

Regelungstechnik II FS 2020

PID Tuning, Prädiktive Regelung

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Zusammenfassung Vorlesung 1

Buch Kapitel 11

Bei Fragen: hrffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 19. Februar 2020

1 PID - Recap

Im Zeitbereich besteht die Reglerstruktur aus 3 additiven Termen: Proportional, Integral, und Derivative.

$$u_{\text{PID}}(t) = k_p \cdot \left(\underbrace{e(t)}_{\text{P-Term}} + \underbrace{\frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\text{I-Term}} + \underbrace{T_d \cdot \frac{d}{dt} e(t)}_{\text{D-Term}} \right)$$

Im Frequenzbereich wird der Regler mit einem roll-off Term erweitert. Der roll-off Term dient zur Unterdrückung von Rauschen (hohe Frequenzen) und macht den Regler kausal.

$$C_{\text{PID}}(s) = k_p \cdot \left(\underbrace{\frac{T_d \cdot T_i \cdot s^2 + T_i \cdot s + 1}{T_i \cdot s}}_{\text{nicht kausal}} \right) \cdot \underbrace{\frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^2}}_{\text{kausal}}$$

In Regelungstechnik 1 wurde das Ziegler-Nichols-Verfahren zur Bestimmung von Werten für k_p , T_i und T_d eingeführt. Im Folgenden werden zwei weitere Verfahren illustriert.

2 Åström-Hägglund Verfahren

Ähnlich wie beim Ziegler-Nichols-Verfahren will man mit dem Åström-Hägglund-Verfahren die Parameter k_p , T_i und T_d finden. Dieses Verfahren gilt als Verallgemeinerung des Ziegler-Nichols-Verfahrens. Zuerst wird die Verstärkung eines reinen P-Reglers eingestellt, sodass das System bei k_p^* mit der Periode T^* grenzstabil oszilliert. Zusätzlich braucht man nun die statische Verstärkung $|P(0)|$. Man kann bei diesem Verfahren wählen, ob man einen aggressiven Regler ($\mu_{\min} \approx 0.5$) oder einen robusten Regler ($\mu_{\min} \approx 0.7$) will.

Die gegebenen Größen parametrieren den PID Regler:

$$\underbrace{\{k_p^*, T^*, |P(0)|, \mu_{\min}\}}_{\text{gegeben}} \rightarrow \underbrace{\{k_p, T_i, T_d\}}_{\text{gesucht}}$$

x	$\mu_{\min} = 0.7$			$\mu_{\min} = 0.5$		
	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$
k_p/k_p^*	0.053	2.90	-2.60	0.13	1.90	-1.30
T_i/T^*	0.900	-4.40	2.70	0.90	-4.40	2.70

Tabelle 1: Åström-Hägglund Koeffizienten für PI - Regler.

x	$\mu_{\min} = 0.7$			$\mu_{\min} = 0.5$		
	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$
k_p/k_p^*	0.33	-0.31	-1.00	0.72	-1.60	1.20
T_i/T^*	0.76	-1.60	-0.36	0.59	-1.30	0.38
T_d/T^*	0.17	-0.46	-2.10	0.15	-1.40	0.56

Tabelle 2: Åström-Hägglund Koeffizienten für PID - Regler.

Die PID Parameter x berechnen sich mit folgender allgemeiner Formel:

$$x = \alpha_{0,x} \cdot e^{\alpha_{1,x} \cdot \kappa + \alpha_{2,x} \cdot \kappa^2}, \quad \kappa^{-1} = |P(0)| \cdot k_p^* \quad (1)$$

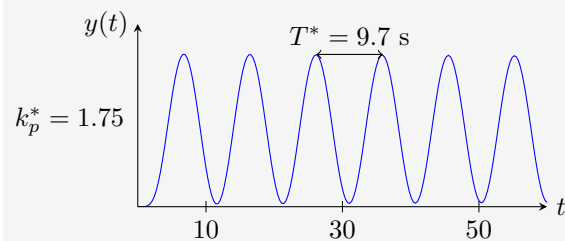
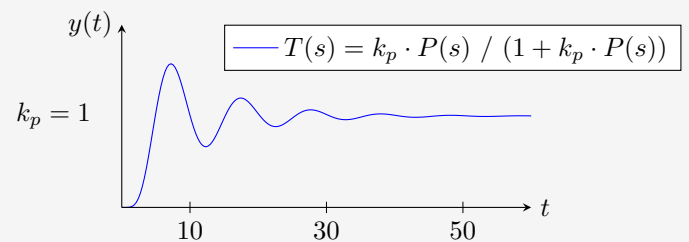
$$x \in \{k_p/k_p^*, T_i/T^*, T_d/T^*\}$$

