

Regelungstechnik II FS 2020

Spezifikation der Sensitivität

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Zusammenfassung Vorlesung 2

Buch Kapitel 10.4.3

Bei Fragen: hrffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 28. Februar 2020

1 Multiplikative Unsicherheit der komplementären Sensitivität

Zur Erinnerung. Die Modellunsicherheit $W_2(s)$ wurde für die komplementäre Sensitivität multiplikativ eingeführt:

$$|T(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < 1 \Rightarrow |L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad (1)$$

Das robuste Nyquist Theorem aus Gl. (1) kann in der Nyquist Ebene interpretiert werden:

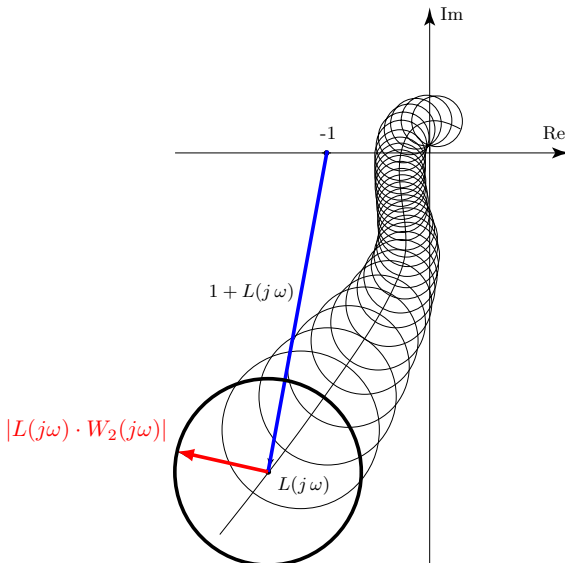


Abb. 1: Robustes Stabilitätskriterium nach Nyquist.

Der rot eingezeichnete Unsicherheitsradius ($|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)|$) darf nicht länger als das blaue Verbindungsstück ($|1 + L(j\omega)|$) sein, um zusätzliche Umkreisungen des Punktes $(-1, 0)$ zu vermeiden.

2 Multiplikative Spezifikation an Sensitivität

Die Sensitivität $S(s)$ ist bei jedem Regelsystem sehr wichtig. Eine betragsmässig kleine Sensitivität garantiert eine gute Störungsunterdrückung und gutes reference tracking. Eine sinnvolle Spezifikation ist demnach den Betrag der Sensitivität $|S(j\omega)|$ frequenzabhängig zu limitieren. Die Phase spielt dabei praktisch keine Rolle.

Nominelle Regelgüte

Um die Sensitivität betragsmässig zu begrenzen wird mit einer rationalen Übertragungsfunktion $W_1(s)$ gefordert:

$$\|S(s) \cdot W_1(s)\|_\infty < 1 \Rightarrow |S(j\omega)| < |W_1^{-1}(j\omega)| \quad (2)$$

Gl. (2) kann umgeschrieben werden:

$$|W_1(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad (3)$$

Die geometrische Interpretation von Gl. (3) ist, dass $L(j\omega)$ nicht in einen in -1 zentrierten Kreis mit Radius $|W_1(j\omega)|$ eintreten darf, siehe Abb. 2.

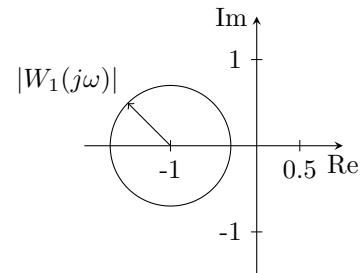


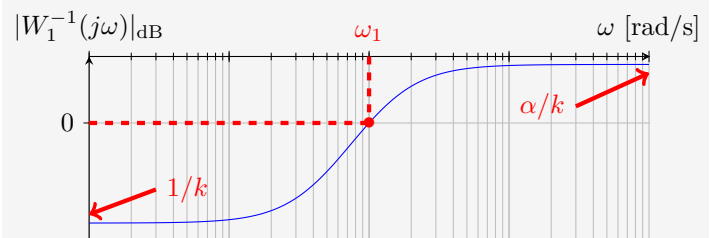
Abb. 2: Darstellung der nicht zulässigen Region aus Gl. (3).

