

1 Inverse Laplace-Transformation

In Kapitel 6 wurde die Laplace-Transformation eingeführt. Es wurde erwähnt, dass sich im Frequenzbereich leicht eine Lösung finden lässt:

$$Y(s) = \Sigma(s) \cdot U(s) \quad (1)$$

Um die Antwort im Zeitbereich zu erhalten, könnte man die inverse Laplace-Transformation berechnen:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint Y(s) \cdot e^{s \cdot t} ds \quad t \geq 0$$

Dieses Linienintegral ist jedoch sehr schwer zum Ausrechnen. Man kann ausnützen, dass Lösungen im Frequenzbereich Brüche rationaler Funktionen sind:

$$Y(s) = b_m \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (s - \xi_j)}{\prod_{i=1}^n (s - \pi_i)}, \quad \xi_j, \pi_i \in \mathbb{C}$$

Insbesondere kann man mit der Partialbruchzerlegung den Bruch in eine Linearkombination von Brüchen tieferer Ordnung zerteilen:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k}}{(s - \pi_i)^k} \quad \rho_{i,k} \in \mathbb{C},$$

wobei $\rho_{i,k}$ die Residuen sind, und ϕ_i die Vielfachheit von π_i ist. Die inverse Laplace-Transformation der einzelnen Brüche kann allgemein hergeleitet werden:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s - \pi_i)^k}\right\} = \frac{1}{(k-1)!} \cdot t^{k-1} \cdot e^{\pi_i \cdot t} \cdot h(t)$$

Beispiel: Die inverse Laplace-Transformation von:

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 2}{s^3 + s^2 + s + 1} = \frac{s^2 + s + 2}{(s - j) \cdot (s + j) \cdot (s + 1)} \quad (2)$$

Mit der Partialbruchzerlegung:

$$Y(s) = \frac{1}{s + 1} + \frac{\frac{1}{2 \cdot j}}{s - j} + \frac{\frac{-1}{2 \cdot j}}{s + j} \quad (3)$$

Da die Laplace-Transformation eine lineare Operation ist, kann man nun die inverse Laplace-Transformation auf die einzelnen Brüche anwenden:

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = y(t) = e^{-t} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot j} (e^{j \cdot t} - e^{-j \cdot t})}_{\sin(t)} = e^{-t} + \sin(t)$$

Bemerkung: Komplexe Residuen sind oft sehr mühsam auszurechnen (Gl. (3)). Man kann bei Gl. (2) abkürzen, indem man erkennt, dass zwei rein konjugiert-komplexe Pole vorhanden sind. D.h. bevor dass man überhaupt etwas berechnet, kann man vorhersagen, dass entweder ein Cosinus oder

ein Sinus vorhanden sein muss. Um diesen Fakt auszunutzen fasst man die beiden Pole bei der Partialbruchzerlegung zusammen:

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 2}{(s^2 + 1) \cdot (s + 1)} = \underbrace{\frac{1}{s + 1}}_{\mathcal{L}\{e^{-t}\}} + \underbrace{\frac{1}{s^2 + 1}}_{\mathcal{L}\{\sin(t)\}} \quad (4)$$

In diesem Beispiel sind alle Pole entweder auf der rein reellen Achse ($s = -1$), oder auf der rein komplexen Achse ($s = \pm j$). Um eine Intuition für allgemeine Pole der Form $s = \sigma + j \cdot \omega$ (und deren inversen Laplace-Transformation) zu erhalten, wird das System zweiter Ordnung eingeführt.

2 Systeme 2. Ordnung

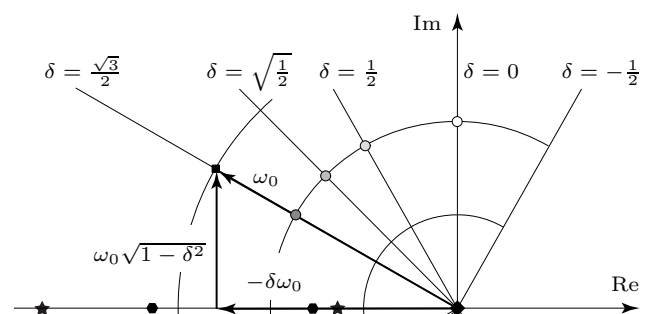
Die Übertragungsfunktion eines Systems zweiter Ordnung mit statischer Verstärkung von 1 hat folgende Form:

$$\Sigma(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2} \quad \Sigma(0) = 1 \quad (5)$$