Beispiel: Åström - Hägglund

Folgendes System ist gegeben:

$$P(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1)} \quad (2)$$

Zuerst werden $\{k_p^*, T^*, |P(0)|, \mu_{\min}\}$ gefunden. $|P(0)| = 1$ aus Gl. (2) ersichtlich. Der Regler soll robust sein ($\mu_{\min} = 0.7$). Erhöhung von $k_p = 1$ auf $k_p^* = 1.75$, gibt $T^* = 9.7$ s:



Es wird ein PI - Regler mit Gl. (1) ausgelegt:

$$\kappa = 1/(|P(0)| \cdot k_p^*) \approx 0.57$$

$$k_p = 0.053 \cdot e^{2.9 \cdot \kappa - 2.6 \cdot \kappa^2} \cdot k_p^* \approx 0.21$$

$$T_i = 0.9 \cdot e^{-4.4 \cdot \kappa + 2.7 \cdot \kappa^2} \cdot T^* \approx 1.71 \text{ s}$$

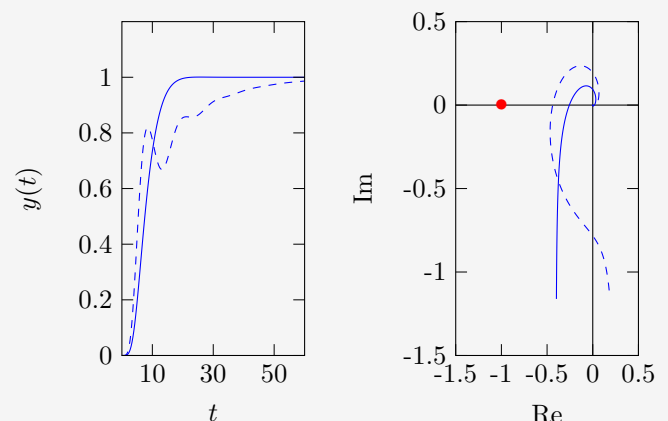


Abb. 1: Sprungantwort links, Nyquist-Diagramm des open-loop gain $L(j\omega)$ rechts. Ziegler-Nichols Auslegung schraffiert, Åström-Hägglund solide.

Vorsicht! Oftmals ergibt die Åström-Hägglund Methode bessere Resultate als die Ziegler-Nichols Methode. Dies ist jedoch nicht immer der Fall.

3 Direktspezifikationen

Bei der Direktspezifikation wählt man die Durchtrittsfrequenz ω_c , die Phasenreserve φ und die Steigung ψ der Übertragungsfunktion $L(j\omega) = P(j\omega) \cdot C(j\omega)$. Bei der gewünschten Durchtrittsfrequenz gilt:

$$P(j\omega_c) = r_P \cdot e^{j\varphi_P}, \quad r'_P = \left. \frac{\partial r_P(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c}, \quad \varphi'_P = \left. \frac{\partial \varphi_P(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c}$$

Gegebene Anforderungen an $L(j\omega)$ und Steckeneigenschaften von $P(j\omega)$ können in Anforderungen an den Regler umgerechnet werden. Bei gegebener PID-Reglerstruktur können diese Anforderungen in Anforderungen an die Reglerparameter umgerechnet werden:

$$\underbrace{\{r_P, \varphi_P, r'_P, \varphi'_P, \omega_c, \varphi, \psi\}}_{\text{gegeben}} \rightarrow \{k_p, T_i, T_d\}$$

$$k_p = -\frac{1}{r_P} \cos(\varphi - \varphi_P)$$

$$T_d = \frac{1}{2} \cdot \left(\tan(\psi - \varphi_P) \left(\frac{r'_P}{r_P} - \varphi'_P \tan(\varphi - \varphi_P) \right) + \tan(\varphi - \varphi_P) \left(\frac{1}{\omega_c} - \frac{r'_P}{r_P} \right) - \varphi'_P \right)$$

$$T_i = (T_d \cdot \omega_c^2 - \tan(\varphi - \varphi_P) \cdot \omega_c)^{-1}$$

Vorsicht! Dieses Verfahren produziert nicht immer sinnvolle Lösungen $\{k_p, T_i, T_d\}$. Insbesondere müssen die gewünschten Größen $\{\omega_c, \varphi, \psi\}$ sinnvoll gewählt werden. Ausserdem ist die Stabilität mit diesem Verfahren nicht garantiert. Bei den gegebenen Formeln muss die Phase in Radian eingesetzt werden!

4 Totzeit - Recap

Ein geschlossener Regelkreis kann Totzeiten im Regler und/oder in der Regelstrecke haben.

