

## Regelungstechnik II FS 2021

## PID Tuning, Prädiktive Regelung

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

## Zusammenfassung Vorlesung 1

## Buch Kapitel 11

Bei Fragen: hrffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 25. Februar 2021

## 1 PID - Recap

Im Zeitbereich besteht die Reglerstruktur aus 3 additiven Termen: **P**roportional, **I**ntegral, und **D**erivative.

$$u_{\text{PID}}(t) = k_p \cdot \left( \underbrace{e(t)}_{\text{P-Term}} + \underbrace{\frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\text{I-Term}} + \underbrace{T_d \cdot \frac{d}{dt} e(t)}_{\text{D-Term}} \right)$$

Im Frequenzbereich wird der Regler mit einem Roll-off Term erweitert. Der Roll-off Term macht den Regler kausal und dient zur Unterdrückung von Rauschen (hohe Frequenzen).

$$C_{\text{PID}}(s) = k_p \cdot \left( \underbrace{\frac{T_d \cdot T_i \cdot s^2 + T_i \cdot s + 1}{T_i \cdot s}}_{\text{nicht kausal}} \right) \cdot \underbrace{\frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^2}}_{\text{kausal}}$$

In Regelungstechnik 1 wurde das Ziegler-Nichols-Verfahren zur Bestimmung von Werten für  $k_p$ ,  $T_i$  und  $T_d$  eingeführt. Im Folgenden werden zwei weitere Verfahren diskutiert.

## 2 Åström-Hägglund Verfahren

Wie beim Ziegler-Nichols-Verfahren will man mit dem Åström-Hägglund-Verfahren empirisch sinnvolle Werte für die Parameter  $k_p$ ,  $T_i$  und  $T_d$  finden. Das Verfahren basiert auf der Auswertung sehr vieler Systeme  $P(s)$ , für welche im Mittel ein Regelkreis mit gewünschter Robustheit resultiert. Man kann dabei wählen, ob man einen aggressiven Regler ( $\mu_{\min} \approx 0.5$ ) oder einen robusten Regler ( $\mu_{\min} \approx 0.7$ ) will.

**Vorgehen:** Zuerst wird die Verstärkung eines reinen P-Reglers eingestellt, sodass das System bei  $k_p^*$  mit der Periode  $T^*$  grenzstabil oszilliert. Zusätzlich braucht man die statische Verstärkung  $|P(0)|$  sowie die gewünschte Robustheit  $\mu_{\min}$ . Die gegebenen Größen parametrieren den PID-Regler.

$$\text{Schema: } \left\{ \underbrace{\mu_{\min}}_{\text{spezifiziert}}, \underbrace{|P(0)|, k_p^*, T^*}_{\text{aus System}} \right\} \rightarrow \underbrace{\{k_p, T_i, T_d\}}_{\text{resultiert}}$$

Die PID Parameter  $x \in \{k_p/k_p^*, T_i/T^*, T_d/T^*\}$  berechnen sich mit folgender Formel und den dazugehörigen Tabellen:

$$x = \alpha_{0,x} \cdot e^{\alpha_{1,x} \cdot \kappa + \alpha_{2,x} \cdot \kappa^2}, \quad \kappa^{-1} = |P(0)| \cdot k_p^* \quad (1)$$

$x$	$\mu_{\min} = 0.7$			$\mu_{\min} = 0.5$		
	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$
$k_p/k_p^*$	0.053	2.90	-2.60	0.13	1.90	-1.30
$T_i/T^*$	0.900	-4.40	2.70	0.90	-4.40	2.70

Tabelle 1: Åström-Hägglund Koeffizienten für den PI-Regler

$x$	$\mu_{\min} = 0.7$			$\mu_{\min} = 0.5$		
	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$
$k_p/k_p^*$	0.33	-0.31	-1.00	0.72	-1.60	1.20
$T_i/T^*$	0.76	-1.60	-0.36	0.59	-1.30	0.38
$T_d/T^*$	0.17	-0.46	-2.10	0.15	-1.40	0.56

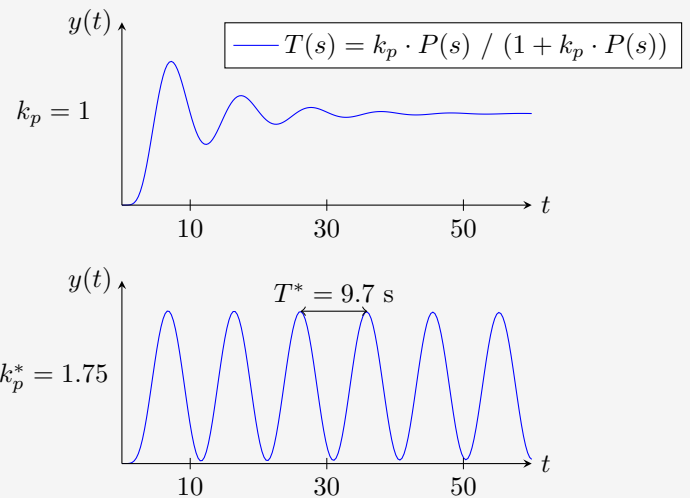
Tabelle 2: Åström-Hägglund Koeffizienten für den PID-Regler

## Beispiel: Åström - Hägglund

Folgendes System ist gegeben:

$$P(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1)} \quad (2)$$

Zuerst werden  $\{k_p^*, T^*, |P(0)|, \mu_{\min}\}$  bestimmt. Aus Gl. (2) ist ersichtlich dass  $|P(0)| = 1$ . Der Regler soll robust sein, d.h. wir spezifizieren  $\mu_{\min} = 0.7$ . Eine Erhöhung von  $k_p = 1$  auf  $k_p^* = 1.75$  ergibt  $T^* = 9.7$  s:



Es wird ein PI-Regler mit Gl. (1) ausgelegt:

$$\kappa = 1/(|P(0)| \cdot k_p^*) \approx 0.57 \quad (3)$$

$$k_p = 0.053 \cdot e^{2.9 \cdot \kappa - 2.6 \cdot \kappa^2} \cdot k_p^* \approx 0.21 \quad (4)$$

$$T_i = 0.9 \cdot e^{-4.4 \cdot \kappa + 2.7 \cdot \kappa^2} \cdot T^* \approx 1.71 \text{ s} \quad (5)$$

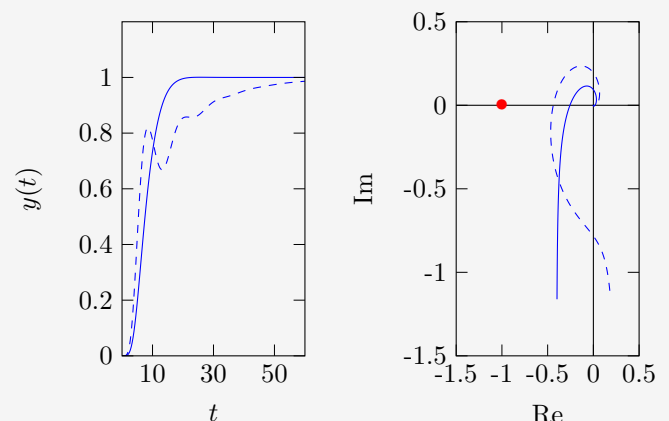


Abb. 1: Sprungantwort links, Nyquist-Diagramm des open-loop gain  $L(j\omega)$  rechts. Ziegler-Nichols Auslegung gestrichelt, Åström-Hägglund solide.

**Wichtig!** Oftmals ergibt die Åström-Hägglund Methode bessere Resultate als die Ziegler-Nichols Methode. Dies ist jedoch nicht immer der Fall.

### 3 Direktspezifikationen

Folgende Parameter der resultierenden Übertragungsfunktion  $L(j\omega) = P(j\omega) \cdot C(j\omega)$  werden vorgängig spezifiziert:

- die Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$
- die Phasenreserve  $\varphi$
- die Steigung  $\psi$  bei der Frequenz  $\omega_c$

Spezifikationen an  $L(j\omega)$  sowie die Eigenschaften von  $P(j\omega)$  werden dann in Anforderungen an  $C(j\omega)$  umgerechnet. Bei gegebener PID-Reglerstruktur können diese eindeutig in die Reglerparameter umgerechnet werden.

**Schema:**  $\underbrace{\{\omega_c, \varphi, \psi\}}_{\text{spezifiziert}}, \underbrace{\{r_P, \varphi_P, r'_P, \varphi'_P\}}_{\text{aus } P(j\omega)} \rightarrow \underbrace{\{k_p, T_i, T_d\}}_{\text{resultiert}}$

Für  $P(j\omega)$  werden bei gewünschter Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  die Parameter  $\{r_P, \varphi_P, r'_P, \varphi'_P\}$  ausgelesen.

$$P(j\omega_c) = r_P \cdot e^{j\varphi_P}, \quad r'_P = \left. \frac{\partial r_P(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c}, \quad \varphi'_P = \left. \frac{\partial \varphi_P(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c}$$

Folgende Formeln berechnen dann die Reglerparameter:

$$\begin{aligned} k_p &= -\frac{1}{r_P} \cos(\varphi - \varphi_P) \\ T_d &= \frac{1}{2} \cdot \left( \tan(\psi - \varphi_P) \cdot \left( \frac{r'_P}{r_P} - \varphi'_P \tan(\varphi - \varphi_P) \right) \right. \\ &\quad \left. + \tan(\varphi - \varphi_P) \cdot \left( \frac{1}{\omega_c} - \frac{r'_P}{r_P} \right) - \varphi'_P \right) \\ T_i &= (T_d \cdot \omega_c^2 - \tan(\varphi - \varphi_P) \cdot \omega_c)^{-1} \end{aligned}$$

Die Phase muss jeweils in Radian eingesetzt werden.

**Vorsicht!** Dieses Verfahren produziert nur für sinnvolle Spezifikationen  $\{\omega_c, \varphi, \psi\}$  auch sinnvolle Reglerparameter  $\{k_p, T_i, T_d\}$ . Ausserdem ist die Stabilität nicht garantiert.

### 4 Totzeiten - Recap

Regelstrecke und/oder Regler können Totzeiten enthalten.

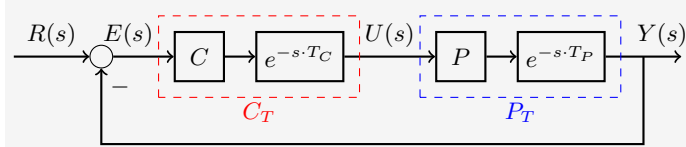


Abb. 2: Regelstruktur mit Totzeiten  $T_C$  und  $T_P$

Die gesamte Totzeit  $T$  des Regelkreises ist:

$$e^{-s \cdot T} = e^{-s \cdot T_C} \cdot e^{-s \cdot T_P} = e^{-s \cdot (T_C + T_P)}$$

Eine Totzeit  $T$  ist signifikant, falls sie gross ist relativ zur Zeitkonstante  $\tau$  des Systems. Faustregel:

$$\frac{T}{T + \tau} > 0.3 \rightarrow \text{Totzeit signifikant}$$

Standard PID-Regler eignen sich nicht für Systeme mit signifikanter Totzeit  $T_P$ . Faktisch kann kein kausaler Regler die Totzeit in der Systemantwort  $y(t)$  entfernen. Ein sinnvoller Regler resultiert nur, wenn die geschlossenen Regelkreisgrössen  $\{T(s), S(s)\}$  dieselbe Totzeit  $T_P$  beinhalten wie das System. Das wird mit dem Entwurf prädiktiver Regler erreicht. Im Folgenden werden zwei prädiktive Regler vorgestellt.

### 5 Prädiktiver PI-Regler für einfache Regelstrecken

Gegeben: Eine Regelstrecke erster Ordnung mit Totzeit  $T_P$ .

$$P(s) \approx \frac{k}{\tau \cdot s + 1} \cdot e^{-s \cdot T_P}$$

Gesucht: resultierende komplementäre Sensitivität  $T(s)$  als System erster Ordnung mit gegebener Zeitkonstante, einstellbar durch den Tuningparameter  $\sigma$ :

$$T(s) = \frac{1}{\sigma \cdot \tau \cdot s + 1} \cdot e^{-s \cdot T_P} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

Auflösen nach  $L(s)$  ergibt:

$$L(s) = \frac{T(s)}{1 - T(s)} \Rightarrow C(s) = \frac{T(s)}{P(s) \cdot (1 - T(s))}$$

Einsetzen von  $T(s)$  und  $P(s)$  liefert:

$$C(s) = \frac{\tau \cdot s + 1}{k \cdot (\sigma \cdot \tau \cdot s + 1 - e^{-s \cdot T_P})}$$

Die Eingangsgrösse  $U(s)$  lautet somit:

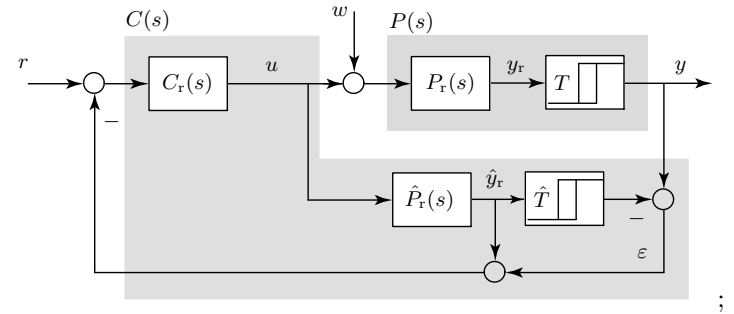
$$U(s) = \underbrace{\frac{1}{\sigma k} \left( 1 + \frac{1}{\tau s} \right) \cdot E(s)}_{\text{PI-Regler}} - \underbrace{\frac{1}{\sigma \tau s} (1 - e^{-s \cdot T_P}) \cdot U(s)}_{\text{Prädiktive Korrektur}}$$

Falls  $T_P = 0$  wird die prädiktive Korrektur 0 und der resultierende Eingang wird zu einem einfachen PI-Regler.

### 6 Smith Predictor

Beim Smith Predictor nimmt man an, dass die Regelstrecke einen rationalen Teil und eine Totzeit hat:

$$P(s) = P_r(s) \cdot e^{-s \cdot T}$$



Falls man eine perfekte Schätzung der Regelstrecke hat ( $P_r(s) = \hat{P}_r(s)$ ,  $T = \hat{T}$ ) und keine Störung vorhanden ist ( $w = 0$ ), resultiert folgende komplementäre Sensitivität:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = e^{-s \cdot T} \cdot \frac{P_r(s) C_r(s)}{1 + P_r(s) C_r(s)} = e^{-s \cdot T} \cdot T_r(s) \quad (6)$$

Das heisst, die Form der Systemantwort  $y(t)$  ist dieselbe wie die des rationalen Systems ohne Totzeit ( $T_r(s)$ ). Jedoch ist sie um die Totzeit verschoben ( $e^{-s \cdot T}$ ). Dies wird an der Regelstruktur ersichtlich. Für  $P_r(s) = \hat{P}_r(s)$ ,  $T = \hat{T}$ ,  $w = 0$  wird  $\epsilon = 0$ . In dem Fall wird das unverschobene perfekt geschätzte Signal  $\hat{y}_r$  rückgeführt, und somit wird die Totzeit überbrückt. Modellfehler und Störungen ( $P_r(s) \neq \hat{P}_r(s)$ ,  $T \neq \hat{T}$ ,  $w \neq 0$ ) werden durch das Fehlersignal  $\epsilon \neq 0$  kompensiert. In diesem Fall werden die Übertragungsfunktionen jedoch um einiges komplizierter als Gl. (6).

## Regelungstechnik II FS 2021

## Spezifikation der Sensitivität

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

## Zusammenfassung Vorlesung 2

## Buch Kapitel 10.4.3

Bei Fragen: hrffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 4. März 2021

## 1 Multiplikative Unsicherheit der komplementären Sensitivität

**Zur Erinnerung.** Aus der multiplikativen Modellunsicherheit  $W_2(s)$  der Strecke wurde das robuste Nyquist Theorem abgeleitet. Daraus kann eine Bedingung an die komplementäre Sensitivität  $T(j\omega)$  abgeleitet werden.

$$|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \Rightarrow |T(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < 1 \quad (1)$$

Das robuste Nyquist Theorem aus Gl. (1) kann in der Nyquist Ebene interpretiert werden: Der rot eingezeichnete Unsicherheitsradius  $|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)|$  darf nicht länger als das blaue Verbindungsstück  $|1 + L(j\omega)|$  sein, um zusätzliche Umkreisungen des Punktes  $(-1, 0)$  zu vermeiden.

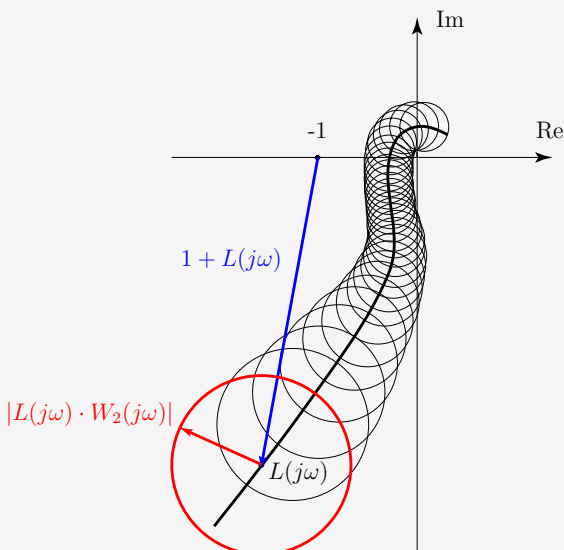


Abb. 1: Robustes Stabilitätskriterium nach Nyquist.

## 2 Multiplikative Spezifikation an Sensitivität

Die Sensitivität  $S(s)$  ist bei jedem Regelsystem sehr wichtig. Eine betragsmässig kleine Sensitivität garantiert eine gute Störungsunterdrückung und gutes reference tracking. Eine sinnvolle Spezifikation ist demnach, den Betrag der Sensitivität  $|S(j\omega)|$  frequenzabhängig zu limitieren. Die Phase spielt dabei praktisch keine Rolle.

## Nominelle Regelgüte

Um die Sensitivität betragsmässig zu begrenzen wird mit einer rationalen Übertragungsfunktion  $W_1(s)$  gefordert:

$$\|S(s) \cdot W_1(s)\|_\infty < 1 \Rightarrow |S(j\omega)| < |W_1^{-1}(j\omega)| \quad (2)$$

Gl. (2) kann umgeschrieben werden:

$$|W_1(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad (3)$$

Die geometrische Interpretation von Gl. (3) in der Nyquist Ebene ist, dass  $L(j\omega)$  nicht in einen in  $-1$  zentrierten Kreis mit Radius  $|W_1(j\omega)|$  eintreten darf, siehe Abb. 2.

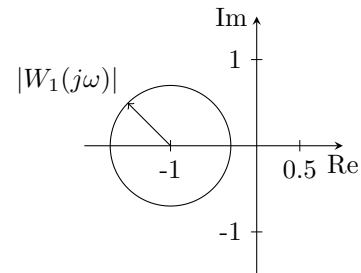


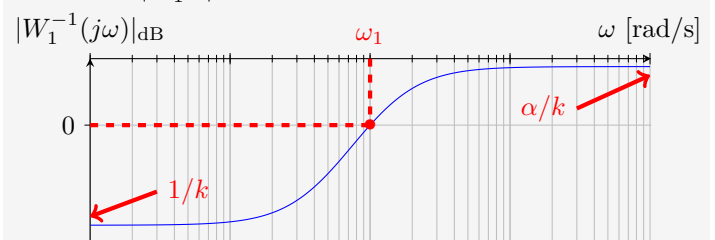
Abb. 2: Darstellung der nicht zulässigen Region aus Gl. (3).

Konstruktion von  $W_1$ :

Ein Beispiel einer sinnvollen Sensitivitätsspezifikation  $W_1(s)$  hat folgende Form:

$$W_1(s) = k \cdot \frac{\tau \cdot s + 1}{\alpha \cdot \tau \cdot s + 1}, \quad k > 1, \quad \alpha > k$$

$$\tau^2 = \frac{k^2 - 1}{\omega_1^2 \cdot (\alpha^2 - k^2)}, \quad |W_1(j\omega_1)| = 1$$

Abb. 3:  $|W_1^{-1}|_{dB}$  in blau. Einstellbare Größen in rot.

## Robuste Regelgüte

Nun soll gleichzeitig das robuste Nyquist Theorem und die nominelle Spezifikation der Sensitivität erfüllt sein. In anderen Worten sollen Gl. (1) und Gl. (2) gleichzeitig gelten.

$$|W_1(j\omega) \cdot S(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot T(j\omega)| < 1$$

$$\Rightarrow |W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad (4)$$

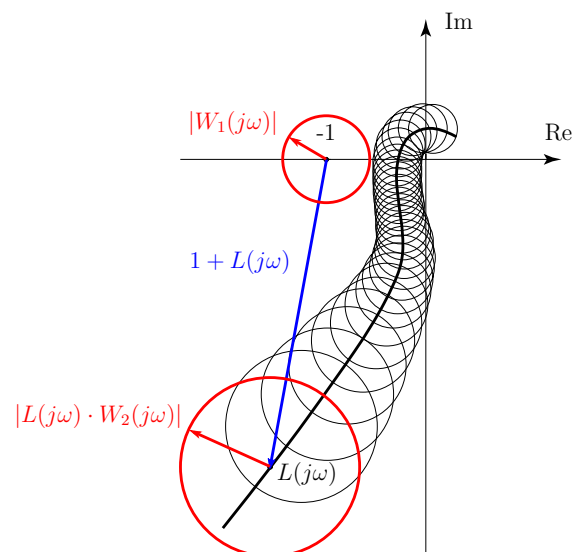


Abb. 4: Robuste Regelgüte.

Um Spezifikationen der Sensitivität und Modellunsicherheiten in jedem Fall zu berücksichtigen darf die summierte Länge der beiden roten Pfeile nie länger als die blaue Verbindung werden. In anderen Worten: Die beiden roten Kreise dürfen sich für alle Frequenzen nicht schneiden.

### Approximative Spezifikationen

Um einen Regler zu finden, der Gl. (4) erfüllt, ist es einfacher, wenn Gl. (4) auf  $L(j\omega)$  umformuliert wird. Dies ist einfach für sehr hohe Frequenzen und sehr tiefe Frequenzen.

Tiefe Frequenzen:  $\omega < 0.1 \cdot \omega_c \Rightarrow |L(j\omega)| \gg 1$

Gl. (4) kann approximiert werden:

$$\begin{aligned} |W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| &< |L(j\omega)| \\ \Rightarrow |L(j\omega)| &> \frac{|W_1(j\omega)|}{1 - |W_2(j\omega)|} \end{aligned}$$

Eine Lösung kann nur existieren falls  $|W_2(j\omega)| < 1$ .

Hohe Frequenzen:  $\omega > 10 \cdot \omega_c \Rightarrow |L(j\omega)| \ll 1$

Gl. (4) kann approximiert werden:

$$\begin{aligned} |W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| &< 1 \\ \Rightarrow |L(j\omega)| &< \frac{1 - |W_1(j\omega)|}{|W_2(j\omega)|} \end{aligned}$$

Diese Approximationen berücksichtigen das Frequenzband  $[0.1 \cdot \omega_c, 10 \cdot \omega_c]$  nicht. In diesem Band ist es vor allem wichtig Stabilität und Robustheit zu garantieren.

