = \frac{\hbar^2}{2m} X(x) k_x^2$$

$$E_x(x) = \frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 \Rightarrow E_y = \frac{\hbar^2}{2m} k_y^2, \quad E_z(z) = \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2$$

Energie:

$$E(x, y, z) = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

Wellenfunktion:

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= [A \cdot \sin(k_x x) + B \cdot \cos(k_x x)] \\ &\quad \cdot [C \cdot \sin(k_y y) + D \cdot \cos(k_y y)] \\ &\quad \cdot [E \cdot \sin(k_z z) + F \cdot \cos(k_z z)] \end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \psi(0, y, z) = 0 &\Rightarrow [A \cdot 0 + B \cdot 1] \cdot Y \cdot Z = 0 &\Rightarrow B = 0 \\ \psi(x, 0, z) = 0 &\Rightarrow X \cdot [C \cdot 0 + D \cdot 1] \cdot Z = 0 &\Rightarrow D = 0 \\ \psi(x, y, 0) = 0 &\Rightarrow X \cdot Y \cdot [E \cdot 0 + F \cdot 1] = 0 &\Rightarrow F = 0 \end{aligned}$$

$$\psi(x = L, y, z) = 0 \Rightarrow A \cdot \sin(k_x L) \cdot Y \cdot Z = 0 \Rightarrow k_x = \frac{n \cdot \pi}{L}$$

$$\psi(x, y = L, z) = 0 \Rightarrow X \cdot C \cdot \sin(k_y L) \cdot Z = 0 \Rightarrow k_y = \frac{m \cdot \pi}{L}$$

$$\psi(x, y, z = L) = 0 \Rightarrow X \cdot Y \cdot E \cdot \sin(k_z L) = 0 \Rightarrow k_z = \frac{o \cdot \pi}{L}$$

In Wellenfunktion einsetzen:

$$\psi(x, y, z) = K \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} x\right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi}{L} y\right) \cdot \sin\left(\frac{o \cdot \pi}{L} z\right)$$

In Energie einsetzen:

$$E(x, y, z) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n^2 + m^2 + o^2) = \frac{\hbar^2}{8mL^2} (n^2 + m^2 + o^2)$$

Normieren:

$$\int_0^L \int_0^L \int_0^L |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz = 1$$

$$\begin{aligned} K^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \cdot \int_0^L \sin^2\left(\frac{m\pi}{L} y\right) dy \cdot \int_0^L \sin^2\left(\frac{o\pi}{L} z\right) dz \\ = K^2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{K^2 L^3}{8} \Rightarrow K = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \end{aligned}$$

Die normierte Lösung:

$$\psi(x, y, z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{L} y\right) \cdot \sin\left(\frac{o\pi}{L} z\right)$$

3 Atomphysik

3.1 Bohr'sches Atommodell

Das Bohrmodell ist zwar nicht ganz richtig aber dank seiner Einfachheit und doch relativ guter Beschreibung wird es sehr oft verwendet.
Ein schwerer positiv geladener Kern wird von leichten negativ geladenen Elektronen umkreist. Für eine stabile Umlaufbahn müssen sich die Coulombkraft und Zentripetalkraft genau aufheben.
Kräftegleichgewicht:

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v_e^2}{r} \quad (40)$$

(r : Radius, v_e : Geschwindigkeit, m_e : Masse Elektron, e : Elementarladung, Z : Kernladungszahl = Ordnungszahl)
Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_e v_e^2 = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (41)$$

Potentielle Energie: (Coulombpotential)

$$E_{pot} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -2E_{kin} \quad (42)$$

Gesamtenergie:

$$E = E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2} E_{pot} = -E_{kin} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (43)$$

3.1.1 Bohr'sche Postulate

- Die Elektronen können sich nur in bestimmten Umlaufbahnen aufhalten. Die Länge einer Umlaufbahn muss genau einem Vielfachen der de-Broglie Wellenlänge entsprechen.
- Die Umlaufbewegung erfolgt ohne Energieverlust (strahlungsfrei).
- Wechselt das Elektron zwischen zwei Bahnen, so wird die Energie von aussen aufgenommen oder nach aussen abgegeben. Dabei gilt Energieerhaltung.

Mögliche Radien:

$$2\pi r_n = n\lambda = \frac{nh}{p_n}, \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad (44)$$

Drehimpuls des Borhmodell:

$$L_n = p_n r_n = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \quad (45)$$

Kernladungszahl Z steht im Periodensystem

3.1.2 Radiale Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P(r) = \frac{4r^2}{a_0^3} \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) \quad (46)$$

3.1.3 Thermische Energie:

$$E_{therm.} = k_B T \quad (47)$$

3.2 Einelektronatome

3.2.1 Energieniveaus

Elektronenradius im Bohrmodell:

$$r_n = \frac{n^2}{Z} \left(\frac{4\pi\epsilon\hbar^2}{e^2 m_e} \right) = \frac{n^2}{Z} a_0 \quad (48)$$

Bohrradius:

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} = 5.29 \cdot 10^{-11} [m] \quad (49)$$

Energie des n -ten Niveaus:

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \left(\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \right) = -\frac{Z^2}{n^2} E_R \quad (50)$$

Energie des Grundzustands E_1 im Wasserstoffatom:

$$\begin{aligned} E_R &= -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = -\hbar c R_H \\ &= -13.6 [eV] = -2.179 \cdot 10^{-18} [J] \end{aligned} \quad (51)$$

3.2.2 Wellengleichung

Wellengleichung des Einelektronenatoms

Schrödingergleichung in drei Dimensionen ($\psi = f(x, y, z)$):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + E_{pot}(x, y, z) \cdot \psi = E \cdot \psi$$

In Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right]}_{\text{radiale Ableitung}} + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}_{\text{Winkelableitung}} \right) \psi(r, \theta, \varphi) \\ - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi(r, \theta, \varphi) = E \cdot \psi(r, \theta, \varphi) \end{aligned}$$

Lösungen der Schrödingergleichung:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = \underbrace{\sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}}}_{\text{Normierung}} \underbrace{e^{-\rho/2} \rho^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)}_{\text{radiale Wellenfunktion}} \cdot \underbrace{Y_l^{m_l}(\theta, \varphi)}_{\text{winkelabhängige Wellenfunktion}}$$
$$\rho = \frac{2Zr}{na_0}$$

Quantenzahlen des Einelektronenatoms:

$$\boxed{n, l, m_l} \quad (52)$$

Energieniveaus im quantenmechanischen Modell:

$$E_{n,l,m_l} = E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \left(\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \right) = -\frac{Z^2}{n^2} E_R \quad (53)$$

Die Energie hängt nur von der radialen Quantenzahl n ab. Zustände mit gleichen n aber unterschiedlichen l und m_l sind entartet haben aber die gleiche Energie.

3.2.3 Quantenzahlen

	Radiale Quantenzahl	Drehimpuls-quantenzahl	Magnetische Quantenzahl
Symbol	n	l	m_l
Mögliche Werte	$n = 1, 2, 3, \dots$	$l = 0, 1, \dots, n-1$	$m_l = -l, -l+1, \dots, l-1, l$
Assoziierte Polarkoordinate	r	ϑ	φ
Assoziierte physikalische Grössen	Energie: $E_n = -E_R Z^2 / n^2$	Drehimpuls (Betrag): $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$	Drehimpuls (z-Komponente): $L_z = m_l \hbar$ Magnetischer Dipol: $m_z = -\mu_B m_l$
Merkmal in Wellenfunktion	Ist gleich der totalen Anzahl Knoten plus eins	Ist gleich der Anzahl Knotenebenen	Bestimmt die Lage der Knotenebene(n)

Zustand n hat

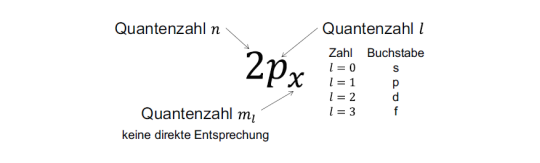
$$g(n) = 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 4 \frac{(n-1)n}{2} = (2) \cdot n^2$$

entartete Zustände (wobei (2) für die Spinartung steht).

