

## Regelungstechnik II FS 2020

## Relative-Gain Array (RGA), Singulärwerte

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Bei Fragen: hruffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 26. März 2020

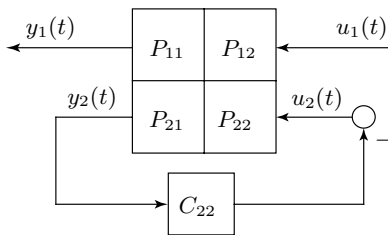
## Zusammenfassung Vorlesung 6

## Skript Kapitel 2

## 1 Relative Gain Array (RGA)

Mit dem Relative-Gain Array (RGA) kann man bestimmen, ob ein MIMO-System gut mit separaten SISO-Reglern regelbar ist. Dazu wird die Verstärkung  $|P_{ij}(j\omega)|$  jeder Übertragungsfunktion von Eingang  $u_j$  auf Ausgang  $y_i$  bei Frequenz  $\omega$  für zwei Extremfälle betrachtet. Das Verhältnis der beiden Werte ist der Relative-Gain. Das RGA ist schlussendlich eine Matrix mit den Verhältnissen aller Übertragungsfunktionen bei einer gegebenen Frequenz  $\omega$ .

Die Extremfälle für die Übertragungsfunktion  $P_{11}$  werden illustrativ mit folgender Abbildung dargestellt:



Der Regler  $C_{22}$  sollte dabei als eine Art hypothetische Grösse verstanden werden, mit der entweder  $u_2(t) = 0$  oder  $y_2(t) = 0$  gesetzt werden kann, mehr dazu gleich jetzt.

**Extremfall 1: "open-loop"**  $\leftrightarrow C_{22} = 0$ 

Das System wird "open-loop" betrachtet: Es wird angenommen dass der Regler  $C_{22} = 0$  ist, d.h. dass nur der Eingang  $u_1$  den Ausgang  $y_1$  beeinflusst während im allgemeinen Fall alle anderen Eingänge null sind:  $u_j = 0 \forall j \setminus \{1\}$ . In diesem Fall ist die Übertragungsfunktion von  $u_1$  auf  $y_1$ :

$$P_{u_1 \rightarrow y_1}(s) = P_{11}(s).$$

**Extremfall 2: "perfect closed-loop"**  $\leftrightarrow C_{22} = \infty$ 

Es wird angenommen, dass im allgemeinen Fall alle Ausgänge ausser der betrachtete Ausgang  $y_1$  perfekt auf null geregelt werden, d.h.  $y_i = 0 \forall i \setminus \{1\}$ . Im gegebenen Beispiel heisst das, dass  $u_2(t)$  so gewählt ist, dass  $y_2(t) = 0 \forall t$ . Dies wird schematisch mit einem Regler unendlicher Verstärkung  $C_{22} = \infty$  dargestellt. Dann ist die Übertragungsfunktion von  $u_1$  auf  $y_1$ :

$$P_{u_1 \rightarrow y_1}(s) = \frac{P_{11}(s) \cdot P_{22}(s) - P_{12}(s) \cdot P_{21}(s)}{P_{22}(s)}.$$

**Der Relative Gain** ist das resultierende Verhältnis zwischen open-loop und closed-loop Verhalten:

$$[RGA(s)]_{11} = \frac{P_{11}(s) \cdot P_{22}(s)}{P_{11}(s) \cdot P_{22}(s) - P_{12}(s) \cdot P_{21}(s)}.$$

Dieses Verhältnis hat eine sehr schöne Interpretation: Es widerspiegelt die Änderung der Verstärkung von Eingang  $u_1$  auf Ausgang  $y_1$  im Fall, dass alle anderen Regelkreise des MIMO Systems perfekt geschlossen werden. Der Relative Gain beantwortet also die Frage: "Wenn ein Regler vom Eingang  $u_1$  auf den Ausgang  $y_1$  basierend auf dem open-loop System  $P_{11}$  ausgelegt wird, welche veränderten Verhältnisse trifft dieser Regler an, wenn er schlussendlich im geregelten MIMO-System verwendet wird?"

**SISO-fähiges  $P_{ij}(s) \leftrightarrow [RGA(s)]_{ij} \approx 1$** 

Die Verstärkung von Eingang  $u_j$  auf Ausgang  $y_i$  im MIMO-System ist identisch zur Verstärkung der Übertragungsfunktion  $P_{ij}(s)$ . Basierend auf  $P_{ij}(s)$  kann also ein sinnvoller Regler entworfen werden, der den Ausgang  $y_i$  mit dem Eingang  $u_j$  regelt.