### Kompatibilitätsbedingung

**Zur Erinnerung.** Die Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  des open-loop gains  $L(j\omega)$  soll folgende Bedingungen erfüllen.

$$\max \left\{ \underbrace{10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \omega_{\pi+}}_{\text{konservativer mit 5}} < \omega_c < \min \left\{ \underbrace{\frac{\omega_n}{10}, \frac{\omega_2}{10}, \frac{\omega_\tau}{2}, \frac{\omega_{\zeta+}}{2}}_{\text{konservativer mit } \frac{1}{5}} \right\} \right.$$

Dabei ist  $\omega_d$  die Frequenz der Störung,  $\omega_{\pi+}$  der schnellste instabile Pol von  $L(s)$ ,  $\omega_n$  die Frequenz des Rauschens,  $\omega_2$  die Frequenz bei der  $W_2(j\omega_2) = 1$ ,  $\omega_\tau$  die Frequenz der Totzeit und  $\omega_{\zeta+}$  die Frequenz der langsamsten nicht-minimalphasigen Nullstelle.

Die Frequenz  $\omega_1$ , bei der  $|W_1(j\omega_1)| = 1$  gilt, muss kleiner als  $\omega_2$  sein, sodass  $\omega_c$  genügend Marge hat. Jedoch muss  $\omega_1$  auch grösser sein als die untere Schranke für  $\omega_c$ . Als Faustregel wählt man als erste Schätzung:

$$\boxed{\omega_1 \approx \max\{10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \omega_{\pi+}\}} \quad (5)$$

Zusätzlich muss  $\omega_1$  grösser gewählt werden, je grösser die gewünschte Phasenreserve  $\varphi$  ist. Dies kann mit der Magnitude der Sensitivität bei  $\omega_c$  interpretiert werden:

$$\begin{aligned} |S(j\omega_c)| &= \frac{1}{|1 + L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1 + 1 \cdot e^{-j(\pi-\varphi)}|} \\ &= \frac{1}{|1 - e^{j\varphi}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos(\varphi)}} \end{aligned}$$

In der Regel nimmt  $|S(j\omega)|$  mit ansteigender Frequenz zu und schneidet die 0 dB Linie einmalig, siehe Abb. 6.

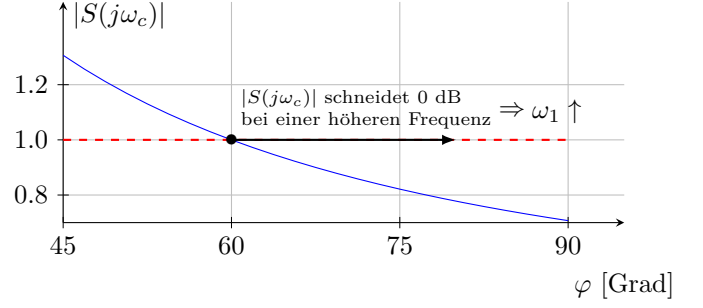


Abb. 5:  $|S(j\omega_c)|$  in blau,  $|S(j\omega_c)| = 1$  in rot.

Abb. 5 zeigt die Magnitude der Sensitivität als Funktion der Phasenreserve. Die Magnitude wird kleiner, je grösser die gewünschte Phasenreserve ist. Das heisst, die Sensitivität muss die 0 dB Linie bei einer höheren Frequenz schneiden, je grösser die Phasenreserve sein soll. Dies hat zur Folge, dass  $\omega_1$  höher spezifiziert werden muss.

Die Schlussfolgerung, dass  $\omega_1$  grösser sein muss, je grösser die Phasenreserve ist, kann auch umgedreht werden.  $|W_1(j\omega)|$  wird bis zu  $\omega_1$  grösser als 1 sein (siehe Abb. 3). Je grösser  $|W_1(j\omega)|$  ist, desto grösser muss die Phasenreserve sein (siehe Abb. 4), da  $L(j\omega)$  nicht in den Kreis mit Radius  $|W_1(j\omega)|$  eintreten darf.

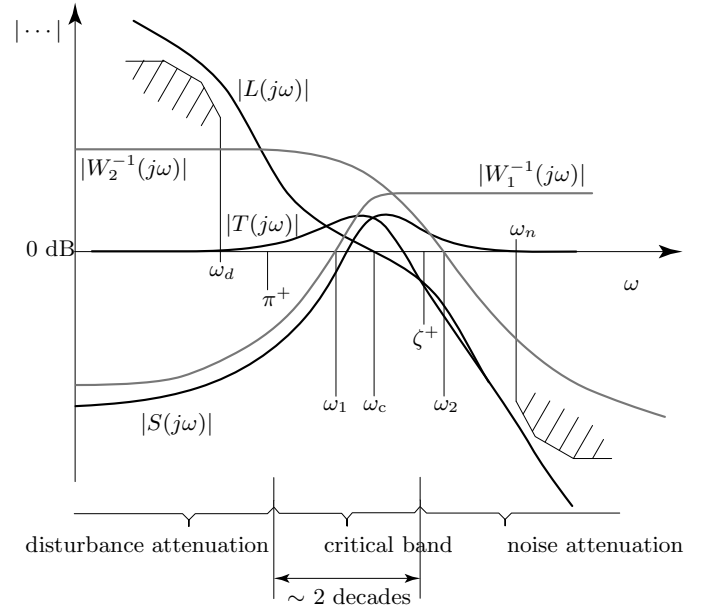


Abb. 6: Zusammenfassendes Bild aller Bedingungen und Spezifikationen.

## Regelungstechnik II FS 2021

## Kaskadierte Systeme, Wurzelortskurven, Numerische Verfahren

## Zusammenfassung Vorlesung 3

## Kapitel 13.2, 13.3, 11.7

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Bei Fragen: hrffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 18. Februar 2021

## 1 Kaskadierte Regelsysteme

Kaskadierte Regelsysteme eignen sich für SIMO (single-input, multiple-output) Systeme mit einer schnellen und einer langsamen Teildynamik. Um die volle Bandbreite der schnellen Dynamik auszunützen werden separate Regler für das schnelle und für das langsame Teilsystem ausgelegt.

In Abb. 1 ist ersichtlich, dass das schnelle Teilsystem  $P_f$  den Eingang  $u_s$  für das langsame Teilsystem  $P_s$  liefert. Das schnelle System wird geregelt, indem  $y_f$  rückgeführt wird;  $y_f$  ist oftmals proportional zu  $u_s$ , dies ist aber nicht immer der Fall.

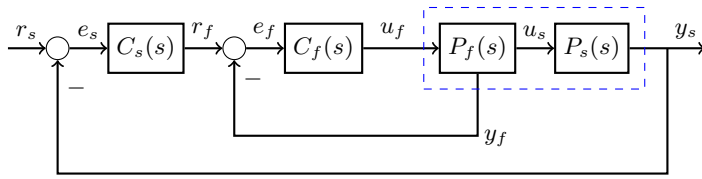


Abb. 1: Kaskadierte Regelstruktur. Der Index  $s$  ('slow') steht für langsame Teildynamiken, und  $f$  ('fast') für schnelle.

Um die Bandbreite des schnellen Teilsystems auszunützen wird für  $C_f(s)$  oftmals kein Integrator verwendet. Der langsame Regler  $C_s(s)$  hingegen hat oftmals einen Integrator um einen statischen Nachlauffehler zu eliminieren.

**Beispiel:** Die folgende Differentialgleichung beschreibt das System in Abb. 2. Die Position  $y$  und die Geschwindigkeit  $\dot{y}$  können direkt gemessen werden.

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Wir wählen  $x = y$  und  $v = \dot{y}$ . Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= v(t) \\ \frac{d}{dt}v(t) &= -x(t) - v(t) + u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

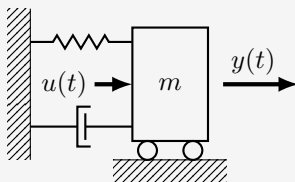


Abb. 2: Aktuiertes Feder-Dämpfer System.

Das Ziel ist, die Position zu regeln. Jedoch ist in Gl. (1) ersichtlich, dass  $u(t)$  direkt auf die Geschwindigkeit wirkt und nur indirekt auf die Position. Folgende Teildynamiken können hergeleitet werden:

$$u \rightarrow v : \quad P_f(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1} \quad (2)$$

$$v \rightarrow x : \quad P_s(s) = \frac{1}{s} \quad (3)$$

$$u \rightarrow x : \quad P(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (4)$$

## Zur Erinnerung:

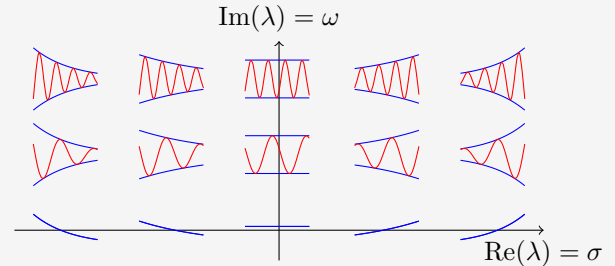


Abb. 3: Systemantwort als Funktion der Eigenwerte. Rot: Einfluss Imaginärteil, Blau: Einfluss Realteil.

Pole mit grösserem negativen Realteil klingen schneller ab als Pole mit kleinerem negativem Realteil. Die Pole in Gl. (2) bis (4) sind:

$$\begin{aligned} u \rightarrow v \quad (P_f) : \quad & s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ v \rightarrow x \quad (P_s) : \quad & s = 0 \\ u \rightarrow x \quad (P) : \quad & s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Das System  $P_f$  ist also definitiv schneller als das System  $P_s$ . Obwohl  $P$  die gleichen Pole wie  $P_f$  hat, wird  $P_f$  schneller sein, da die zusätzliche Nullstelle bei  $s = 0$  die Phase anhebt.

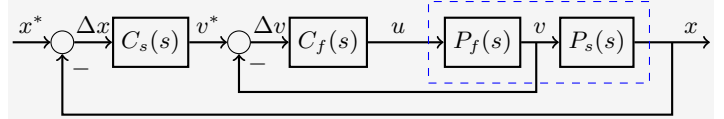


Abb. 4: Kaskadierte Regelstruktur für das Beispiel.

Für den Regler  $C_f$  kann ein P-Regler verwendet werden. Für den Regler  $C_s$  kann ein PI-Regler verwendet werden. Ein detaillierter Vergleich zwischen kaskadiertem und nicht kaskadiertem Regelverhalten ist im Buch in *Example 13.2.1* auf Seiten 225ff zu finden.

2 Wurzelortskurven-Verfahren<sup>1</sup>

Mit diesem Verfahren kann man die Pole des geschlossenen Regelkreises an einen spezifischen Ort setzen. Es wird folgende Regelstruktur betrachtet:

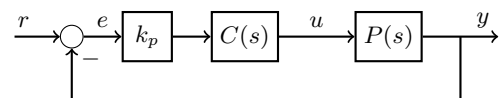


Abb. 5: Grundstruktur des Wurzelortskurven-Verfahrens.

Der Regler  $C(s)$  heisst in diesem Kontext Kompensator. Die Verstärkung  $k_p$  wird vom Kompensator abgespalten und in der Regelstruktur separat geschrieben. Wenn man die Pole des geschlossenen Regelkreises für alle  $k_p$  zeichnet, erhält man die Wurzelortskurven.

<sup>1</sup>Englisch: *Root-Locus*



**Vorsicht!** Wir gehen im Folgenden von stabilen, minimalphasigen  $L(s)$  aus. Ausserdem muss gelten  $k_p > 0$ .

### Regeln des Wurzelortskurven-Verfahrens

Der geschlossene Regelkreis hat die Übertragungsfunktion:

$$T(s) = \frac{k_p \cdot C(s) \cdot P(s)}{1 + k_p \cdot C(s) \cdot P(s)} = \frac{k_p \cdot L(s)}{1 + k_p \cdot L(s)}$$

Die Pole des geschlossenen Regelkreises sind demnach Lösungen folgender Gleichung:

$$1 + k_p \cdot L(s) = 0 \quad (5)$$

Die offene Verstärkung  $L(s)$  ist eine reell-rationale Übertragungsfunktion:

$$L(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{(s - \zeta_1) \cdot (s - \zeta_2) \cdot \dots \cdot (s - \zeta_m)}{(s - \pi_1) \cdot (s - \pi_2) \cdot \dots \cdot (s - \pi_n)} \quad (6)$$

Daraus folgt:

$$1 + k_p \cdot \frac{b(s)}{a(s)} = 0 \Rightarrow a(s) + k_p \cdot b(s) = p(s, k_p)$$

Die Scharen der Nullstellen von  $p(s, k_p)$  repräsentieren die Wurzelortskurven. Das Polynom  $p(s, k_p)$  hat Ordnung  $n$ . Das Polynom kann für Extremfälle von  $k_p$  betrachtet werden:

$k_p \rightarrow 0 \Rightarrow p(s, k_p) \approx a(s)$  Für sehr kleine  $k_p$  konvergieren die  $n$  Nullstellen von  $p(s, k_p)$  zu den  $n$  Nullstellen von  $a(s)$ . Das heisst, die Pole von  $T(s)$  nähern sich den Polen von  $L(s)$ .

$k_p \rightarrow \infty \Rightarrow p(s, k_p) \approx k_p \cdot b(s)$  Für sehr grosse  $k_p$  konvergieren  $m$  Nullstellen von  $p(s, k_p)$  zu den  $m$  endlichen Nullstellen von  $b(s)$ . Das heisst die Pole von  $T(s)$  nähern sich den Nullstellen von  $L(s)$ . Jedoch hat  $p(s, k_p)$  Ordnung  $n$ , d.h. es bleiben  $n - m$  Nullstellen von  $p(s, k_p)$  übrig. Was mit den restlichen Nullstellen passiert, kann wie folgt interpretiert werden:

$$L(s) = \frac{\underbrace{(s - \zeta_1)(s - \zeta_2) \dots (s - \zeta_m)}_m \underbrace{(-s/\infty + 1) \dots (-s/\infty + 1)}_{n-m}}{\underbrace{(s - \pi_1)(s - \pi_2) \dots (s - \pi_m)}_m \underbrace{(s - \pi_{m+1}) \dots (s - \pi_n)}_{n-m}}$$

**Zur Erinnerung:** Nullstellen, die im Unendlichen platziert sind, haben keinen Einfluss auf die Systemdynamik. Das heisst, wir können  $L(s)$  mit  $n - m$  Nullstellen erweitern, ohne das Systemverhalten zu ändern.

Die Hauptidee ist nun, dass sich die  $n - m$  übriggebliebenen Pole von  $L(s)$  den  $n - m$  im Unendlichen platzierten Nullstellen asymptotisch nähern. Insbesondere starten alle Asymptoten im Punkt  $\sigma_a + j \cdot 0$ , wobei:

$$\sigma_a = \frac{1}{n - m} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(\pi_i) - \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(\zeta_i) \right)$$

Die Asymptoten verlassen den Punkt  $\sigma_a + j \cdot 0$  unter dem Winkel  $\delta_i$ , wobei:

$$\delta_i = \frac{\pi}{n - m} \cdot (2 \cdot (i - 1) + 1) [\text{rad}], \quad i = 1, \dots, n - m$$

### Zugehörigkeitstest

Um zu testen ob ein Punkt  $z \in \mathbb{C}$  auf der Wurzelortskurve liegt, wird Gl. (5) mit Hilfe von Gl. (6) umgeformt:

$$L(z) = -1/k_p \Rightarrow \angle L(z) = -\pi \bmod 2\pi$$

$$\sum_{i=1}^m \angle(z - \zeta_i) - \sum_{i=1}^n \angle(z - \pi_i) = -\pi \pm k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{N} \quad (7)$$

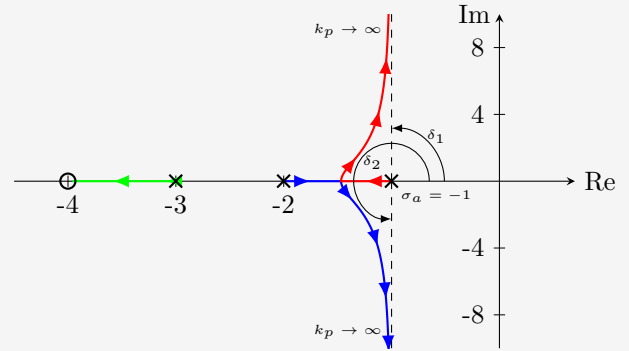
**Beispiel:**  $L(s)$  sei:

$$L(s) = \frac{s + 4}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

Es folgt:  $n = 3, m = 1, n - m = 2$ . Das heisst, zwei der Pole nähern sich für  $k_p \rightarrow \infty$  den Asymptoten, die bei  $\sigma_a + j \cdot 0$  starten, und denselben Punkt unter den Winkeln  $\delta_i$  verlassen, wobei:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} \cdot (-1 - 2 - 3 - (-4)) = -1$$

$$\delta_1 = \frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot 0 + 1) = \frac{\pi}{2}, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot 1 + 1) = \frac{3\pi}{2}$$



Wir möchten nun testen ob der Punkt  $z = -3.5 + j \cdot 0$  auf der Wurzelortskurve liegt. Dazu wenden wir Gl. (7) an:

$$\angle(-3.5 + 4) - \angle(-3.5 + 1) - \angle(-3.5 + 2) - \angle(-3.5 + 3) = 3\pi$$

$3\pi$  hat die geforderte Form  $-\pi + k \cdot 2\pi$ , für  $k = 2$ . Der Punkt liegt also auf der Wurzelortskurve.

### Kompensierung mit dem Wurzelortsverfahren

Der Zugehörigkeitstest aus Gl. (7) ist besonders hilfreich, um einen Kompensator zu finden, der die Pole des geschlossenen Regelkreises an einem gewünschten Ort in der komplexen Ebene platziert. Diese Idee wird an einem Beispiel gezeigt.

**Beispiel:** Du möchtest einen Kompensator  $C(s)$  für das System  $P(s)$  auslegen, sodass die Pole von  $T(s)$  bei  $s_{1,2}^* = -4 \pm j \cdot 4$  rad/s liegen.

$$P(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 3)}$$

Du testest zuerst einen einfachen Kompensator  $C_1(s) = 1$ .

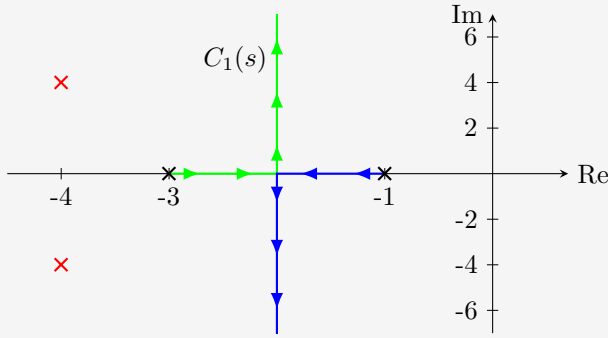


Abb. 6: Wurzelortskurve von  $L(s) = P(s) \cdot C_1(s)$  in blau und grün. Gewünschte Polplatzierung in rot.

Aus Abb. 6 ist ersichtlich, dass die gewünschten Pole ( $\times$ ) nicht auf der Wurzelortskurve liegen. Das heisst, für  $C_1(s)$  gibt es kein  $k_p$ , sodass der geschlossene Regelkreis  $T(s)$  die gewünschten Pole hat. Gl. (7) ist somit nicht erfüllt.

Die gewünschten Pole liegen links von den Polen von  $L(s)$ . Um die Wurzelortskurve nach links zu biegen, verwendest du einen Kompensator mit Nullstelle:  $C_2(s) = s + \zeta$ .

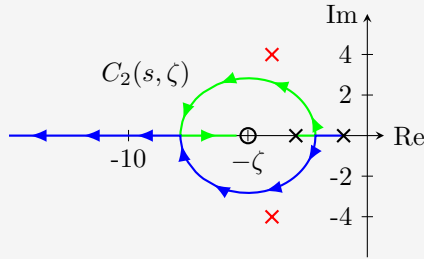


Abb. 7: Wurzelortskurve von  $L(s) = P(s) \cdot C_2(s, \zeta)$  in blau und grün. Gewünschte Polplatzierung in rot.

Du möchtest nun  $\zeta$  finden, sodass die gewünschten Pole auf der Wurzelortskurve liegen. Dafür wendest du Gl. (7) an:

$$L = \frac{(s + \zeta)}{(s + 1)(s + 3)} \Rightarrow \angle L = \angle(s + \zeta) - \angle(s + 1) - \angle(s + 3)$$

Spezifisch für  $s = s_1^*$ :

$$\begin{aligned} \angle(-4 + 4j + \zeta) - \angle(-4 + 4j + 1) - \angle(-4 + 4j + 3) = \\ \underbrace{\arctan\left(\frac{4}{\zeta - 4}\right)}_{\gamma} - \underbrace{\arctan\left(\frac{4}{-3}\right)}_{\alpha} - \underbrace{\arctan\left(\frac{4}{-1}\right)}_{\beta} \stackrel{!}{=} -\pi \\ \Rightarrow \gamma = -\pi + \alpha + \beta, \quad \zeta = 4 + 4/\tan(\gamma) \approx 7.25 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

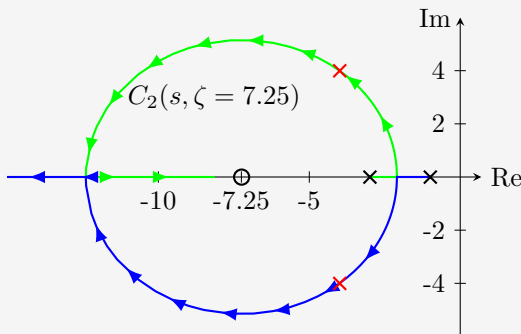


Abb. 8: Wurzelortskurve von  $L(s) = P(s) \cdot C_2(s, \zeta)$  in blau und grün. Gewünschte Polplatzierung in rot.

Die gewünschten Pole liegen auf den Wurzelortskurven von  $L(s) = P(s) \cdot C_2(s, \zeta = 7.25)$ . Demnach ist es möglich, ein  $k_p$  zu finden, sodass  $T(s)$  die gewünschten Pole hat.

### 3 Numerische Verfahren

Mit numerischen Verfahren kann man für eine gegebene Regelstruktur (z.B. PI) ein Optimierungsproblem lösen, um die Parameter  $k_p$  und  $T_i$  zu erhalten. Das Optimierungsproblem involviert eine Kostenfunktion  $J(k_p, T_i)$ , die durch die Wahl der optimalen Parameter  $k_p$  und  $T_i$  minimiert werden soll.

**Beispiel:** Wir möchten einen PI-Regler auslegen, der auf eine Sprungantwort kumulativ einen kleinen Fehler erzeugt, der den maximalen Überschwinger möglichst klein hält, und der möglichst robust ist.

Ein Mass für den kumulativen Fehler ist die Summe aller quadrierten Fehler:

$$g_1 = \int_0^\infty e^2(t) dt$$

Der maximale Überschwinger ist wie folgt definiert:

$$g_2 = \max_{t \in [0, \infty)} (y(t) - 1)$$

Die Robustheit kann mit der *minimum return difference*  $\mu_{\min}$  quantifiziert werden. Wir definieren die Funktion  $g_3$  als

$$g_3 = -\mu_{\min} = -\min_{\omega \in [0, \infty)} |1 + L(j\omega)|$$

Durch das Minus-Zeichen gilt: Minimiert man  $g_3$ , so maximiert man die Robustheit. Schlussendlich benutzen wir die Faktoren  $\kappa_i > 0$  um die Kostenfunktion  $J$  als gewichtete Summe zu definieren:

$$J(k_p, T_i) = \kappa_1 \cdot g_1 + \kappa_2 \cdot g_2 + \kappa_3 \cdot g_3$$

Der Wert der Kostenfunktion hängt von den Reglerparametern  $k_p$  und  $T_i$  ab, denn die Gütekriterien  $g_i$  nehmen unterschiedliche Werte an, wenn man die Reglerparameter variiert. Folglich kann man ein Optimierungsproblem formulieren, um die Kostenfunktion zu minimieren:

$$\min_{k_p, T_i} J(k_p, T_i)$$

Um die optimalen Reglerparameter zu erhalten, kann dieses Problem z.B. numerisch mit der Funktion `fminsearch` in Matlab gelöst werden.