Alle Zustände bis n haben folglich $N = \sum_{i=1}^n g(i)$ Zustände.

3.2.4 Orbitalsymbole

Alternative Schreibweise der Quantenzahlen. l entspricht einem Buchstaben und m_l einer räumlichen Lage der Knotenebene.



Fermionen: $\frac{1}{2}$ Spinzahlen, Fermi-Dirac Statistik, nur ein Teilchen je Quantenzustand. (Pauli Prinzip)
Bosonen: ganzzahlige Spinzahlen, Bose-Einstein Statistik, identische Teilchen können sich Quantenzustand teilen.

3.2.5 Eigendrehimpuls (Spin)

Eigenschaft analog zu mechanischem Drehimpuls, jedoch Begründung wegen Punktförmigkeit des Elektrons ist quantenmechanisch.
Betrag des Eigendrehimpulses eines Elektrons:

$$s = \sqrt{\frac{3}{4}} \hbar = \sqrt{s(s+1)} \hbar \quad (54)$$

z-Komponente:

$$s_z = m_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar \quad (55)$$

$$m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \quad (56)$$

Der Drehimpuls (Spin) ist eine fundamentale Eigenschaft eines Elementarteilchens, analog zu Masse und Ladung. Der Spin wird durch zwei Quantenzahlen beschrieben, einer Drehimpulsquantenzahl s und einer zugehörigen magnetischen Quantenzahl m_s.

z-Komponente des magnetischen Dipolmoment:

$$m_z = -g_e \frac{e\hbar}{2m_e} m_s = -g_e \mu_B m_s \quad (57)$$

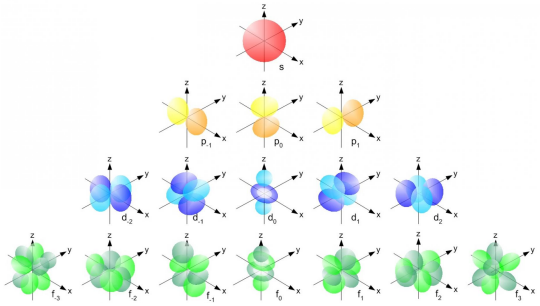
Mit $g_e \approx 2.002$

3.2.6 Periodensystem

Bei Atomen mit mehr als einem Elektron lässt sich die Schrödingergleichung nicht mehr exakt lösen (nur numerisch und näherungsweise). Vielfach: Wellenfunktion des H-Atoms gute Näherung
Pauli-Prinzip (Spin-Statistik-Theorem)

Zwei identische Teilchen mit halbzahligem Spin s können nie in allen Quantenzahlen übereinstimmen. Es können sich immer nur genau zwei Elektronen im selben Zustand (n, l, m_l) befinden und dieselbe Wellenfunktion haben. Die zwei Elektronen haben jedoch eine unterschiedliche magnetische Spinquantenzahl m_s .

3.3 Orbitale bestimmen



Nodes = n - 1 bzw. n = Nodes + 1

Form	Orbital	Quantenzahl
Kreisförmig	s-Orbital	$l = 0$
Halbmondförmig	p-Orbital	$l = 1$
Kleeblattförmig	d-Orbital	$l = 2$

4 Absorption und Emission von Licht

Wenn Elektronen ihre Energieniveau ändern kann Licht abgegeben oder aufgenommen werden. Die Energiedifferenz der Niveaus entspricht genau der Energie des Photons.

Absorption/Emissionsbedingung eines Atoms:

E2 - E1 = E_Photon = hν = hc/λ

ν: Frequenz Photon, λ: Wellenlänge Photon

Rydbergformel für Einelektronenatome:

1/λ = R_H * Z^2 * (1/n^2 - 1/m^2) m > n

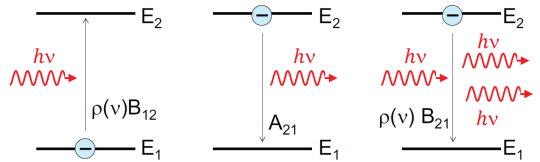
E_{m -> n} = h c R_H Z^2 * (1/n^2 - 1/m^2) m > n

Ionisierungsenergie:

E_{ion} = -h c R_H Z^2 * (1/∞ - 1/n^2)

4.1 Einstein'sche Koeffizienten

- Absorption: Ein Elektron in einem tieferen Energieniveau absorbiert ein Photon und geht in ein höheres Energieniveau.
B12 [m^3 / Js]
- Spontane Emission: Ein Elektron in einem höheren Energieniveau emittiert spontan ein Photon und geht in ein tieferes Energieniveau.
A12 [1/s]
- Stimulierte Emission: Ein Elektron in einem höheren Energieniveau wird durch ein einfallendes Photon dazu stimuliert ein Photon zu emittieren. Das Elektron geht anschliessend in ein tieferes Energieniveau.
B21 [m^3 / Js]



Kinetische Absorptions- und Emissionsraten:

dN1/dt = -ρ(ν)B12N1 + ρ(ν)B21N2 + A21N2

dN2/dt = +ρ(ν)B12N1 - ρ(ν)B21N2 - A21N2

N1: # Atome mit Elektron in E1 (N2 äquivalent)
B21 = B12 und A21: Einsteinsche Koeffizienten (Materialkonst.)
Lösungen der DGLs mit N = N1 + N2, ΔN = N2 - N1 unter vernachlässigung der spontanen Emission:

N1(t) = (N - ΔN(t))/2, N2(t) = N - N1(t)

Energiedichte:

ρ(ν) = (1/2) * ε * |E~(ν)|^2 = (8πhν^3/c^3) * (1/(e^{hν/(kT)} - 1))

E~(ν): Amplitude des elek. Feldes mit Frequenz ν
ρ(ν) ∝ Np

Np: # Photonen mit Energie hν

Maxwell-Bolzmannstatistik:

N2/N1 = e^{-E2-E1/(k_B T)}

Daraus folgt:

N2 = N1 * e^{-hν/(k_B T)}

Lebensdauer des angeregten Zustandes:

τ = 1/A21

4.2 Laser

Bei einem Laser werden die Übergänge künstlich erzwungen indem über ein drittes Niveau Elektronen auf ein höhere Energieniveau "gepumpt" werden. Kinetische Gleichung eines Dreineveaulasers:

dN1/dt = +Γ_B Np (N2 - N1) + Γ_A N2 - Rp N1

dN2/dt = -Γ_B Np (N2 - N1) - Γ_A N2 + Γ32 N3

dN3/dt = Rp N1 - Γ32 N3

Hier sind: Γ_A = A21 und Γ_B = B21
Np = N = Anzahl Photonen
Γ32 passiert sehr schnell und strahlungsfrei
Für einen kontinuierlichen Laser (im Gleichgewicht) gilt:

dN1/dt = dN2/dt = dN3/dt = 0

Da Γ32 sehr schnell ist, gilt N3 ≈ 0.
Durch einsetzen von ΔN = N2 - N1 und subtrahieren der Gleichung (64) von (65) erhält man:
(N + ΔN = N1 + N2 + N2 - N1 = 2N2)

dΔN/dt = -2Γ_B Np ΔN - Γ_A (N + ΔN) + Rp (N - ΔN) = 0

Damit der Laser Funktioniert ist eine Besetzungsinversion erforderlich. Daher muss N2 > N1 bzw. ΔN > 0 gelten. Bedingung für Laseraktivität:

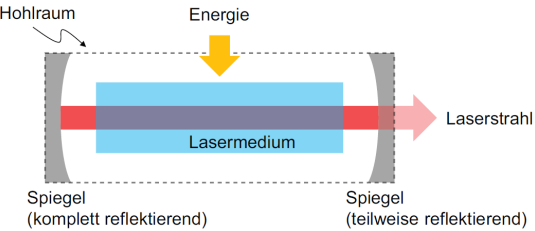
ΔN/N = (Rp - Γ_A) / (2Γ_B Np + Rp + Γ_A) > 0

Folglich muss gelten: Rp > Γ_A

Eigenschaften des Laserlicht:

- kohärent: Alle Photonen haben die gleiche Wellenlänge, Frequenz und Phase
- polarisiert: Alle Photonen haben die selbe Polarisation
- räumlich gerichtet mit gaussförmigem Intensitätsprofil

Aufbau eines Lasers: Beim Laser wird künstlich das obere Energieniveau mit Elektronen aufgefüllt, und danach eine Kettenreaktion von stimulierten Emissionen ausgelöst. Als Resultat erhält man eine grosse Zahl von identischen Photonen innerhalb von sehr kurzer Zeit.



