

## Regelungstechnik II FS 2020

## Zustandsbeobachter

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

## Zusammenfassung Vorlesung 9

## Skript Kapitel 5

Bei Fragen: hraffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 12. Mai 2020

## 1 Zustandsbeobachter

Die linearen Zustandsregler, die im letzten Kapitel behandelt wurden, sind praktisch nicht umsetzbar, da uns nur der Systemeingang  $u(t)$  und der Systemausgang  $y(t)$  zur Verfügung stehen<sup>1</sup>. Es ist jedoch möglich die Signale  $u(t)$  und  $y(t)$  mit einem *Beobachter* zu kombinieren um eine *Schätzung*  $\hat{x}(t)$  des Zustandes zu erhalten. Das System kann danach mit den geschätzten Werten des Zustandes geregelt werden.

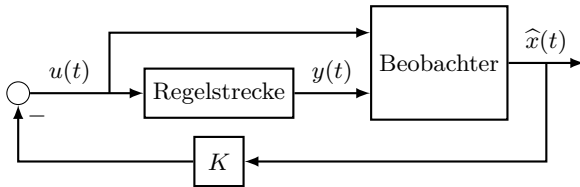


Abb. 1: Beobachter zur Regelung mit Ausgangsrückführung.

## 2 Luenberger Beobachter

Das Ziel ist, eine Beobachtdynamik  $\frac{d}{dt}\hat{x}(t)$  so zu konstruieren, dass der Beobachtungsfehler  $e(t)$  asymptotisch gegen null konvergiert:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0. \quad (1)$$

Genau dann würde die Schätzung  $\hat{x}(t)$  im Grenzfall dem wahren Zustand  $x(t)$  entsprechen. Die folgende Beobachtdynamik erfüllt diese Anforderung unter gewissen Bedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= \hat{A} \cdot \hat{x}(t) + \hat{B} \cdot u(t) + L \cdot (y - \hat{y}(t)) \\ \hat{y} &= \hat{C} \cdot \hat{x}(t) \end{aligned}$$

Dabei ist die Beobacherverstärkung  $L$  der Freiheitsgrad. Diese Struktur eines Beobachters wird Luenberger Beobachter genannt. Ein Blockdiagramm der Struktur ist in Abb. 2 ersichtlich.

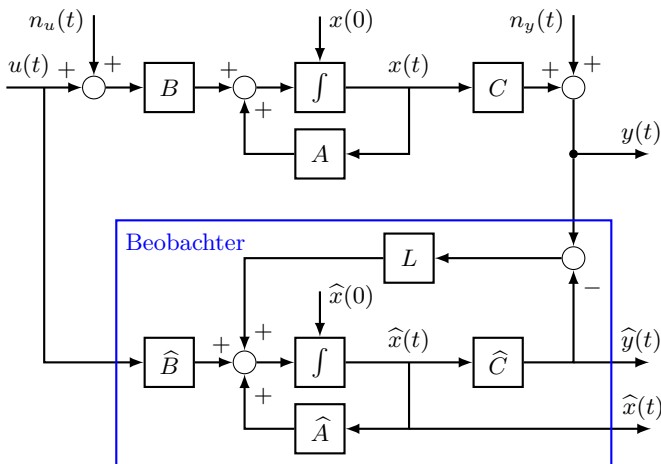


Abb. 2: Blockdiagramm des Luenberger Beobachters.

<sup>1</sup>Es kann durchaus sein, dass alle Zustände direkt messbar sind, dann ist  $y(t) = x(t)$ .

Die Dynamik des physikalischen Systems ist an Abb. 2 ablesbar und lautet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot (u(t) + n_u(t)) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + n_y(t) \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass die Systemmatrizen perfekt bestimmt wurden ( $\hat{A} = A, \hat{B} = B, \hat{C} = C$ ) und weder Störungen noch Rauschen vorliegen ( $n_u(t) = n_y(t) = 0$ ), kann die Dynamik des Fehlers hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e(t) &= \frac{d}{dt}x(t) - \frac{d}{dt}\hat{x}(t) \\ &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) - (A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot u(t) + L \cdot (y(t) - \hat{y}(t))) \\ &= A \cdot (x(t) - \hat{x}(t)) - L \cdot C \cdot (x(t) - \hat{x}(t)) \\ &= (A - L \cdot C) \cdot e(t), \quad e(0) = x(0) - \hat{x}(0) \neq 0 \end{aligned}$$

Der Fehler konvergiert also gegen 0 (siehe Gl. (1)), falls die Matrix  $A - L \cdot C$  Hurwitz<sup>2</sup> ist. Die Beobacherverstärkung  $L$  wird verwendet um dies zu erreichen. Im Folgenden werden zwei Methoden gezeigt, die die Platzierung der Pole ermöglichen.