Die Faktoren  $\kappa_i$  sind dabei ein Mass für die Wichtigkeit der Grösse  $g_i$  in der Kostenfunktion  $J$ . Als Beispiel: Je grösser  $\kappa_3$  (bei fixierten  $\kappa_{1,2}$ ) gewählt wird, desto robuster wird der Regler. Jedoch werden die Gütekriterien  $g_1$  und  $g_2$  dadurch relativ zu  $g_3$  weniger stark gewichtet. Weil er nur einen geringen Einfluss auf den Wert der Kostenfunktion hat, kann beispielsweise der Überschwinger in diesem Fall für die optimalen Reglerparameter grösser ausfallen. Daher können die Faktoren  $\kappa_i$  als *Tuning-Parameter* angesehen werden, die es erlauben einen *Trade-off* zwischen verschiedenen Zielen zu definieren. Dabei ist nur die relative Grösse der  $\kappa_i$  zueinander von Relevanz. So ist z.B. das Minimum der Kostenfunktion für  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 1$  an derselben Stelle wie für  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 100$ .

## Regelungstechnik II FS 2021

## PID Praxiseinsatz

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

## Zusammenfassung Vorlesung 4

## Buch Kapitel 14.1-14.3, Kapitel 7.5

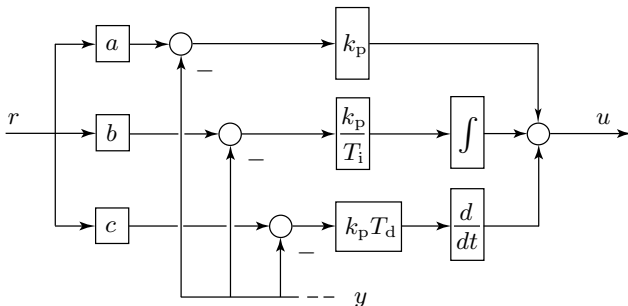
Bei Fragen: hrfael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 19. März 2021

## 1 PID-Regler in der Praxis

Der praktische Einsatz von Reglern bringt diverse bisher unerwähnte Schwierigkeiten mit sich. Die wichtigsten Einschränkungen werden im Folgenden diskutiert.

## Set Point Weights

Die Standardregelstruktur dient vor allem zur Unterdrückung von Störungen. Natürlich werden Regler auch verwendet um spezifischen Referenzsignalen  $r(t)$  zu folgen. Schnelle Änderungen im Referenzsignal können jedoch betragsmässig sehr grosse Eingänge  $u(t)$  und ungewollte Transienten produzieren. Mit sogenannten *set point weights* (Abb. 1) kann das Regelverhalten verbessert werden.

Abb. 1: PID-Regler mit Setpointverstärkungen  $a, b, c$ .

Das Referenzsignal wird für jeden Teil des Reglers (P, I, D) mit einer separaten Verstärkung ( $a, b, c$ ) multipliziert. Das heisst, die Referenz wird "vormassiert", bevor sie durch den Regler geht.

- I-Teil: Um keinen statischen Nachlauffehler zu produzieren, falls der Referenzwert konstant wird, setzt man normalerweise  $b = 1$ .
- D-Teil: Schnelle Referenzänderungen führen zu grossen Signalen auf dem Differential-Pfad des Reglers ( $\frac{d}{dt}(r - y) \approx \frac{d}{dt}r$ ). Deshalb setzt man oftmals  $c = 0$ , damit grosse Ableitungen nicht auf den Eingang  $u$  durchschlagen.
- P-Teil: Für die Verstärkung  $a$  auf dem proportionalen Signal kann man die folgenden Åström und Hägglund Regeln anwenden:

$$a = \alpha_{0,x} \cdot e^{\alpha_{1,x} \cdot \kappa + \alpha_{2,x} \cdot \kappa^2}$$

$a$	$\mu_{\min} = 0.7$			$\mu_{\min} = 0.5$		
	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$
PI	1.10	-0.0061	1.8	0.48	0.40	-0.17
PID	0.58	-1.3000	3.5	0.25	0.56	-1.20

Tabelle 1: Åström-Hägglund-Koeffizienten für PI und PID-Regler.

Typischerweise ist  $0 < a < 1$ . Ein gut gewählter Wert von  $a$  kann das closed-loop Regelverhalten häufig verbessern.

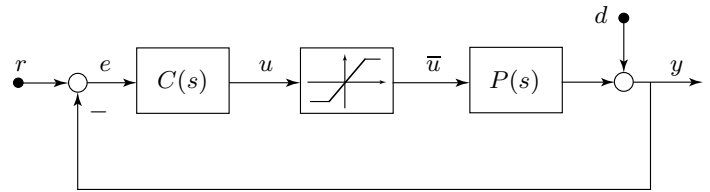
## Saturationen und Anti Reset Windup (ARW)

Eine Saturation ist eine Nichtlinearität, die in jedem realen Regelsystem vorhanden ist. Aktuatoren können in Realität nie beliebig kleine oder beliebig grosse Sollsignale  $u(t)$  umsetzen.

Die Nichtlinearität einer Saturation ist wie folgt definiert:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_{\min} & \text{if } u(t) < u_{\min} \\ u_{\max} & \text{if } u(t) > u_{\max} \\ u(t) & \text{else} \end{cases}$$

Falls der vom Regler  $C(s)$  geforderte Ausgang  $u$  grösser ist als der maximal produzierbare Eingang  $u_{\max}$  des Aktuators, saturiert der Eingang bei  $\bar{u} = u_{\max}$ . Die gleiche Logik gilt für den minimal erreichbaren Eingang  $u_{\min}$ .

Abb. 2: Regelsystem mit Saturation auf  $u$ .

**Beispiel:** Das System  $P(s)$  soll mit einem PI-Regler  $C_{PI}(s)$  geregelt werden:

$$P(s) = \frac{1}{s \cdot (3s^2 + 4s + 1)}, \quad C_{PI}(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s}\right)$$

Eine Simulation mit  $k_p = 0.3$  und  $T_i = 13$  s führt zum gestrichelten Systemverhalten:

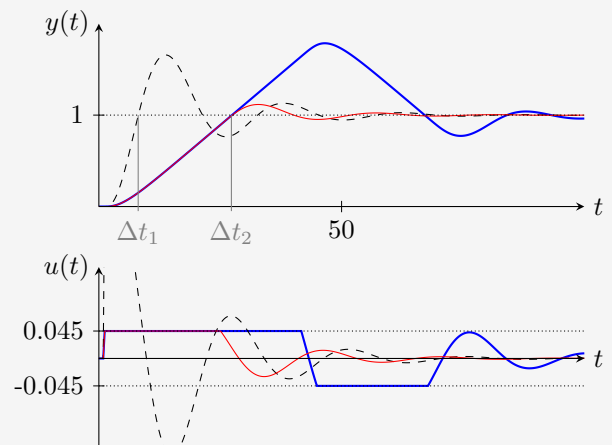


Abb. 3: Saturierendes Regelsystem.

Beim Auslegen wurde jedoch vernachlässigt, dass der Aktuator bei  $|u(t)| = u_{\text{sat}} = 0.045$  saturiert. Mit der Aktuator-Sättigung resultiert effektiv die blaue Linie und damit eine schlechtere Reglerperformance. Mit einem ARW (siehe folgenden Abschnitt) resultiert die viel bessere Performance der roten Linie.

Um mit Saturationen umzugehen, muss man zuerst verstehen, was bei einem saturierten Regelsystem überhaupt passiert. Dadurch, dass das System langsamer reagiert als erwartet, kann sich der Integrator über eine längere Zeit  $t$  füllen ( $\Delta t_1 < t < \Delta t_2$ ). Sobald sich das Vorzeichen des Fehlers ändert, überschiesst die Antwort das Ziel stärker, da sich der Integrator zuerst leeren muss.



Um die Saturation zu umgehen, kann man den Integrator durch ein *Anti Reset Windup (ARW)* schwächen, sobald man erkennt, dass der Eingang saturiert (siehe Abb. 4, rote Box). In der roten Box sieht man eine mögliche Struktur eines anti reset-windup. Dabei ist  $q(t) = u(t) - \bar{u}(t)$ . Falls  $u(t)$  nicht saturiert, ist  $q(t) = 0$  und der ARW macht nichts. Falls man saturiert, wird die zu integrierende Grösse reduziert, sodass sich der Integrator in der Saturationsphase nicht zu stark füllt. Das heisst je stärker die Aktuatoren saturieren, desto mehr wirkt man der Integration entgegen. Dazu muss man die Saturationspunkte der Nichtlinearität kennen.

### Bumpless Transfer

Um ein System zu testen, macht es oft Sinn einen Manuellen Modus (M) und einen Automatischen Modus (A) zu haben. Wenn man von einem Modus in den anderen wechselt, will man dies so reibungslos wie möglich machen (Bumpless Transfer). Dazu verwendet man folgende Regelstruktur:

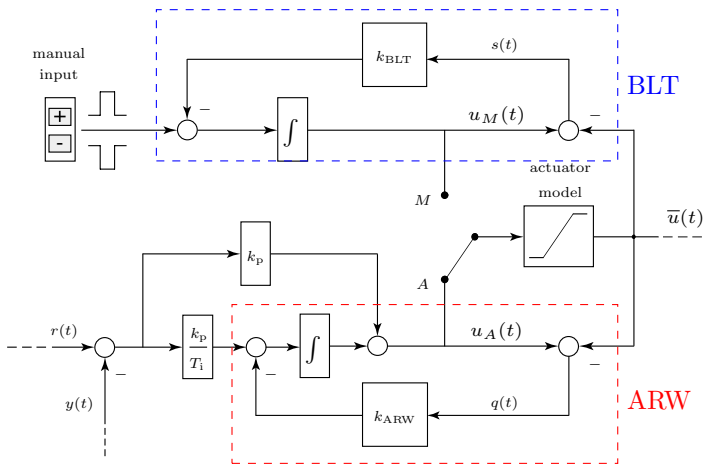


Abb. 4: Anti Reset Windup (ARW) und Bumpless Transfer (BLT) Regelung.

Während man im Modus A ist, regelt man  $u_M(t)$  auf  $u_A(t)$ , sodass beim Wechsel von A nach M kein Sprung in der Eingangsgrösse auftritt. Umgekehrt regelt man im Modus M mit Hilfe der ARW-Rückführung das Signal  $u_A(t)$  auf  $u_M(t)$ .

### Gain Scheduling

Gain Scheduling wird meist für nichtlineare Systeme verwendet, die um verschiedene Betriebspunkte linearisiert werden. Für jeden Betriebspunkt kann ein anderer linearer Regler ausgelegt werden.

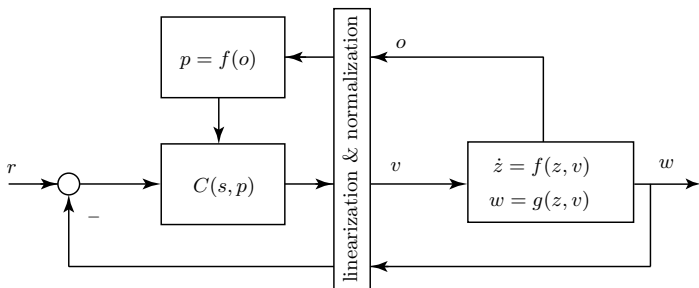


Abb. 5: Diagramm zu Gain Scheduling.

Beispielsweise werden für einen PI-Regler die Verstärkungen  $k_p(o)$ ,  $T_i(o)$  zu Funktionen des Betriebspunktes  $o$ .

### Analoge Realisierung

Mit analogen Schaltungen kann man eine Eingangsspannung  $U_e$  in eine Ausgangsspannung  $U_a$  umwandeln. Dabei kann man die Grundstruktur in Abb. 6 verwenden.

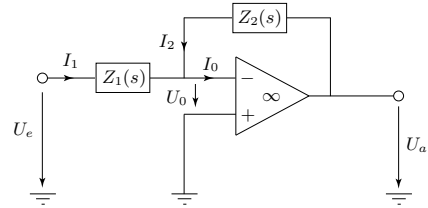


Abb. 6: Grundstruktur mit idealem analogem Opamp.

Die Übertragungsfunktion von  $U_e(s)$  nach  $U_a(s)$  lautet

$$\Sigma(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)},$$

wobei  $Z_1(s)$  und  $Z_2(s)$  aus Widerständen ( $R$ ), Induktoren ( $L$ ) und Kapazitäten ( $C$ ) aufgebaut sind. Die Impedanzen der Standard RLC-Elemente lauten:

$$Z_R(s) = R, \quad Z_L(s) = sL, \quad Z_C(s) = \frac{1}{sC}.$$

Des Weiteren gelten die Kirchhoffschen Regeln für Serien- und Parallelschaltungen dieser Elemente.

## 2 Algebraische Stabilitätskriterien

Die folgenden zwei Verfahren testen, ob alle Realteile der Nullstellen eines Polynoms  $p(s)$  negativen Realteil haben.

$$p(s) = a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0, \quad a_n > 0$$

Dabei ist  $a_i > 0 \forall i$  notwendig, aber nicht hinreichend.

Die Verfahren können auf das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion eines Systems  $\Sigma(s)$  angewendet werden, um zu bestimmen, ob das System  $\Sigma(s)$  stabil ist.

### Hurwitz Kriterium

Die Koeffizienten  $a_i$  sind exakt bekannt. Die Nullstellen des Polynoms  $p(s)$  haben garantiert alle negative Realteile dann und nur dann, wenn die  $n$  quadratischen Sub-Matrizen  $H_1$  bis  $H_n$  der Matrix  $H_n$  alle eine strikt positive Determinante haben.

$$H_n = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & H_n \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

### Kharitonov Kriterium

Die Koeffizienten  $a_i$  seien nicht exakt bekannt, man weiss jedoch, dass sie in einer gewissen Region liegen:

$$p(s, a) = [\underline{a}_n, \bar{a}_n] \cdot s^n + [\underline{a}_{n-1}, \bar{a}_{n-1}] \cdot s^{n-1} + \dots + [\underline{a}_0, \bar{a}_0]$$

Das Problem reduziert sich auf die Ecken eines Rechtecks in der komplexen Ebene und es müssen nur folgende Polynome mit dem Hurwitz-Kriterium getestet werden:

$$\begin{aligned} p_1(s) &= \bar{a}_0 + \underline{a}_1 \cdot s + \underline{a}_2 \cdot s^2 + \bar{a}_3 \cdot s^3 + \dots \\ p_2(s) &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot s + \underline{a}_2 \cdot s^2 + \underline{a}_3 \cdot s^3 + \dots \\ p_3(s) &= \underline{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot s + \bar{a}_2 \cdot s^2 + \underline{a}_3 \cdot s^3 + \dots \\ p_4(s) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1 \cdot s + \bar{a}_2 \cdot s^2 + \bar{a}_3 \cdot s^3 + \dots \end{aligned}$$

## Regelungstechnik II FS 2021

## Diskrete Regelung

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

## Zusammenfassung Vorlesung 5

## Buch Kapitel 14.4

Bei Fragen: hraffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 25. März 2021

## 1 Einleitung: Diskrete Regelung

In diesem Kapitel wird ein zeitkontinuierlicher Regler  $C(s)$  in einen zeitdiskreten Regler  $C(z)$  umwandelt. Die Diskretisierung bezieht sich in dem Fall auf eine Zeitdiskretisierung.

## Zeitdiskrete Realisierung

Bis jetzt wurde angenommen, dass ein Regler  $C(s)$  in jedem Zeitpunkt  $t$  berechnen kann, was  $u(t)$  sein soll. In der Realität läuft die Rechnung mit einer fixen Taktfrequenz  $f_s$ . D.h. es können in Wirklichkeit nur zu fixen Zeitpunkten  $t_k$  neue Eingänge  $u(k \cdot T_s) = u[k]$  berechnet werden, wobei  $T_s$  die Samplingzeit bezeichnet:

$$t_k = \frac{k}{f_s} = k \cdot T_s, \quad k \in \{0, 1, \dots\} \quad (1)$$

Die Diskretisierung findet statt, da der Mikroprozessor ( $\mu P$ ), der die Rechnungen ausführt, mit einer fixen Frequenz läuft (dargestellt durch die Uhr in Abb. 1).

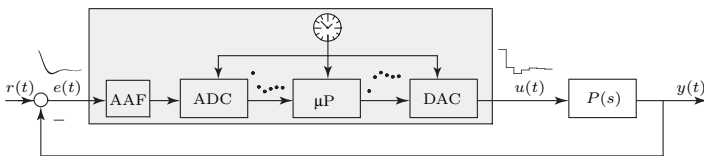


Abb. 1: Digitales Regelsystem.

ADC: Steht für Analog-to-Digital Converter. Konvertiert zeitkontinuierliche Signale in zeitdiskrete Signale.

$\mu P$ : Steht für Mikroprozessor. Berechnet den zeitdiskreten Eingang  $u[k]$ .

DAC: Steht für Digital-to-Analog Converter. Konvertiert zeitdiskrete Signale in zeitkontinuierliche Signale.

Der DAC wird meistens mit einem *Zero-Order Hold* (ZOH) Element realisiert, wobei der Eingang  $u[k]$  zwischen zwei Berechnungsschritten konstant gehalten wird:

$$u(t) = u[k] \quad \forall t \in [k \cdot T_s, (k+1) \cdot T_s)$$

**Beispiel:** Ein Signal  $x(t)$  wird zuerst abgetastet, und dann wird ein ZOH angewandt.

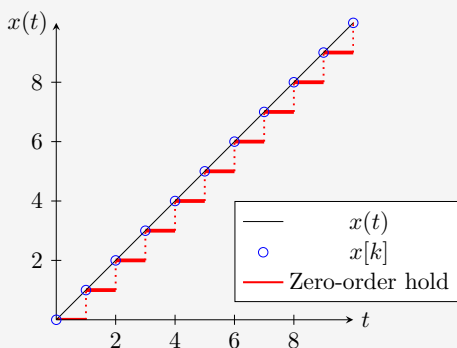
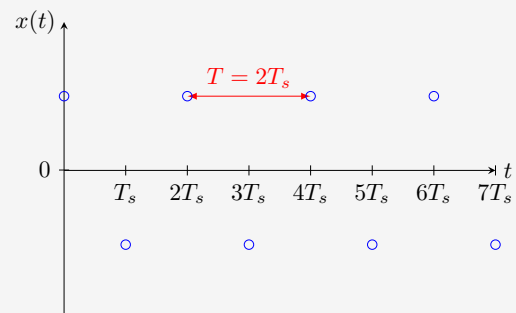


Abb. 2: Abgetastetes Signal in blauen Kreisen, ZOH in rot.

Das Sampling geschieht mit einem ADC. Der ZOH-Prozess läuft im DAC ab.

In Abb. 1 ist in der grauen Box noch ein weiteres Element: der analoge Anti-Aliasing Filter (AAF). Der AAF ist nötig, da ein zeitdiskretes Signal nicht beliebig hohe Frequenzen repräsentieren kann. Energien der Frequenzen im analogen Signal, die höher als die maximal repräsentierbare Frequenz sind, werden bei der Diskretisierung ungewollt auf das gesamte Frequenzspektrum verteilt und verzerren dieses somit. Deshalb wählt man für den AAF einen Tiefpassfilter um hohe Frequenzen vor der Diskretisierung zu eliminieren.

**Beispiel:** Du sollst ein diskretes Signal zeichnen, das für eine fixe Rate  $f_s = \frac{1}{T_s}$  die höchstmögliche Frequenz hat.

Abb. 3: Signal mit höchstmöglicher Frequenz für ein gegebenes  $T_s$ .

Die höchstmögliche Frequenz  $f_{\max}$ , die man in das Zeitraster  $\{0, T_s, 2T_s, \dots\}$  legen kann, wird als **Nyquist-Frequenz** bezeichnet und lautet:

$$f_{\max} = \frac{1}{T} = \frac{1}{2T_s}, \quad [f_{\max}] = \text{Hz}$$

## z-Transformation

Um einen diskreten Regler  $C(z)$  zu erstellen, verwendet man das diskrete Analogon der Laplace-Transformation, die Z-Transformation:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \cdot x[k]$$

Einige wichtige Eigenschaften der Z-Transformation:

$$x[k+1] \leftrightarrow z \cdot X(z) - z \cdot x[0] \quad (2)$$

$$x[k-1] \leftrightarrow z^{-1} \cdot X(z) \quad (3)$$

$$z = e^{s \cdot T_s} \quad (4)$$

In der diskreten Welt ist die unabhängige Variable nicht mehr  $s$ , sondern  $z$ . Gl. (4) liefert die exakte Beziehung zwischen  $s \in \mathbb{C}$  und  $z \in \mathbb{C}$ .

**Beispiel:** Mit Gl. (4) kann man das diskrete Äquivalent eines asymptotisch stabilen Pols nach Lyapunov herleiten:

$$z = e^{\sigma T_s + \omega T_s j} = e^{\sigma T_s} \cdot e^{\omega T_s j} = a \cdot e^{\omega T_s j}$$

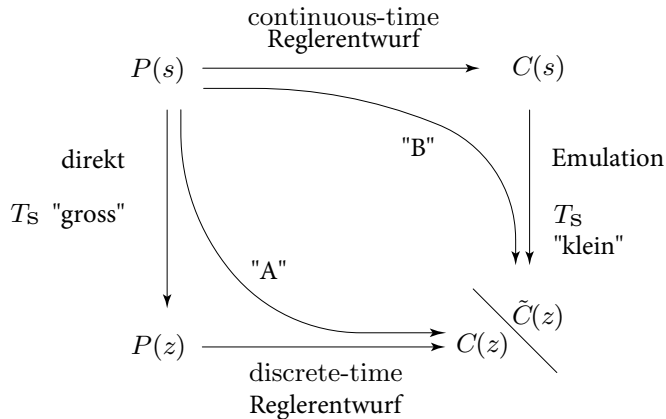
$$\text{asympt. stabil} \rightarrow \sigma < 0 \rightarrow 0 < a < 1$$

$$|z| = a \rightarrow |z| < 1$$

D.h. die ganze linke Halbebene ( $\sigma < 0$ , asymptotisch stabile Pole) im  $s$ -Raum wird zu einer Scheibe mit Radius 1 ( $|z| < 1$ ) im  $z$ -Raum. Der Kreis mit Radius 1 ist nicht inbegriffen.

## 2 Entwurf diskreter Regler

Beim Entwurf diskreter Regler werden grundsätzlich zwei mögliche Pfade unterschieden, im Folgenden **Pfad A** und **Pfad B** genannt.



### Pfad A: Diskreter Reglerentwurf

Wenn die Samplingzeit  $T_s$  relativ gross ist im Vergleich zur Dynamik/Zeitkonstante des Systems.

1. System  $P(s)$  mit einem Zero-Order Hold diskretisieren, es resultiert  $P(z)$ , eine diskrete Systembeschreibung.
2. Diskreten Regler  $C(z)$  basierend auf  $P(z)$  entwerfen.

Es existiert eine ausführliche Theorie zum Entwurf diskreter Regler  $C(z)$  basierend auf diskreten Systemen  $P(z)$ . Dies wird in der Vorlesung RT2 jedoch nicht besprochen.