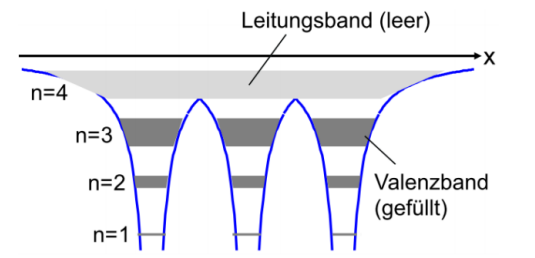
Pumpmechanismus: Energiequelle, liefert Energie die nötig ist, um Elektronen vom Grundzustand auf höheres Niveau zu bringen.
Lasermedium (Gain medium): Medium in welchem die stimulierte Emission stattfindet.
Laserhohlraum (Cavity): Um die stimulierte Emission zu verstärken, wird die elektromagnetische Welle von den Enden des Hohlraums kontinuierlich reflektiert und löst bei jedem Durchgang eine stimulierte Emission aus. Da die elektromagnetische Welle kontinuierlich reflektiert wird, entspricht sie einer stehenden Welle. Die Länge des Laserhohlraums muss deshalb exakt ein Vielfaches der halben Wellenlänge sein.

Table with 2 columns: Name, Pump- und Lasermedium. Rows include Gaslaser, Feststofflaser, Dye-Laser, Faserlaser, Chemische Laser, Halbleiterlaser, Free Electron Laser, and MASER.

5 Festkörperphysik

Bändermodell:

- Die Energieniveaus in einem einzelnen Atom liegen weit auseinander. Wir können deshalb erwarten, dass die Reihenfolge der Energieniveaus in etwa erhalten bleibt.
- In grosser Entfernung sind die Energieniveaus von zwei gleichen Atomen identisch.
- Nähern sich zwei Atome an, so werden sich die entsprechenden Energieniveaus unter dem gegenseitigen Einfluss geringfügig verschieben. Im resultierenden zwei-Atom System erscheinen nun die beiden ursprünglichen Energieniveaus als zwei neue mit leicht unterschiedlicher Energie.
- Nähern sich N Atome an, so spaltet sich ein gegebenes atomares Energieniveau in N leicht unterschiedliche Niveaus auf. Wenn die Anzahl der Atome sehr gross ist, ergibt sich daraus ein kontinuierliche Verteilung von Energieniveaus, Energieband genannt.
- Zu jedem atomaren Energieniveau gibt es ein Energieband. Je höher das ursprüngliche Energieniveau, desto breiter ist in der Regel der Bereich des Energiebandes.



Gebunde und Freie Elektronen

- Energiebänder, welche aus tiefen Energieniveaus gebildet werden, haben nur eine sehr geringe Aufspaltung. Das heisst, Elektronen in diesen Niveaus sind fast vollständig an dem ursprünglichen Atom lokalisiert und spüren fast nichts von den andern Atomen. Diese Elektronen werden als gebundene Elektronen (core electrons) bezeichnet.
- Energiebänder aus hohen Energieniveaus sind breit. Die Elektronen können sich fast frei über den gesamten Festkörper bewegen, da die Kernladung durch die gebundenen Elektronen fast vollständig abgeschirmt wird. Diese Elektronen werden als freie Elektronen oder Valenzelektronen bezeichnet.

5.1 Fermienergie

- Die Fermienergie EF ist die Energie des höchsten besetzten Energieniveaus, relativ zum tiefsten besetzten E1.
- Neu N = Hauptquantenzahl und n = Ladungsträgerdichte.
- Wenn ein Atom M Elektronen hat sind die untersten M/2 Niveaus gefüllt.

Fermienergie des 1D Kasten: n = M/L

EF = (h^2 M^2) / (32 m_e L^2) = (h^2 n_x^2) / (32 m_e)

Fermienergie des 2D Kasten: n = M/L^2

EF = (h^2 / (8 m L^2)) * (2 M / π) = (h^2 n) / (4 π m)

Fermienergie 3D Kasten: n = M/L^3

EF = (h^2 / (8 m_e)) * ((3 M / (π L^3))^2/3) = (h^2 / (8 m_e)) * ((3 n) / π)^2/3

Atomdichte:

N = ρ / m_A

m_A ist die Atommasse, ρ ist die Dichte des Atom

Freie Elektronendichte:

n_e = V E · N

Mit V E als Anzahl Valenzelektronen

5.2 Fermi-Dirac Verteilung

Pauliprinzip: Alle Energieniveaus mit Energie E < EF sind mit Elektronen besetzt und alle mit E > EF leer.

Besetzungswahrscheinlichkeit: (nur für T=0K)

f(E) = { 1 falls E ≤ EF, 0 falls E > EF

Fermi-Dirac-Verteilung: (T > 0K)

f(E) = 1 / (1 + e^{(E-EF)/(k_B T)})

Maxwell-Boltzmann-Verteilung: gilt wenn E - EF ≫ k_B T

f(E) = e^{-(E-EF)/(k_B T)}

Wahrscheinlichkeit für Löcher:

f_L(E) = 1 - f(E)

Fermineiveau:

Die Fermienergie ist diejenige Energie E, bei welcher die Besetzungswahrscheinlichkeit nach Fermi-Dirac f(E) = 0.5 ist.

Fermitemperatur: (Pauliprinzip spielt keine grosse Rolle mehr)

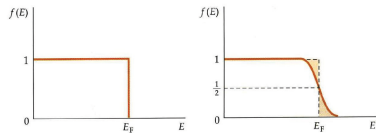
TF = EF / k_B

Fermigeschwindigkeit:

v_F = sqrt(2 EF / m_e)

Ableitung der Fermi-Dirac Verteilung nach der Energie (Abschätzung der Bandbreite):

df_ED/dE |_{E=EF} = -1 / (4 k_B T)



Maxwell-Boltzmann aus Fermi-Dirac Für E - EF >> k_B T gilt:

f(E) = 1 / (1 + e^{(E-EF)/(k_B T)}) ≈ 1 / e^{(E-EF)/(k_B T)} = e^{(EF-E)/(k_B T)}

Anschaulich bedeutet das, dass für sehr kleine Besetzungswahrscheinlichkeiten (weit über dem Fermi Level) das Pauliprinzip unwichtig wird und die Elektronen sich ihre Zustände unabhängig voneinander aussuchen können.

Relative Abweichung Maxwell-Boltzmann / Fermi-Dirac: In welchem Energieintervall (in eV) bei Temperatur T, ist die Abweichung der Maxwell-Boltzmann Verteilung und der Fermi-Dirac Verteilung weniger als 1% der Fermi-Dirac Verteilung?

(1/(k_B T) * (E-EF)) - (1/(k_B T) * (E-EF)) / (1 + e^{(E-EF)/(k_B T)}) < 0.01

Nach etwas umformen kommt man auf:

E - EF > ln(1/0.01) k_B T

5.3 Leiter, Halbleiter und Isolatoren

Bedingungen für elektrisches Leitvermögen:

Es wird ein elektrisches Feld angelegt, welches die Elektronen beschleunigt. Sie nehmen zusätzliche Bewegungsenergie auf, dadurch verändert sich die Besetzungswahrscheinlichkeit (B-W'keit)

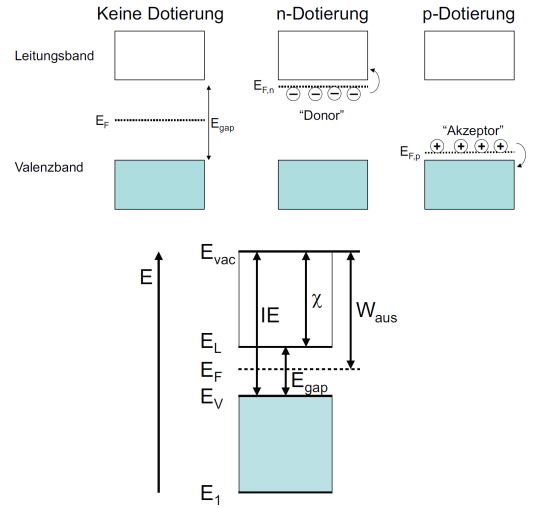
- E_{kin} nimmt in positiver Bewegungsrichtung zu und in negativer ab. Die B-W'keit verschiebt sich nach rechts.
- Es muss ein freier Zustand vorhanden sein, um von Elektronen besetzt werden zu können.