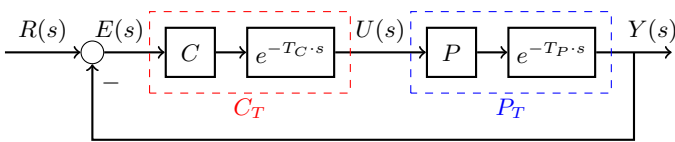


Abb. 2: Regelstruktur mit Totzeiten T_C und T_P

Die totale Totzeit lautet:

$$e^{-Ts} = e^{-T_C s} \cdot e^{-T_P s} = e^{-(T_C + T_P)s}$$

Eine Totzeit ist signifikant, falls sie gross ist relativ zur Zeitkonstante τ des Systems:

$$\frac{T}{T + \tau} > 0.3 \rightarrow \text{Totzeit signifikant}$$

Standard PID-Regler eignen sich nicht gut für Systeme mit grosser Totzeit. Deswegen wurden prädiktive Regler entwickelt. Die Grundidee solcher Regler ist, dass ein noch so komplexer kausaler Regler die Totzeit von der Systemantwort $y(t)$ nicht entfernen kann. Deshalb müssen geschlossene Regelkreisgrössen ($T(s)$, $S(s)$) zwangsläufig dieselbe Totzeit beinhalten. Im Folgenden werden zwei prädiktive Regler beschrieben.

5 Prädiktiver PI Regler für einfache Regelstrecken

Man geht von einer Regelstrecke erster Ordnung mit Totzeit aus:

$$P(s) \approx \frac{k}{\tau s + 1} \cdot e^{-Ts}$$

Man wünscht eine komplementäre Sensitivität erster Ordnung mit einstellbarer Zeitkonstante (durch den Parameter σ) und gleicher Totzeit:

$$T^*(s) = \frac{1}{s\sigma\tau + 1} \cdot e^{-Ts} = \frac{L}{1 + L}$$

Auflösen nach L ergibt:

$$L = \frac{T^*}{1 - T^*} \Rightarrow C = \frac{T^*}{P(1 - T^*)}$$

Einsetzen von T^* und P liefert:

$$C(s) = \frac{\tau \cdot s + 1}{k \cdot (\sigma \cdot \tau \cdot s + 1 - e^{-Ts})}$$

Die Eingangsgrösse $U(s)$ lautet somit:

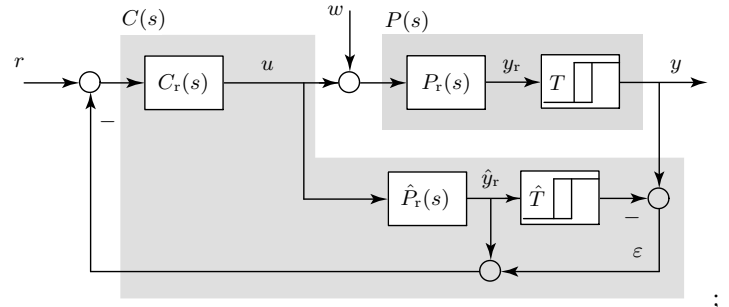
$$U(s) = \underbrace{\frac{1}{\sigma k} \left(1 + \frac{1}{\tau s} \right) E(s)}_{\text{PI-Regler}} - \underbrace{\frac{1}{\sigma \tau s} (1 - e^{-Ts}) U(s)}_{\text{Prädiktive Korrektur}}$$

Falls $T = 0$ wird die prädiktive Korrektur 0 und der resultierende Eingang wird zu einem einfachen PI - Regler.

6 Smith Predictor

Beim Smith Predictor nimmt man an, dass die Regelstrecke einen rationalen Teil und eine Totzeit hat:

$$P(s) = P_r(s) \cdot e^{-Ts}$$



Falls man eine perfekte Schätzung der Regelstrecke hat ($P_r(s) = \hat{P}_r(s)$, $T = \hat{T}$) und keine Störung ($w = 0$) vorhanden ist, resultiert folgende komplementäre Sensitivität:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = e^{-sT} \cdot \frac{P_r(s)C_r(s)}{1 + P_r(s)C_r(s)} = e^{-sT} \cdot T_r(s) \quad (3)$$

Das heisst, die Form der Systemantwort $y(t)$ ist dieselbe wie die des rationalen Systems ohne Totzeit ($T_r(s)$). Jedoch ist sie um die Totzeit verschoben (e^{-sT}). Dies wird an der Regelstruktur ersichtlich. Für $P_r(s) = \hat{P}_r(s)$, $T = \hat{T}$, $w = 0$ wird $\epsilon = 0$. In dem Fall wird das unverschobene perfekt geschätzte Signal \hat{y}_r rückgeführt, und somit wird die Totzeit überbrückt. Modellfehler und Störungen ($P_r(s) \neq \hat{P}_r(s)$, $T \neq \hat{T}$, $w \neq 0$) werden durch das Fehlersignal $\epsilon \neq 0$ kompensiert. In diesem Fall werden die Übertragungsfunktionen jedoch um einiges komplizierter als Gl. (3).

