

Regelungstechnik II FS 2020

Frequenzantworten von MIMO Systemen

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Zusammenfassung Vorlesung 7

Skript Kapitel 3

Bei Fragen: hr@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 7. April 2020

1 Frequenzantworten SISO - Recap

Ein lineares asymptotisch stabiles System $P(s)$, welches mit einem harmonischen Eingang

$$u(t) = \cos(\omega t) \cdot h(t),$$

bei der fixen Frequenz ω angeregt wird (wobei die Funktion h den Einheitssprung bezeichnet), produziert im eingeschwungenen Zustand ein harmonisches Signal bei derselben Frequenz:

$$y_\infty(t) = |P(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \angle P(j\omega))$$

Dabei ist die Systemantwort um $\varphi(\omega) = \angle P(j\omega)$ phasenverschoben, und um $m(\omega) = |P(j\omega)|$ skaliert. Um die Frequenzantwort übersichtlich darzustellen, können $\angle P(j\omega)$ und $|P(j\omega)|$ entweder gemeinsam in einem Nyquist-Diagramm dargestellt werden, oder separat in einem Bode-Diagramm.

2 Frequenzantworten MIMO

Im MIMO Fall ist der Eingang $u(t)$ ein Vektor harmonischer Funktionen:

$$u(t) = \begin{bmatrix} \mu_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \cdot h(t) \\ \mu_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \cdot h(t) \\ \vdots \\ \mu_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_m) \cdot h(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Die Frequenzanalyse beschränkt sich auf eine gemeinsame frei wählbare Anregungsfrequenz ω auf allen Kanälen. Die Anregungsmagnituden μ_i und Anregungsphasen φ_i können separat gewählt werden. Die Laplace-Transformierte von Gl. (1) lautet:

$$U(s) = \begin{bmatrix} e^{j\varphi_1} \cdot s/\omega \cdot \mu_1 \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ e^{j\varphi_2} \cdot s/\omega \cdot \mu_2 \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \vdots \\ e^{j\varphi_m} \cdot s/\omega \cdot \mu_m \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

und kann mit den Definitionen $\Phi = \text{diag}(\varphi_i) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_m]^T \in \mathbb{R}^m$ umgeschrieben werden zu:

$$U(s) = e^{j\Phi \cdot s/\omega} \cdot \mu \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (3)$$

Ähnlich wie im SISO Fall ist die Systemantwort im eingeschwungenen Zustand ein Vektor harmonischer Funktionen bei derselben Frequenz ω :

$$y_\infty(t) = \begin{bmatrix} \nu_1 \cdot \cos(\omega t + \psi_1) \cdot h(t) \\ \nu_2 \cdot \cos(\omega t + \psi_2) \cdot h(t) \\ \vdots \\ \nu_m \cdot \cos(\omega t + \psi_m) \cdot h(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Identisch zu Gl. (3) wird die Laplace-Transformierte von Gl. (4) mit den Definitionen $\Psi = \text{diag}(\psi_i) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\nu = [\nu_1, \dots, \nu_m]^T \in \mathbb{R}^m$ zu

$$Y(s) = e^{j\Psi \cdot s/\omega} \cdot \nu \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \quad (5)$$

Die Frequenzantwort $Y(j\omega)$ lautet

$$Y(j\omega) = P(j\omega) \cdot U(j\omega).$$

Einsetzen von Gl. (5) und Gl. (3) liefert

$$e^{j\Psi} \cdot \nu = P(j\omega) \cdot e^{j\Phi} \cdot \mu \quad (6)$$

Bemerkung: Gl. (6) beinhaltet den Term $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ nur deshalb nicht mehr, weil in der Konstruktion des Eingangs Gl. (1) die Frequenz auf allen Kanälen identisch gewählt wurden.

Gl. (6) hat die Form einer linearen Abbildung:

$$\underbrace{y}_{e^{j\Psi} \cdot \nu} = \underbrace{P(j\omega)}_M \cdot \underbrace{u}_{e^{j\Phi} \cdot \mu} \quad (7)$$

Eine lineare Abbildung $y = M \cdot u$ erfüllt die Eigenschaft

$$\sigma_{\min}(M) \leq \frac{\|y\|}{\|u\|} \leq \sigma_{\max}(M), \quad (8)$$

wobei $\sigma_{\min}(M)$ und $\sigma_{\max}(M)$ der kleinste, resp. grösste Singulärwert der Matrix M sind.