Schlussfolgerungen:

- Nur Elektronen mit Energie $E \approx E_F$ tragen zum Stromfluss bei. Elektronen mit tieferer Energie finden keine freien Energieniveaus vor.
- Falls das Energieband zufälligerweise gerade voll ist (und sich nicht mit einem andern Band überschneidet), gibt es keine freien Zustände und es kann kein Stromfluss stattfinden.

Bandlücke:

- (a) Metall ($E_{Gap} = 0$): Die Fermienergie liegt in einem Band und die Elektronen können deshalb kinetische Energie aufnehmen oder abgeben. Überlappende Bänder.
- (b) Halbleiter ($0eV < E_{Gap} < 4eV$): Das Material besitzt eine Bandlücke und die Fermienergie liegt zwischen zwei Bändern, aber die Energiedifferenz zwischen den beiden Bändern ist klein genug, dass Elektronen thermisch vom Valenz- ins Leitungsband angeregt werden können.
- (c) Isolator ($E_{Gap} > 4eV$): Die Fermienergie liegt zwischen zwei Bändern, und die Energiedifferenz zwischen den beiden Bändern ist so gross, dass keine Elektronen ins Leitungsband angeregt werden und die B-W'keit im Leitungsband Null ist.



Die Ionisierungsenergie IE ist gleich der Energie, welche benötigt wird, um das oberste Elektron eines Atoms/Festkörpers zu entfernen, d.h. ins Vakuum zu überführen.

Die Elektroaffinität χ ist gleich der Energie, welche benötigt wird, um das oberste Elektron eines einfach negativ geladenen Atoms/Festkörpers zu entfernen.

Im Fall eines Metalls (ohne Bandlücke) gilt: $IE = \chi = E_{vac}$, mit Bandlücke: $IE = \chi + E_{Gap}$.

6 Elektrische Leitfähigkeit

6.1 Drude Modell

Spezifische Leitfähigkeit:

$$\sigma = \frac{|\vec{v}_D|en_e}{|\vec{E}|} = \frac{|j|}{|\vec{E}|} = \frac{I \cdot L}{A \cdot U}$$

n_e : Ladungsträgerdichte, \vec{v}_D : Driftgeschwindigkeit
Geschwindigkeit eines Elektrons:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_D = \vec{v}_0 - \frac{e}{m_e} \cdot \vec{E} \cdot \tau$$

Inelastische Zusammenstösse, $\tau = \langle t \rangle$: Mittlere Zeit zwischen zwei Zusammenstöszen unabhängig vom E-Feld, \vec{v}_0 : Geschwindigkeit direkt nach dem Stoss.

Da $|\vec{v}_0| \gg |\vec{v}_D|$, mittlere freie Weglänge:

$$\lambda = \langle |\vec{v}| \rangle \tau \approx \langle |\vec{v}_0| \rangle \tau$$

$$\langle |\vec{v}_0| \rangle = \vec{v}_F \quad n_e \propto g(E_F) = \left. \frac{\partial n}{\partial E} \right|_{E_F}$$

$g(E_F)$: Zustandsdichte

Spezifische Leitfähigkeit nach Drude:

$$\sigma = \frac{e^2 \tau n_e}{m_e} = \frac{e^2 \lambda n_e}{m_e v_F} \propto \frac{e^2 \lambda g(E_F)}{m_e v_F}$$

Wahrscheinlichkeit einer Kollision:

Die W'keit, dass ein Elektron kollidiert ist gegeben durch: $\frac{\Delta t}{\tau}$
Ein Elektron ist zur Zeit $t = 0$ kollidiert. Die W'keit einer Kollision im Intervall Δt ist $\frac{\Delta t}{\tau}$, die W'keit keine Kollision zu erfahren ist: $1 - \frac{\Delta t}{\tau}$. Die W'keit im Intervall $[0, t]$ eine Kollision zu erfahren ist:

$$P(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n\tau} \right)^n = e^{-t/\tau}$$

Wobei $\Delta t = \frac{t}{n}$

Die W'keit einer Kollision im Intervall $[t, t + \Delta t]$ ist gegeben durch:

$$P(t) = e^{-t/\tau} \frac{\Delta t}{\tau}$$

In Worten: W'keit keiner Kollision in $[0, t]$ mal die W'keit einer Kollision in Δt

6.1.1 Streuung von Leistungselektronen

Elektronen sind durch eine gitterperiodische stehende Wellenfunktion im Metallgitter repräsentiert. Da sich Wellen ohne Energieverlust ausbreiten, findet in einem idealen Metallgitter keine Streuung und kein Energieverlust bei 0K statt. Ein ideales Metall sollte deshalb eine unendliche Leitungsfähigkeit aufweisen.

Gründe für Streuung:

- Gitterschwingungen: Ionen verlassen ihren Gitterplatz. Nun ist das Potential zeitabhängig, und ein zeitabhängiges Potential kann zu Energieverlust führen. Die Elektronen können Energie an Gitterschwingungen abgeben oder aufnehmen.
- Störstellen: Gitter weist Fremdatome oder Bruchstellen auf. Diese sind im regelmässigen Gitter nicht berücksichtigt und können Elektronen unter Energieaufnahme oder -abgabe streuen.
- Elektron-Elektron Interaktionen.

Streuung durch Gitterschwingungen:

$$\lambda_{osc} = \frac{V_{ion}}{A_{ion}} = \frac{1}{n_{ion} \cdot A_{ion}} = \frac{m_{ion} \omega_0^2}{n_{ion} \pi k_B T}$$

n_{ion} : Ionendichte, A_{ion} : Streuquerschnitt des Ions, ω_0 : Schwingungsfrequenz, m_{ion} : Masse des Ions, V_{ion} : Volumen, welches pro Ion zur Verfügung steht

$$A_{ion} = \pi x_0^2 = \pi \frac{k_B T}{k_c} = \frac{\pi k_B T}{m_{ion} \omega_0^2} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_c}{m_{ion}}}$$

x_0 : Amplitude, k_c : Federkonstante Gitterschwingung

Streuung durch Störstellen (SS):

$$\lambda_{SS} = \frac{1}{n_{SS} A_{SS}} = \frac{1}{n_{SS} \pi r_{SS}^2}$$

$n_{SS} \ll n_{ion}$: Dichte an Störstellen, r_{SS} : Radius der Störstellen

Zusammengesetzt:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_{osc}} + \frac{1}{\lambda_{SS}}$$

Zusammengesetzt:

$$\sigma = \frac{e^2 n_e}{m_e v_F} \left(\frac{n_{ion} \pi k_B T}{m_{ion} \omega_0^2} + n_{SS} \pi r_{ss}^2 \right)^{-1} \neq f(\vec{E})$$

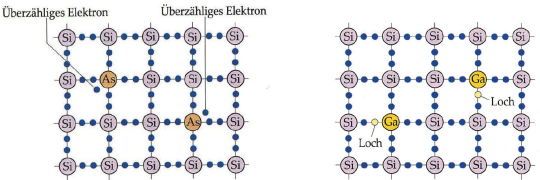
Richtige Voraussagen des Bändermodells zur el. Leifähigkeit:

- σ ist unabhängig vom E-Feld (Ohm'sches Gesetz). σ ist $\propto g(E_F) \propto n_e$ und gibt also wieder, ob ein Material leitend ist oder nicht.
- σ ist bei hohen Temperaturen $\propto 1/T$ (wenn Gitterschwingungen der dominierende Mechanismus sind).
- σ ist für tiefe Temperaturen temperaturunabhängig (wenn Störstellen der dominierende Mechanismus sind).
- σ ist für tiefe Temperaturen abhängig von der Konzentration an Störstellen.