Regelungstechnik II FS 2020

Spezifikation der Sensitivität

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Zusammenfassung Vorlesung 2

Buch Kapitel 10.4.3

Bei Fragen: hrffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 28. Februar 2020

1 Multiplikative Unsicherheit der komplementären Sensitivität

Zur Erinnerung. Die Modellunsicherheit $W_2(s)$ wurde für die komplementäre Sensitivität multiplikativ eingeführt:

$$|T(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < 1 \Rightarrow |L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad (1)$$

Das robuste Nyquist Theorem aus Gl. (1) kann in der Nyquist Ebene interpretiert werden:

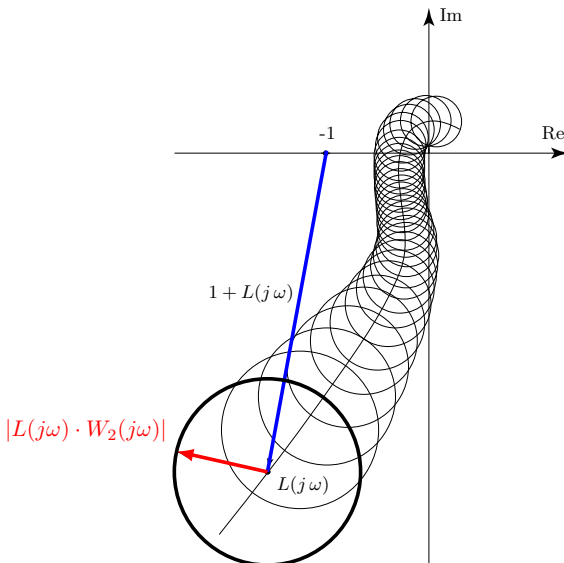


Abb. 1: Robustes Stabilitätskriterium nach Nyquist.

Der rot eingezeichnete Unsicherheitsradius ($|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)|$) darf nicht länger als das blaue Verbindungsstück ($|1 + L(j\omega)|$) sein, um zusätzliche Umkreisungen des Punktes $(-1, 0)$ zu vermeiden.

2 Multiplikative Spezifikation an Sensitivität

Die Sensitivität $S(s)$ ist bei jedem Regelsystem sehr wichtig. Eine betragsmässig kleine Sensitivität garantiert eine gute Störungsunterdrückung und gutes reference tracking. Eine sinnvolle Spezifikation ist demnach den Betrag der Sensitivität $|S(j\omega)|$ frequenzabhängig zu limitieren. Die Phase spielt dabei praktisch keine Rolle.

Nominelle Regelgüte

Um die Sensitivität betragsmässig zu begrenzen wird mit einer rationalen Übertragungsfunktion $W_1(s)$ gefordert:

$$\|S(s) \cdot W_1(s)\|_\infty < 1 \Rightarrow |S(j\omega)| < |W_1^{-1}(j\omega)| \quad (2)$$

Gl. (2) kann umgeschrieben werden:

$$|W_1(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad (3)$$

Die geometrische Interpretation von Gl. (3) ist, dass $L(j\omega)$ nicht in einen in -1 zentrierten Kreis mit Radius $|W_1(j\omega)|$ eintreten darf, siehe Abb. 2.

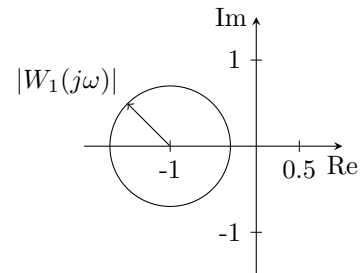


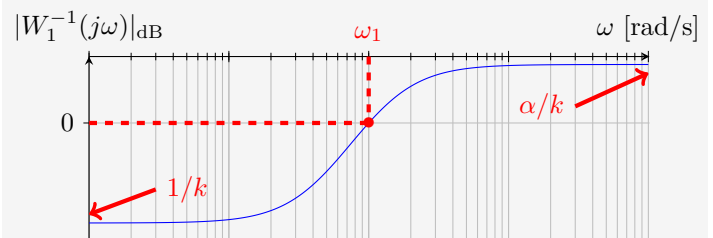
Abb. 2: Darstellung der nicht zulässigen Region aus Gl. (3).