## Polplatzierung von Hand:

Man kann sich ein charakteristisches Wunsch-Polynom definieren, und nach dem Freiheitsgrad  $L$  auflösen:

$$\det(A - L \cdot C - \lambda I) \stackrel{!}{=} (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda) = 0,$$

wobei  $\lambda_i$  die gewünschten Eigenwerte sind.

## Polplatzierung mit der LQR Formulierung:

**Recap:** die LQR-Formulierung platziert die Eigenwerte der Matrix  $A - B \cdot K$  mit dem Freiheitsgrad  $K$  so, dass die Matrix  $A - B \cdot K$  Hurwitz ist.

$$\text{LQR findet } K \text{ sodass } \operatorname{Re}(\operatorname{eig}(A - B \cdot K)) < 0$$

Wir wollen nun dasselbe mit der Matrix  $A - L \cdot C$  erreichen, wobei der Freiheitsgrad  $L$  eingestellt wird.  $L$  steht dabei jedoch "vor" dem  $C$ , und  $K$  "nach" dem  $B$ . Wir müssen zuerst folgenden Fakt der linearen Algebra verwenden:

$$\operatorname{eig}(X) = \operatorname{eig}(X^T), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Somit folgt:

$$\operatorname{eig}(A - L \cdot C) = \operatorname{eig}((A - L \cdot C)^T) = \operatorname{eig}(A^T - C^T \cdot L^T)$$

Das heisst wir können zur Berechnung der Beobacherverstärkung  $L$  auch die LQR-Formulierung verwenden. Indem wir die Eigenwerte der Matrix  $A^T - C^T \cdot L^T$  mit der LQR-Formulierung platzieren, wissen wir sofort, dass  $A - L \cdot C$  auch Hurwitz ist (Realteile der Eigenwerte kleiner null). Somit ist garantiert, dass der Fehler  $e(t)$  asymptotisch gegen null konvergiert, so wie gewünscht in Gl. (1).

<sup>2</sup>Realteil aller Eigenwerte ist kleiner null

### Zur Erinnerung:

Die Lösung der LQR-Formulierung lautet

$$K = R^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi, \text{ wobei für } \Phi \text{ gilt:} \quad (2)$$

$$\Phi \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^T \cdot \Phi - Q = 0.$$

Mit den Änderungen

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A^T \\ B &\rightarrow C^T \\ Q &= \bar{C}^T \cdot \bar{C} \rightarrow \bar{B} \cdot \bar{B}^T \\ R &= r \cdot I \rightarrow q \cdot I \\ K &\rightarrow L^T \\ \Phi &\rightarrow \Psi, \end{aligned}$$

folgt die Lösung der Polplatzierung mit Freiheitsgrad  $L^T$ :

$$\begin{aligned} L^T &= \frac{1}{q} \cdot C \cdot \Psi \\ \Psi \cdot C^T \cdot \frac{1}{q} \cdot C \cdot \Psi - \Psi \cdot A^T - A \cdot \Psi - \bar{B} \cdot \bar{B}^T &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Falls die Matrizen  $\{A, C\}$  beobachtbar und  $\{A, \bar{B}\}$  steuerbar sind, existiert eine eindeutige positiv definite Lösung  $\Psi$ .

### Bemerkungen:

- Die Matrix  $L$  ist statisch. Sie muss für gegebene  $\{A^T, C^T, \bar{B} \cdot \bar{B}^T, q \cdot I\}$  nur einmal berechnet werden.
- Die Matrizen  $\bar{B}$  und der Faktor  $q$  werden iterativ eingestellt, bis zufriedenstellende Performance erreicht wird.
- Falls Rauschen  $n_y$  am Ausgangssignal vorhanden ist, lautet die Fehlerdynamik:

$$\frac{d}{dt}e(t) = (A - L \cdot C) \cdot e(t) - L \cdot n_y(t)$$

Das heisst  $L$  kann nicht beliebig gross gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärken würde (siehe Abb. 3).