7 Halbleiter

7.1 Dotierung

Halbleiter kann man gezielt Fremdatome einpflanzen. Diesen Vorgang nennt man Dotieren. Dadurch entsteht eine neue Ladungsträgerdichte, welche sich mithilfe von E-Feldern beeinflussen lässt.

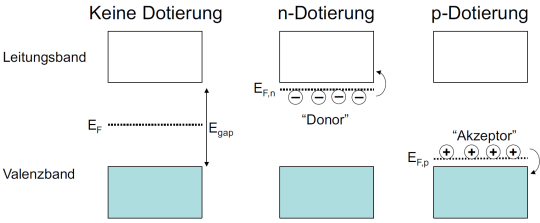


n-Dotierung: negative Dotierung

Einem Halbleiter wird durch begeben eines Donor(ein Atom mit mehr Valenzelektronen als der Halbleiter) eine negative Dotierung zugegeben. Das überschüssige Elektron wird nun zu einem Leitungselektron.

p-Dotierung: positive Dotierung

Einem Halbleiter wird durch einen Akzeptor(ein Atom mit weniger Valenzelektronen als der Halbleiter) eine positive Dotierung zugegeben. Es wird ein Loch hinterlassen welches positiv geladen ist.



Effektiver Bohrradius:

$$a_0^* = \epsilon_r \frac{m_e}{m_e^*} a_0 \quad (80)$$

Effektive Masse:

$$m_e^* = C \cdot m_e \quad (81)$$

Wechselwirkung sobald gilt:

$$N_{Donatoren} \geq \frac{1}{(a_0^*)^3} \quad (82)$$

7.1.1 Kontaktpotential

Austrittsarbeit:

$$W = E_{vac} - E_F \quad (83)$$

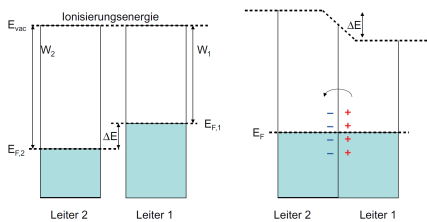
Werden zwei unterschiedlich dotierte Halbleiter zusammengefügt, verschieben sich die freien Ladungen und es entsteht ein Kontaktpotential. (Da es bei einer Messung immer zwei Kontaktpotentiale gibt, kann das Kontaktpotential nicht gemessen werden)

Kontaktpotential:

$$E_{Kontakt} = W_2 - W_1 \quad (84)$$

Kontaktspannung:

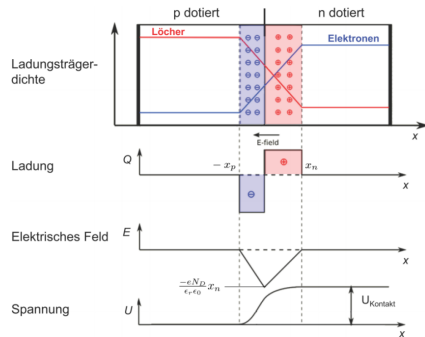
$$U_{Kontakt} = \frac{E_{Kontakt}}{e} = \frac{W_2 - W_1}{e} \quad (85)$$



7.1.2 pn-Halbleiterübergang

Kontaktpotential von zwei unterschiedlich dotierten Halbleitern:

$$E_{\text{Kontakt}} = E_{F,p} - E_{F,n} = e \cdot U_{\text{eingebaut}}$$



Poissongleichung:

$$\frac{\partial E(x)}{\partial x} = \frac{-\partial^2 U(x)}{\partial x^2} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

$$\rho(x) = \begin{cases} -N_A \cdot e & \text{für } x_p \leq x \leq 0 \\ +N_D \cdot e & \text{für } 0 \leq x \leq x_n \end{cases}$$

$$N_A \cdot x_p = N_D \cdot x_n \quad W = x_n + x_p$$

$$U_{\text{Kontakt}} = \frac{e}{2\epsilon_r \epsilon_0} (N_A x_p^2 + N_D x_n^2)$$

Raumladungszone:

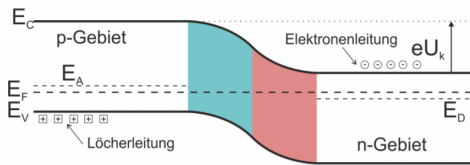
$$W = \sqrt{\frac{2\epsilon_r \epsilon_0}{e} \cdot \frac{N_A + N_D}{N_A \cdot N_D} \cdot U_{\text{Kontakt}}}$$

Durch Verringerung der Dotierkonzentration im schwach dotierten Bereich kann also die Raumladungszone vergrössert werden.

Der pn-Übergang leitet keinen Strom, obwohl sowohl die p-dotierte wie auch die n-dotierte Seite leitend sind!

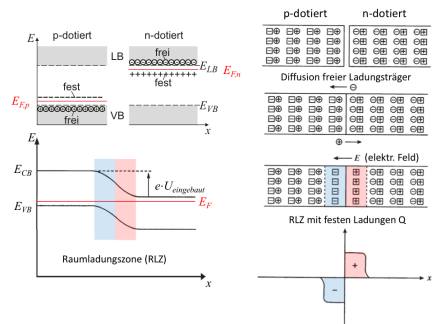
negative Raumladung

positive Raumladung

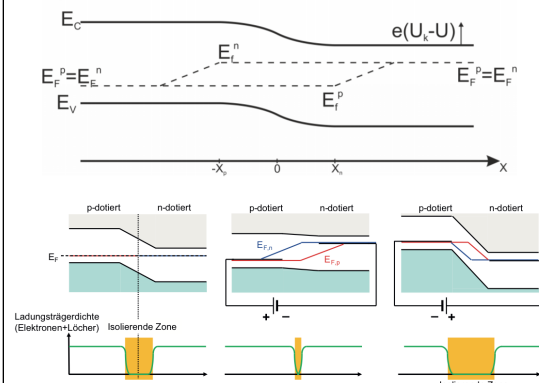


Mit: E_C : Leitungsband, E_V : Valenzband, E_F : Fermi-Niveau, E_A : Akzeptorniveau, E_D : Donatorniveau, U_K : Kontaktspannung oder auch Diffusionspannung

pn-Halbleiterübergang mit angelegter Spannung:



Mit: E_F^p und E_F^n : QuasiFermi-niveaus, U : angelegte Spannung.



Rechts: Ohne Spannung, Mitte: Vorwärtsspannung, Links: Rückwärtsspannung

7.2 Diode

Die Leitfähigkeit des pn-Übergangs kann durch eine Spannung verändert werden.

(a) **Vorwärtsspannung (forward bias):**

Wird an die p-Seite eine positive Spannung angelegt, so verringert sich das Kontaktpotential. Die ladungsarme Zone wird dünner und es beginnt Strom zu fliessen.

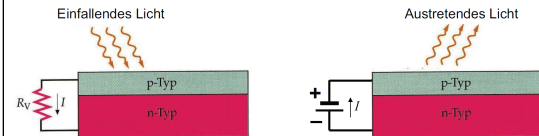
(b) **Rückwärtsspannung (reverse bias):**

Wird an der p-Seite eine negative Spannung angelegt, so erhöht sich das Kontaktpotential. Die ladungsarme Zone wird breiter und der Halbleiter wird zum Isolator. Falls das E-Feld zu gross wird, kommt es zu einem Durchschlag und der Strom beginnt wieder zu fliessen. Der Durchschlag ist reversibel, solange der Strom die Diode nicht überhitzt.

7.3 Solarzelle, Photodiode und Leuchtdiode

Solarzelle:

Es wird ein Elektron auf der p-Seite vom Valenzband ins Leitungsband angeregt, indem es ein Photon absorbiert. Dazu muss die Energie des Photons mindestens so gross wie die Bandlücke sein, $h\nu > E_{Gap}$. Falls das Elektron in die Nähe des pn-Übergangs kommt, wird es durch die Potentialdifferenz auf die n-Seite beschleunigt. Dabei baut sich eine Spannung über dem Halbleiterübergang auf, die zur elektrischen Stromerzeugung benutzt werden kann.