**Nicht SISO-fähiges  $P_{ij}(s) \leftrightarrow [RGA(s)]_{ij} \approx 0$** 

Die Verstärkung der Übertragungsfunktion  $P_{ij}(s)$  ist vernachlässigbar im Vergleich zur resultierenden Verstärkung von Eingang  $u_j$  auf Ausgang  $y_i$  im MIMO System. Basierend auf  $P_{ij}(s)$  kann also kein sinnvoller Regler entworfen werden, der den Ausgang  $y_i$  mit dem Eingang  $u_j$  regelt.

**Instabiles Verhalten für  $P_{ij}(s) \leftrightarrow [RGA(s)]_{ij} < 0$** 

Das Vorzeichen der Verstärkung der Übertragungsfunktion von  $u_j$  auf  $y_i$  im MIMO System ist unterschiedlich vom Vorzeichen von  $P_{ij}(s)$ . D.h. ein SISO-Regler, ausgelegt basierend auf  $P_{ij}(s)$ , hat, wenn er im MIMO-System verwendet wird, eine entgegengesetzte Wirkung. Der Regler führt also z.B. als Reaktion auf einen Sollsprung in  $y_i$  dazu, dass die Variable  $y_i$  nach unten anstatt nach oben geregelt wird, das MIMO System kann mit diesem Regler also destabilisiert werden.

**Das RGA** ist die Matrix mit den relativen gains aller Übertragungsfunktionen als Einträgen.

Das RGA einer  $2 \times 2$  Regelstrecke  $P(s)$  ist:

$$RGA(s) = \begin{bmatrix} \frac{P_{11}P_{22}}{P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}} & \frac{-P_{12}P_{21}}{P_{22}P_{11} - P_{21}P_{12}} \\ \frac{-P_{12}P_{21}}{P_{22}P_{11} - P_{21}P_{12}} & \frac{P_{11}P_{22}}{P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Das RGA eines allgemeinen MIMO-Systems  $P(s)$  kann wie folgt berechnet werden:

$$RGA(s) = P(s) \cdot \times P(s)^{-\top},$$

wobei  $\cdot \times$  eine elementweise Multiplikation beschreibt und  $P(s)^{-\top}$  die Inverse der Transponierten ist.

**Eigenschaften des RGA:**

Aus Gl. (1) ist ersichtlich, dass die Summe der Spalten und der Zeilen des RGA immer 1 ergeben. Dies gilt auch für RGAs höherer Ordnung.

Dies führt, kombiniert mit der obigen Analyse zu den individuellen Einträgen  $[RGA(s)]_{ij}$  zu folgendem Fazit:

Falls das RGA bei einer gegebenen Frequenz  $\omega$  ungefähr eine Einheitsmatrix ist:

$$|RGA(j\omega)| \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dann ist das betrachtete MIMO-System bei dieser Frequenz mit individuellen SISO-Reglern regelbar. Oder allgemein: falls in jeder Zeile/Spalte ein Eintrag sehr nahe bei eins ist und die anderen nahe bei Null, sind diese Kombinationen von Ein- und Ausgängen gut mit einem SISO-Regler regelbar.

**Beispiel:** Das RGA des Systems

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{\tau s + 1} & \frac{a_{12}}{\tau s + 1} \\ \frac{a_{21}}{\tau s + 1} & \frac{a_{22}}{\tau s + 1} \end{bmatrix}$$

lautet

$$\text{RGA}(s) = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{-a_{12}a_{21}}{a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12}} \\ \frac{-a_{12}a_{21}}{a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12}} & \frac{a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{bmatrix}$$

Es werden 3 verschiedene Fälle betrachtet.

**Fall 1:**  $a_{11} = a_{22} = 1$ ,  $a_{12} = a_{21} = 0.1$

Das RGA lautet:

$$\text{RGA}(s) = \begin{bmatrix} 1.01 & -0.01 \\ -0.01 & 1.01 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⇒ Das System kann gut mit 2 separaten SISO-Reglern geregelt werden,  $y_1$  wird mit  $u_1$  geregelt,  $y_2$  mit  $u_2$ .