Konstruktion von W_1 :

Ein Beispiel einer sinnvollen Sensitivitätsspezifikation $W_1(s)$ hat folgende Form:

$$W_1(s) = k \cdot \frac{\tau \cdot s + 1}{\alpha \cdot \tau \cdot s + 1}, \quad k > 1, \quad \alpha > k$$

$$\tau^2 = \frac{k^2 - 1}{\omega_1^2 \cdot (\alpha^2 - k^2)}, \quad |W_1(j\omega_1)| = 1$$

Abb. 3: $|W_1^{-1}|_{dB}$ in blau. Einstellbare Größen in rot.

Robuste Regelgüte

Nun soll gleichzeitig das robuste Nyquist Theorem und die nominelle Spezifikation der Sensitivität erfüllt sein. In anderen Worten sollen Gl. (1) und Gl. (2) gleichzeitig gelten.

$$|W_1(j\omega) \cdot S(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot T(j\omega)| < 1$$

$$\Rightarrow |W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad (4)$$

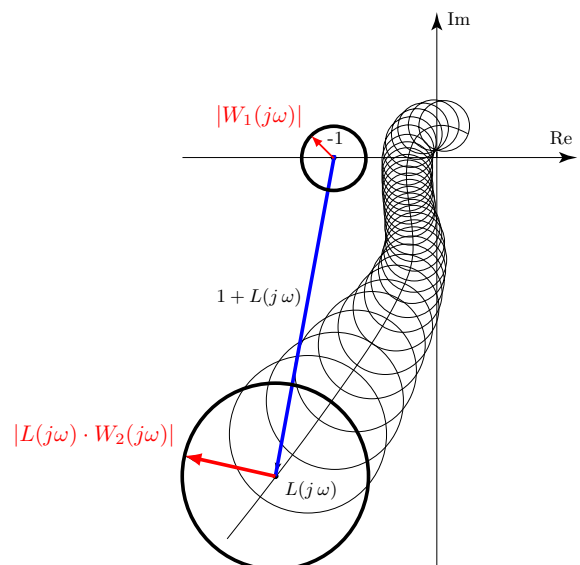


Abb. 4: Robuste Regelgüte.

Um Spezifikationen der Sensitivität und Modellunsicherheiten in jedem Fall zu berücksichtigen darf die summierte Länge der beiden roten Pfeile nie länger als die blaue Verbindung werden. In anderen Worten dürfen sich die beiden Kreise für alle Frequenzen nicht schneiden.

Approximative Spezifikationen

Um einen Regler zu finden, der Gl. (4) erfüllt ist es einfacher, wenn Gl. (4) auf $L(j\omega)$ umformuliert wird. Dies ist einfach für sehr hohe Frequenzen und sehr tiefe Frequenzen.

Tiefe Frequenzen: $\omega < 0.1 \cdot \omega_c \Rightarrow |L(j\omega)| \gg 1$

Gl. (4) wird approximativ:

$$\begin{aligned} |W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| &< |L(j\omega)| \\ \Rightarrow |L(j\omega)| &> \frac{|W_1(j\omega)|}{1 - |W_2(j\omega)|} \end{aligned}$$

Eine Lösung kann nur existieren falls $|W_2(j\omega)| < 1$.

Hohe Frequenzen: $\omega > 10 \cdot \omega_c \Rightarrow |L(j\omega)| \ll 1$

Gl. (4) wird approximativ:

$$\begin{aligned} |W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| &< 1 \\ \Rightarrow |L(j\omega)| &< \frac{1 - |W_1(j\omega)|}{|W_2(j\omega)|} \end{aligned}$$

Diese Approximationen berücksichtigen das Frequenzbandes $[0.1 \cdot \omega_c, 10 \cdot \omega_c]$ nicht. In diesem Band ist es vorallem wichtig Stabilität und Robustheit zu garantieren.

Kompatibilitätsbedingung

Zur Erinnerung. Die Durchtrittsfrequenz ω_c des open-loop gains $L(j\omega)$ soll folgende Bedingungen erfüllen.

$$\max \left\{ 10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \omega_{\pi+} \right\} < \omega_c < \min \left\{ \frac{\omega_n}{10}, \frac{\omega_2}{10}, \frac{\omega_\tau}{2}, \frac{\omega_{\zeta+}}{2} \right\}$$

↑ konservativer mit 5
 ↑ konservativer mit $\frac{1}{5}$

Dabei ist ω_d die Frequenz der Störung, $\omega_{\pi+}$ der schnellste instabile Pol von $L(s)$, ω_n die Frequenz des Rauschens, ω_2 die Frequenz bei der $W_2(j\omega_2) = 1$, ω_τ die Frequenz der Totzeit und $\omega_{\zeta+}$ die Frequenz der langsamsten nicht-minimalphasigen Nullstelle.