Photodiode:

In der Photodiode wird zusätzlich eine Rückwärtsspannung angelegt. Dies führt zu einer viel schnelleren Reaktion auf ein absorbiertes Photon, da die Potentialdifferenz nun viel grösser ist. Da der resultierende Strom proportional zur Anzahl eintretender Photonen ist, kann man die Lichtintensität direkt messen.

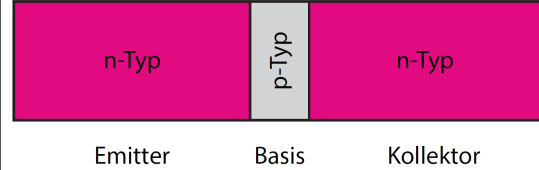
Leuchtdiode (LED): Ein LED (light emitting diode) ist das Umgekehrte einer Photodiode. Es wird eine Vorwärtsspannung angelegt, sodass eine grosse Zahl von Elektronen auf der p-Seite und Löcher auf der n-Seite entstehen. Die Elektronen und Löcher rekombinieren nun paarweise an der Kontaktstelle unter Aussendung eines Photons.

7.4 Transistor

Ein Transistor besteht aus zwei Halbleiterübergängen npn- oder pnp-Konfiguration. Dies wird benutzt um elektrische Ströme zu verstärken oder zu schalten.

7.4.1 Bipolartransistor (Verstärkung)

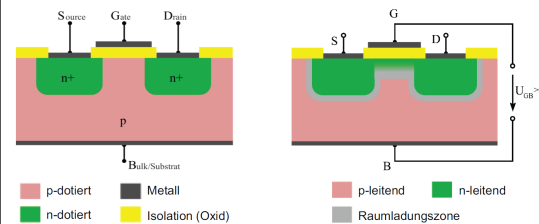
Besteht aus einem npn/pnp Halbleiterübergang mit drei Kontakten: Emitter, Basis und Kollektor. Legt man eine Spannung zwischen Emitter und Kollektor an, so fliessen erst mal kein Strom, da je nach Vorzeichen der Spannung beim np- oder pn-Übergang der Stromfluss blockiert wird. Legt man nun zusätzlich eine Spannung an der Basis an, so wandern Ladungsträger in den p-Bereich und die Blockade wird aufgelöst. Es beginnt ein Strom zwischen Emitter und Kollektor zu fliessen. Zusätzlich fliessen auch ein Strom durch die Basis, der wegen der kleineren Kontaktstelle viel kleiner ist. Daher kann der Transistor dazu benutzt werden, einen kleinen Kontrollstrom drastisch zu verstärken.



7.4.2 Feldeffekttransistor (FET) (Schaltung)

Implementationsmöglichkeiten eines Feldeffekttransistor:

1. Als Gate-gesteuerter npn/pnp Übergang
2. Als Gate-gesteuerter Übergang zwischen nin und pip, wobei das i (intrinsic/insulating) für undotierte Halbleiter steht.
3. Als undotierter Halbleiter, in welchem Ladungsträger durch ein externes Feld akkumuliert werden



Links: N-Kanal FET im ungestörten Zustand.

Rechts: Durch Anlegen einer Spannung zwischen Gate und Bulk akkumulieren sich Ladungsträger an der Grenzschicht zum Gate. Dadurch bildet sich ein elektrostatistisch dotierter n-Kanal zwischen Source und Drain aus. Oft wird Bulk und Source zusammengeschlossen und geerdet, sodass sich die Zahl der Anschlüsse auf drei reduziert. Es fliesst kein Strom durch das Gate (stromlose Schaltung). Dadurch kann man in integrierten Schaltungen Verluste reduzieren und hohe Dichte an Transistoren auf kleinstem Raum realisieren (Computerchips).

8 Supraleiter

Grundlegende Beobachtungen zur Supraleitung:

- Der Übergang zur Supraleitung ist ein *Phasenübergang*
- Im supraleitenden Zustand ist der elektrische Widerstand exakt Null
- Im supraleitenden Zustand ist das Magnetfeld innerhalb des Supraleiters entweder exakt Null (Meissnereffekt) oder auf sogenannte "Flussschläuche" (Vortex) beschränkt.

8.1 Erklärung der Supraleiter (BCS Theorie):

Supraleitung tritt auf, wenn sich die Elektronen anziehen können und somit paarweise auftreten. Das erste Elektron übt eine anziehende Kraft auf ein Gitteratom aus, wodurch sich dieses etwas verschiebt. Dadurch entsteht eine positive Ladung, welche das zweite Elektron zieht. Das Resultat ist ein gebundener Zustand zwischen zwei Elektronen, welcher Cooper-Paar genannt wird. Da die beiden Elektronen in einem Cooper-Paar entgegengesetzten Spin haben, ist der Gesamtspin gleich Null. Damit entfällt das Pauliprinzip (sind Bosonen) und alle Cooper-Paare können dasselbe Energieniveau besetzen. Um ein Cooper-Paar aufzubrechen, muss die Bindungsenergie aufgebracht werden. Die kritische Temperatur T_C und die Energielücke E_{Gap} hängen zusammen durch:

$$E_{Gap} = \frac{7}{2} k_B T_C \quad (86)$$

Eine Möglichkeit, den supraleitenden Zustand zu unterdrücken, sind Magnetfelder welche eine kritische Feldstärke B_C überschreiten (Cooper-Paare werden aufgebrochen) oder eine kritische Stromstärke I_C , welche ein kritisches Magnetfeld generiert.

8.2 Supraleiter 1. und 2. Art

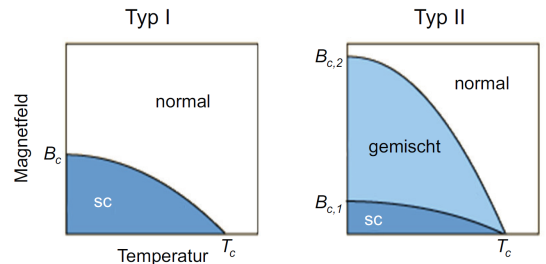
Alle Supraleiter leiten Strom verlustfrei, jedoch kann die Fähigkeit Magnetfelder auszuschliessen unterschieden werden.

Supraleiter 1.Art (Typ I):

Das Magnetfeld wird bis zur kritischen Feldstärke $B_{C,1}$ komplett aus dem Material verdrängt. Oberhalb von $B_{C,1}$ geht das Material in den normalleitenden Zustand über. Die meisten supraleitenden chemischen Elemente sind vom Typ I.

Supraleiter 2.Art (Typ II)

Bis zur ersten kritischen Feldstärke $B_{C,1}$ wie Typ I. Oberhalb bilden sich "Flussschläuche" (Vortices) aus, in denen Feldlinien durch den Supraleiter hindurchlaufen können. Der magnetische Fluss durch einen Flussschlauch ist immer genau das Flussquantum $\Phi_0 = h/(2e)$. Innerhalb der Flussschläuche ist das Material im normalleitenden Zustand, ausserhalb supraleitend. Mit steigendem Magnetfeld nimmt die Anzahl Flussschläuche zu, bis oberhalb einer zweiten kritischen Feldstärke $B_{C,2}$ das Material komplett in den normalleitenden Zustand übergeht. Die meisten supraleitenden chem. Verbindungen sind Typ II. Die Sprungtemperaturen von Typ II sind im Allgemeinen wesentlich höher wie die von Typ I.



8.2.1 Hochtemperatursupraleiter

Während die BCS-Theorie "normale" Supraleitung erklären kann, ist eine zufriedenstellende Theorie für Hochtemperatursupraleiter weiterhin ausstehend. Laut der BCS-Theorie ist die maximale Sprungtemperatur bei etwa 30K, der gültige Rekord (1993) liegt heute jedoch bei 130K.

