

1 Allgemeine Lösung eines LZI Systems

Ein lineares zeitinvariantes SISO System hat die allgemeine Form:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t) \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$y(t) = c \cdot x(t) + d \cdot u(t) \quad c \in \mathbb{R}^{1 \times n}, d \in \mathbb{R}$$

$$x(0) = x_0$$

Die allgemeine Lösung der Zustandsgrösse $x(t)$ ist:

$$x(t) = e^{A \cdot t} \cdot x_0 + \int_0^t e^{A \cdot (t-\rho)} \cdot b \cdot u(\rho) d\rho \quad (1)$$

Setzt man die allgemeine Lösung in die Gleichung der Ausgangsgrösse $y(t)$ ein, erhält man die Superposition dreier Grössen:

$$y(t) = \underbrace{c \cdot e^{A \cdot t} \cdot x_0}_I + \underbrace{c \cdot \int_0^t e^{A \cdot (t-\rho)} \cdot b \cdot u(\rho) d\rho}_{II} + \underbrace{d \cdot u(t)}_{III}$$

Die natürliche Antwort des Systems (*I*) ist **unabhängig** von der Eingangsgrösse u . Der Eingang u trägt einerseits zum Beitrag der Systemdynamik (*II*) bei, und andererseits zum Feedthrough Term (*III*).

2 Stabilitätseigenschaften

Für die Stabilitätseigenschaften betrachtet man die natürliche Antwort des Systems. Aus der allgemeinen Lösung Gl. (1) folgt:

$$x(t) = e^{A \cdot t} \cdot x_0, \quad y(t) = c \cdot e^{A \cdot t} \cdot x_0$$

$$e^{A \cdot t} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x(0) = [x_{0,1} \quad x_{0,2} \quad \dots \quad x_{0,n}]^T$$

Im Allgemeinen sind die einzelnen Zustände gekoppelt

$$x_i(t) = f(x_{0,1}, \dots, x_{0,n}, t),$$

da $e^{A \cdot t}$ im Allgemeinen nicht diagonal ist. Man wählt die Transformation

$$\tilde{x} = V^{-1} \cdot e^{A \cdot t} \cdot V \cdot \tilde{x}(0) = e^{\tilde{A} \cdot t} \cdot \tilde{x}(0),$$

sodass \tilde{A} diagonal ist. Daraus folgt, dass $e^{\tilde{A} \cdot t}$ diagonal ist, und die transformierten Zustände entkoppelt sind:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \cdot t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n \cdot t} \end{bmatrix} \tilde{x}_0 = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \tilde{x}_{0,1} \\ e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot \tilde{x}_{0,2} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n \cdot t} \cdot \tilde{x}_{0,n} \end{bmatrix},$$

wobei λ_i die Eigenwerte von A und \tilde{A} sind¹. Die Eigenwerte sind generell komplexwertig $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$, wobei $\text{Re}(\lambda_i) = \sigma_i$, $\text{Im}(\lambda_i) = \omega_i$, und $j^2 = -1$.

¹Es gilt: $\text{eig}(A) = \text{eig}(\tilde{A})$

Setzt man die allgemeinen Eigenwerte in die obere Gleichung ein, folgt:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \tilde{x}_{0,1} \\ e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot \tilde{x}_{0,2} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n \cdot t} \cdot \tilde{x}_{0,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\sigma_1 t} \cdot (\cos(\omega_1 t) + j \cdot \sin(\omega_1 t)) \cdot \tilde{x}_{0,1} \\ e^{\sigma_2 t} \cdot (\cos(\omega_2 t) + j \cdot \sin(\omega_2 t)) \cdot \tilde{x}_{0,2} \\ \vdots \\ e^{\sigma_n t} \cdot (\cos(\omega_n t) + j \cdot \sin(\omega_n t)) \cdot \tilde{x}_{0,n} \end{bmatrix}$$

In dieser Form sieht man, dass die Geschwindigkeit mit der ein Zustand divergiert/konvergiert von den Realteilen σ_i abhängt ($e^{\sigma_i \cdot t}$ -Term). Ausserdem sieht man, dass der Imaginärteil ω_i bestimmt, ob und wie schnell ein Zustand oszilliert.