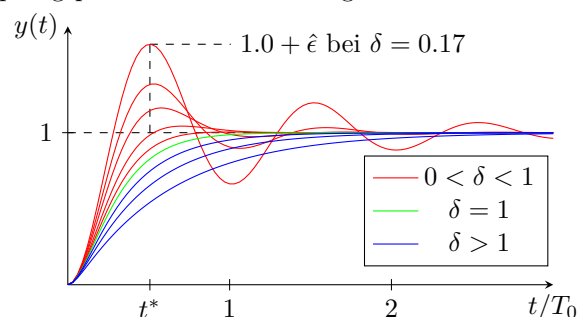
Dieses System hat zwei Pole:

$$s_{1,2} = \pi_{1,2} = \left(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}\right) \cdot \omega_0 \quad (6)$$

Anordnung der Pole auf der real-imaginären Ebene:



Der Parameter δ wird als Dämpfungsparameter bezeichnet. Für $|\delta| < 1$ wird das Argument der Wurzel in Gl. (6) negativ. Somit werden die Pole komplex. Für $|\delta| > 1$ werden die Pole rein reell. Der Parameter $\omega_0 = 2\pi/T_0$ wird als natürliche Frequenz des Systems bezeichnet, wobei T_0 die natürliche Periode ist. Die zeitnormierte Sprungantwort, für verschiedene Dämpfungsparameter sieht wie folgt aus:



Vorsicht! Die Zeit $t = t^*$ ist nur für $\delta = 0.17$ eingezeichnet. Generell gilt $t^* = t^*(\delta, \omega_0)$. Ausserdem überschiesst das System nur für $\delta < 1$. $\delta \geq 1$ wird später behandelt.

Abhängig von der Dämpfung gibt es drei grundsätzlich unterschiedliche Fälle des Systemverhaltens:

$0 < \delta < 1$ Da für $\delta < 1$ die Pole komplex werden, beinhaltet die Sprungantwort Schwingungen. Die erste Schwingung überschiesst das Ziel $u(t) = h(t)$ um den Überschuss $\hat{\epsilon} = e^{-\delta \cdot \pi / \sqrt{1-\delta^2}}$, bei der Zeit $t^* = \frac{\pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1-\delta^2}}$.

$\delta > 1$ Für übergedämpfte Systeme konvergiert das System ähnlich wie bei einem System erster Ordnung zum Endwert. Die Antwort überschiesst in diesem Fall nicht, da alle Pole rein reell sind:

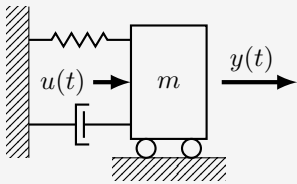
$$\Sigma(s) = \frac{\omega_0^2}{(s + \pi_1) \cdot (s + \pi_2)} \quad \pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}$$

Falls ein Pol viel schneller konvergiert ($\pi_2 \gg \pi_1$) gilt:

$$\Sigma(s) \approx \frac{\pi_1}{s + \pi_1}$$

$\delta = 1$ Dieser Fall heisst kritisch gedämpft. Mit Gl. (6) ist ersichtlich, dass für $\delta = 1$ beide Pole an der gleichen Stelle sind: $\pi_{1,2} = \omega_0$. Dieser Fall entspricht der schnellstmöglichen Konvergenz ohne Überschwinger.

Beispiel für $0 < \delta < 1$: Betrachte Abb. 1. Die Masse m ist mit einer Feder mit Federkonstante k_F und einem Dämpfer mit Dämpferkonstante c_D verbunden. Das System kann mit einer Kraft $u(t)$ aktuiert werden.