Die Frequenz ω_1 , bei der $|W_1(j\omega_1)| = 1$ gilt, muss kleiner als ω_2 sein, sodass ω_c genügend Marge hat. Jedoch muss ω_1 auch grösser sein als die untere Schranke für ω_c . Als Faustregel wählt man als erste Schätzung:

$$\omega_1 \approx \max\{10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \omega_{\pi+}\} \quad (5)$$

Zusätzlich muss ω_1 grösser gewählt werden, je grösser die gewünschte Phasenreserve φ ist. Dies kann mit der Magnitude der Sensitivität bei ω_c interpretiert werden:

$$\begin{aligned} |S(j\omega_c)| &= \frac{1}{|1 + L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1 + 1 \cdot e^{-j(\pi-\varphi)}|} \\ &= \frac{1}{|1 - e^{j\varphi}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos(\varphi)}} \end{aligned}$$

In der Regel nimmt $|S(j\omega)|$ mit ansteigender Frequenz zu und schneidet die 0 dB Linie einmalig, siehe Abb. 6.

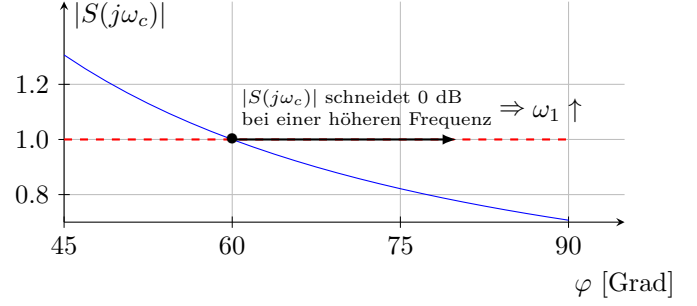


Abb. 5: $|S(j\omega_c)|$ in blau, $|S(j\omega_c)| = 1$ in rot.

Abb. 5 zeigt die Magnitude der Sensitivität als Funktion der Phasenreserve. Die Magnitude wird kleiner, je grösser die gewünschte Phasenreserve ist. Das heisst, die Sensitivität muss die 0 dB Linie bei einer höheren Frequenz schneiden, je grösser die Phasenreserve sein soll. Dies hat zur Folge, dass ω_1 höher spezifiziert werden muss.

Die Schlussfolgerung, dass ω_1 grösser sein muss, je grösser die Phasenreserve ist, kann auch umgedreht werden. $|W_1(j\omega)|$ wird bis zu ω_1 grösser als 1 sein (siehe Abb. 3). Je grösser $|W_1(j\omega)|$ ist, desto grösser muss die Phasenreserve sein (siehe Abb. 4), da $L(j\omega)$ nicht in den Kreis mit Radius $|W_1(j\omega)|$ eintreten darf.

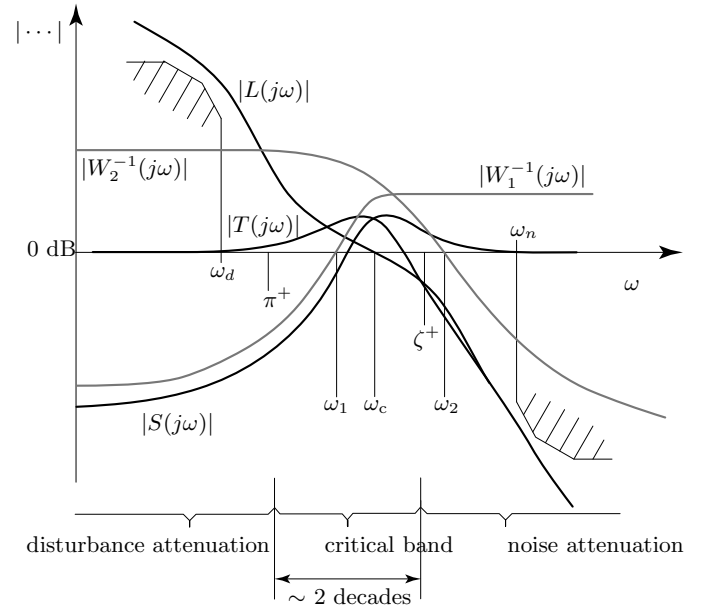


Abb. 6: Zusammenfassendes Bild aller Bedingungen und Spezifikationen.