### Pfad B: Emulation

Wenn die Samplingzeit  $T_s$  relativ klein ist im Vergleich zur Dynamik des Systems (was häufig der Fall ist).

1. Mit der Theorie aus RT1 und RT2 wird ein kontinuierlicher Regler  $C(s)$  für das System  $P(s)$  ausgelegt.
2. Mit einer Emulation wird  $\tilde{C}(z)$ , eine diskrete Version des kontinuierlichen Reglers  $C(s)$ , erstellt.

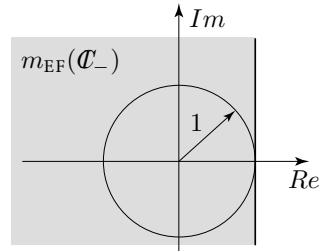
### Emulation

Durch eine Emulation wird die Variable  $s$  im kontinuierlichen Zeitbereich mit der Variable  $z$  im diskreten Zeitbereich ersetzt. Exakt ist das möglich mit Gl. (4). Unglücklicherweise ist Gl. (4) nichtlinear und deshalb praktisch nicht umsetzbar. Deshalb approximiert man den Zusammenhang häufig, ein Schritt der *Emulation* genannt wird. Emulationen sind dann sinnvoll, wenn die diskreten Zeitschritte  $T_s$  klein sind im Vergleich zur Dynamik des beschriebenen Systems. Es gibt mehrere Approximationen für Gl. (4), die die Emulation mit der Approximation  $e^x \approx 1 + x$  erleichtern. Dabei wird Gl. (4) jeweils etwas anders geschrieben.

Welche der folgenden Emulationen am sinnvollsten ist, hängt vom jeweiligen spezifischen Problem ab und muss über Computersimulationen des Regelsystems oder über Experimente am realen System ermittelt werden. Oft lohnt es sich die einfachste, garantiert Stabilität erhaltende Methode zu verwenden (Euler Backward), häufig wird jedoch auch die Tustin Emulation benutzt.

### Euler Forward Emulation

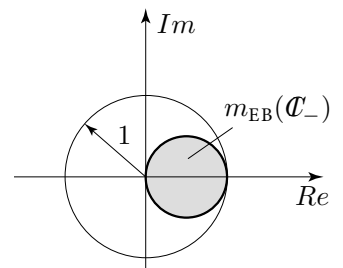
$$z = e^{s \cdot T_s} \\ \approx 1 + s \cdot T_s \\ \Rightarrow s \approx \frac{z - 1}{T_s}$$



Mit der Euler Forward Emulation wird die linke Halbebene in der  $s$ -Ebene ( $\text{Re}(s) < 0$ ) auf den grau hinterlegten Bereich in der  $z$ -Ebene abgebildet. D.h. stabile Pole in  $C(s)$  können zu instabilen Polen in  $\tilde{C}(z)$  werden. (Siehe Beispiel oben: ein stabiles System in der  $z$ -Ebene hat alle Pole innerhalb des Kreises mit Radius 1 um den Ursprung.) Für den Regelkreis kann das fatale Folgen haben, weshalb diese Emulation meist nicht verwendet wird.

### Euler Backward Emulation

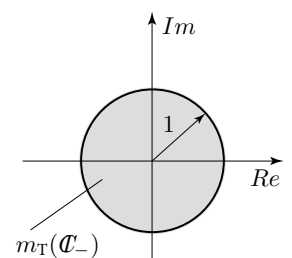
$$z = \frac{1}{e^{-s \cdot T_s}} \\ \approx \frac{1}{1 - s \cdot T_s} \\ \Rightarrow s \approx \frac{z - 1}{z \cdot T_s}$$



Mit der Euler Backward Emulation wird die linke Halbebene in der  $s$ -Ebene auf den gezeigten Bereich in der  $z$ -Ebene abgebildet. D.h. alle stabilen Pole in  $C(s)$  werden garantiert zu stabilen Polen in  $\tilde{C}(z)$ . Ein stabiler Regler  $C(s)$  resultiert also in einem garantiert stabilen Regler  $\tilde{C}(z)$ .

### Tustin Emulation (Bilineare Emulation)

$$z = \frac{e^{sT_s/2}}{e^{-sT_s/2}} \\ \approx \frac{1 + sT_s/2}{1 - sT_s/2} \\ \Rightarrow s \approx \frac{2(z - 1)}{T_s(z + 1)}$$



Mit der Tustin Emulation wird die linke Halbebene in der  $s$ -Ebene auf den Kreis mit Radius kleiner eins ( $|z| < 1$ ) in der  $z$ -Ebene abgebildet. Das bedeutet, dass alle stabilen Pole in  $C(s)$  garantiert zu stabilen Polen in  $\tilde{C}(z)$  werden. Ein stabiler Regler  $C(s)$  wird also zu einem garantiert stabilen Regler  $\tilde{C}(z)$ .

**Beispiel:** Für ein System wurde ein zeitkontinuierlicher PI-Regler  $C(s)$  ausgelegt:

$$C(s) = k_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} \right)$$

Der Regler soll schlussendlich auf einem Mikroprozessor laufen und muss daher in diskreter Form implementiert werden. Dazu gehen wir in zwei Schritten vor.

1. *Emulation:* Beispielhaft wenden wir die Euler Backward Emulation an und erhalten so die diskrete Version  $\tilde{C}(z)$  des PI-Reglers:

$$\tilde{C}(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{z \cdot T_s}} = k_p \cdot \frac{(T_i + T_s) \cdot z - T_i}{T_i \cdot (z - 1)}$$

2. *Implementierung:* Zur Erinnerung: die diskrete Übertragungsfunktion  $\tilde{C}(z)$  des Reglers beschreibt den Zusammenhang zwischen der Z-Transformation des Regelfehlers  $E(z)$  und dem Reglerausgang  $U(z)$ :

$$\tilde{C}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} \rightarrow U(z) = \tilde{C}(z) \cdot E(z)$$

Einsetzen der Übertragungsfunktion des Reglers liefert:

$$T_i \cdot (z - 1) \cdot U(z) = k_p \cdot ((T_i + T_s) \cdot z - T_i) \cdot E(z)$$

Wir multiplizieren auf beiden Seiten mit  $z^{-1}$  und erhalten:

$$T_i \cdot U(z) - T_i \cdot z^{-1} \cdot U(z) = k_p \cdot (T_i + T_s) \cdot E(z) - k_p \cdot T_i \cdot z^{-1} \cdot E(z)$$

Durch Anwendung der Definition der Z-Transformation in Gl. (3) und Umformen erhalten wir schlussendlich eine Differenzgleichung, die einfach implementiert werden kann:

$$u[k] = u[k - 1] + k_p \cdot \frac{T_i + T_s}{T_i} \cdot e[k] - k_p \cdot e[k - 1]$$

Dabei hängt der Input  $u[k]$  vom Fehler zum Zeitpunkt  $k$  sowie vom Input und vom Fehler aus dem vorherigen Zeitschritt  $k - 1$  ab.

*Bemerkung:* Durch das Multiplizieren mit  $z^{-1}$  haben wir die gesamte Differenzgleichung um einen Index verschoben. Ohne diesen Zwischenschritt hätten wir Gl. (2) anwenden können und hätten die folgende Beschreibung erhalten:

$$u[k + 1] = u[k] + k_p \cdot \frac{T_i + T_s}{T_i} \cdot e[k + 1] - k_p \cdot e[k]$$

Der Unterschied liegt nur in der Definition des *aktuellen* Zeitschrittes. Die Frage ist: verwenden wir die Werte aus dem vorherigen Zeitschritt ( $k - 1$ ) um den jetzigen Reglerausgang ( $k$ ) zu berechnen, oder verwenden wir die aktuellen Werte ( $k$ ) um den nächsten Ausgangswert ( $k + 1$ ) zu berechnen? In jedem Fall ist der Reglerausgang während eines gegebenen Zeitschrittes vom Fehler zu Beginn dieses Zeitschrittes sowie vom Fehler und dem Reglerausgang aus dem vorherigen Zeitschritt abhängig; für die Implementierung sind also beide Beschreibungen äquivalent.

## Regelungstechnik II FS 2021

## MIMO versus SISO Systeme

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Bei Fragen: hrffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 8. April 2021

## Zusammenfassung Vorlesung 6

## Skript Kapitel 1

## 1 Systembeschreibung

Bisher wurden SISO (single-input, single-output) Systeme betrachtet, d.h.  $u(t) \in \mathbb{R}$  und  $y(t) \in \mathbb{R}$ .

Neu werden MIMO (multiple-input, multiple-output) Systeme mit mehreren Ein- und Ausgängen betrachtet, wobei  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  und  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ . Identisch zum SISO Fall kann das MIMO System im Zustandsraum dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t), \quad y(t) \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \quad (1)$$

Da  $u(t)$  und  $y(t)$  jetzt Vektoren sind, müssen die Matrizen  $B$ ,  $C$  und  $D$  auf die Dimensionen der Eingänge und der Ausgänge angepasst werden. Das I/O (Input-Output) Verhalten des Systems in Gl. (1) wird identisch wie beim SISO Fall über die Laplace-Transformation hergeleitet:

$$\begin{aligned} s \cdot X(s) &= A \cdot X(s) + B \cdot U(s) \\ \Rightarrow X(s) &= (s \cdot I_{n \times n} - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) \\ \Rightarrow Y(s) &= \underbrace{(C \cdot (s \cdot I_{n \times n} - A)^{-1} \cdot B + D)}_{P(s)} \cdot U(s), \end{aligned} \quad (2)$$

wobei  $I_{n \times n}$  eine Einheitsmatrix der Dimension  $n \times n$  ist.

Da  $U(s) \in \mathbb{C}^m$  und  $Y(s) \in \mathbb{C}^p$  wird  $P(s)$  eine Matrix:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{1,1}(s) & P_{1,2}(s) & \dots & P_{1,m}(s) \\ P_{2,1}(s) & P_{2,2}(s) & \dots & P_{2,m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{p,1}(s) & P_{p,2}(s) & \dots & P_{p,m}(s) \end{bmatrix},$$

wobei jede Übertragungsfunktion  $P_{i,j}(s) : u_j \rightarrow y_i$  eine gebrochen-rationale Funktion darstellt:

$$P_{i,j}(s) = \frac{b_{m,i,j} \cdot s^m + \dots + b_{1,i,j} \cdot s + b_{0,i,j}}{s^n + a_{n-1,i,j} \cdot s^{n-1} + \dots + a_{1,i,j} \cdot s + a_{0,i,j}} = \frac{b_{i,j}(s)}{a_{i,j}(s)}$$

**Zur Erinnerung:**  $P(s)$  beinhaltet nur die gleichzeitig steuerbaren und beobachtbaren Teile des Systems in Gl. (1).

**Beispiel:** Das folgende System soll geregelt werden:

$$\begin{aligned} P(s) &= \begin{bmatrix} P_{1,1}(s) & P_{1,2}(s) \\ P_{2,1}(s) & P_{2,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{s+1} & \frac{a_{12}}{s+1} \\ \frac{a_{21}}{s+1} & \frac{a_{22}}{s+1} \end{bmatrix}, \\ U(s) &= \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}, \quad Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

Dabei seien  $r_1(t) = h(t)$  (Einheitssprung) und  $r_2(t) = 0$ . Um die Übertragungsfunktion von  $R(s)$  nach  $Y(s)$  zu finden wird die folgende Regelstruktur betrachtet

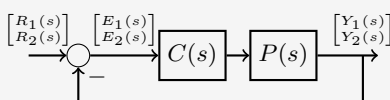


Abb. 1: Regelstruktur ohne Störung und ohne Rauschen.

Der Ausgang als Funktion des Fehlers lautet:

$$Y(s) = P(s) \cdot C(s) \cdot E(s) = P(s) \cdot C(s) \cdot [R(s) - Y(s)]$$

Daraus folgt:

$$Y(s) = [I + P(s)C(s)]^{-1} \cdot P(s) \cdot C(s) \cdot R(s)$$

**Vorsicht!** Die Reihenfolge der Matrixmultiplikation  $P(s) \cdot C(s)$  kann nicht umgedreht werden, da diese Operation für allgemeine Matrizen nicht kommutiert.

Das System  $P(s)$  wird nun für drei verschiedene Fälle der Verstärkung  $P(0)$  simuliert:

$$P(0) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

**Fall 1:**  $a_{11}, a_{22} \gg a_{12}, a_{21}$

Die Systemparameter werden beispielhaft  $a_{11} = a_{22} = 1$  und  $a_{12} = a_{21} = 0.1$  gewählt. Die Matrix  $P(0)$  ist diagonal dominant, es folgt näherungsweise

$$P(s) \approx \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{a_{22}}{s+1} \end{bmatrix}.$$

D.h. der Eingang  $u_1(t)$  wirkt nur auf  $y_1(t)$  und  $u_2(t)$  wirkt nur auf  $y_2(t)$ . Somit kann das Gesamtsystem in zwei SISO Systeme ( $r_1 \rightarrow y_1$  und  $r_2 \rightarrow y_2$ ) unterteilt werden. Die Reglermatrix wird unter dieser Annahme diagonal:

$$C(s) = \begin{bmatrix} C_1(s) & 0 \\ 0 & C_2(s) \end{bmatrix},$$

wobei im gegebenen Beispiel für  $C_1(s)$  und  $C_2(s)$  zwei identische PI-Regler mit  $k_p = 0.1$  und  $T_i = 0.1$  s gewählt werden.

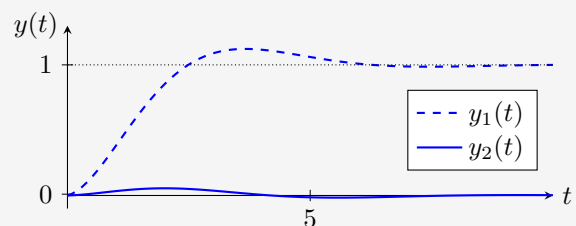


Abb. 2: Fall 1, MIMO Antwort für  $r_1(t) = h(t)$  und  $r_2(t) = 0$ .

Obwohl  $y_2(t)$  in Realität leicht vom Eingang  $u_1(t)$  abhängt (an der leichten Erhöhung von  $y_2(t)$  ersichtlich) lässt sich das System mit zwei separaten SISO-Reglern gut regeln.

**Fall 2:**  $a_{11}, a_{22} > a_{12}, a_{21}$

Die Diagonalelemente von  $P(0)$  sind zwar immer noch grösser, jedoch nicht gross genug um das MIMO System klar in zwei SISO Systeme zu separieren. Beispielhaft werden  $a_{11} = a_{22} = 1$  und  $a_{12} = a_{21} = 0.8$  gewählt. Der gleiche Regler  $C(s)$  wie im Fall 1 wird verwendet.



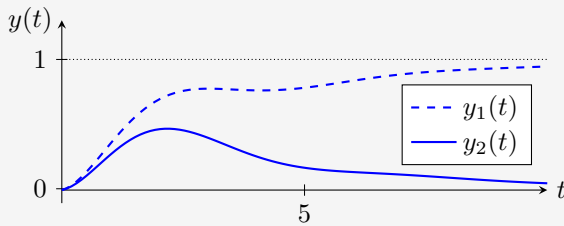


Abb. 3: Fall 2, MIMO Antwort für  $r_1(t) = h(t)$  und  $r_2(t) = 0$ .

Die Systemantwort ist sichtlich schlechter. Das liegt daran, dass der Eingang  $u_1(t)$  den Ausgang  $y_2(t)$  nach oben zieht, und der Eingang  $u_2(t)$  den Ausgang  $y_1(t)$  nach unten zieht.

**Fall 3:**  $a_{11}, a_{22} \ll a_{12}, a_{21}$

Falls die dominanten I/O Kanäle des Systems genau verkehrt geschätzt werden, destabilisiert sich das System mit dem Regler  $C(s)$  aus Fall 1.

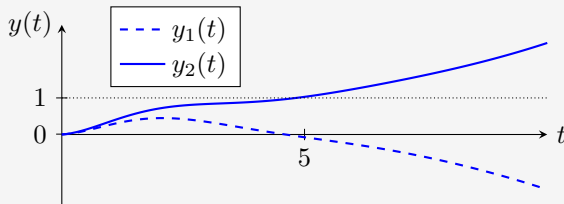


Abb. 4: Fall 3, MIMO Antwort für  $r_1(t) = h(t)$  und  $r_2(t) = 0$ .

Man könnte  $C(s)$  natürlich abändern, sodass  $C_1(s)$  und  $C_2(s)$  auf der Nebendiagonale liegen, dann wäre das Verhalten äquivalent zu Fall 1.

## 2 Stabilität, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Die Analyse von MIMO Systemen ist identisch zu derjenigen von SISO Systemen.

### Stabilität nach Lyapunov:

asymptotisch stabil nach Lyapunov:

Alle Eigenwerte von  $A$  haben negativen Realteil,  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ .

stabil nach Lyapunov:

Mindestens ein Eigenwert  $\lambda_k$  von  $A$  hat Realteil  $\text{Re}(\lambda_k) = 0$  und alle anderen Eigenwerte haben negative Realteile.

instabil nach Lyapunov:

Mindestens ein Eigenwert  $\lambda_k$  von  $A$  hat einen positiven Realteil  $\text{Re}(\lambda_k) > 0$ .

### Steuerbarkeit

Das System  $\{A, B, C, D\}$  ist vollständig steuerbar, falls die Steuerbarkeitsmatrix  $\mathcal{R}_n$  vollen Rang  $n$  hat.

$$\mathcal{R}_n = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times (n \cdot m)}$$

### Beobachtbarkeit

Das System  $\{A, B, C, D\}$  ist vollständig beobachtbar falls die Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathcal{O}_n$  vollen Rang  $n$  hat.

$$\mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n \cdot p) \times n}$$

## 3 Pole und Nullstellen

Einfluss und Bestimmung von Polen und Nullstellen eines Systems sind im MIMO Fall komplizierter als im SISO Fall.

### Definition Matrix Minoren (wichtiges Werkzeug)

Minoren einer Matrix sind die Determinanten aller quadratischen Submatrizen. Die Submatrizen werden durch Streichen einzelner Zeilen und Spalten der Matrix gebildet.

### Polstellen von MIMO Systemen

Die Pole von  $P(s)$  sind die Nullstellen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) der Nennerpolynome aller Minoren von  $P(s)$ .

### Nullstellen von MIMO Systemen

Die Nullstellen von  $P(s)$  sind die Nullstellen des grössten gemeinsamen Teilers (ggT) der Zähler der Minoren höchster Ordnung von  $P(s)$  nach der Normalisierung, bei der alle Pole von  $P(s)$  im Nenner stehen.<sup>1</sup>

**Zur Erinnerung:** Nullstellen  $s = \zeta_i$  sind nicht-triviale Frequenzen, bei denen für ein spezifisches Eingangssignal  $u(t)$  und spezifische Anfangsbedingungen  $x(0)$  gilt:  $y(t) = 0 \forall t$ . D.h. die Laplace-Transformation von Gl. (1) erfüllt

$$\begin{aligned} (s \cdot I_{n \times n} - A) \cdot X - B \cdot U &= 0, \\ C \cdot X + D \cdot U &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

wobei Gl. (4) nur eine nichttriviale Lösung hat, falls die folgende Matrix singular ist:

$$\begin{bmatrix} (s \cdot I_{n \times n} - A) & -B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

### Beispiel:

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{2(s+2)}{s+1} & \frac{3}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

wird auf Polstellen und Nullstellen analysiert.

### Pole Schritt 1: Minoren finden

$$\frac{2(s+2)}{s+1}, \frac{3}{s+1}, \frac{1}{s+1}, \frac{1}{s+2}, \frac{2s-1}{(s+1)^2}$$

### Pole Schritt 2: Das kgV der Pole aller Minoren finden

$$p(s) = (s+1)^2 \cdot (s+2)$$

$\Rightarrow P(s)$  hat somit eine zweifache Polstelle bei  $s = -1$  und eine einfache Polstelle bei  $s = -2$ .

### Nullstellen Schritt 1: Minoren höchster Ordnung finden<sup>a</sup>

$$\frac{2s-1}{(s+1)^2}$$

**Nullstellen Schritt 2:** Minoren höchster Ordnung normalisieren, sodass alle Pole im Nenner stehen:

$$\frac{(2s-1)}{(s+1)^2} \cdot \frac{(s+2)}{(s+2)}$$

**Nullstellen Schritt 3:** Übertragungs-Nullstellen sind die Nullstellen des ggT der Zähler der normalisierten Minoren höchster Ordnung

$$\text{ggT: } (2s-1)(s+2)$$

$\Rightarrow P(s)$  hat somit eine einfache Nullstelle bei  $s = \frac{1}{2}$  und eine einfache Nullstelle bei  $s = -2$ .

<sup>a</sup>Quadratische Matrizen haben immer einen Minor höchster Ordnung.

<sup>1</sup>Die Textdefinition ist eher schwer verständlich. Es empfiehlt sich das Verfahren mittels Beispielen zu verstehen.

## Regelungstechnik II FS 2021

## Relative-Gain Array (RGA), Singulärwerte

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Bei Fragen: hraffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 22. April 2021

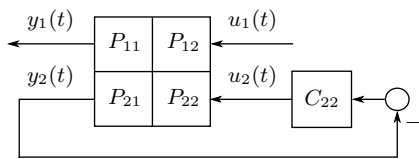
## Zusammenfassung Vorlesung 7

## Skript Kapitel 2

## 1 Relative Gain Array (RGA)

Mit dem Relative Gain Array (RGA) kann man bestimmen, ob ein MIMO-System gut mit separaten SISO-Reglern regelbar ist. Dazu wird die Verstärkung  $|P_{ij}(j\omega)|$  jeder Übertragungsfunktion von Eingang  $u_j$  auf Ausgang  $y_i$  bei Frequenz  $\omega$  für zwei Extremfälle betrachtet. Das Verhältnis der beiden Werte ist der Relative Gain. Das RGA ist schlussendlich eine Matrix mit den Verhältnissen aller Übertragungsfunktionen bei einer gegebenen Frequenz  $\omega$ .

Die Extremfälle für die Übertragungsfunktion  $P_{11}$  werden illustrativ mit folgender Abbildung dargestellt:



Der Regler  $C_{22}$  sollte dabei als eine Art hypothetische Grösse verstanden werden, mit der entweder  $u_2(t) = 0$  oder  $y_2(t) = 0$  gesetzt werden kann, mehr dazu im Folgenden.

**Extremfall 1: "open-loop"**  $\leftrightarrow C_{22} = 0$

Das System wird "open-loop" betrachtet: Es wird angenommen dass der Regler  $C_{22} = 0$  ist, d.h. dass nur der Eingang  $u_1$  den Ausgang  $y_1$  beeinflusst während im allgemeinen Fall alle anderen Eingänge null sind:  $u_j = 0 \forall j \setminus \{1\}$ . In diesem Fall ist die Übertragungsfunktion von  $u_1$  auf  $y_1$ :

$$P_{u_1 \rightarrow y_1}(s) = P_{11}(s).$$

**Extremfall 2: "perfect closed-loop"**  $\leftrightarrow C_{22} = \infty$

Es wird angenommen, dass im allgemeinen Fall alle Ausgänge ausser der betrachtete Ausgang  $y_1$  perfekt auf null geregelt werden, d.h.  $y_i = 0 \forall i \setminus \{1\}$ . Im gegebenen Beispiel heisst das, dass  $u_2(t)$  so gewählt ist, dass  $y_2(t) = 0 \forall t$ . Dies wird schematisch mit einem Regler unendlicher Verstärkung  $C_{22} = \infty$  dargestellt. Dann ist die Übertragungsfunktion von  $u_1$  auf  $y_1$ :

$$P_{u_1 \rightarrow y_1}(s) = \frac{P_{11}(s) \cdot P_{22}(s) - P_{12}(s) \cdot P_{21}(s)}{P_{22}(s)}.$$

**Der Relative Gain** ist das resultierende Verhältnis zwischen open-loop und closed-loop Verhalten:

$$[RGA(s)]_{11} = \frac{P_{11}(s) \cdot P_{22}(s)}{P_{11}(s) \cdot P_{22}(s) - P_{12}(s) \cdot P_{21}(s)}.$$

Dieses Verhältnis hat eine sehr schöne Interpretation: Es widerspiegelt die Änderung der Verstärkung von Eingang  $u_1$  auf Ausgang  $y_1$  im Fall, dass alle anderen Regelkreise des MIMO Systems perfekt geschlossen werden. Der Relative Gain beantwortet also die Frage: "Wenn ein Regler vom Eingang  $u_1$  auf den Ausgang  $y_1$  basierend auf dem open-loop System  $P_{11}$  ausgelegt wird, welche veränderten Verhältnisse trifft dieser Regler an, wenn er schlussendlich im geregelten MIMO-System verwendet wird?"