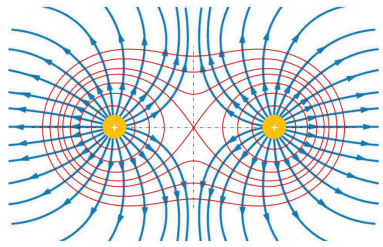
Sonstiges und Trigonometrische Identitäten

Jorit Geurts jgeurts@student.ethz.ch
Version: 16. August 2021

9 Sonstiges Physik I

9.1 Skizzen

E-Feld:



Feldlinien können sich **nie** kreuzen.
Äquipotentiallinien können sich bei einem Sattelpunkt treffen.
Induktionen:

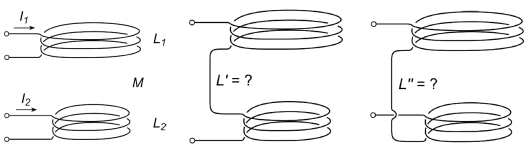


Abbildung 4: Getrennte Spulen. Abbildung 5: Spulen in Serie. Abbildung 6: Spulen in Serie.

Abbildung 4: $M > 0, L > 0$

$$U_{ind,1} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$$
$$U_{ind,2} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}$$

Abbildung 5: $U_{tot} = U_1 + U_2, I_{tot} = I_1 = I_2$

$$U_{ind,tot} = -L_1 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt} - L_2 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt}$$

$$U = L' \frac{dI}{dt}, \quad \text{mit } L' = L_1 + L_2 + 2M$$

Abbildung 6: $U_{tot} = U_1 - U_2, I_{tot} = I_1 = -I_2$

$$U_{ind,tot} = -L_1 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt} + L_2 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}$$

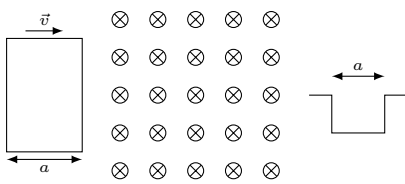
$$U = L'' \frac{dI}{dt}, \quad \text{mit } L' = L_1 + L_2 - 2M$$

Allgemein:

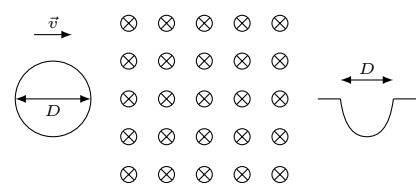
$$M \leq \frac{L_1 + L_2}{2}$$

9.2 Induktionsspannungsverläufe

9.2.1 Rechteck:



9.2.2 Kreis:



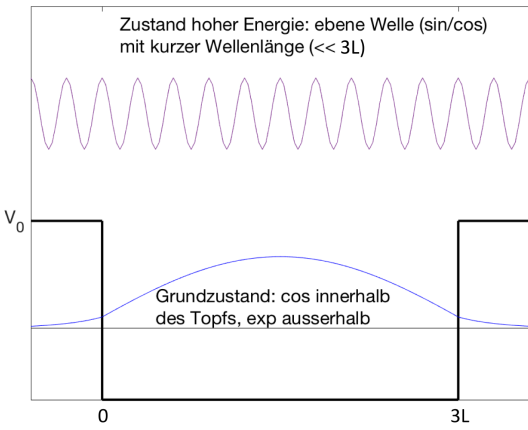
9.2.3 Dreieck:



10 Sonstiges Physik II

10.1 Skizzen

Wellenfunktion für endliche Potentiale



10.2 Nützliche Formeln

Reduzierte Masse:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (87)$$

Empfangene Intensität:

$$I_{Empfangen} = \frac{P}{\Omega_1 d^2} \quad (88)$$

Empfangene Leistung:

$$P_{Empfangen} = I_{Empfangen} A = \frac{P}{\Omega_1 d^2} \quad (89)$$

Reflektierte Intensität:

$$I_{Reflektiert} = \frac{P_{Empfangen}}{\Omega_2 d^2} \quad (90)$$

Reflektierte Leistung:

$$P_{Reflektiert} = I_{Reflektiert} A_{Sender} \quad (91)$$

Prozentuale Verunreinigung:

$$p = \frac{\text{Anzahl Störatome}}{\text{Anzahl Aller Atome} - \text{Anzahl Störatome}} \quad (92)$$

Anzahl der Fälle im Nicht gemessenen Bereich:

$$N_{aussen} = \frac{N_{innen}}{p_{innen}} (1 - p_{innen}) \quad (93)$$

11 Sonstiges

11.1 Mathematik

Kreuzprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (94)$$

11.1.1 Eulersche Zahl

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \lim_{n \in \mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

11.1.2 Differentialoperatoren

$$\text{grad}(f) = \nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$
$$\text{div}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right)$$
$$\text{rot}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Zusammensetzung von Operatoren

$$\text{div}(\text{grad}(f)) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f \rightarrow \text{Laplace Operator}$$
$$\text{rot}(\text{grad}(f)) = (0, 0, 0)$$
$$\text{div}(\text{rot}(\vec{v})) = 0$$

11.1.3 Geometrische Körper

Kugel: $V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\pi}{6} D^3$ $A = 4 \pi r^2 = \pi D^2$
 $S = \Omega r^2$ $\Omega = \text{Raumwinkel}$

Kegel: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ $A_M = \pi r s$
 $A_O = \pi r(r + s)$

Pyramide: $V = \frac{1}{3} A_G h$ $A_O = A_G + A_M$

11.1.4 Flächenelemente

Zylinderkoordinaten

$$dx = \cos(\varphi) dr - r \sin(\varphi) d\varphi \quad dy = \sin(\varphi) dr + r \cos(\varphi) d\varphi$$
$$dA = r dr d\varphi \quad dV = r dr d\varphi dz$$

Kugelkoordinaten

$$dA = r^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta, \quad dV = r^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta dr$$

11.2 Dynamics

Impuls:

$$P = mv \quad (95)$$

Zentrifugalkraft

$$F_Z = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r$$

Federkraft:

$$F_{Feder} = \Delta x \cdot k \quad (96)$$

Feder Energie:

$$E_{pot, Feder} = \frac{1}{2} k \Delta x^2 \quad (97)$$

Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$L = mrv = mr^2 \omega$$

Rotationsenergie Körper der um x-Achse rotiert hat folgende Energie:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J_x \omega^2$$

Mit J_x Trägheitsmoment des Körpers um x-Achse

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega}$$

11.3 Trigonometrische Identitäten

Degrees	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \quad \tan^2(\theta) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$$

$$1 + \cot^2(\theta) = \frac{1}{\sin^2(\theta)}$$
$$\cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\tan(\theta)} \quad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$
$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \quad \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$
$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta) \quad \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$
$$\tan(\theta) = -\tan(\theta)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$$
$$\sin(\pi - \theta) = +\sin(\theta) \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$$
$$\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta) \quad \sin(2\pi - \theta) = -\sin(\theta)$$
$$\cos(2\pi - \theta) = +\cos(\theta) \quad \tan(2\pi - \theta) = -\tan(\theta)$$
$$\sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos(\theta) \quad \cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin(\theta)$$
$$\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta) \quad \cos(\theta - \pi) = -\cos(\theta)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)}$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = \frac{2 \tan(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$$

$$\sin(3\theta) = 3 \sin(\theta) - 4 \sin^3(\theta)$$

$$\cos(3\theta) = 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta)$$

$$\tan(3\theta) = \frac{3 \tan(\theta) - \tan^3(\theta)}{1 - 3 \tan^2(\theta)}$$

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\theta)}{2}$$

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\theta)}{2}$$

$$\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)}$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\tan(x) \pm \tan(y) = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x) \cos(y)}$$

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y))$$
$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y))$$
$$\sin(\theta) \cos(\theta) = \frac{1}{2 \sin(2\theta)}$$