Konstruktion von W_1 :

Ein Beispiel einer sinnvollen Sensitivitätsspezifikation $W_1(s)$ hat folgende Form:

$$W_1(s) = k \cdot \frac{\tau \cdot s + 1}{\alpha \cdot \tau \cdot s + 1}, \quad k > 1, \quad \alpha > k$$

$$\tau^2 = \frac{k^2 - 1}{\omega_1^2 \cdot (\alpha^2 - k^2)}, \quad |W_1(j\omega_1)| = 1$$

Abb. 3: $|W_1^{-1}|_{dB}$ in blau. Einstellbare Größen in rot.

Robuste Regelgüte

Nun soll gleichzeitig das robuste Nyquist Theorem und die nominelle Spezifikation der Sensitivität erfüllt sein. In anderen Worten sollen Gl. (1) und Gl. (2) gleichzeitig gelten.

$$|W_1(j\omega) \cdot S(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot T(j\omega)| < 1$$

$$\Rightarrow |W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad (4)$$

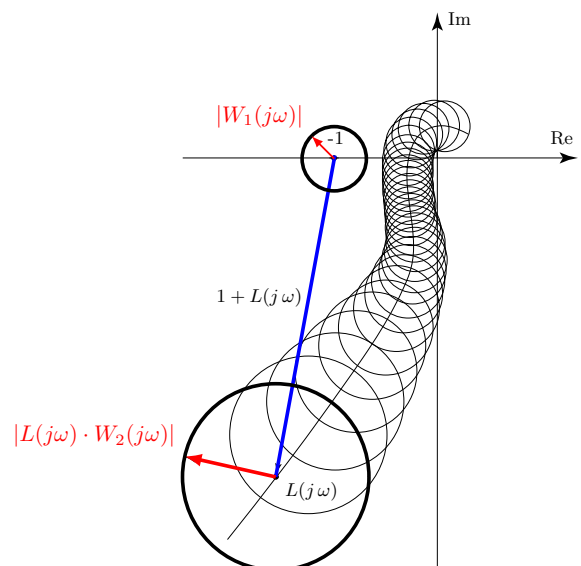


Abb. 4: Robuste Regelgüte.

Um Spezifikationen der Sensitivität und Modellunsicherheiten in jedem Fall zu berücksichtigen darf die summierte Länge der beiden roten Pfeile nie länger als die blaue Verbindung werden. In anderen Worten dürfen sich die beiden Kreise für alle Frequenzen nicht schneiden.

Approximative Spezifikationen

Um einen Regler zu finden, der Gl. (4) erfüllt ist es einfacher, wenn Gl. (4) auf $L(j\omega)$ umformuliert wird. Dies ist einfach für sehr hohe Frequenzen und sehr tiefe Frequenzen.

Tiefe Frequenzen: $\omega < 0.1 \cdot \omega_c \Rightarrow |L(j\omega)| \gg 1$

Gl. (4) wird approximativ:

$$\begin{aligned} |W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| &< |L(j\omega)| \\ \Rightarrow |L(j\omega)| &> \frac{|W_1(j\omega)|}{1 - |W_2(j\omega)|} \end{aligned}$$

Eine Lösung kann nur existieren falls $|W_2(j\omega)| < 1$.

Hohe Frequenzen: $\omega > 10 \cdot \omega_c \Rightarrow |L(j\omega)| \ll 1$

Gl. (4) wird approximativ:

$$\begin{aligned} |W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| &< 1 \\ \Rightarrow |L(j\omega)| &< \frac{1 - |W_1(j\omega)|}{|W_2(j\omega)|} \end{aligned}$$

Diese Approximationen berücksichtigen das Frequenzbandes $[0.1 \cdot \omega_c, 10 \cdot \omega_c]$ nicht. In diesem Band ist es vorallem wichtig Stabilität und Robustheit zu garantieren.

Kompatibilitätsbedingung

Zur Erinnerung. Die Durchtrittsfrequenz ω_c des open-loop gains $L(j\omega)$ soll folgende Bedingungen erfüllen.

$$\max \left\{ 10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \omega_{\pi+} \right\} < \omega_c < \min \left\{ \frac{\omega_n}{10}, \frac{\omega_2}{10}, \frac{\omega_\tau}{2}, \frac{\omega_{\zeta+}}{2} \right\}$$

↑ konservativer mit 5
 ↑ konservativer mit $\frac{1}{5}$

Dabei ist ω_d die Frequenz der Störung, $\omega_{\pi+}$ der schnellste instabile Pol von $L(s)$, ω_n die Frequenz des Rauschens, ω_2 die Frequenz bei der $W_2(j\omega_2) = 1$, ω_τ die Frequenz der Totzeit und $\omega_{\zeta+}$ die Frequenz der langsamsten nicht-minimalphasigen Nullstelle.