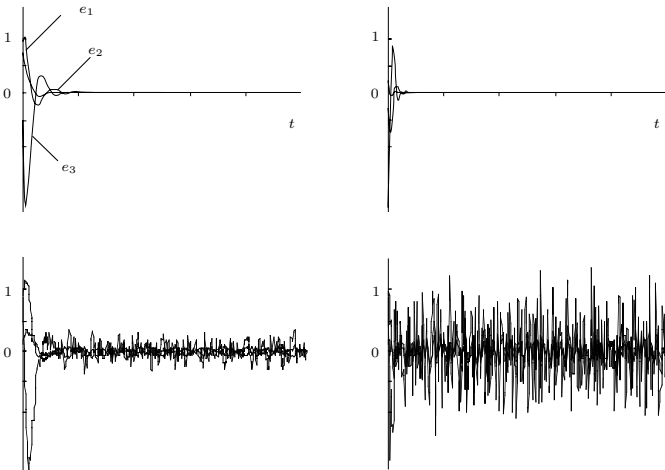


Abb. 3: Transiente der Fehlerdynamik für ein System dritter Ordnung. Links: "langsame" Fehlerdynamik, Rechts: "schnelle" Fehlerdynamik. Oben: kein Rauschen. Unten: Rauschen.

### 3 Kalman Filter als Luenberger Beobachter

Falls die Störungen  $n_u(t)$  und  $n_y(t)$  Gaussian zero mean white noise Signale sind, und die Varianz der Gaussverteilung bekannt ist, dann kann ein "optimales"  $L$  gefunden werden, welches die Varianz des Beobachtungsfehlers  $e(t)$  minimiert. Die Kovarianzmatrix eines zero mean white noise Signals ist:

$$E\{n(t) \cdot n^T(t - \tau)\} = R \cdot \delta(\tau), \quad (4)$$

wobei  $E$  der Erwartungswert ist,  $\delta$  ein Diracimpuls, und  $R = R^T \succeq 0$  eine konstante positiv semi-definite Matrix. Gl. (4) besagt, dass das Signal  $n(t)$  perfektes Rauschen ist (es korreliert nur für  $\tau = 0$  mit sich selber, sonst nicht ( $\tau \neq 0$ )).

Um den Kalman Filter zu verwenden müssen die Kovarianzmatrizen der Störungssignale bekannt sein:

$$\begin{aligned} E\{n_u(t) \cdot n_u(t - \tau)\} &= R_u \cdot \delta(\tau), \quad R_u \succeq 0 \\ E\{n_y(t) \cdot n_y(t - \tau)\} &= R_y \cdot \delta(\tau), \quad R_y \succeq 0 \end{aligned}$$

Die Matrizen  $R_u$  und  $R_y$  können durch statistische Analyse gefunden werden. Wie dies genau geschieht sprengt den Rahmen von Regelungstechnik II. Deswegen wird im Folgenden die Lösung präsentiert, ohne Beweis.

Beim Tunen des Luenberger Beobachter können wir  $\bar{B} \cdot \bar{B}^T$  und  $q$  einstellen. Es stellt sich heraus, dass die Änderung

$$\begin{aligned} \bar{B} \cdot \bar{B}^T &\rightarrow B \cdot R_u \cdot B^T \\ q \cdot I &\rightarrow R_y \end{aligned}$$

die Lösung des Kalman Filters liefert. Das heisst man muss beim Kalman Filter nichts mehr tunen. Die Kovarianzen  $R_u$  und  $R_y$  liefern direkt die optimalen Tuning-Parameter die varianzminimierend wirken. Die Lösung kann wiederum über die Riccati-Gleichung gefunden werden:

$$\begin{aligned} L_K^T &= R_y^{-1} \cdot C \cdot P \\ P \cdot C^T \cdot R_y^{-1} \cdot C \cdot P - P \cdot A^T - A \cdot P - B \cdot R_u \cdot B^T &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

wobei  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , die positiv definite Lösung der Riccati Gleichung, garantiert existiert wenn  $\{A, C\}$  beobachtbar ist.

### Bemerkungen:

- Die Matrix  $L_K$  ist statisch. Sie muss für gegebene  $\{A^T, C^T, B \cdot R_u \cdot B^T, R_y\}$  nur einmal berechnet werden.
- Der Kalman Filter hat keine Tuning-Parameter mehr;  $R_u$  und  $R_y$  werden durch statistische Analyse bestimmt.

### Zusammenfassung:

Gl. (2), Gl. (3) und Gl. (5) sind identisch in der Form und können alle mit dem LQR-Formalismus gelöst werden. Folgende Tabelle fasst die Ähnlichkeit zusammen:

LQR	Luenberger	Kalman
$A$	$A^T$	$A^T$
$B$	$C^T$	$C^T$
$Q = \bar{C}^T \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot \bar{B}^T$	$B \cdot R_u \cdot B^T$
$R$	$q \cdot I$	$R_y$
$K$	$L^T$	$L_K^T$
$\Phi$	$\Psi$	$P$

Tabelle 1: "Konvertierungstabelle" zwischen LQR-Regler, Luenberger-Filter und Kalman-Filter.