Einsetzen von Gl. (7) in Gl. (8) liefert:

$$\sigma_{\min}(P(j\omega)) \leq \frac{\|\nu\|}{\|\mu\|} \leq \sigma_{\max}(P(j\omega)) \quad (9)$$

wobei die Eigenschaft $\|e^{j\Psi}\| = \|e^{j\Phi}\| = 1$ verwendet wurde.

Die Singulärwerte in Gl. (9) geben für den eingeschwungenen Zustand Schranken vor für den Betrag der Amplituden $\|\nu\|$. Sie sind ein Mass für die worst-case Amplitude die man bei der Anregung einer gegebenen Frequenz ω erwarten kann.

Beispiel: Das System

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 0.3s + 1} & \frac{0.2}{s^2 + 0.5s + 1} \\ \frac{0.2}{s^2 + s + 1} & \frac{1}{s^2 + s + 1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

soll für $\{\mu \mid \|\mu\| = 1\}$ bei $\omega = 0.7 \text{ rad/s}$ so angeregt werden, dass $\|\nu\| = \sigma_{\max}(P(j \cdot 0.7))$ gilt.

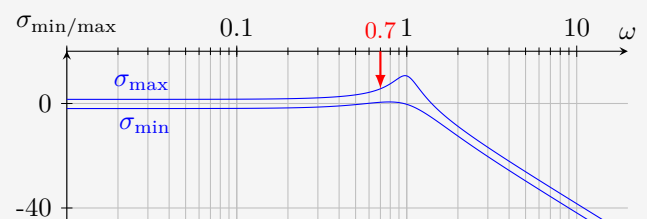


Abb. 1: Singulärwerte von $P(j\omega)$ als Funktion der Frequenz

Berechnung der Singulärwerte bei $\omega = 0.7 \text{ rad/s}$ liefert einen maximalen Singulärwert $\sigma_{\max}(P(j \cdot 0.7)) = 1.914$. Das heisst, man kann erwarten, dass die Ausgänge y_1 und y_2 je Amplituden ν_1 und ν_2 haben werden, die kleiner sind als 1.914. Die Norm $\|\nu\|$ jedoch, wird bei der maximalen Anregung 1.914

sein. Um die Anregungsrichtung zu finden, bei der $\|\nu\|$ maximal wird, verwendet man die Singulärwertzerlegung der Matrix $P(j \cdot 0.7)$:

$$P(j \cdot 0.7) = U \cdot \Sigma \cdot V^T = \begin{bmatrix} -0.8724 + 0.3635j & 0.3089 - 0.1068j \\ -0.2167 + 0.2447j & -0.6691 + 0.6675j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.914 & 0 \\ 0 & 1.056 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.9344 & -0.3525 + 0.0515j \\ 0.3562 & -0.9246 + 0.1351j \end{bmatrix}$$

Die maximale Anregungsrichtung entspricht der ersten Zeile von V^T , wenn der maximale Singulärwert in Σ an erster Stelle steht^a. Zur Bemerkung: der maximale Singulärwert in Σ stimmt mit dem aus Abb. 1 ausgelesenen Singulärwert überein. Die maximale Richtung lautet somit:

$$\zeta_{\max} = \begin{bmatrix} -0.9344 \\ -0.3525 + 0.0515j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j\pi} & 0 \\ 0 & e^{j2.9965} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9344 \\ 0.3562 \end{bmatrix}$$

Der Eingang lautet somit:

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0.9344 \cdot \cos(0.7 \cdot t + \pi) \\ 0.3562 \cdot \cos(0.7 \cdot t + 2.9965) \end{bmatrix}$$

Simulation des Systems mit Eingang $u(t)$ liefert:

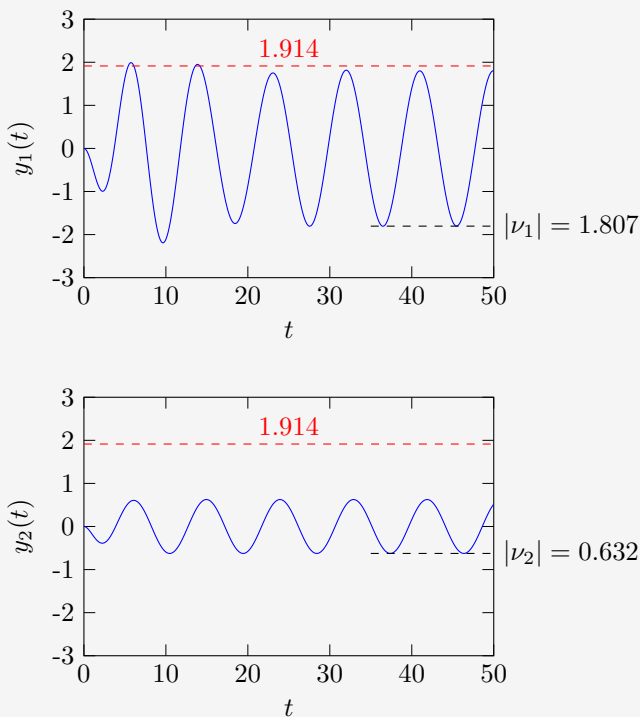


Abb. 2: Maximale kollektive Anregung der Eingänge $y_1(t)$ und $y_2(t)$ bei der Frequenz $\omega = 0.7$ rad/s.