**SISO-fähiges  $P_{ij}(s) \leftrightarrow [RGA(s)]_{ij} \approx 1$**

Die Verstärkung von Eingang  $u_j$  auf Ausgang  $y_i$  im closed-loop geregelten MIMO-System ist identisch zur Verstärkung der Übertragungsfunktion  $P_{ij}(s)$ . Basierend auf  $P_{ij}(s)$  kann also ein sinnvoller Regler entworfen werden, der den Ausgang  $y_i$  mit dem Eingang  $u_j$  regelt.

**Nicht SISO-fähiges  $P_{ij}(s) \leftrightarrow [RGA(s)]_{ij} \approx 0$**

Die Verstärkung der Übertragungsfunktion  $P_{ij}(s)$  ist vernachlässigbar im Vergleich zur resultierenden Verstärkung von Eingang  $u_j$  auf Ausgang  $y_i$  im closed-loop geregelten MIMO System. Basierend auf  $P_{ij}(s)$  kann also kein sinnvoller Regler entworfen werden, der den Ausgang  $y_i$  mit dem Eingang  $u_j$  regelt.

**Instabiles Verhalten für  $P_{ij}(s) \leftrightarrow [RGA(s)]_{ij} < 0$**

Das Vorzeichen der Verstärkung der Übertragungsfunktion von  $u_j$  auf  $y_i$  im MIMO System unterscheidet sich vom Vorzeichen von  $P_{ij}(s)$ . D.h. ein SISO-Regler, ausgelegt basierend auf  $P_{ij}(s)$ , hat, wenn er im closed-loop geregelten MIMO-System verwendet wird, eine entgegengesetzte Wirkung. Dieser Regler entspricht einem positiven Feedback, das MIMO System kann mit diesem Regler also destabilisiert werden.

**Das RGA** ist die Matrix mit den Relative Gains aller Übertragungsfunktionen als Einträgen.

Das RGA einer  $2 \times 2$  Regelstrecke  $P(s)$  ist:

$$RGA(s) = \begin{bmatrix} \frac{P_{11}P_{22}}{P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}} & \frac{-P_{12}P_{21}}{P_{22}P_{11} - P_{21}P_{12}} \\ \frac{-P_{12}P_{21}}{P_{22}P_{11} - P_{21}P_{12}} & \frac{P_{11}P_{22}}{P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Das RGA eines allgemeinen MIMO-Systems  $P(s)$  kann wie folgt berechnet werden:

$$RGA(s) = P(s) \cdot \times P(s)^{-T},$$

wobei  $\cdot \times$  eine elementweise Multiplikation beschreibt und  $P(s)^{-T}$  die Inverse der Transponierten ist.

**Eigenschaften des RGA:**

Aus Gl. (1) ist ersichtlich, dass die Summe der Spalten und der Zeilen des RGA immer 1 ergeben. Dies gilt auch für RGAs höherer Ordnung.

Dies führt, kombiniert mit der obigen Analyse zu den individuellen Einträgen  $[RGA(s)]_{ij}$ , zu folgendem Fazit:

Falls das RGA bei einer gegebenen Frequenz  $\omega$  ungefähr eine Einheitsmatrix ist:

$$|RGA(j\omega)| \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dann ist das betrachtete MIMO-System bei dieser Frequenz mit individuellen SISO-Reglern regelbar. Oder allgemein: falls in jeder Zeile/Spalte ein Eintrag sehr nahe bei 1 ist und die anderen nahe bei 0, sind diese Kombinationen von Ein- und Ausgängen gut mit einem SISO-Regler regelbar.

**Beispiel:** Das RGA des Systems

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{\tau s + 1} & \frac{a_{12}}{\tau s + 1} \\ \frac{a_{21}}{\tau s + 1} & \frac{a_{22}}{\tau s + 1} \end{bmatrix}$$

lautet

$$\text{RGA}(s) = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{-a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ \frac{-a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{bmatrix}$$

Es werden 3 verschiedene Fälle betrachtet.

**Fall 1:**  $a_{11} = a_{22} = 1$ ,  $a_{12} = a_{21} = 0.1$

Das RGA lautet:

$$\text{RGA}(s) = \begin{bmatrix} 1.01 & -0.01 \\ -0.01 & 1.01 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⇒ Das System kann gut mit 2 separaten SISO-Reglern geregelt werden,  $y_1$  wird mit  $u_1$  geregelt,  $y_2$  mit  $u_2$ .

**Fall 2:**  $a_{11} = a_{22} = 0.1$ ,  $a_{12} = a_{21} = 1$

Das RGA lautet:

$$\text{RGA}(s) = \begin{bmatrix} -0.01 & 1.01 \\ 1.01 & -0.01 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

⇒ Das System kann gut mit 2 separaten SISO-Reglern geregelt werden.  $y_1$  wird mit  $u_2$  geregelt,  $y_2$  mit  $u_1$ .

**Fall 3:**  $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 1$ ,  $a_{21} = -1$

Das RGA lautet:

$$\text{RGA}(s) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

⇒ Die einzelnen Ausgänge lassen sich schlecht mit individuellen Eingängen regeln, da im MIMO-System starke Quereinflüsse vom jeweils anderen Eingang zu erwarten sind.

## 2 Singulärwerte

Im Folgenden werden Eigenschaften zur linearen Abbildung

$$y = M \cdot u, \quad u \in \mathbb{C}^m, \quad y \in \mathbb{C}^p, \quad M \in \mathbb{C}^{p \times m}$$

beschrieben. Insbesondere erfüllt der Ausgang  $y$  folgende wichtige Eigenschaft:

$$\sigma_{\min}(M) \leq \frac{\|y\|}{\|u\|} \leq \sigma_{\max}(M),$$

wobei  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm ist und

$$\sigma_i(M) = \sqrt{\lambda_i(\bar{M}^\top \cdot M)} > 0,$$

die Singulärwerte der Matrix  $M$  sind.  $\bar{M}^\top$  ist die Transponierte der Komplex-konjugierten von  $M$ . Die Singulärwertzerlegung (SVD) der Matrix  $M$  lautet:

$$M = U \cdot \Sigma \cdot \bar{V}^\top,$$

wobei  $\Sigma$  die Singulärwerte  $\sigma_i$  auf der Hauptdiagonalen hat.  $U$  und  $\bar{V}^\top$  sind unitäre (längenerhaltende) Transformationsmatrizen:

$$U \cdot \bar{U}^\top = I, \quad V \cdot \bar{V}^\top = I$$

**Beispiel:** Alle Eingänge  $\{u \mid \|u\| = 1\}$  sollen mit

$$M = \begin{bmatrix} 0.4009 & -1.0133 \\ 1.4015 & -1.0480 \end{bmatrix}$$

abgebildet werden. Die Singulärwertzerlegung lautet:

$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}}_U \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}}_\Sigma \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V^\top}$$

Für die euklidische Norm beschreibt  $\|u\| = 1$  einen Kreis mit Radius 1. Der Kreis wird mit  $V^\top$  zuerst um  $\pi/4$  rotiert, dann werden die Hauptachsen des Kreises mit den Singulärwerten in  $\Sigma$  skaliert, sodass eine Ellipse entsteht. Letztendlich wird die Ellipse um  $\pi/3$  rotiert.

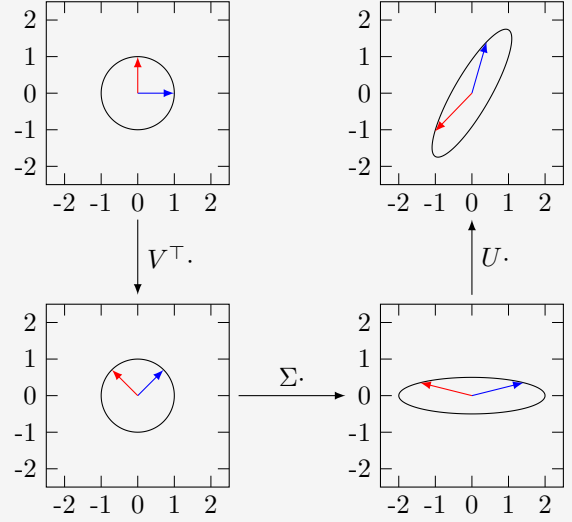
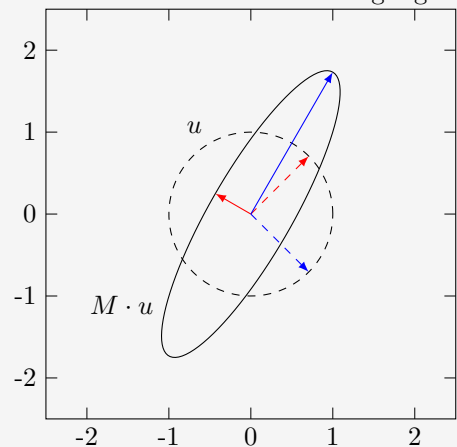


Abb. 1: Lineare Transformation  $M$  als Folge der Transformationen  $V^\top$ ,  $\Sigma$  und  $U$ .

Die Transformationen  $V^\top$  und  $U$  beschreiben in diesem Beispiel reine Rotationen. Spiegelungen sind auch möglich und erfüllen somit auch Unitarität. Zusätzlich sollen die Eingänge gefunden werden, die den Ausgang maximal und minimal anregen. Da die Zeilen der Matrix  $V^\top$  orthonormal sind, entsprechen die Zeilen von  $V^\top$  den Eingängen, die die Hauptachsen anregen. Das heißt

$$\begin{aligned} \|Y\| &= \sigma_{\min} \quad \text{für} \quad u = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ \|Y\| &= \sigma_{\max} \quad \text{für} \quad u = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Abb. 2: Minimale und maximale Anregungsrichtung.



## Regelungstechnik II FS 2021

## Frequenzantworten von MIMO Systemen

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

## Zusammenfassung Vorlesung 8

## Skript Kapitel 3

Bei Fragen: hraffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 29. April 2021

## 1 Frequenzantworten SISO - Recap

Ein lineares asymptotisch stabiles System  $P(s)$ , welches mit einem harmonischen Eingang

$$u(t) = \cos(\omega t) \cdot h(t)$$

bei der fixen Frequenz  $\omega$  angeregt wird ( $h(t)$  ist der Einheitsprung), produziert im eingeschwungenen Zustand ein harmonisches Signal bei derselben Frequenz:

$$y_\infty(t) = |P(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \angle P(j\omega))$$

Dabei ist die Systemantwort um  $\varphi(\omega) = \angle P(j\omega)$  phasenverschoben, und um  $m(\omega) = |P(j\omega)|$  skaliert. Um die Frequenzantwort übersichtlich darzustellen, können  $\angle P(j\omega)$  und  $|P(j\omega)|$  entweder gemeinsam in einem Nyquist-Diagramm dargestellt werden, oder separat in einem Bode-Diagramm.

## 2 Frequenzantworten MIMO

Im MIMO-Fall ist der Eingang  $u(t)$  ein Vektor harmonischer Funktionen:

$$u(t) = \begin{bmatrix} \mu_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \cdot h(t) \\ \mu_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \cdot h(t) \\ \dots \\ \mu_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_m) \cdot h(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Die Frequenzanalyse beschränkt sich auf eine gemeinsame frei wählbare Anregungsfrequenz  $\omega$  auf allen Kanälen. Die Anregungsmagnituden  $\mu_i$  und Anregungsphasen  $\varphi_i$  können separat gewählt werden. Die Laplace-Transformierte von Gl. (1) lautet:

$$U(s) = \begin{bmatrix} e^{\varphi_1 \cdot s/\omega} \cdot \mu_1 \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ e^{\varphi_2 \cdot s/\omega} \cdot \mu_2 \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \dots \\ e^{\varphi_m \cdot s/\omega} \cdot \mu_m \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

und kann mit den Definitionen  $\Phi = \text{diag}(\varphi_i) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und  $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_m]^T \in \mathbb{R}^m$  umgeschrieben werden zu:

$$U(s) = e^{\Phi \cdot s/\omega} \cdot \mu \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (3)$$

Ähnlich wie im SISO-Fall ist die Systemantwort im eingeschwungenen Zustand ein Vektor harmonischer Funktionen bei derselben Frequenz  $\omega$ :

$$y_\infty(t) = \begin{bmatrix} \nu_1 \cdot \cos(\omega t + \psi_1) \cdot h(t) \\ \nu_2 \cdot \cos(\omega t + \psi_2) \cdot h(t) \\ \dots \\ \nu_m \cdot \cos(\omega t + \psi_m) \cdot h(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Identisch zu Gl. (3) wird die Laplace-Transformierte von Gl. (4) mit den Definitionen  $\Psi = \text{diag}(\psi_i) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und  $\nu = [\nu_1, \dots, \nu_m]^T \in \mathbb{R}^m$  zu

$$Y(s) = e^{\Psi \cdot s/\omega} \cdot \nu \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \quad (5)$$

Die Frequenzantwort  $Y(j\omega)$  lautet

$$Y(j\omega) = P(j\omega) \cdot U(j\omega).$$

Einsetzen von Gl. (5) und Gl. (3) liefert

$$e^{j\Psi} \cdot \nu = P(j\omega) \cdot e^{j\Phi} \cdot \mu \quad (6)$$

**Bemerkung:** Gl. (6) beinhaltet den Term  $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$  nur deshalb nicht mehr, weil in der Konstruktion des Eingangs Gl. (1) die Frequenz auf allen Kanälen identisch gewählt wurde.

Gl. (6) hat die Form einer linearen Abbildung:

$$\underbrace{y}_{e^{j\Psi} \cdot \nu} = \underbrace{M}_{P(j\omega)} \cdot \underbrace{u}_{e^{j\Phi} \cdot \mu} \quad (7)$$

Eine lineare Abbildung  $y = M \cdot u$  erfüllt die Eigenschaft

$$\sigma_{\min}(M) \leq \frac{\|y\|}{\|u\|} \leq \sigma_{\max}(M), \quad (8)$$

wobei  $\sigma_{\min}(M)$  und  $\sigma_{\max}(M)$  der kleinste und grösste Singulärwert der Matrix  $M$  sind.

Einsetzen von Gl. (7) in Gl. (8) liefert:

$$\sigma_{\min}(P(j\omega)) \leq \frac{\|\nu\|}{\|\mu\|} \leq \sigma_{\max}(P(j\omega)) \quad (9)$$

wobei die Eigenschaft  $\|e^{j\Psi}\| = \|e^{j\Phi}\| = 1$  verwendet wurde.

Die Singulärwerte in Gl. (9) geben für den eingeschwungenen Zustand Schranken vor für den Betrag der Amplituden  $\|\nu\|$ . Sie sind ein Mass für die worst-case Amplitude die man bei der Anregung mit einer gegebenen Frequenz  $\omega$  erwarten kann.

**Beispiel:** Das System

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 0.3s + 1} & \frac{0.2}{s^2 + 0.5s + 1} \\ \frac{0.2}{s^2 + s + 1} & \frac{1}{s^2 + s + 1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

soll für  $\{\mu \mid \|\mu\| = 1\}$  bei  $\omega = 0.7 \text{ rad/s}$  so angeregt werden, dass  $\|\nu\| = \sigma_{\max}(P(j \cdot 0.7))$  gilt.

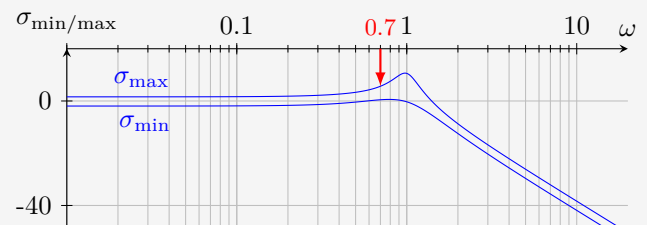


Abb. 1: Singulärwerte von  $P(j\omega)$  als Funktion der Frequenz

Die Berechnung der maximalen Singulärwerte bei  $\omega = 0.7 \text{ rad/s}$  liefert  $\sigma_{\max}(P(j \cdot 0.7)) = 1.914$ . Das heisst, man kann erwarten, dass die Ausgänge  $y_1$  und  $y_2$  je Amplituden  $\nu_1$  und  $\nu_2$  haben werden, die kleiner sind als 1.914.

Die Norm  $\|\nu\|$  jedoch wird bei der maximalen Anregung 1.914 sein. Um die Anregungsrichtung zu finden, bei der  $\|\nu\|$  maximal wird, verwendet man die Singulärwertzerlegung der Matrix  $P(j \cdot 0.7)$ :

$$P(j \cdot 0.7) = U \cdot \Sigma \cdot V^T = \begin{bmatrix} -0.8724 + 0.3635j & 0.3089 - 0.1068j \\ -0.2167 + 0.2447j & -0.6691 + 0.6675j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.914 & 0 \\ 0 & 1.056 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.9344 & -0.3525 + 0.0515j \\ 0.3562 & -0.9246 + 0.1351j \end{bmatrix}$$

Die maximale Anregungsrichtung entspricht der ersten Spalte von  $V$ , wenn der maximale Singulärwert in  $\Sigma$  an erster Stelle steht<sup>a</sup>. Zur Bemerkung: der maximale Singulärwert in  $\Sigma$  stimmt mit dem aus Abb. 1 ausgelesenen Singulärwert überein. Die maximale Richtung lautet somit:

$$\zeta_{\max} = \begin{bmatrix} -0.9344 \\ -0.3525 - 0.0515j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j \cdot \pi} & 0 \\ 0 & e^{-j \cdot 2.9965} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9344 \\ 0.3562 \end{bmatrix}$$

Der Eingang lautet damit:

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0.9344 \cdot \cos(0.7 \cdot t + \pi) \\ 0.3562 \cdot \cos(0.7 \cdot t - 2.9965) \end{bmatrix}$$

Eine Simulation des Systems mit Eingang  $u(t)$  liefert:

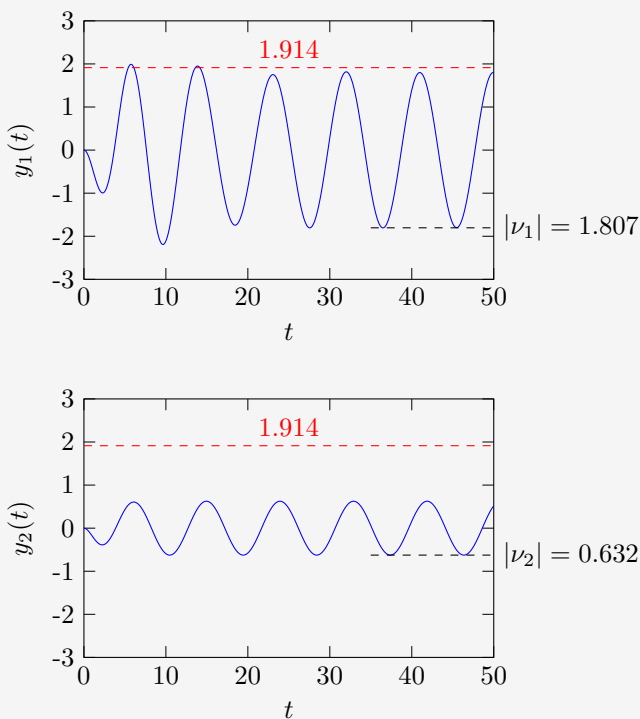


Abb. 2: Maximale kollektive Anregung der Eingänge  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  bei der Frequenz  $\omega = 0.7$  rad/s.

#### Bemerkungen zu diesem Beispiel:

- $|\nu_1| < \sigma_{\max} \Rightarrow y_{1,\infty} < \sigma_{\max}$
- $|\nu_2| < \sigma_{\max} \Rightarrow y_{2,\infty} < \sigma_{\max}$
- $\sqrt{|\nu_1|^2 + |\nu_2|^2} = 1.914 = \sigma_{\max}$  (nur weil die maximale Richtung angeregt wird)
- $y_1(t) > \sigma_{\max}$  für  $t \approx 5$  s, da das System noch nicht eingeschwungen ist

<sup>a</sup>Wo genau der maximale Singulärwert in der Matrix  $\Sigma$  eingetragen ist, hängt vom Algorithmus ab, der zur Berechnung der Singulärwerte verwendet wird. Normalerweise sind die Singulärwerte in der Matrix  $\Sigma$  der Grösse nach sortiert, sodass links oben der grösste Singulärwert steht und rechts unten der kleinste:  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_{\max}, \dots, \sigma_{\min})$ .

### 3 Singulärwertverläufe als Werkzeug in der Regelungstechnik

Die Singulärwertverläufe (wie in Abb. 1) können für beliebige Übertragungsfunktionen, wie z.B. die Sensitivität  $S(s)$ , die komplementäre Sensitivität  $T(s)$  oder die 'return difference'  $Q(s)$  berechnet werden:

$$T(s) = (I + P(s) \cdot C(s))^{-1} \cdot P(s) \cdot C(s)$$

$$S(s) = (I + P(s) \cdot C(s))^{-1}$$

$$Q(s) = I + P(s) \cdot C(s)$$

Mit der Definition der Systemnorm

$$\|G(s)\|_{\infty} = \max_{\omega} \left( \max_i \sigma_i(G(j\omega)) \right),$$

hat dann z.B. die Sensitivität eine schöne Interpretation. Die Systemnorm  $\|S(s)\|_{\infty}$  ist die maximal zu erwartende (worst-case) Verstärkung des Störungssignals.

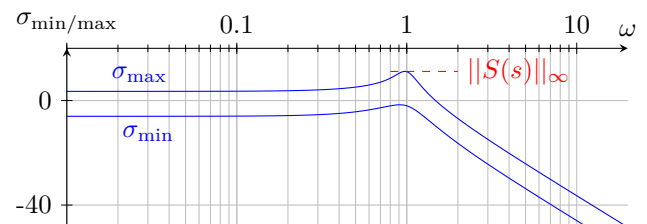


Abb. 3: Singulärwerte von  $S(j\omega)$  als Funktion der Frequenz in blau. Systemnorm in rot.

Falls die Systemnorm  $\|S(s)\|_{\infty}$  sehr klein ist, weiss man, dass man eine gute Störungsunterdrückung hat, da die Norm die maximale Verstärkung beschreibt.

Eine ähnliche Überlegung erlaubt es, mit der Minimum Return Difference (analog zum SISO-Fall) die Robustheit des Regelkreises im 'worst case' zu analysieren:

$$\mu_{\min} = \min_{\omega} \left( \min_i \sigma_i(I + L(j\omega)) \right).$$

#### Singulärwertverläufe vs. Bode-Verstärkungsverläufe:

Die Singulärwertverläufe sind also das MIMO-Analogon der SISO-Bode-Verstärkungsverläufe: basierend auf den Singulärwertverläufen lassen sich im MIMO Fall bei der Reglerauslegung und Sytemanalyse ähnliche Überlegungen machen wie in der SISO Reglerauslegung mit den Bode-Verstärkungsverläufen.