Impulserhaltung:

$$m\ddot{y} = u(t) - F_{\text{Feder}} - F_{\text{Dämpf}} = u(t) - k_F y - c_D \dot{y}$$

$$\Rightarrow \Sigma(s) = \frac{1/m}{s^2 + \frac{c_D}{m}s + \frac{k_F}{m}} \quad (7)$$

Abbildung 1: Aktuiertes Feder-Dämpfer System.

Fall 1: $m = 1$, $k_F = 1$, und $c_D = 1$:

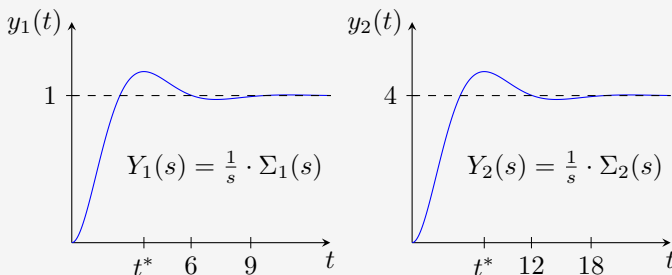
$$\Sigma_1(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}.$$

Vergleicht man nun mit der Standardform Gl. (5), erhält man: $\omega_0 = 1$, $\delta = 0.5$, $t^* = 3.628$, $\Sigma_1(0) = 1$, $\hat{\epsilon} = 0.163$.

Fall 2: $m = 1$, $k_F = 0.25$, und $c_D = 0.5$:

$$\Sigma_2(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 0.25} = 4 \cdot \frac{0.25}{s^2 + 0.5s + 0.25}$$

Es folgt: $\omega_0 = 0.5$, $\delta = 0.5$, $t^* = 7.255$, $\Sigma_2(0) = 4$, $\hat{\epsilon} = 0.163 \cdot \Sigma_2(0) = 0.652$.



Obwohl beide Systeme die gleiche Dämpfung haben, ist der Überschuss des zweiten Systems 4 mal grösser als beim ersten System. Ausserdem konvergiert die Sprungantwort des zweiten Systems zum Endwert $y(\infty) = 4$. Aus Gl. (5) ist ersichtlich, dass gilt: $\Sigma(0) = \omega_0^2 / \omega_0^2 = 1$. Dasselbe gilt für das erste System: $\Sigma_1(0) = 1/1 = 1$. Das zweite System, jedoch, hat eine grössere statische Verstärkung: $\Sigma_2(0) = 1/0.25 = 4$. Nun stellt sich die Frage, wann das allgemeine Beispielsystem (Gl. (7)) eine statische Verstärkung von 1 hat ($\Sigma(0) = 1$). Aus Gl. (5) ist leicht ersichtlich, dass gelten muss: $\frac{1}{m} = \frac{k_F}{m}$. D.h. das System konvergiert zum angewandten Sprung nur, falls gilt: $k_F = 1 \frac{N}{m}$! Dies macht Sinn, da eine Feder mit $k_F = 1$ sich bei einem Newton um einen Meter auslenkt. Eine Feder mit $k_F = 0.25$ lenkt sich bei einem Newton um 4 Meter aus. Wie schnell sich die Auslenkung einpendelt hängt vom Dämpfer ab.

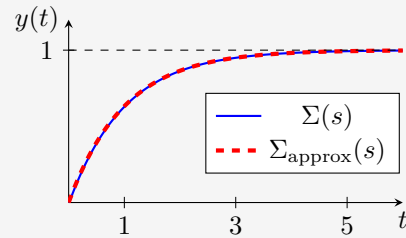
Beispiel für $\delta > 1$: Betrachte Abb. 1. Wählt man: $m = 0.01$, $k_F = 1$, und $c_D = 101/100$, folgt:

$$\Sigma(s) = \frac{100}{s^2 + 101s + 100} = \frac{100}{(s + 100) \cdot (s + 1)} \quad (8)$$

In Gl. (8) ist im Nenner ersichtlich, dass die Impulsantwort im ZB eine Superposition der Form, $y(t) = \alpha \cdot e^{-100 \cdot t} + \beta \cdot e^{-t}$, sein wird. Da $e^{-100 \cdot t}$ viel schneller abklingt, kann man das System approximieren:

$$\Sigma_{\text{approx}}(s) = \frac{1}{s + 1} \quad (9)$$

Man muss den Zähler anpassen, um die statische Verstärkung des approximierten Systems gleich zu halten: $\Sigma(0) = \Sigma_{\text{approx}}(0)$. Die Simulation beider Systeme liefert:



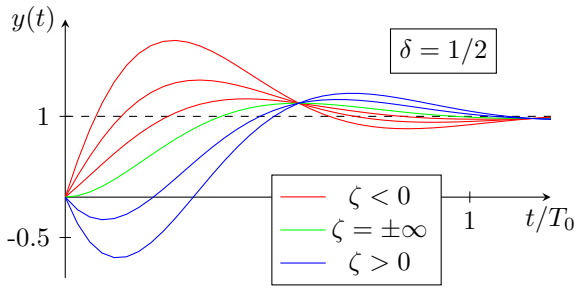
Die beiden Sprungantworten sind fast identisch.

3 Nullstelleneinfluss

Bis jetzt wurden nur die Pole betrachtet. Nullstellen sind jedoch auch sehr wichtig für das Systemverhalten. Um Nullstellen besser zu verstehen, wird das System zweiter Ordnung (Gl. (5)) mit einer rein reellen Nullstelle an der Stelle $s = \zeta$ erweitert:

$$\Sigma(s) = \frac{(-s/\zeta + 1) \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2} \quad (10)$$

Eine Nullstelle weit weg vom Ursprung ($\zeta = \pm \infty$) hat keinen Einfluss auf das Systemverhalten. Je näher die Nullstelle am Ursprung ist, desto stärker ist der Einfluss dieser Nullstelle. Dies widerspiegelt sich an einem stärkeren Überschuss in der Systemantwort. Wie bereits in Kapitel 5 behandelt, kann eine Nullstelle nahe an einem Pol, den Einfluss des Pols schwächen. Für $\zeta > 0$ hat die Systemantwort einen "Undershoot". In anderen Worten reagiert das System zuerst in die "falsche" Richtung. Ein System mit einer Nullstelle der Form $\zeta > 0$ wird als nicht-minimalphasig bezeichnet.



Nicht-minimalphasige Nullstellen folgen aus der Sensor- und Aktuatorwahl. D.h. sie sind eine Eigenschaft aus der Kombination der Systemvektoren b und c mit der Systemmatrix A (im Gegensatz zu den Polen, die nur von der Systemmatrix A abhängen.) Durch Änderung der Messgrösse (z.B. durch Änderung der Sensorenkonfiguration), kann eine nicht-minimalphasige Nullstelle minimalphasig werden.

Bemerkung: Die initiale Sprungantwort in die “falsche” Richtung tritt bei einer ungeraden Anzahl positiver Nullstellen ($\text{Re}(\zeta > 0)$) auf.

4 BIBO Stabilität

Als nächstes wird das Konzept von Bounded Input Bounded Output (BIBO) Stabilität eingeführt, welche sich auf Übertragungsfunktionen $\Sigma(s)$ (das I/O Verhalten) bezieht.

Es wurde bereits im Zeitbereich die Stabilität vom GG-WP nach Lyapunov eingeführt. Diese wird für den allgemeinen Fall mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0 \neq 0$ betrachtet. Bei Übertragungsfunktionen $\Sigma(s)$ hingegen wird $x(0) = 0$ angenommen. Zudem wurde gezeigt, dass sich nicht beobachtbare und nicht steuerbare Zustände in $\Sigma(s)$ kürzen. Falls alle Zustände beobachtbar und steuerbar sind, entsprechen die Nullstellen des Nenners der Übertragungsfunktion im FB den Eigenwerten der Matrix A im ZB. Die Stabilität im I/O Setting braucht jedoch eine neue Interpretation, da es keinen Zustandsvektor mehr gibt. → **BIBO Stabilität** bezieht sich auf das **I/O Verhalten** von $\Sigma(s)$, und **Lyapunov Stabilität** bezieht sich auf das Gleichgewicht der **Zustände**.