Die Frequenz ω_1 , bei der $|W_1(j\omega_1)| = 1$ gilt, muss kleiner als ω_2 sein, sodass ω_c genügend Marge hat. Jedoch muss ω_1 auch grösser sein als die untere Schranke für ω_c . Als Faustregel wählt man als erste Schätzung:

$$\omega_1 \approx \max\{10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \omega_{\pi+}\} \quad (5)$$

Zusätzlich muss ω_1 grösser gewählt werden, je grösser die gewünschte Phasenreserve φ ist. Dies kann mit der Magnitude der Sensitivität bei ω_c interpretiert werden:

$$\begin{aligned} |S(j\omega_c)| &= \frac{1}{|1 + L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1 + 1 \cdot e^{-j(\pi-\varphi)}|} \\ &= \frac{1}{|1 - e^{j\varphi}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos(\varphi)}} \end{aligned}$$

In der Regel nimmt $|S(j\omega)|$ mit ansteigender Frequenz zu und schneidet die 0 dB Linie einmalig, siehe Abb. 6.

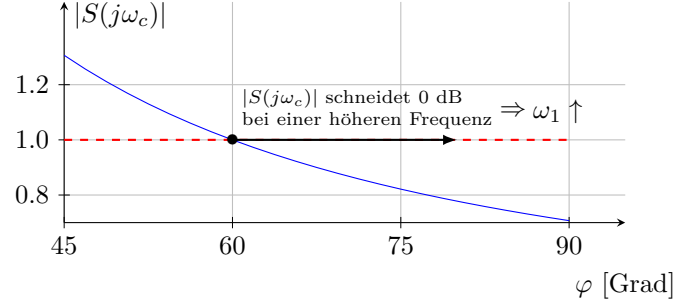


Abb. 5: $|S(j\omega_c)|$ in blau, $|S(j\omega_c)| = 1$ in rot.

Abb. 5 zeigt die Magnitude der Sensitivität als Funktion der Phasenreserve. Die Magnitude wird kleiner, je grösser die gewünschte Phasenreserve ist. Das heisst, die Sensitivität muss die 0 dB Linie bei einer höheren Frequenz schneiden, je grösser die Phasenreserve sein soll. Dies hat zur Folge, dass ω_1 höher spezifiziert werden muss.

Die Schlussfolgerung, dass ω_1 grösser sein muss, je grösser die Phasenreserve ist, kann auch umgedreht werden. $|W_1(j\omega)|$ wird bis zu ω_1 grösser als 1 sein (siehe Abb. 3). Je grösser $|W_1(j\omega)|$ ist, desto grösser muss die Phasenreserve sein (siehe Abb. 4), da $L(j\omega)$ nicht in den Kreis mit Radius $|W_1(j\omega)|$ eintreten darf.

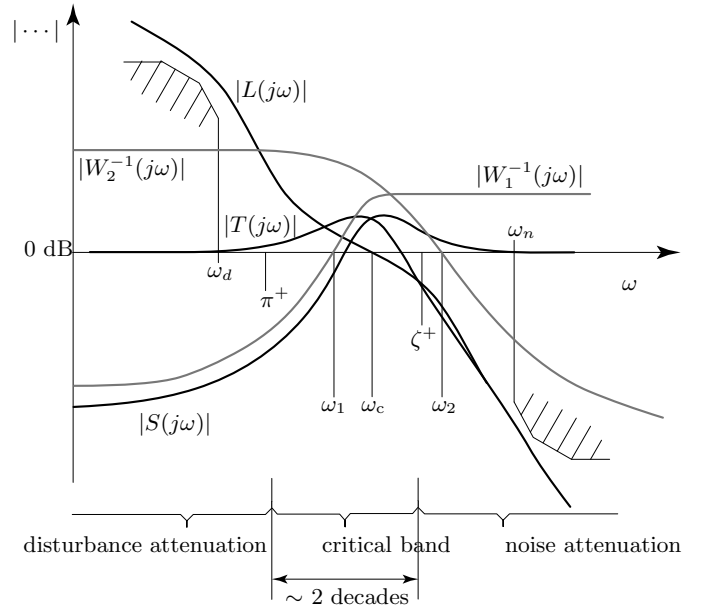


Abb. 6: Zusammenfassendes Bild aller Bedingungen und Spezifikationen.