Regelungstechnik II FS 2020

Kaskadierte Systeme, Wurzelortskurven, Numerische Verfahren

Zusammenfassung Vorlesung 3

Kapitel 13.2, 13.3, 11.7

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Bei Fragen: hrfael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 5. März 2020

1 Kaskadierte Regelsysteme

Kaskadierte Regelsysteme eignen sich für SIMO (single-input, multiple-output) Systeme mit einer schnellen und einer langsamen Teildynamik. Um die volle Bandbreite der schnellen Dynamik auszunutzen werden verschiedene Regler für das schnelle und für das langsame Teilsystem ausgelegt.

In Abb. 1 ist ersichtlich, dass das schnelle Teilsystem P_f den Eingang u_s für das langsame Teilsystem P_s liefert. Das schnelle System wird geregelt, indem y_f rückgeführt wird; y_f ist oftmals proportional zu u_s , dies ist aber nicht immer der Fall.

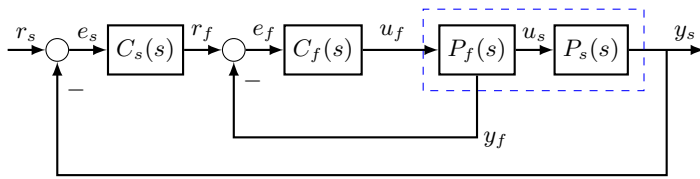


Abb. 1: Kaskadierte Regelstruktur. Der Index s ('slow') steht für langsame Teildynamiken, und f ('fast') für schnelle.

Um die Bandbreite des schnellen Teilsystems auszunutzen wird für $C_f(s)$ oftmals kein Integrator verwendet. Der langsame Regler $C_s(s)$ hingegen hat oftmals einen Integrator um einen statischen Nachlauffehler zu eliminieren.

Beispiel: Die folgende Differentialgleichung beschreibt das System in Abb. 2. Sowohl die Position y als auch die Geschwindigkeit \dot{y} können direkt gemessen werden.

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = u$$

Wir wählen $x = y$ und $v = \dot{y}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= v(t) \\ \frac{d}{dt}v(t) &= -x(t) - v(t) + u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

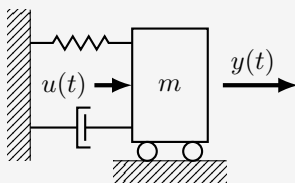


Abb. 2: Aktuiertes Feder-Dämpfer System.

Das Ziel ist, die Position zu regeln. Jedoch ist in Gl. (1) ersichtlich, dass $u(t)$ direkt auf die Geschwindigkeit wirkt und nur indirekt auf die Position. Folgende Teildynamiken können hergeleitet werden:

$$u \rightarrow v : \quad P_f(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1} \quad (2)$$

$$v \rightarrow x : \quad P_s(s) = \frac{1}{s} \quad (3)$$

$$u \rightarrow x : \quad P(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (4)$$

Zur Erinnerung:

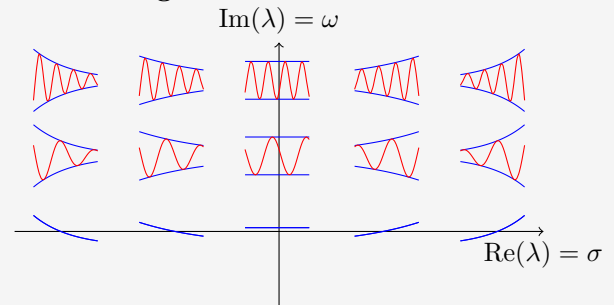


Abb. 3: Systemantwort als Funktion der Eigenwerte. Rot: Einfluss Imaginärteil, Blau: Einfluss Realteil

Pole mit grösserem negativen Realteil klingen schneller ab als Pole mit kleinerem negativem Realteil. Die Pole in Gl. (2) bis (4) sind:

$$\begin{aligned} u \rightarrow v \quad (P_f) : \quad & s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ v \rightarrow x \quad (P_s) : \quad & s = 0 \\ u \rightarrow x \quad (P) : \quad & s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Das System P_f ist definitiv schneller als das System P_s . Obwohl P die gleichen Pole wie P_f hat, wird P_f schneller sein, da das System P durch den zusätzlichen Pol bei $s = 0$ einen grösseren Phasenverlust hat.

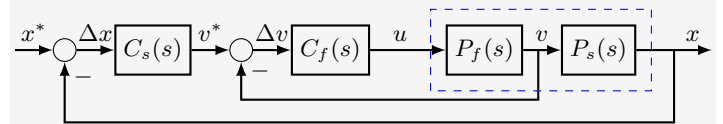


Abb. 4: Kaskadierte Regelstruktur für das Beispiel

Für den Regler C_f kann ein P-Regler verwendet werden. Für den Regler C_s kann ein PI-Regler verwendet werden. Ein detaillierter Vergleich zwischen kaskadiertem und nicht kaskadiertem Regelverhalten ist im Buch in *Example 13.2.1* auf Seiten 225ff zu finden.