Der grosse Unterschied zwischen Singulärwertverläufen im MIMO-Fall und Bode-Verstärkungsverläufen im SISO-Fall ist, dass die Bode-Verläufe die effektive Verstärkung eines harmonischen Eingangssignales darstellen, während die Singulärwertverläufe nur eine worst-case Abschätzung sind.



## Regelungstechnik II FS 2021

## LQR State Feedback Regelung

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

## Zusammenfassung Vorlesung 9

## Skript Kapitel 4

Bei Fragen: hrfael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 6. Mai 2021

## 1 Infinite Horizon LQR Formulierung

Im Vergleich zu SISO-Reglern ist das Auslegen von MIMO-Reglern komplexer. Ein Ansatz, der einen intuitiven trade-off zwischen Regelfehler und Regleraufwand erlaubt, ist die *linear quadratic regulator* (LQR) Formulierung. Die Komponenten *linear*, *quadratic* und *regulator* werden nun separat betrachtet.

**Linear:** Das System, welches geregelt wird, ist *linear*:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m$$

**Quadratic:** Definition einer *quadratischen* Kostenfunktion:

$$J(u(t)) = \int_0^\infty \left( x(u(t))^\top \cdot Q \cdot x(u(t)) + u(t)^\top \cdot R \cdot u(t) \right) dt \quad (1)$$

Der optimale Eingang  $u^*(t)$  minimiert die Kostenfunktion  $J$ :

$$u^*(t) = \arg \min J(u(t))$$

Die Zustände  $x(t)$  und Eingänge  $u(t)$  werden im Optimierungsproblem mit  $Q$  und  $R$  gewichtet, wobei

$$Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad Q \succcurlyeq 0, \quad \text{und} \quad R = R^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad R \succ 0$$

Das Symbol  $\succcurlyeq$  heisst positiv semidefinit und  $\succ$  positiv definit. Die Definitheit der Matrizen  $Q$  und  $R$  ist notwendig, damit das Argument des Integrals in Gl. (1) quadratisch konvex ist. Somit ist das Minimum von  $J(u)$  einzigartig, falls es existiert.

**Regulator:** Der Regler löst das *regulator* Problem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Das heisst, der Regler bringt den Zustandsvektor in unendlicher Zeit in seinen Ursprung.

Die Matrizen  $Q$  und  $R$  sind einstellbare Grössen, welche verwendet werden, um das Optimierungsproblem so zu definieren, dass die resultierende Lösung zufriedenstellend ist. Mehr dazu später.

Beispielhaft werden zwei Fälle betrachtet:

$Q \uparrow \hat{=} R \downarrow$ <sup>1</sup> Je grösser  $Q$  relativ zu  $R$ , desto teurer ist es, wenn  $x(t)$  nicht im Ursprung ist. Das heisst, das System wird schnell an den Ursprung geregelt, um die Kosten tiefstmöglich zu halten. Dabei wird  $u(t)$  jedoch betragsmässig gross sein.

$Q \downarrow \hat{=} R \uparrow$  Je grösser  $R$  relativ zu  $Q$ , desto teurer ist es, viel Energie mit den Ausgangsgrössen auszugeben. Das heisst, das System wird langsam (mit betragsmässig kleinem Regelsignal  $u(t)$ ) in den Ursprung geregelt.

<sup>1</sup>Eine Erhöhung der Eigenwerte von  $Q$  hat den gleichen Effekt wie eine Reduzierung derer von  $R$ . Nur die relative Grösse ist von Relevanz.

## 2 Lösung der LQR-Formulierung

Die Lösung der LQR-Formulierung ist eine lineare Zustandsrückführung und lautet

$$u^*(t) = -K \cdot x(t), \quad \text{wobei} \quad K = R^{-1} \cdot B^\top \cdot \Phi \quad (2)$$

Dabei ist  $\Phi$  die einzige positiv definite Lösung der algebraischen Riccati Gleichung:

$$\Phi \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^\top \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^\top \cdot \Phi - Q = 0 \quad (3)$$

Wählt man

$$Q = \tilde{C}^\top \cdot \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad \text{wobei} \quad p = \text{rank}(Q)$$

dann existiert die positiv definite Matrix  $\Phi$  garantiert, falls  $\{A, B\}$  vollständig steuerbar und  $\{A, \tilde{C}\}$  vollständig beobachtbar sind. Diese Bedingungen sind hinreichend, aber nicht notwendig.

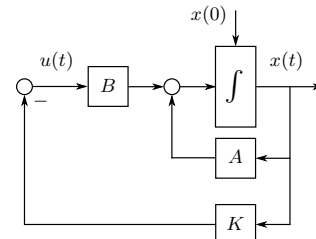


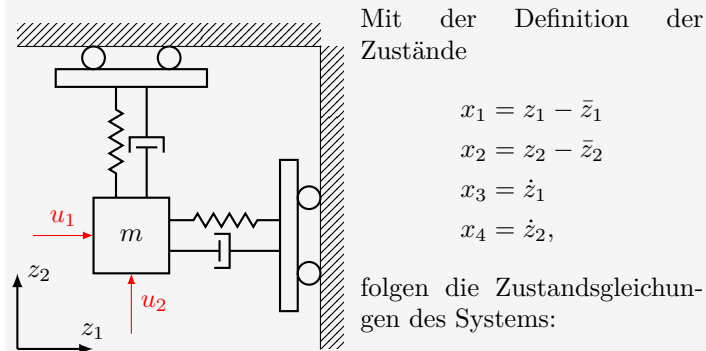
Abb. 1: Standard LQR: lineare Zustandsrückführung

## Bemerkungen:

- Die Matrix  $\tilde{C}$  hat generell nichts mit der Systemausgangsmatrix  $C$  zu tun. Falls jedoch ein Systemausgang  $y = C \cdot x$  definiert wird, und  $\tilde{C} = C$  gewählt wird, wird die euklidische Norm des Systemausganges  $\|y(t)\|_2$  in der Kostenfunktion berücksichtigt, da:  

$$x^\top \cdot Q \cdot x = x^\top \cdot \tilde{C}^\top \cdot \tilde{C} \cdot x = x^\top \cdot C^\top \cdot C \cdot x = y^\top \cdot y = \|y\|_2^2$$
- Die Matrix  $K$  ist statisch, sie muss für gegebene  $\{A, B, Q, R\}$  nur einmal berechnet werden.
- Der Begriff *infinite horizon* bezieht sich auf die Integrationsgrenzen in Gl. (1): von null bis *unendlich*.
- Die Dynamik des nach Gl. (2) geregelten Systems lautet  $\frac{d}{dt}x = (A - BK) \cdot x$ . Die Matrix  $A - BK$  ist garantiert Hurwitz (Realteil aller Eigenwerte kleiner null), d.h. der geschlossene Regelkreis ist asymptotisch stabil.
- Der open loop gain lautet  $L_{\text{LQR}}(s) = K \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B$ . Dies entspricht einer Öffnung des Kreises am Systemeingang.
- Normalerweise steht nicht der ganze Zustand  $x(t)$  als Messung zur Verfügung. Im späteren LQG Kapitel wird der LQR Ansatz basierend auf einer Schätzung von  $x(t)$  eingeführt.
- Der Regler (Gl. (2)) führt die Zustände linear zurück, man spricht von einer linearen Zustandsrückführung oder einem "linear state feedback controller".

**Beispiel 1:** Ein Klotz mit Masse  $m = 1$  sei in  $z_1$ - und in  $z_2$ -Richtung mit einem Dämpfer und mit einer Feder verbunden. (Der Einfachheit halber lassen wir im Folgenden die Einheiten weg und betrachten normierte Grössen.) Die Federn seien bei  $\bar{z}_1 = 1$  und  $\bar{z}_2 = 1$  im Gleichgewicht. Die Federkonstante sei  $k = 0.5$  und die Dämpferkonstante sei  $c = 0.05$ .



$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0 & -0.05 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.05 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_u$$

Um das System mit der LQR-Formulierung an den Ursprung zu regeln, müssen die Matrizen  $Q$  und  $R$  noch eingestellt werden. Eine erste, willkürliche Wahl ist  $Q = I_{4 \times 4}$  und  $R = I_{2 \times 2}$ . Die Matrizen  $A$ ,  $B$ ,  $Q$ , und  $R$  werden nun in Gl. (3) eingesetzt, und das Gleichungssystem wird nach  $\Phi$  aufgelöst. Anschliessend wird  $K$  mit Gl. (2) berechnet. Eine Simulation des Systems, startend in  $x_0 = [1, 1, 0, 5]$ , liefert:

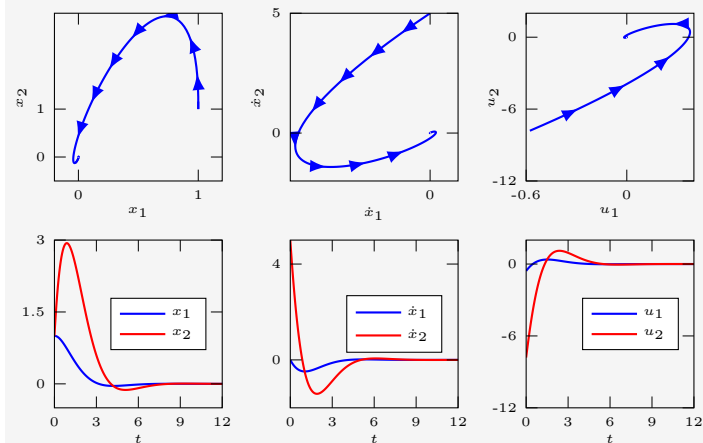


Abb. 2: Systemantwort für  $Q = I_{4 \times 4}$  und  $R = I_{2 \times 2}$ .

Das System soll nun in  $x_2$ -Richtung etwas schneller an den Ursprung geregelt werden. Dafür kann man z.B. den Eintrag  $Q(2, 2)$  auf 3 erhöhen, sodass:

$$Q_{\text{neu}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dadurch, dass  $Q(2, 2)$  erhöht wird, macht man Werte ungleich null des zweiten Zustands  $x_2$  teurer. Das Minimum der Kostenfunktion wird demnach in eine Richtung verschoben, die  $x_2$  kleiner hält.  $K_{\text{neu}}$  wird berechnet und das System wird simuliert, startend in  $x_0$ :

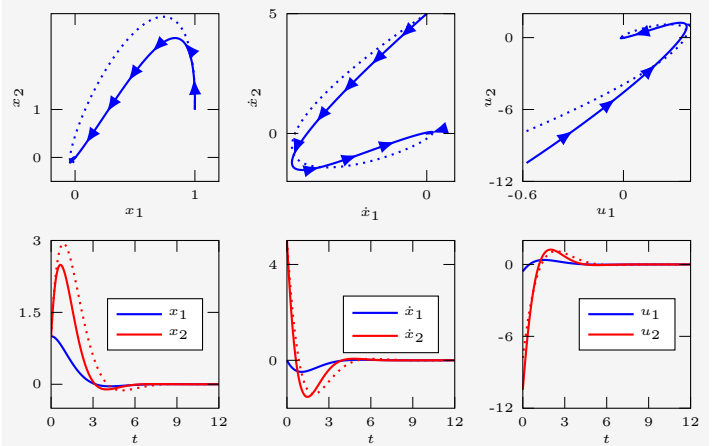


Abb. 3: Systemantwort für  $Q_{\text{neu}}$  und  $R = I_{2 \times 2}$ .

Im neuen  $x_1 - x_2$  Graph sieht man, dass  $x_2$  merklich weniger ausschlägt, wie erwartet. Um  $x_2$  tief zu halten, wird  $u_2$  (siehe  $u_1 - u_2$  Graph) jedoch grösser.

#### Bemerkungen:

- Die Richtungen  $x_1$  und  $x_2$  sind in diesem Beispiel entkoppelt. Somit wären zwei SISO-Regler auch genügend.
- Der Workflow lautet: System modellieren  $\rightarrow A$  und  $B$  extrahieren  $\rightarrow Q$  und  $R$  wählen  $\rightarrow \Phi$  mit Gl. (3) berechnen  $\rightarrow K$  mit Gl. (2) berechnen  $\rightarrow x_0$  wählen und simulieren.

### 3 Eigenschaften von Infinite Horizon Reglern

#### Stabilität:

Die Matrix  $A - B \cdot K$  des geschlossenen Regelkreises ist garantiert Hurwitz. Der resultierende geschlossene Regelkreis ist also auch garantiert stabil.

#### Störungsunterdrückung:

Der Standard LQR Regelkreis kann konstante Störungen nicht unterdrücken. Eine integrative Erweiterung, wie weiter unten gezeigt, ermöglicht dies jedoch.

#### Robustheit:

Für die Wahl  $R = r \cdot I$  hat die die minimum return difference  $\mu_{\min, \text{LQR}}$  folgende Eigenschaft:

$$\mu_{\min, \text{LQR}} = \min_{\omega} \left( \min_i \sigma_i(I + L_{\text{LQR}}(j\omega)) \right) \geq 1 \quad (4)$$

Im SISO-Fall hat diese Eigenschaft eine schöne Interpretation: Gl. (4) garantiert, dass der Nyquist-Plot nie in den um  $-1$  zentrierten Kreis mit Radius 1 eintritt. Wie in Abb. 4 geometrisch ersichtlich, garantiert dies wiederum, dass der Regelkreis auch bei einer Verstärkung  $k$  im Bereich  $k \in [0.5, \infty)$  noch garantiert stabil ist. Zudem hat der Kreis eine Phasenreserve (phase margin) von  $\varphi \geq 60^\circ$ , was einer sehr guten Robustheit entspricht.

Modifiziert man die Riccati-Gleichung mit  $\beta > 1$  wie folgt

$$\frac{1}{\beta} \cdot \Phi_{\beta} \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^{\top} \cdot \Phi_{\beta} - \Phi_{\beta} \cdot A - A^{\top} \cdot \Phi_{\beta} - Q = 0$$

so resultiert die Lösung  $\Phi_{\beta}$ . Damit wird der Regelkreis noch robuster, da dann gilt:

$$\mu_{\min, \beta} = \min_{\omega} \left( \min_i \sigma_i(\beta I + L_{\text{LQR}}(j\omega)) \right) \geq \beta.$$

Das heisst, dass der Nyquist-Plot nie in dem um  $-\beta$  zentrierten Kreis mit Radius  $\beta$  eintritt.

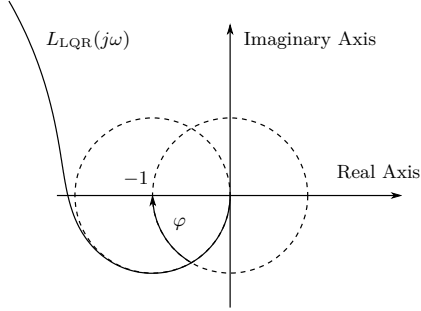


Abb. 4: Nyquist Plot eines offenen LQR Regelkreises  $L_{LQR}(s)$ .

#### 4 Folgeregelung - Infinite Horizon LQR

Die LQR-Formulierung löst nur das Regulator Problem und erscheint zunächst etwas einschränkend. Man kann jedoch die Linearität des Systems ausnützen, um einen gewünschten konstanten Zustand  $x_\infty$  oder eine gewünschte konstante Referenz  $r_\infty$  für einen gegebenen Systemausgang  $y(t)$  anzusteuern.

##### Zustandsreferenz

Ein lineares System beschreibt die Dynamik von Differenzen. Wir können den Ursprung des Systems demnach in einen neuen Punkt  $\{u_\infty, x_\infty\}$  verschieben, mit den Definitionen  $\Delta x = x - x_\infty$ , und  $\Delta u = u - u_\infty$ . Die Dynamik des Systems in den neuen Variablen lautet:

$$\Delta \dot{x} = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta u$$

Die Regelung auf den konstanten Zustand  $x_\infty$  erfolgt durch Subtraktion von  $x_\infty$  sowie Addition von  $u_\infty$  an der geeigneten Stelle im Regelkreis, wie gezeigt in Abb. 5, oder analog und identisch durch Addition eines einzigen konstanten Wertes am Reglerausgang, wie in Abb. 6.

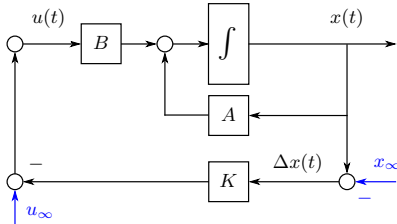


Abb. 5: Subtraktion von  $x_\infty$  sowie Addition von  $u_\infty$ .

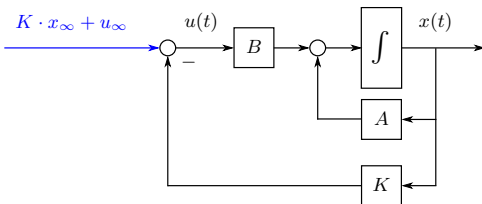


Abb. 6: Addition eines konstanten Wertes am Systemeingang.

##### Bemerkungen

- Der Wert  $u_\infty$  ist statisch für eine statische Referenz  $x_\infty$ .
- Die Folgeregelung mit feedforward kann keine Störungen unterdrücken.

##### Ausgangsreferenz

Wenn das System ein Ausgangssignal  $y(t) = C \cdot x(t)$  besitzt, kann dieser Ausgang mit einer Vorsteuerung auf eine gewünschte konstante Referenz  $r(t) = r_\infty \cdot h(t)$  geregelt

werden. Das dafür nötige konstante Vorsteuersignal (wie gesehen bei der Zustandsreferenz) kann wie folgt berechnet werden:

$$u_r(t) = - \underbrace{\left( C(A - BK)^{-1} B \right)^{-1}}_{\Gamma} \cdot r(t) \quad (5)$$

Die Matrix  $\Gamma$  existiert garantiert, falls die Übertragungsfunktion des linearen System  $\{A, B, C, D\}$  keine Nullstellen im Ursprung hat.

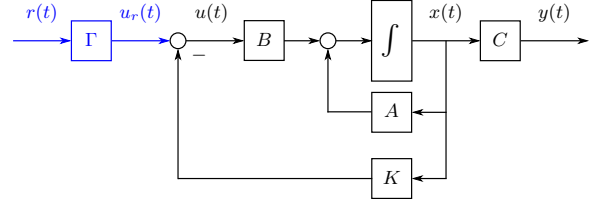


Abb. 7: Addition eines einzigen konstanten Wertes am Reglerausgang durch eine Vorsteuerung.

**Beispiel 2:** Das System aus dem vorherigen Beispiel soll nun zur Position  $x_{1,\infty} = 2$  und  $x_{2,\infty} = 2$  geregelt werden. Falls das System im Punkt  $\{x_{1,\infty}, x_{2,\infty}\}$  im Gleichgewicht ist, werden die Geschwindigkeiten null sein, d.h.  $x_{3,\infty} = x_{4,\infty} = 0$ . Der gewünschte Zustand lautet somit  $x_\infty = [2, 2, 0, 0]^\top$ .

Zuerst wird das statische feedforward Signal berechnet. Intuitiv werden die Federn im Zustand  $x = x_\infty$  komprimiert sein. Im Gleichgewicht wird  $\{u_\infty\}$  demnach genau die Kraft der komprimierten Federn ausgleichen. Das System soll nun bei  $x = x_\infty$  mit  $u = u_\infty$  im Gleichgewicht sein:

$$A \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty \stackrel{!}{=} 0$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0 & -0.05 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,\infty} \\ u_{2,\infty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Auflösen nach  $u_\infty$  ergibt  $u_{1,\infty} = u_{2,\infty} = 1$ . Intuitiv: Die komprimierten Federn drücken im Gleichgewicht genau mit einer Kraft von  $F(\cdot) = k \cdot r(\cdot) = 0.5 \cdot 2 = 1 = u(\cdot)_{,\infty}$ .

Das System wird simuliert, startend im Punkt  $x_0 = [1, 1, 0, 5]^\top$ , mit  $Q = I_{4 \times 4}$ ,  $R = I_{2 \times 2}$ ,  $x_\infty = [2, 2, 0, 0]^\top$ , und  $u = u_\infty - K \cdot (x - x_\infty)$ :

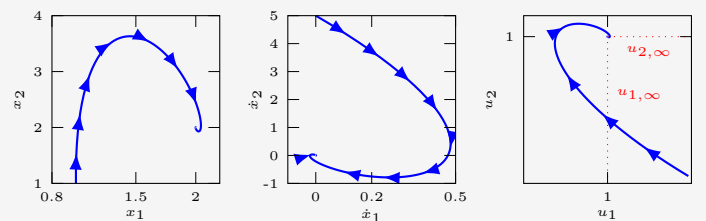


Abb. 8: Systemantwort für das Referenzproblem.

Wie erwartet regelt das System auf den Punkt  $[2, 2, 0, 0]^\top$ .

#### 5 Störungsunterdrückung - LQRI

Das Standard LQR-Problem eignet sich für theoretische Systeme ohne Modellfehler und ohne Störungen. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man konstante Störungen (z.B.  $w(t) = w_\infty \cdot h(t)$  am Eingang) und Modellfehler unterdrücken kann. Dafür wird integratives Verhalten eingeführt.

Um die Struktur aus Abb. 1 mit einem integrativen Verhalten zu erweitern, werden die Ausgangsgrösse  $y(t) = C \cdot x(t)$  sowie die Referenz  $r(t)$  eingeführt, wie illustriert in Abb. 9. Man wünscht  $y(t) = r(t) = r_\infty \cdot h(t)$ . Um konstante Störungen zu unterdrücken, kann das Integral des Regelfehlers als neuer Zustand definiert werden:

$$v(t) = \int_0^t e(\tau) \, d\tau = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) \, d\tau.$$

Der erweiterte Zustandsvektor des Systems lautet somit:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Die Ableitung des Zustandes lautet (siehe Abb. 9):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) &= \begin{bmatrix} A \cdot x(t) + B \cdot (u(t) + w(t)) \\ r(t) - y(t) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \cdot (u(t) + w(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \cdot r(t). \end{aligned}$$

Die Standard LQR-Formulierung kann nun mit den erweiterten Systemmatrizen  $\tilde{A}$  und  $\tilde{B}$  gelöst werden. Der erweiterte Zustand  $\tilde{x}(t)$  wird zu null geregelt und damit gilt  $\frac{d}{dt} v(t) = e(t) = 0$ .

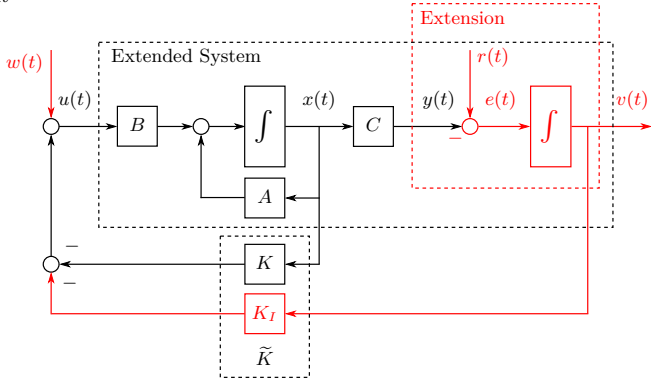


Abb. 9: Integrale Erweiterung am Systemausgang.