Ein System ist BIBO stabil, falls für die Impulsantwort $\sigma(t)$ folgendes gilt:

$$\int_0^\infty |\sigma(t)| dt < \infty \quad (11)$$

Für ein System mit Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$, gilt:

- Das System ist BIBO stabil falls alle Pole π_i negativen Realteil haben.
- Das System ist nicht BIBO stabil in allen anderen Fällen.

Dabei ist wichtig, dass nicht beobachtbare Zustände und nicht steuerbare Zustände die BIBO Stabilität nicht beeinflussen, da sich diese in $\Sigma(s)$ wegekürzen. BIBO Stabilität und Lyapunov Stabilität scheinen zunächst sehr ähnlich zu sein, man muss aber die Konzepte auseinanderhalten. Ein BIBO stabiles System kann Lyapunov instabil sein, und ein Lyapunov stabiles System kann BIBO instabil sein.

Beispiel: Lyapunov stabil und BIBO instabil



Das System in (a) wird betrachtet. Ein Körper mit Masse

$m = 1$ sei ohne Reibung frei beweglich. Die einzige Kraft, die wirkt sei der Eingang $u(t)$. Der Ausgang sei die Geschwindigkeit des Körpers $\dot{z}(t)$. Durch Impulserhaltung folgt:

$$\ddot{z}(t) = u(t), \quad y(t) = \dot{z}(t)$$

Durch die Wahl des Zustands $x(t) = \dot{z}(t)$, folgt:

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad y(t) = x(t) \quad (12)$$

Vergleicht man Gl. (12) mit der Standardform, folgt:

$$\dot{x} = Ax + bu \quad \leftrightarrow \quad \dot{x} = 0 \cdot x + u \quad (13)$$

D.h. das System hat einen Eigenwert $\lambda = 0$. Der GG-WP ist stabil nach Lyapunov (nicht asymptotisch). Die I/O Übertragungsfunktion des Systems lautet:

$$\Sigma(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} \quad (\text{Integrator})$$

Es gibt verschiedene Methoden, wie man zeigen kann, dass (a) nicht BIBO stabil ist. Die Übertragungsfunktion hat einen Pol bei $s = 0$. Per Definition ist das System somit nicht BIBO stabil. Rechnet man die Impulsantwort aus, folgt: $\sigma(t) = \mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1$. Somit ist die Bedingung in Gl. (11) auch nicht erfüllt. Ausserdem lässt sich leicht ein Bounded Input finden ($u(t) = c$), der einen Unbounded Output ($y(t) = c \cdot t$) liefert.

Bemerkung: Das System in (a) wäre BIBO stabil, falls auf die Kugel eine geschwindigkeitsabhängige Widerstandskraft $F_{\text{Dämpf}} = \dot{z}$ wirkte, wie dargestellt in (b).

$$\ddot{z}(t) = -\dot{z}(t) + u(t), \quad y(t) = \dot{z}(t)$$

Durch dieselbe Zustandswahl $x = \dot{z}$ folgt:

$$\dot{x} = -x(t) + u(t), \quad y(t) = x(t)$$

Dies ist ein System erster Ordnung mit Eigenwert $\lambda = -1$ und ist somit asymptotisch stabil nach Lyapunov. Die Impulsantwort ergibt sich zu:

$$\Sigma(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow \sigma(t) = e^{-t},$$

somit ist das System (b) auch BIBO stabil.

Beispiel: Lyapunov instabil und BIBO stabil:

Das folgende System wird auf Lyapunov und BIBO Stabilität geprüft:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x = x_1 \quad (14)$$

In Gl. (14) stehen die Eigenwerte direkt auf der Diagonalen: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Das System ist somit instabil nach Lyapunov. Die Instabilität nach Lyapunov ist nachvollziehbar wenn $x_2(0) \neq 0$, dann divergiert der Zustand x_2 für $t \rightarrow \infty$. Da der instabile Zustand weder steuerbar noch beobachtbar ist, ist das System trotzdem BIBO stabil. Durch ausrechnen der Übertragungsfunktion folgt:

$$\Sigma(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1}$$

Der Pol hat einen negativen Realteil. Das System ist somit gleichzeitig BIBO stabil und Lyapunov instabil.