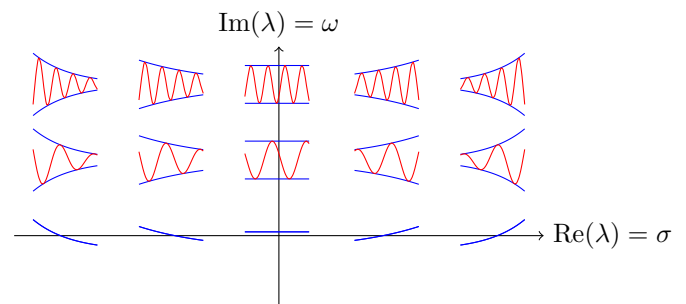


Abb. 1: Systemantwort als Funktion der Eigenwerte. Rot: Einfluss Imaginärteil, Blau: Einfluss Realteil

In physikalischen Systemen haben komplexe Eigenwerte λ_i immer ein komplex-konjugiertes Gegenstück λ_i^* .

Für lineare Systeme kann das Verhalten der natürlichen Antwort anhand der Eigenwerte der Systemmatrix A charakterisiert werden. Dies erlaubt die Analyse der Stabilität von Gleichgewichtspunkten nach Lyapunov:

Lyapunov Stabilität

Stabilität nach Lyapunov erlaubt die Stabilitätsanalyse von Gleichgewichtspunkten (GGWP) von linearen und linearisierten Systemen. Falls die Stabilität des GGWP eines linearisierten Systems den Fällen (i) oder (iii) entspricht, gilt dies auch für die Stabilität desselben GGWP im nichtlinearen System.

i. Asymptotisch stabil: ($\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$), falls alle Eigenwerte λ_i ($i = 1, \dots, n$) einen negativen Realteil haben $\sigma_i < 0$.

ii. Stabil: ($\|x(t)\| < \infty \quad \forall t \in [0, \infty]$), falls mindestens ein Eigenwert λ_k $k \in \{1, \dots, n\}$ keinen Realteil hat $\sigma_k = 0$ und kein anderer Realteil positiv ist $\sigma_i \not> 0$

iii. Instabil: ($\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty$), falls mindestens ein Eigenwert λ_k einen positiven Realteil hat $\sigma_k > 0$.

Wichtig! Falls ein GGWP eines linearisierten Systems Eigenwerte mit $\sigma_i = 0$ vorweist, lässt sich mit dieser Analyse keine Aussage über die Stabilität desselben GGWP des nichtlinearen Systems machen.

Beispiel: Betrachte Abb. 2. Die Masse m ist mit einer Feder mit Federkonstante k_F und einem Dämpfer mit Dämpferkonstante c_D verbunden. Das System kann mit einer Kraft $u(t)$ aktuiert werden.

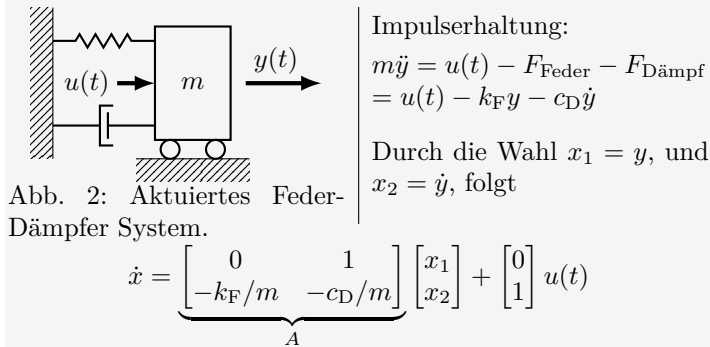


Abb. 2: Aktuiertes Feder-Dämpfer System.

Die Entwicklung des Systems kann nun mittels der Eigenwerte λ_i von A analysiert werden:

$$\text{eig}(A) = \lambda_i = -\frac{c_D}{2m} \pm \sqrt{\frac{c_D^2}{4m^2} - \frac{k_F}{m}}$$

Fall (1): $\frac{c_D^2}{4m^2} - \frac{k_F}{m} \geq 0 \Rightarrow c_D^2 \geq 4k_F m \Rightarrow \sigma_i < 0, \omega_i = 0$

Falls der Dämpfer relativ zur Feder und zur Masse genug stark ist, sind alle Eigenwerte reellwertig negativ. Das heisst, das System konvergiert ohne Oszillationen zum GGWP.

Asymptotisch stabil nach Lyapunov.