Die Dimension der  $Q$  Matrix muss angepasst werden:

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_I \end{bmatrix}, \quad Q_I = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_m \end{bmatrix}$$

Mit  $Q_I$  kann man einstellen, wie stark die Integratoren wirken sollen. Die Lösung des LQRI-Problems lautet:

$$\begin{aligned} \{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\} &\rightarrow \tilde{K} = [K, K_I] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}, \\ u(t) &= -\tilde{K} \cdot \tilde{x}(t) = u_K + u_{K_I} = -K \cdot x(t) - K_I \cdot v(t). \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Der Zustand  $v(t)$  ist nicht Teil des realen Systems und muss deshalb wie in Abb. 10 dargestellt im finalen Regelsystem implementiert werden.

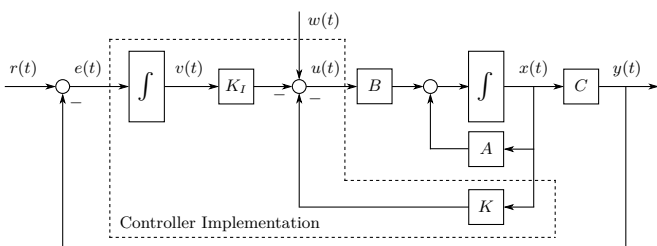


Abb. 10: Implementierung der integralen Erweiterung.

**Beispiel 3:** Das Masse-Feder-Dämpfer System soll mit einem Standard LQR-Regler in den Ursprung geregelt werden. Dabei wirke nun eine statische Störung  $w(t) = w_\infty \cdot h(t) = [0.5, 0.5]^\top$ . Mit  $\tilde{Q} = I_{4 \times 4}$ ,  $R = I_{2 \times 2}$ , startend in  $x_0 = [1, 1, 0, 5]^\top$ :

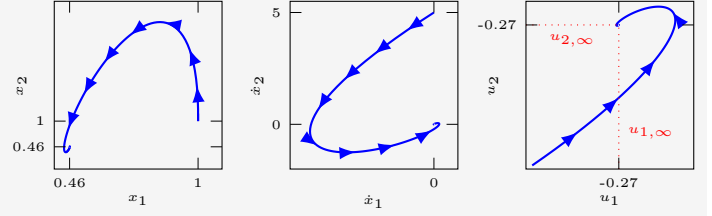


Abb. 11: Systemantwort für  $Q = I_{4 \times 4}$ ,  $R = I_{2 \times 2}$  und  $w_\infty = [0.5, 0.5]^\top$

Das System kommt bei einem Zustand  $x_\infty \neq 0$  zum Stillstand. Dies liegt daran, dass die *erwartete* Systemgleichung im Gleichgewicht lautet:

$$0 = A \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty \quad (\text{erwartet})$$

Jedoch ist die *wahre* Gleichgewichtsgleichung

$$0 = A \cdot x_\infty + B \cdot (u_\infty + w_\infty) \quad (\text{wahr})$$

Der Gleichgewichtspunkt lautet somit:

$$\begin{aligned} x_\infty &= -(A - B \cdot K)^{-1} \cdot B \cdot w_\infty = [0.46, 0.46, 0, 0]^\top \\ u_\infty &= -K \cdot x_\infty = [-0.27, -0.27, 0, 0]^\top \end{aligned}$$

Da die unbekannte Störung das Erreichen des Ziels  $x_\infty = 0$  verhindert, wird die LQRI-Formulierung verwendet. Mit

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\tilde{Q} = I_{6 \times 6}$ ,  $R = I_{2 \times 2}$ ,  $w_\infty = [0.5, 0.5]^\top$ , startend im Zustand  $\tilde{x}_0 = [1, 1, 0, 5, 0, 0]^\top$ :

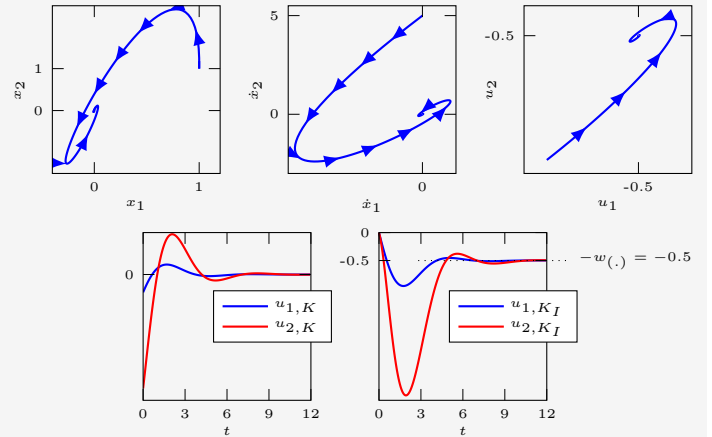


Abb. 12: Systemantwort für  $\tilde{Q} = I_{6 \times 6}$ ,  $R = I_{2 \times 2}$  und  $w_\infty = [0.5, 0.5]^\top$ .

Das System regelt an den gewünschten Ursprung, obwohl eine konstante Störung  $w(t)$  vorhanden ist. Das Ziel wird erreicht, da der integrative Teil des Eingangs genau die Störung kompensiert.

## 6 Folgeregelung mit Störungsunterdrückung

Wir können nun den LQRI Ansatz mit der Vorsteuerung  $u_r(t) = \Gamma \cdot r(t)$  kombinieren, um ein besseres dynamisches Verhalten bei Referenzänderungen zu erreichen (siehe Abb. 13).

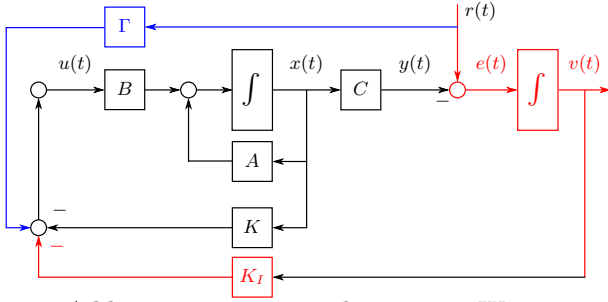


Abb. 13: Addition eines einzigen konstanten Wertes am Reglerausgang durch eine Vorsteuerung.

**Beispiel 4:** Das Masse-Feder-Dämpfer System soll mit einem LQRI mit Vorsteuerung an die Position  $r(t) = [2, 2]^T$  geregelt werden. Mit  $\tilde{Q} = I_{6 \times 6}$ ,  $R = I_{2 \times 2}$ ,  $w(t) = [0.25, 0.25]^T$ ,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

startend in  $\tilde{x}_0 = [1, 1, 0, 1, 0, 0]^T$ :

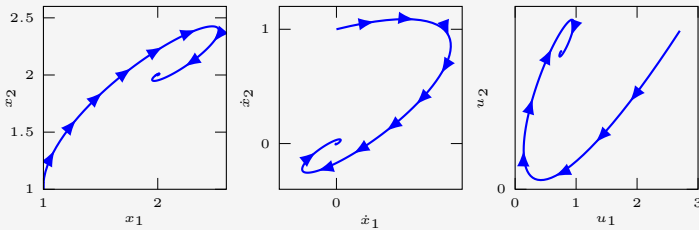


Abb. 14: Systemantwort für  $\tilde{Q} = I_{6 \times 6}$ ,  $R = I_{2 \times 2}$ ,  $r(t) = [2, 2]^T$ ,  $w(t) = [0.25, 0.25]^T$ .

### Bemerkungen:

- $Q_I$  könnte besser eingestellt werden, sodass das System nicht so stark überschießt.
- Betrachte Abb. 13. Die Vorsteuerungsgröße  $u_r(t) = \Gamma \cdot r(t)$  ist nicht zwingend notwendig um das System auf die Referenz  $r(t)$  zu regeln. Falls sie weggelassen wird, kann das Signal  $r(t)$  als eine auf  $y(t)$  wirkende Störung interpretiert werden. Dadurch würde der Integrator die Signale  $w(t)$  und  $r(t)$  kompensieren. Ohne das Vorsteuerungssignal kann das System allerdings unnötige Transienten aufzeigen, da sich der Integrator für die Referenz  $r(t)$  zuerst füllen müsste.

## 7 Finite Horizon LQR

Das Integral der Standardformulierung geht von null bis unendlich. Die Lösung des Standardproblems ist um einiges einfacher als wenn das Problem nur über ein Zeitintervall  $t_a$  bis  $t_b$  integriert wird. In diesem Fall lautet die Kostenfunktion:

$$J(u) = x^T(t_b) \cdot P \cdot x(t_b) + \int_{t_a}^{t_b} (x^T \cdot Q(t) \cdot x + u^T \cdot R(t) \cdot u) dt$$

Mit der Kostenmatrix  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P^T \succcurlyeq 0$  (positiv semi-definit) wird eine Abweichung des finalen Zustands  $x(t_b)$  vom Ursprung bestraft.

Das System kann in diesem Fall zeitvariant sein:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad x(t_a) = x_a \quad (6)$$

Die Lösung der finite horizon Formulierung lautet:

$$u(t) = -K(t) \cdot x(t), \quad \text{wobei } K(t) = R^{-1}(t) \cdot B^T(t) \cdot \Phi(t).$$

Die Matrix  $\Phi(t)$  ist die Lösung der Riccati Matrix-Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \Phi(t) \cdot B(t) \cdot R^{-1}(t) \cdot B^T(t) \cdot \Phi(t) - \Phi(t) \cdot A(t) - A^T(t) \cdot \Phi(t) - Q(t)$$

wobei  $\Phi(t)$  durch Rückwärtsintegration von  $\Phi(t_b) = P$  gefunden werden kann.

### Bemerkungen:

- Die Matrix  $K(t)$  ist zeitabhängig. Sie muss entsprechend der Zeitabhängigkeit der Matrizen  $\{A(t), B(t), Q(t), R(t)\}$  berechnet werden.
- Die Matrix  $P$  ist eine neue Tuninggröße.
- Die Matrix  $K(t)$  ist nur für das Zeitintervall  $t \in [t_a, t_b]$  gültig. Für Zeiten  $t > t_b$  muss  $K(t)$  neu evaluiert werden.
- Asymptotische Stabilität kann nicht garantiert werden, da für  $t > t_b$  nicht optimiert wird.
- Es wird nicht erwartet, dass Sie die Gleichungen von Hand lösen können.

## 8 Finite Horizon Folgeregelung

Zusätzlich zur zeitvarianten Dynamik aus Gl. (6) wird nun der zeitvariante Ausgang eingeführt:

$$y(t) = C(t) \cdot x(t)$$

Die Kosten, die über ein Zeitintervall  $[t_a, t_b]$  integriert werden, lauten:

$$J(u) = (r(t_b) - y(t_b))^T \cdot P \cdot (r(t_b) - y(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} ((r(t) - y(t))^T \cdot Q(t) \cdot (r(t) - y(t)) + u(t)^T \cdot R(t) \cdot u(t)) dt$$

Die Lösung der finite horizon Folgeregelung lautet:

$$u(t) = -K(t) \cdot x(t) + u_r(t)$$

Die Gleichungen zur Bestimmung von  $K(t)$  und  $v(t)$  sind kompliziert und werden im Theory Sheet ausgelassen. Die relevanten Punkte sind in den Bemerkungen zusammengefasst.

### Bemerkungen:

- Die Referenztrajektorie  $r(t)$  ist eine Wahl, die vor dem Lösen des Optimierungsproblems festgelegt wird.
- Die Matrix  $K(t)$  ist zeitabhängig. Sie muss entsprechend der Zeitabhängigkeit der Matrizen  $\{A(t), B(t), Q(t), R(t)\}$  berechnet werden.
- Die Matrix  $K(t)$  ist nur für das Zeitintervall  $t \in [t_a, t_b]$  gültig. Für Zeiten  $t > t_b$  muss  $K(t)$  neu evaluiert werden.
- $u_r(t)$  ist ein zeitabhängiges Vorsteuerungssignal, welches nur im Zeitintervall  $t \in [t_a, t_b]$  für eine spezifische Referenz  $r(t)$  gültig ist.



## Regelungstechnik II FS 2021

## Zustandsbeobachter

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

## Zusammenfassung Vorlesung 10

## Skript Kapitel 5

Bei Fragen: hraffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 12. Mai 2021

## 1 Zustandsbeobachter

Die linearen Zustandsregler, die im letzten Kapitel behandelt wurden, sind praktisch nicht umsetzbar, da uns nur der Systemeingang  $u(t)$  und der Systemausgang  $y(t)$  zur Verfügung stehen<sup>1</sup>. Es ist jedoch möglich, die Signale  $u(t)$  und  $y(t)$  mit einem *Beobachter* zu kombinieren, um eine *Schätzung*  $\hat{x}(t)$  des Zustandes zu erhalten. Das System kann danach mit den geschätzten Werten des Zustandes geregelt werden.

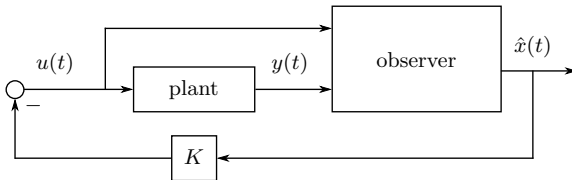


Abb. 1: Beobachter zur Regelung mit Ausgangsrückführung.

## 2 Luenberger-Beobachter

Das Ziel ist es, eine Beobachtdynamik  $\frac{d}{dt}\hat{x}(t)$  so zu konstruieren, dass der Beobachtungsfehler  $x_e(t)$  asymptotisch gegen null konvergiert:

$$x_e(t) = x(t) - \hat{x}(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_e(t) = 0 \quad (1)$$

Genau dann würde die Schätzung  $\hat{x}(t)$  im Grenzfall dem wahren Zustand  $x(t)$  entsprechen. Die folgende Beobachtdynamik erfüllt diese Anforderung unter gewissen Bedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= \hat{A} \cdot \hat{x}(t) + \hat{B} \cdot u(t) + L \cdot (y - \hat{y}(t)) \\ \hat{y} &= \hat{C} \cdot \hat{x}(t) \end{aligned}$$

Dabei ist die Beobachterverstärkung  $L$  der Freiheitsgrad. Diese Struktur eines Beobachters wird Luenberger-Beobachter genannt. Ein Blockdiagramm der Struktur ist in Abb. 2 ersichtlich.

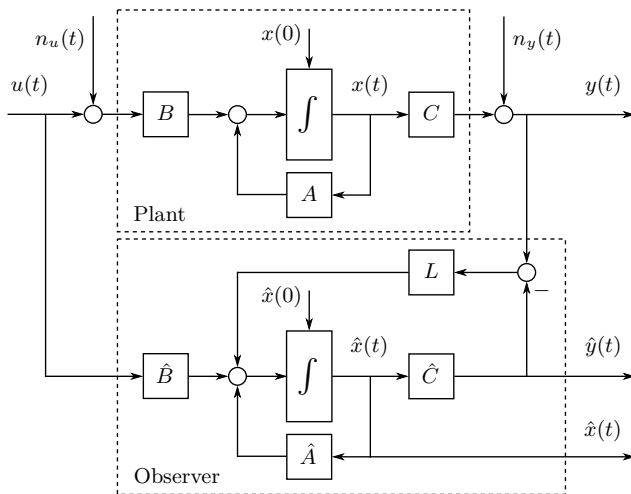


Abb. 2: Blockdiagramm des Luenberger-Beobachters.

<sup>1</sup>Es kann durchaus sein, dass alle Zustände direkt messbar sind, dann ist  $y(t) = x(t)$ .

Unter der Annahme, dass die Systemmatrizen perfekt bestimmt wurden ( $\hat{A} = A$ ,  $\hat{B} = B$ ,  $\hat{C} = C$ ) und weder Störungen noch Rauschen vorliegen ( $n_u(t) = n_y(t) = 0$ ), kann die Dynamik des Fehlers hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_e(t) &= \frac{d}{dt}x(t) - \frac{d}{dt}\hat{x}(t) \\ &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) - (A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot u(t) + L \cdot (y(t) - \hat{y}(t))) \\ &= A \cdot (x(t) - \hat{x}(t)) - L \cdot C \cdot (x(t) - \hat{x}(t)) \\ &= (A - L \cdot C) \cdot x_e(t) \end{aligned}$$

Ein initialer Fehler  $x_e(0) = x(0) - \hat{x}(0) \neq 0$  in der Zustandsschätzung konvergiert also gegen null, falls die Matrix  $A - L \cdot C$  Hurwitz<sup>2</sup> ist. Die Beobachterverstärkung  $L$  kann verwendet werden um dies zu erreichen.

## Beobachterentwurf mit dem LQR-Schema

Das Problem, eine stabilisierende Beobachterverstärkung  $L$  zu finden, kann so formuliert werden, dass die LQR-Formulierung verwendet werden kann, um eine Lösung zu finden.

**Recap:** Die LQR-Formulierung nutzt den Freiheitsgrad  $K$ , um zu erreichen, dass die Matrix  $A - B \cdot K$  Hurwitz ist.

$$\rightarrow \text{LQR findet } K \text{ sodass } \operatorname{Re}(\lambda_i(A - B \cdot K)) < 0$$

Wir wollen nun dasselbe mit der Matrix  $A - L \cdot C$  erreichen, wobei der Freiheitsgrad  $L$  eingestellt wird.  $L$  steht dabei jedoch "vor" dem  $C$ , und  $K$  "nach" dem  $B$ . Wir müssen zuerst folgenden Fakt der linearen Algebra verwenden:

$$\lambda_i(X) = \lambda_i(X^\top), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Somit folgt:

$$\lambda_i(A - L \cdot C) = \lambda_i((A - L \cdot C)^\top) = \lambda_i(A^\top - C^\top \cdot L^\top)$$

Das heisst, wir können zur Berechnung der Beobachterverstärkung  $L$  auch die LQR-Formulierung verwenden. Indem wir die Eigenwerte der Matrix  $A^\top - C^\top \cdot L^\top$  mit der LQR-Formulierung platzieren, wissen wir sofort, dass  $A - L \cdot C$  auch Hurwitz ist. Somit ist garantiert, dass der Fehler  $x_e(t)$  asymptotisch gegen null konvergiert, so wie gewünscht.

## Zur Erinnerung:

Die Lösung der LQR-Formulierung lautet

$$\begin{aligned} K &= R^{-1} \cdot B^\top \cdot \Phi, \text{ wobei für } \Phi \text{ gilt:} \\ \Phi \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^\top \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^\top \cdot \Phi - Q &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

<sup>2</sup>Eine Matrix ist Hurwitz, falls der Realteil aller ihrer Eigenwerte kleiner null ist.

Mit den Änderungen

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A^\top \\ B &\rightarrow C^\top \\ Q &= \bar{C}^\top \cdot \bar{C} \rightarrow \bar{B} \cdot \bar{B}^\top \\ R &= r \cdot I \rightarrow q \cdot I \\ K &\rightarrow L^\top \\ \Phi &\rightarrow \Psi, \end{aligned}$$

folgt die Lösung der Polplatzierung mit Freiheitsgrad  $L^\top$ :

$$\begin{aligned} L^\top &= \frac{1}{q} \cdot C \cdot \Psi \\ \Psi \cdot C^\top \cdot \frac{1}{q} \cdot C \cdot \Psi - \Psi \cdot A^\top - A \cdot \Psi - \bar{B} \cdot \bar{B}^\top &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Falls die Matrizen  $\{A, C\}$  vollständig beobachtbar und  $\{A, \bar{B}\}$  vollständig steuerbar sind, existiert eine eindeutige positiv definite Lösung  $\Psi$ .

#### Bemerkungen:

- Die Matrix  $L$  ist statisch. Sie muss für gegebene  $\{A^\top, C^\top, \bar{B} \cdot \bar{B}^\top, q \cdot I\}$  nur einmal berechnet werden.
- Die Matrizen  $\bar{B}$  und der Faktor  $q$  werden iterativ eingestellt, bis zufriedenstellende Performance erreicht wird.
- Falls Rauschen  $n_y$  am Ausgangssignal vorhanden ist, lautet die Fehlerdynamik:

$$\frac{d}{dt} x_e(t) = (A - L \cdot C) \cdot x_e(t) - L \cdot n_y(t)$$

Das heisst  $L$  kann nicht beliebig gross gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärken würde (siehe Abb. 3).

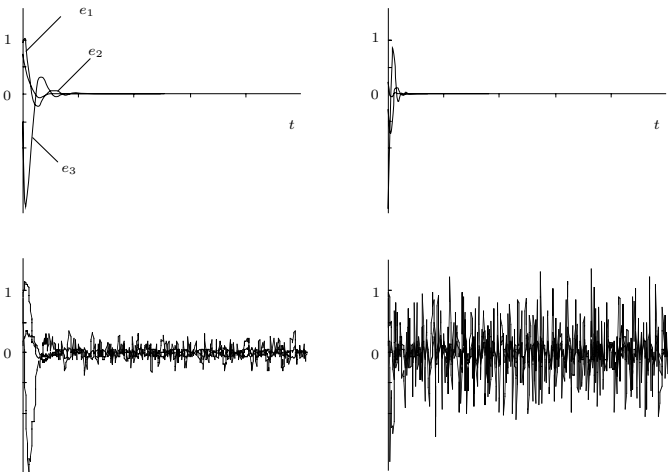


Abb. 3: Transiente der Fehlerdynamik für ein System dritter Ordnung. Links: "langsame" Fehlerdynamik, Rechts: "schnelle" Fehlerdynamik. Oben: kein Rauschen. Unten: Rauschen.

### 3 Kalman-Filter

Falls die Störungen  $n_u(t)$  und  $n_y(t)$  *Gaussian zero mean white noise* Signale sind, und die Varianz der Gaussverteilung bekannt ist, dann kann ein "optimales"  $L$  gefunden werden, welches die Varianz des Beobachtungsfehlers  $x_e(t)$  minimiert. Die Kovarianzmatrix eines zero mean white noise Signals ist:

$$E\{n(t) \cdot n^\top(t - \tau)\} = R \cdot \delta(\tau), \quad (4)$$

wobei  $E$  der Erwartungswert ist,  $\delta$  ein Diracimpuls, und  $R = R^\top \succeq 0$  eine konstante positiv semi-definite Matrix. Gl. (4) besagt, dass das Signal  $n(t)$  perfektes Rauschen ist (es korreliert nur für  $\tau = 0$  mit sich selber, sonst nicht ( $\tau \neq 0$ )).

Um den Kalman-Filter zu verwenden, müssen die Kovarianzmatrizen der Störungssignale bekannt sein:

$$E\{n_u(t) \cdot n_u^\top(t - \tau)\} = R_u \cdot \delta(\tau), \quad R_u \succeq 0$$

$$E\{n_y(t) \cdot n_y^\top(t - \tau)\} = R_y \cdot \delta(\tau), \quad R_y \succeq 0$$

Die Matrizen  $R_u$  und  $R_y$  können durch statistische Analyse gefunden werden. Wie dies genau geschieht sprengt den Rahmen von Regelungstechnik II. Deswegen wird im Folgenden die Lösung präsentiert, ohne Beweis.

Beim Tunen des Luenberger-Beobachter können wir  $\bar{B} \cdot \bar{B}^\top$  und  $q$  einstellen. Es stellt sich heraus, dass die Änderung

$$\begin{aligned} \bar{B} \cdot \bar{B}^\top &\rightarrow B \cdot R_u \cdot B^\top \\ q \cdot I &\rightarrow R_y \end{aligned}$$

die Lösung des Kalman-Filters liefert. Das heisst, man muss beim Kalman-Filter nichts mehr tunen. Die Kovarianzen  $R_u$  und  $R_y$  liefern direkt die optimalen Tuning-Parameter, die varianzminimierend wirken. Die Lösung kann wiederum über die Riccati-Gleichung gefunden werden:

$$\begin{aligned} L_K^\top &= R_y^{-1} \cdot C \cdot P \\ P \cdot C^\top \cdot R_y^{-1} \cdot C \cdot P - P \cdot A^\top - A \cdot P - B \cdot R_u \cdot B^\top &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

wobei die positiv definite Lösung  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  garantiert existiert, wenn  $\{A, C\}$  vollständig beobachtbar ist.