Einheiten, Konstanten und Elektronenkonfiguration

Jorit Geurts, jgeurts@student.ethz.ch

13 Einheiten

Symbol	Grösse	Einheiten
F	Newton	$[F] = \frac{kgm}{s^2}$
W	Energie	$[W] = J = Nm = \frac{kgm^2}{s^2} = CV$
E_{el}	elektrische Energie	$[E_{el}] = J = Nm = CV = Ws = \frac{kgm^2}{s}$
\vec{E}	Elektrisches Feld	$[\vec{E}] = \frac{V}{m} = \frac{N}{C}$
Q	Ladung	$[Q] = C = Coulomb = As$
\vec{p}	elektrisches Dipolmoment	$[\vec{p}] = Cm = Debye$
Φ_E	Elektrischer Fluss	$[\Phi_E] = \frac{Nm^2}{C}$
ρ_{El}	Volumenladungsdichte	$[\rho_{El}] = \frac{C}{m^3}$
σ_{El}	Flächenladungsdichte	$[\sigma_{El}] = \frac{C}{m^2}$
λ_{El}	Längenladungsdichte	$[\lambda_{El}] = \frac{C}{m}$
Φ	elektrisches Potential	$[\Phi] = V = \frac{W}{A} = \frac{J}{C} = \frac{Nm}{As} = \frac{kgm^2}{As^3}$
U	Spannung	$[U] = V = \frac{W}{A} = \frac{J}{C} = \frac{Nm}{As} = \frac{kgm^2}{As^3}$
C	Kapazität	$[C] = F = Farad = \frac{C}{V} = \frac{As}{V} = \frac{A^2s^4}{kgm^2}$
w_{el}	Energiedichte	$[w_{el}] = \frac{J}{m^3}$
ϵ_r	Dielektrizitätszahl	$[\epsilon_r] = -$
χ_E	elektrische Suszeptibilität	$[\chi_E] = -$
I_{El}	Elektrischer Strom	$[I] = A = \frac{C}{s} = \frac{W}{V} = \frac{V}{\Omega}$
\vec{j}	Stromdichte	$[\vec{j}] = \frac{A}{m^2}$
σ_L	spezifische Leitfähigkeit	$[\sigma_L] = \frac{1}{\Omega m}$
ρ_L	spezifischer Widerstand	$[\rho_L] = \Omega m$
R	elektrischer Widerstand	$[R] = \Omega = Ohm = \frac{V}{A} = \frac{kgm^2}{A^2s^3}$
G	elektrischer Leitwert	$[G] = \frac{1}{\Omega} = S = Siemens$
P_{el}	elektrische Leistung	$[P_{el}] = W = Watt = VA = \frac{J}{s}$
\vec{B}	magnetisches Feld, magnetische Induktion	$[\vec{B}] = T = Tesla = \frac{Wb}{m^2} = \frac{Vs}{m^2} = \frac{N}{Am} = \frac{kg}{As^2}$
\vec{m}	magnetisches Dipolmoment	$[\vec{m}] = Am^2$
Φ_M	Magnetischer Fluss	$[\Phi_M] = Wb = Weber = Tm^2 = Vs = \frac{kgm^2}{As^2}$
μ_r	relative magnetisches Feldkonstante	$[\mu_r] = -$
χ_M	magnetische Suszeptibilität	$[\chi_M] = -$
\vec{H}	magnetische Erregung	$[\vec{H}] = \frac{A}{m}$
\vec{M}	Magnetisierung	$[\vec{H}] = \frac{A}{m}$
L	Induktivität	$[L] = H = Henry = \frac{Tm^2}{A} = \frac{Vs}{A} = \frac{Wb}{A} = \Omega s = \frac{kgm^2}{A^2s^2}$
ω	Kreisfrequenz	$[\omega] = \frac{rad}{s}$
f	Frequenz	$[f] = \frac{1}{s} = 1Hz$
λ	Wellenlänge	$[\lambda] = m$
k	Wellenvektor	$[k] = \frac{1}{m}$
T	Periodendauer	$[T] = s$
I	Intensität einer eindimensionalen Welle	$[I] = W$
I	Intensität einer dreidimensionalen Welle	$[I] = \frac{W}{m^2}$
Z	Wellenimpedanz Elektromagnetische Welle	$[Z] = \Omega = \frac{kgm^2}{A^2s^3}$
Z	Wellenimpedanz akustische Welle	$[Z] = \frac{kg}{m^2s}$
ρ	Dichte	$[\rho] = \frac{kg}{m^3}$
M	Molare Masse	$[M] = \frac{kg}{kmol} = \frac{g}{mol}$
n	Brechungsindex	$[n] = -$
ν	Lichtfrequenz	$[\nu] = \frac{1}{s}$
p	Impuls	$[p] = Ns = \frac{kgm}{s}$

14 Konstanten

Symbol	Grösse	Wert
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante	$8.854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} = \frac{As}{Vm} = \frac{C}{Vm} = \frac{F}{m} = \frac{A^2s^4}{kgm^3} = \frac{C^2}{Nm^2}$
e	Elementarladung	$1.602 \cdot 10^{-19} C = eV$
μ_0	Magnetische Feldkonstante	$4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$
c	Lichtgeschwindigkeit	$c = 2.998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$
R	Ideale Gaskonstante	$8.314 \frac{J}{molK} = 8314 \frac{J}{kmolK}$
Z_0	Wellenimpedanz im Vakuum	376.73Ω
h	Planck'sche Konstante	$6.626 \cdot 10^{-34} Js = 4.316 \cdot 10^{-15} eVs$
\hbar	Planck'sches Wirkungsquantum	$\frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} Js = 6.582 \cdot 10^{-16} eVs$
$\lambda_{Compton}$	Compton Wellenlänge Elektron	$2.426 \cdot 10^{-12} m$
a_0	Bohrradius	$\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2m_e} = 5.29 \cdot 10^{-11} m$
$-E_R$	Energie des Grundzustand des Wasserstoffatom	$-\frac{m_e e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} = -13.6eV = -2.17896 \cdot 10^{-18} J$
R_H	Rydberkonstante	$\frac{m_e e^4}{8c\epsilon_0^2\hbar^3} = 1.10 \cdot 10^7 \frac{1}{m}$
k_B	Boltzmannkonstante	$1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} = 8.617 \cdot 10^{-5} \frac{eV}{K}$
eV	Elektronen Volt	$1eV = 1.602 \cdot 10^{-19}$
N_A	Avogadro Konstante	$6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$
m_e	Elektronenmasse	$9.11 \cdot 10^{-31} kg$
u	Atomare Masse	$1.661 \cdot 10^{-27} kg$
m_h	Wasserstoffmasse	$1u = 1.661 \cdot 10^{-27} kg$
m_p	Protonmasse	$1.673 \cdot 10^{-27} kg$
G	Gravitationskonstante	$6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$

14.1 Grössen Umrechnen

Wert	Einheit 1		Wert	Einheit 2
X	eV	=	$X \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}$	J
X	J	=	$X \cdot 6.242 \cdot 10^{18}$	eV
X	$\frac{km}{h}$	=	$\frac{1}{3.6} = 0.27778$	$\frac{m}{s}$
X	$\frac{m}{s}$	=	3.6	$\frac{km}{h}$
X	Å	=	10^{-10}	m
X	m	=	10^{10}	Å
X	cm	=	$0.01 = 10^{-2}$	m
X	mm	=	$0.001 = 10^{-3}$	m
X	cm ²	=	$0.0001 = 10^{-4}$	m ²
X	mm ²	=	10^{-6}	m ²
X	cm ³	=	10^{-6}	m ³
X	mm ³	=	10^{-9}	m ³
X	$\frac{1}{cm}$	=	$100 = 10^2$	$\frac{1}{m}$
X	$\frac{1}{mm}$	=	$1000 = 10^3$	$\frac{1}{m}$
X	$\frac{1}{cm^2}$	=	10^4	$\frac{1}{m^2}$
X	$\frac{1}{mm^2}$	=	10^6	$\frac{1}{m^2}$
X	$\frac{1}{cm^3}$	=	10^6	$\frac{1}{m^3}$
X	$\frac{1}{mm^3}$	=	10^9	$\frac{1}{m^3}$

14.2 SI-Präfixe

P	Peta-	10 ¹⁵	d	Dezi-	10 ⁻¹
T	Tera-	10 ¹²	c	Zenti-	10 ⁻²
G	Giga-	10 ⁹	m	Milli-	10 ⁻³
M	Mega-	10 ⁶	μ	Mikro-	10 ⁻⁶
k	Kilo-	10 ³	n	Nano-	10 ⁻⁹
h	Hekto-	10 ²	p	Pico-	10 ⁻¹²