Bemerkungen zu diesem Beispiel:

- $|\nu_1| < \sigma_{\max} \Rightarrow y_{1,\infty} < \sigma_{\max}$
- $|\nu_2| < \sigma_{\max} \Rightarrow y_{2,\infty} < \sigma_{\max}$
- $\sqrt{|\nu_1|^2 + |\nu_2|^2} = 1.914 = \sigma_{\max}$ (nur weil die maximale Richtung angeregt wird)
- $y_1(t) > \sigma_{\max}$ für $t \approx 5$ s, da das System noch nicht eingeschwungen ist

^aWo genau der maximale Singulärwert in der Matrix Σ eingetragen ist hängt vom Algorithmus ab, der zur Berechnung der Singulärwerte verwendet wird. Normalerweise sind die Singulärwerte in der Matrix Σ der Grösse nach sortiert sodass links oben der grösste Singulärwert steht und rechts unten der kleinste: $\Sigma = \text{diag}(\sigma_{\max}, \dots, \sigma_{\min})$.

3 Singulärwertverläufe als Werkzeug in der Regelungstechnik

Die Singulärwertverläufe (wie in Abb. 1) können für beliebige Übertragungsfunktionen, wie z.B. die Sensitivität $S(s)$, die komplementäre Sensitivität $T(s)$ oder die return difference $Q(s)$ berechnet werden:

$$T(s) = (I + P(s) \cdot C(s))^{-1} \cdot P(s) \cdot C(s)$$

$$S(s) = (I + P(s) \cdot C(s))^{-1}$$

$$Q(s) = I + P(s) \cdot C(s)$$

Mit der Definition der Systemnorm:

$$\|G(s)\|_{\infty} = \max_{\omega} \left(\max_i \sigma_i(G(j\omega)) \right),$$

hat dann z.B. die Sensitivität eine schöne Interpretation. Die Systemnorm $\|S(s)\|_{\infty}$ ist die maximal zu erwartende (worst-case) Verstärkung des Störungssignals.

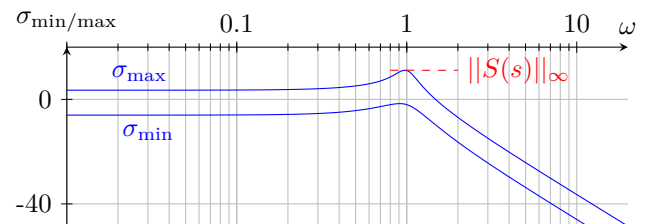


Abb. 3: Singulärwerte von $S(j\omega)$ als Funktion der Frequenz in blau. Systemnorm in rot.

Falls die Systemnorm $\|S(s)\|_{\infty}$ sehr klein ist, weiss man, dass man eine gute Störungsunterdrückung hat, da die Norm die maximale Verstärkung beschreibt.

Eine ähnliche Überlegung erlaubt es, mit der Minimum Return Difference (analog zum SISO-Fall) die Robustheit des Regelkreises im 'worst case' zu analysieren:

$$\mu_{\min} = \min_{\omega} \left(\min_i \sigma_i(I + L(j\omega)) \right).$$

Singulärwertverläufe vs. Bode-Verstärkungsverläufe:

Die Singulärwertverläufe sind also das MIMO Analogon der SISO Bode-Verstärkungsverläufe: basierend auf den Singulärwertverläufen lassen sich im MIMO Fall bei der Reglerauslegung und Systemanalyse ähnliche Überlegungen machen wie in der SISO Reglerauslegung basierend auf den Bode-Verstärkungsverläufen.

Der grosse Unterschied zwischen Singulärwertverläufen im MIMO Fall und Bode-Verstärkungsverläufen im SISO Fall ist, dass die Bode-Verläufe die effektive Verstärkung eines harmonischen Eingangssignales darstellen, während die Singulärwertverläufe nur eine worst-case Abschätzung sind.