#### Bemerkungen:

- Die Matrix  $L_K$  ist statisch. Sie muss für gegebene  $\{A^\top, C^\top, B \cdot R_u \cdot B^\top, R_y\}$  nur einmal berechnet werden.
- Der Kalman-Filter hat keine Tuning-Parameter mehr;  $R_u$  und  $R_y$  werden durch statistische Analyse bestimmt.

#### Zusammenfassung:

Gl. (2), Gl. (3) und Gl. (5) sind identisch in der Form und können alle mit dem LQR-Formalismus gelöst werden. Folgende Tabelle fasst die Ähnlichkeit zusammen:

LQR	Luenberger	Kalman
$A$	$A^\top$	$A^\top$
$B$	$C^\top$	$C^\top$
$Q = \bar{C}^\top \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot \bar{B}^\top$	$B \cdot R_u \cdot B^\top$
$R$	$q \cdot I$	$R_y$
$K$	$L^\top$	$L_K^\top$
$\Phi$	$\Psi$	$P$

Tabelle 1: "Konvertierungstabelle" zwischen LQR-Regler, Luenberger-Filter und Kalman-Filter.

## Regelungstechnik II FS 2021

## LQG und LTR

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Bei Fragen: hraffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 19. Mai 2021

**Recap:** Bis jetzt wurde das LQR-Entwurfsverfahren analysiert, das den Zustand  $x(t)$  zur Regelung verwendet. Dies ist jedoch nicht praktisch, da in Realität nur die Signale  $u(t)$  und  $y(t)$  verfügbar sind. Deswegen wurde der Luenberger-Beobachter eingeführt, der basierend auf den Signalen  $u(t)$  und  $y(t)$  und den Systemmatrizen  $\{A, B, C\}$  eine Schätzung  $\hat{x}(t)$  des realen Zustandes  $x(t)$  liefert<sup>1</sup>. Nun zeigen wir, dass eine Kombination von LQR-Regler und Luenberger-Beobachter sinnvoll ist, insbesondere weil der resultierende geschlossene Regelkreis garantiert stabil ist<sup>2</sup>.

## 1 LQG-Regler

Eine Kombination aus LQR und Luenberger-Beobachter wird LQG-Regler genannt (Linear Quadratic Gaussian). Der zurückgeführte Zustandsvektor  $x(t)$  wird dabei mit der Schätzung  $\hat{x}(t)$  ersetzt:

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t) \quad (1)$$

Das Blockdiagramm eines LQG-Reglers sieht wie folgt aus:

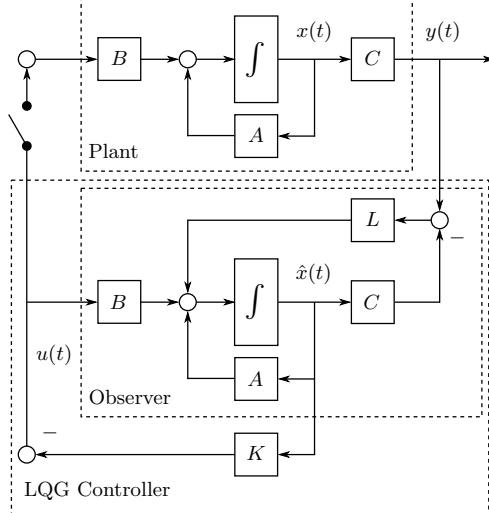


Abb. 1: Struktur eines LQG-Reglers.

## Stabilitätseigenschaften des LQG-Reglers

Das dynamische Verhalten von System und Beobachter in Abb. 1 kann wie folgt beschrieben werden:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad (2)$$

$$y(t) = C \cdot x(t),$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot u(t) + L \cdot (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (3)$$

$$\hat{y}(t) = C \cdot \hat{x}(t)$$

Unter der Annahme dass die Systemmatrizen  $\{A, B, C\}$  bekannt sind und im Beobachter zur Verfügung stehen, ersetzen

<sup>1</sup>Wir gehen für alle Herleitungen davon aus, dass die Systemmatrizen exakt bekannt sind.

<sup>2</sup>Die Stabilitätsgarantie gilt nur, falls die lineare Systembeschreibung exakt dem realen System entspricht, was im Normalfall nicht gegeben ist. In der Praxis ist der präsentierte LQG-Regler trotzdem sehr mächtig, da er mit genügend Robustheit auch für reale Systeme stabilisierend wirken kann.

## Zusammenfassung Vorlesung 11

## Skript Kapitel 6

wir  $u(t)$  in Gl. (2) und (3) mit Gl. (1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A \cdot x(t) - B \cdot K \cdot \hat{x}(t) \\ \frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= (A - B \cdot K - L \cdot C) \cdot \hat{x}(t) + L \cdot C \cdot x(t) \end{aligned} \quad (4)$$

Nun zeigen wir, dass der geschlossene Regelkreis resultierend aus Gl. (4) asymptotisch stabil ist. Dazu definieren wir den folgenden Zustandsvektor  $\tilde{x}(t)$  und die Systemmatrix  $\tilde{A}_{cl}$ :

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -B \cdot K \\ L \cdot C & A - B \cdot K - L \cdot C \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{cl}} \cdot \tilde{x}(t)$$

Die Stabilität des geschlossenen Regelkreises wird definiert durch die Eigenwerte der Matrix  $\tilde{A}_{cl}$ . Diese sind in der gezeigten Form nicht einfach zu berechnen. Nach der folgenden Koordinatentransformation des Zustandsraumes wird die Berechnung hingegen sehr einfach<sup>3</sup>:

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & -I_{n \times n} \end{bmatrix} \cdot \tilde{x} = T^{-1} \cdot \tilde{x}$$

## Stabilitätseigenschaften - Separation Principle

In den neuen Koordinaten  $\tilde{z}$  ergibt sich die Dynamik des geschlossenen Regelkreises in Gl. (4) wie folgt:

$$\frac{d}{dt}\tilde{z}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A - B \cdot K & B \cdot K \\ 0_{n \times n} & A - L \cdot C \end{bmatrix}}_{\text{gleiche Eigenwerte wie } \tilde{A}_{cl}} \cdot \tilde{z}(t) = T^{-1} \cdot \tilde{A}_{cl} \cdot T \cdot \tilde{z}(t)$$

Die Eigenwerte sind durch die gegebene Block-Struktur der Matrix nun direkt ablesbar.

$n$  der Eigenwerte entsprechen den Eigenwerten der Hurwitz Matrix  $A - B \cdot K$  und die anderen  $n$  Eigenwerte entsprechen den Eigenwerten der Hurwitz Matrix  $A - L \cdot C$ .

$$\lambda_i(T^{-1} \cdot \tilde{A}_{cl} \cdot T) = \lambda_i(\tilde{A}_{cl}) = \lambda_i(A - B \cdot K) \cup \lambda_i(A - L \cdot C)$$

Asymptotische Stabilität ist somit ohne explizite Berechnung der Eigenwerte  $\lambda_i$  garantiert, da beide Matrizen Hurwitz sind, wenn  $K$  und  $L$  mit dem LQR-Auslegeverfahren bestimmt wurden.

<sup>3</sup>Die Umrechnung in die neuen Zustände erfolgt über eine Ähnlichkeitsabbildung (Koordinatentransformation), welche die Eigenwerte der Matrix nicht ändert, d.h.  $\lambda_i(T^{-1} \cdot \tilde{A}_{cl} \cdot T) = \lambda_i(\tilde{A}_{cl})$ . Bei der gewählten Transformation gilt  $T^{-1} = T$ .

## 2 Erweiterungen: LQGI und Folgeregelung

Genau wie der Standard LQR-Regler, kann der Standard LQG-Regler keine Störungen unterdrücken und keinen Referenzsignalen folgen. Die im LQR-Fall eingeführten Erweiterungen zur Folgeregelung (Vorsteuersignal auf die Referenz) und Störungsunterdrückung (integrative Erweiterung am Systemausgang) können im LQG Fall genau gleich verwendet werden, womit diese Schwächen des Standard LQG-Reglers behoben werden können. Der resultierende Regler, erweitert um die Störungsunterdrückung und die Vorsteuerung zur Folgeregelung, wird LQGI-Regler genannt und ist dargestellt in Abb. 2.

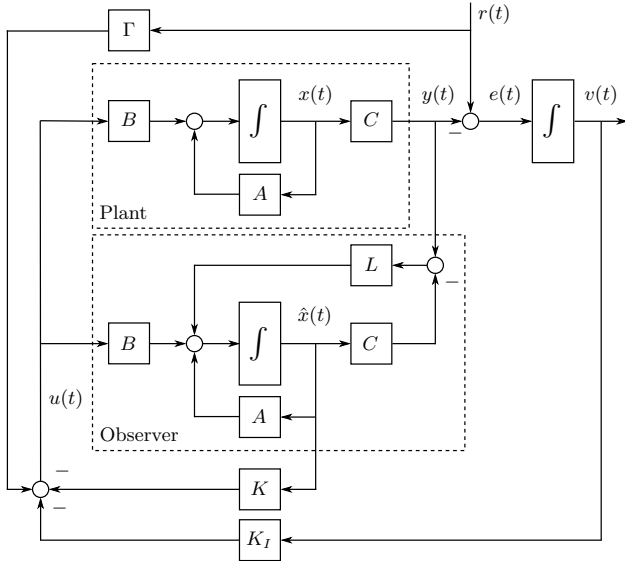


Abb. 2: LQGI-Regler zur Störungsunterdrückung, mit Vorsteuersignal auf das Referenzsignal.

### LQGI - Störungsunterdrückung

Für die Störungsunterdrückung wird wie beim LQRI-Regler das Integral des Regelfehlers  $r(t) - y(t)$  als Zustand eingeführt:

$$v(t) = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau$$

Diese Erweiterung führt zum erweiterten Zustandsvektor:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{2n+m},$$

mit Eingangssignal

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t) - K_I \cdot v(t),$$

wobei die Variablen  $K$  und  $K_I$  Teil der Lösung der bereits bekannten LQRI-Formulierung sind:

$$\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\} \rightarrow \tilde{K} = [K, K_I],$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_I \end{bmatrix}$$

### Folgeregelung

Die Vorsteuer matrix  $\Gamma$  berechnet sich als

$$\Gamma = - \left( C \cdot (A - B \cdot K)^{-1} \cdot B \right)^{-1} \quad (5)$$

Die Matrix  $\Gamma$  sowie Bedingungen für deren Existenz wurden in der Diskussion zum LQRI-Regler bresprochen.

## 3 LQGI Reglerentwurf - Workflow

Der Workflow, um einen LQGI-Regler mit Vorsteuerung zu entwerfen, ist wie folgt.

1. Definiere die erweiterten Systemmatrizen  $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ , wie besprochen im Kapitel zum LQRI-Regler.
2. Entwerfe einen Regler  $\tilde{K}$  zur linearen Zustandsrückführung für das erweiterte System

$$K\_tilde = \text{lqr}(A\_tilde, B\_u\_tilde, Q\_tilde, r * \text{eye}(m, m))$$

und zerlege ihn wie folgt:

$$\tilde{K} = [K, K_I]$$

Starte dabei mit einfachen Gewichten ( $R = r \cdot I$ , etc.) und iteriere  $r$  und  $\gamma_i$ . Falls das nicht reicht, versuche allgemeinere Gewichte bis das gewünschte Regelverhalten resultiert.

3. Entwerfe eine Beobacherverstärkung  $L$  für das originale System  $\{A, B, C\}$  unter Verwendung des LQR-Algorithmus, so wie beschrieben im Kapitel zum Beobachter.

$$L = \text{lqr}(A', C', B * B', q * \text{eye}(m, m))'$$

4. Berechne die Vorsteuer matrix  $\Gamma$  wie folgt

$$\Gamma = - \left( C \cdot (A - B \cdot K)^{-1} \cdot B \right)^{-1}$$

und füge den Vorsteuerungspfad hinzu.

Die resultierende Reglerstruktur, zerlegt in Vorsteuerung ('Feedforward Controller') und Feedbackregler, ist dargestellt in Abb. 3. Diese Struktur ist identisch zum Blockschaltdiagramm in Abb. 2, jedoch sind in Abb. 3 die Vorsteuerung und der Feedbackregler einfach ablesbar.

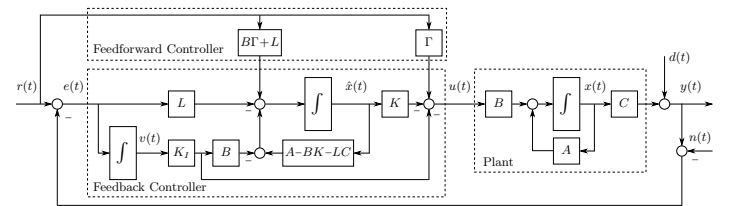


Abb. 3: Implementierung: LQGI Regler mit Vorsteuerung.

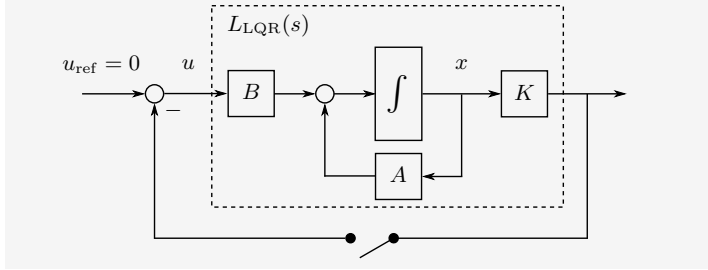
## 4 Bemerkungen zu Störungsunterdrückung und Folgeregelung

Eine Vorsteuerung (ein zusätzliches Stellsignal, welches von der Referenz  $r(t)$  abhängt und nicht vom Regelfehler  $e(t)$ , äquivalent zur Matrix  $\Gamma$ ) wurde bisher in RT1 und RT2 nicht detailliert betrachtet. Vorsteuerungen können verwendet werden, um die Performance des Regelkreises zu verbessern: er reagiert schneller auf Sollwertänderungen, da sich nicht zuerst ein Fehler aufbauen muss, bevor der Reglerausgang angepasst wird. Robustheit, Stabilität und das steady-state Verhalten (kein statischer Nachlauffehler) des Regelkreises werden durch eine stabile Vorsteuerung grundsätzlich nicht beeinflusst. Robustheit, Stabilität und steady-state Verhalten sind generell die wichtigen Aspekte eines Regelkreises: meist ist es nicht wichtig, sehr schnell zu regeln, viel eher wünscht man

sich garantierte Stabilität in allen möglichen Situationen. Da Stabilität und Robustheit und fehlerfreies steady-state Verhalten<sup>4</sup> auch ohne Vorsteuerungssignale gegeben sind, könnte man die Vorsteuerungssignale auch weglassen. Änderungen des Referenzsignales würden das System als Störung beeinflussen und durch den Integrator kompensiert werden.

## 5 Resultierende Regelkreise

**Recap:** Der offene LQR-Regelkreis  $L_{LQR}(s)$  ist von  $u(t)$  nach  $K \cdot x(t)$  definiert. Für SISO-Systeme tritt dieser offene Regelkreis nicht ein in den Kreis mit Radius 1 um den Punkt -1 im Nyquist Diagramm.



Um die LQG-Formulierung mit der LQR-Formulierung zu vergleichen, muss  $L_{LQG}(s)$  analog zu  $L_{LQR}(s)$  definiert sein. Der Regelkreis muss also beim Systemeingang  $u$  geschnitten werden, so wie dargestellt in Abb. 1.<sup>5</sup>

Wir können die resultierenden Systemgleichungen der offenen und geschlossenen Regelkreise darstellen:

Offener Regelkreis :  $u \rightarrow -u_{LQG}$ ,

Geschlossener Regelkreis :  $r \rightarrow y$ ,

wobei gilt:  $u_{LQG} = -[K, K_I] \cdot [\hat{x}(t), v(t)]^T$ .

Die Betrachtung des offenen Regelkreises ist wichtig für die Analyse der Robustheit. Der geschlossene Regelkreis dient der Analyse der Stabilität und des zu erwartenden transienten Verhalten des Systems. Ausgangspunkt zur Berechnung der Regelkreise sind die Gleichungen des Systems und des Beobachters, welche in den Blockdiagrammen in Abb. 1 und 2 abgelesen werden können:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ \frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot u(t) + L \cdot (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \frac{d}{dt}v(t) &= r(t) - y(t), \quad (\text{für integrative Struktur}) \\ y(t) &= C \cdot x(t), \text{ mit} \\ \tilde{x}(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \text{ oder } \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### LQG-Regler (Abb. 1)

Regelgesetz:

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t)$$

Offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

Geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t)$$

### LQGI mit Folgeregelung (Abb. 2)

Regelgesetz:

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t) - K_I \cdot v(t) + \Gamma \cdot r(t)$$

Offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ LC & A - LC - BK & -BK_I \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B\Gamma \\ I \end{bmatrix} \cdot r(t)$$

Geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK & -BK_I \\ LC & A - BK - LC & -BK_I \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B\Gamma \\ B\Gamma \\ I \end{bmatrix} \cdot r(t)$$

### Berechnung der Übertragungsfunktionen

Die offenen Regelkreise haben die Form:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) &= \tilde{A}_{ol} \cdot \tilde{x}(t) + \tilde{B}_{ol} \cdot u(t) + \tilde{B}_r \cdot r(t) \\ u_{LQG} &= - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & K & K_I \end{bmatrix}}_{-\tilde{K}} \cdot \tilde{x}(t). \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion der offenen Regelkreise  $L(s)$  von  $u$  nach  $-u_{LQG}$  lautet somit

$$L_{LQG}(s) = \tilde{K} \cdot (sI - \tilde{A}_{ol})^{-1} \cdot \tilde{B}_{ol}, \quad \{u \rightarrow -u_{LQG}\}$$

<sup>4</sup>Durch die integrative Erweiterung zur Störungsunterdrückung.

<sup>5</sup>Der offene LQG-Regelkreis kann bei Bedarf auch beim Ausgang  $y$  geschnitten werden, er kann dann aber nicht direkt mit dem offenen LQR-Regelkreis verglichen werden, da dies dort nicht möglich ist.



## 6 Wiederherstellung der Robustheit: LTR (Loop Transfer Recovery)

**Recap:** Der offene Regelkreis des LQR-Reglers ist:

$$L_{\text{LQR}}(s) = K \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B,$$

welcher hervorragende Robustheitseigenschaften aufweist:

$$\mu_{\min, \text{LQR}} = \min_{\omega} \left( \min_i \sigma_i(I + L_{\text{LQR}}(j\omega)) \right) \geq 1 \quad (6)$$

Leider kann zur minimum return difference des LQG-Reglers

$$\mu_{\min, \text{LQG}} = \min_{\omega} \left( \min_i \sigma_i(I + L_{\text{LQG}}(j\omega)) \right)$$

keine Aussage getroffen werden. Insbesondere kann  $\mu_{\min, \text{LQG}}$  arbiträr klein sein. D.h. die Robustheit muss nach dem Auslegen des Reglers zwingend analysiert werden.

### Loop-Transfer Recovery (LTR)

Es ist möglich, die Robustheit des originalen LQR-Problems mit einem LQG zu approximieren, nämlich dann, wenn der Beobachter sehr schnell eingestellt ist. Dann konvergiert der Fehler in der Zustandsschätzung  $x_e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  sehr schnell gegen null, im Grenzfall unendlich schnell. Die Wiederherstellung der Robustheit wird *loop-transfer recovery (LTR)* genannt.

**Zur Erinnerung:** Die Beobacherverstärkung  $L$  kann wie folgt gefunden werden:

$$\{A^\top, C^\top, B \cdot B^\top, q \cdot I\} \xrightarrow{\text{LQR}} L^\top,$$

wobei  $q$  ein einstellbarer Tuningparameter ist. Die Dynamik des Fehlers in der Zustandsschätzung (Gl. (7)) ist garantiert stabil, da die LQR-Entwurfsmethodik Eigenwerte mit Realteil kleiner null garantiert:

$$\frac{d}{dt} x_e(t) = (A - L(q) \cdot C) \cdot x_e(t). \quad (7)$$

Je kleiner  $q$  beim Tunen gewählt wird, desto schneller wird die Dynamik des Fehlers. Schneller heisst in diesem Fall, dass die Eigenwerte der Matrix  $(A - L(q) \cdot C)$  weiter links in der komplexen Ebene liegen und betragsmässig grösser sind. Entsprechend konvergiert der Fehler schneller zu null.

### Dynamik des Fehlers in der Zustandsschätzung

Wir analysieren nun die Fehlerdynamik für  $\lim_{q \rightarrow 0}$ .

**Bemerkung:** Die Eigenwerte einer inversen Matrix entsprechen den Inversen der Eigenwerte der Matrix:

$$\lambda_i(X^{-1}) = 1/\lambda_i(X) \quad (8)$$

Mit Gln. (7) und (8) folgt:

$$\lim_{q \rightarrow 0} x_e(t) = \lim_{q \rightarrow 0} (A - L(q) \cdot C)^{-1} \cdot \dot{x}_e(t) = 0, \quad (9)$$

da die Eigenwerte von  $(A - L(q) \cdot C)^{-1}$  asymptotisch gegen null gehen. Mit Gl. (9) und  $x_e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , folgt:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \hat{x}(t) = x(t), \quad \forall t$$

Das System verhält sich also für extrem kleine  $q$  als ob gar keine Beobachtdynamik vorhanden wäre. Oder in anderen Worten: Für  $q \rightarrow 0$  verhält sich der LQG-Regler wie ein LQR-Regler und erfüllt somit die gleichen Robustheitsgarantien (siehe Gl. (6) und Abb. 4).

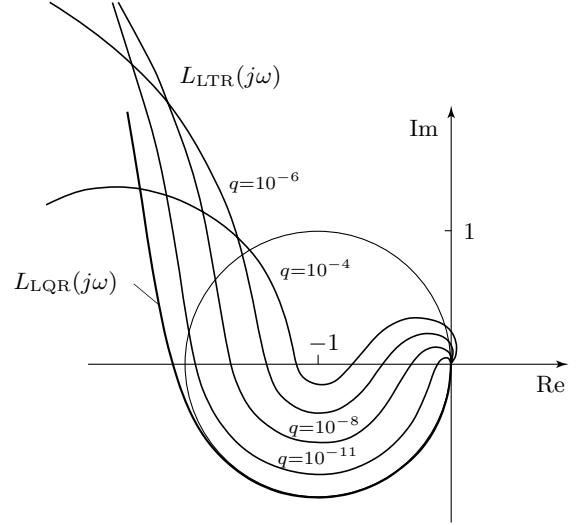


Abb. 4:  $L_{\text{LTR}}$  für verschiedene  $q$ .

### Bemerkungen:

- Der Wert von  $q$  sollte in Realität nicht beliebig klein gewählt werden, da dies zur Verstärkung von hochfrequentem Rauschen führt.
- Falls die Regelstrecke nichtminimalphasige Nullstellen hat, approximiert der LTR-Ansatz den LQR-Regler häufig so gut wie möglich. (Bei nichtminimalphasigen Systemen ist die Durchtrittsfrequenz der offenen Kreisverstärkung inhärent noch oben beschränkt, in diesem Fall ist eine perfekte Approximation der offenen LQR-Kreisverstärkung nicht möglich.)