**Fall 2:**  $a_{11} = a_{22} = 0.1$ ,  $a_{12} = a_{21} = 1$

Das RGA lautet:

$$\text{RGA}(s) = \begin{bmatrix} -0.01 & 1.01 \\ 1.01 & -0.01 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

⇒ Das System kann gut mit 2 separaten SISO-Reglern geregelt werden.  $y_1$  wird mit  $u_2$  geregelt,  $y_2$  mit  $u_1$ .

**Fall 3:**  $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 1$ ,  $a_{21} = -1$

Das RGA lautet:

$$\text{RGA}(s) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

⇒ Die einzelnen Ausgänge lassen sich schlecht mit individuellen Eingängen regeln, da im MIMO-System starke Quereinflüsse vom jeweils anderen Eingang zu erwarten sind.

## 2 Singulärwerte

Im Folgenden werden Eigenschaften zur linearen Abbildung

$$y = M \cdot u, \quad u \in \mathbb{C}^m, \quad y \in \mathbb{C}^p, \quad M \in \mathbb{C}^{p \times m}$$

beschrieben. Insbesondere erfüllt der Ausgang  $y$  folgende wichtige Eigenschaft:

$$\sigma_{\min}(M) \leq \frac{\|y\|}{\|u\|} \leq \sigma_{\max}(M),$$

wobei  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm ist und

$$\sigma_i(M) = \sqrt{\lambda_i(\bar{M}^\top \cdot M)} > 0,$$

die Singulärwerte der Matrix  $M$  sind.  $\bar{M}^\top$  ist die Transponierte der komplex-Konjugierten von  $M$ . Die Singulärwertzerlegung (SVD) der Matrix  $M$  lautet:

$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^\top,$$

wobei  $\Sigma$  die Singulärwerte  $\sigma_i$  auf der Hauptdiagonalen hat.  $U$  und  $V^\top$  sind unitäre (längenerhaltende) Transformationsmatrizen:

$$U \cdot U^\top = I, \quad V \cdot V^\top = I$$

**Beispiel:** Alle Eingänge  $\{u \mid \|u\| = 1\}$  sollen mit

$$M = \begin{bmatrix} 0.4009 & -1.0133 \\ 1.4015 & -1.0480 \end{bmatrix}$$

abgebildet werden. Die Singulärwertzerlegung lautet:

$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}}_U \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}}_\Sigma \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V^\top}$$

Für die euklidische Norm beschreibt  $\|u\| = 1$  einen Kreis mit Radius 1. Der Kreis wird mit  $V^\top$  zuerst um  $\pi/4$  rotiert, dann werden die Hauptachsen des Kreises mit den Singulärwerten in  $\Sigma$  skaliert, sodass eine Ellipse entsteht. Letztendlich wird die Ellipse um  $\pi/3$  rotiert.

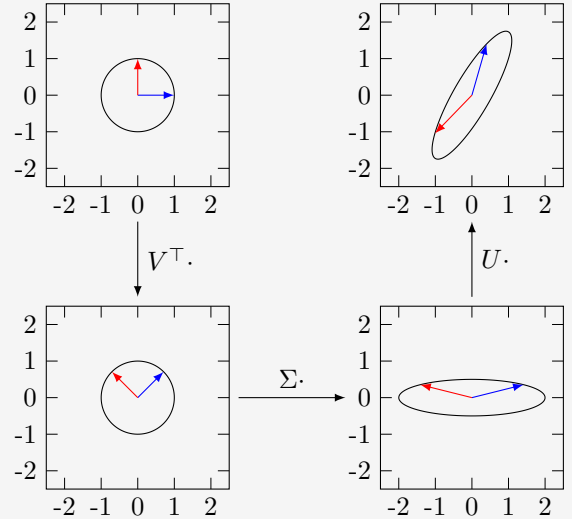


Abb. 1: Lineare Transformation  $M$  als Folge der Transformationen  $V^\top$ ,  $\Sigma$  und  $U$ .

Die Transformationen  $V^\top$  und  $U$  beschreiben in diesem Beispiel reine Rotationen. Spiegelungen sind auch möglich und erfüllen somit auch Unitarität. Zusätzlich sollen die Eingänge gefunden werden, die den Ausgang maximal und minimal anregen. Da die Zeilen der Matrix  $V^\top$  orthonormal sind, entsprechen die Zeilen von  $V^\top$  den Eingängen, die die Hauptachsen anregen. Das heißt

$$\begin{aligned} \|Y\| &= \sigma_{\min} \quad \text{für } u = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ \|Y\| &= \sigma_{\max} \quad \text{für } u = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Abb. 2: Minimale und maximale Anregungsrichtung.