Fall (2): $c_D^2 < 4k_F m \Rightarrow \sigma_i < 0, \omega_i \neq 0$

Falls der Dämpfer schwach ist, werden die Eigenwerte komplex, mit negativem Realteil. Das heisst, das System oszilliert um den GGWP mit abnehmender Amplitude.

Asymptotisch stabil nach Lyapunov.

Fall (3): $c_D = 0 \Rightarrow \sigma_i = 0, \omega_i \neq 0$

Falls kein Dämpfer im System ist, werden alle Eigenwerte komplex mit Realteil $\sigma_i = 0$. Das System oszilliert für immer um den GGWP.

Stabil nach Lyapunov.

Fall (4): $k_F = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \sigma_2 < 0, \omega_2 = 0$

Falls keine Feder im System ist, wird ein Eigenwert 0 und der andere wird reell negativ. Falls das System mehrmals angestossen wird, kommt es jedesmal ohne Oszillation zum Stillstand, jedoch nicht zwingend im GGWP.

Stabil nach Lyapunov.

3 Testsignale auf Systeme erster Ordnung

In diesem Abschnitt werden spezielle Eingänge für Systeme erster Ordnung mit Zeitkonstante τ und Eingangsstärke k betrachtet

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot x(t) + \frac{k}{\tau} u(t), \quad y(t) = x(t)$$

3.1 Impulsantwort

$$u(t) = \delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

Aus Gl. (1) folgt die allgemeine Lösung :

$$y_\delta(t) = e^{-t/\tau} \cdot (x_0 + k/\tau). \quad (2)$$

Aus Gl. (2) folgt, dass ein Impuls die Anfangsbedingung x_0 um k/τ ändert. Das heisst, ein Impuls induziert eine Anfangsbedingung. Das System entwickelt sich von der neuen Anfangsbedingung, als ob $u(t) = 0$ wäre.

3.2 Sprungantwort

$$u(t) = h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Aus Gl. (1) folgt die allgemeine Lösung:

$$y_h(t) = e^{-t/\tau} \cdot x_0 + k \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \quad (3)$$

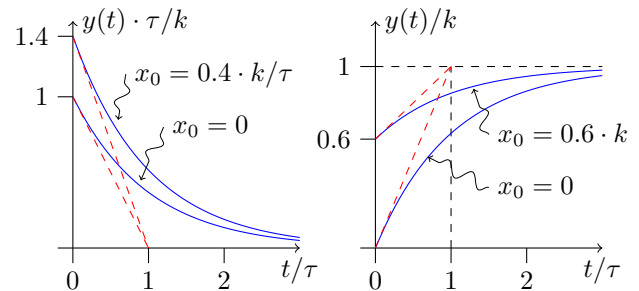


Abb. 3: Impulsantwort links und Sprungantwort rechts.

Die Tangente an die Impulsantwort zum Zeitpunkt $t = 0$ schneidet die Zeitachse zum Zeitpunkt $t = \tau$. Die Tangente an die Sprungantwort zum Zeitpunkt $t = 0$ schneidet den Sprung $k \cdot h(t)$ auch zum Zeitpunkt $t = \tau$. Je kleiner τ ist, desto schneller konvergiert das System.

Beispiel: Betrachte Abb. 2. Die Systemgleichung ohne Feder, mit $x = \dot{y}$ ist

$$\dot{x}(t) = \frac{-c_D}{m} x(t) + \frac{1}{m} u(t)$$

Es folgt: $\tau = m/c_D$ und $k = \tau/m = 1/c_D$. Ein Impuls auf das ruhende System induziert eine Anfangsgeschwindigkeit der Magnitude $k/\tau = 1/m$. Ein Sprung $h(t)$ auf das ruhende System stellt die Geschwindigkeit der Masse auf $\frac{1}{c_D}$.

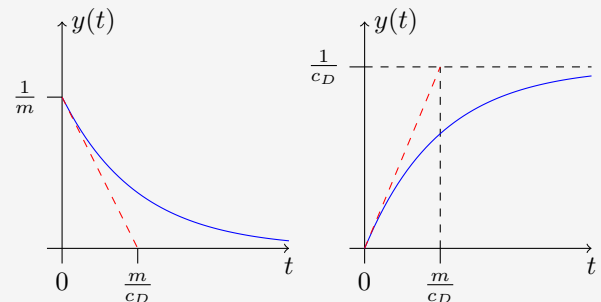


Abb. 4: Impulsantwort links und Sprungantwort rechts