2 Wurzelortskurven-Verfahren¹

Mit diesem Verfahren kann man die Pole des geschlossenen Regelkreises setzen wo man will. Es wird folgende Regelstruktur betrachtet:

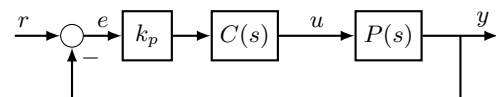


Abb. 5: Grundstruktur des Wurzelortskurven-Verfahren

Der Regler $C(s)$ heisst in diesem Kontext Kompensator. Die Verstärkung k_p wird vom Kompensator abgespalten und in der Regelstruktur separat geschrieben. Wenn man die Pole des geschlossenen Regelkreises für alle k_p zeichnet, erhält man die Wurzelortskurven.

Vorsicht! Wir gehen im Folgenden von stabilen, minimalphasigen $L(s)$ aus. Ausserdem muss gelten $k_p > 0$.

¹Englisch: *Root-Locus*

Regeln des Wurzelortskurven-Verfahrens

Der geschlossene Regelkreis hat die Übertragungsfunktion:

$$T(s) = \frac{k_p \cdot C(s) \cdot P(s)}{1 + k_p \cdot C(s) \cdot P(s)} = \frac{k_p \cdot L(s)}{1 + k_p \cdot L(s)}$$

Die Pole des geschlossenen Regelkreises sind demnach Lösungen folgender Gleichung:

$$1 + k_p \cdot L(s) = 0 \quad (5)$$

Die offene Verstärkung $L(s)$ ist eine reell-rationale Übertragungsfunktion:

$$L(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{(s - \zeta_1) \cdot (s - \zeta_2) \cdot \dots \cdot (s - \zeta_m)}{(s - \pi_1) \cdot (s - \pi_2) \cdot \dots \cdot (s - \pi_n)} \quad (6)$$

Daraus folgt:

$$1 + k_p \cdot \frac{b(s)}{a(s)} = 0 \Rightarrow a(s) + k_p \cdot b(s) = p(s, k_p)$$

Die Schar der Nullstellen von $p(s, k_p)$ repräsentieren die Wurzelortskurven. Das Polynom $p(s, k_p)$ hat Ordnung n . Das Polynom kann für Extremfälle von k_p betrachtet werden:

$k_p \rightarrow 0, p(s, k_p) \approx a(s)$ Für sehr kleine k_p approximieren die n Nullstellen von $p(s, k_p)$ die n Nullstellen von $a(s)$. Das heisst, die Pole von $T(s)$ nähern sich den Polen von $L(s)$.

$k_p \rightarrow \infty, p(s, k_p) \approx k_p \cdot b(s)$ Für sehr grosse k_p konvergieren m Nullstellen von $p(s, k_p)$ zu den m endlichen Nullstellen von $b(s)$. Das heisst, die Pole von $T(s)$ nähern sich den Nullstellen von $L(s)$. Jedoch hat $p(s, k_p)$ Ordnung n . Das heisst es bleiben $n - m$ Nullstellen von $p(s, k_p)$ übrig. Was mit den restlichen Nullstellen passiert, kann wie folgt interpretiert werden:

$$L(s) = \frac{\underbrace{(s - \zeta_1)(s - \zeta_2) \dots (s - \zeta_m)}_m \underbrace{(-s/\infty + 1) \dots (-s/\infty + 1)}_{n-m}}{\underbrace{(s - \pi_1)(s - \pi_2) \dots (s - \pi_m)}_m \underbrace{(s - \pi_{m+1}) \dots (s - \pi_n)}_{n-m}}$$

Zur Erinnerung: Nullstellen, die im Unendlichen platziert sind haben keinen Einfluss auf die Systemdynamik. Das heisst wir können $L(s)$ mit $n - m$ Nullstellen erweitern ohne das Systemverhalten zu ändern.

Die Hauptidee ist nun, dass sich die $n - m$ übriggebliebenen Pole von $L(s)$ den $n - m$ im Unendlichen platzierten Nullstellen asymptotisch nähern. Insbesondere starten alle Asymptoten im Punkt $\sigma_a + j \cdot 0$, wobei:

$$\sigma_a = \frac{1}{n - m} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(\pi_i) - \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(\zeta_i) \right)$$

Die Asymptoten verlassen den Punkt $\sigma_a + j \cdot 0$ unter dem Winkel δ_i , wobei:

$$\delta_i = \frac{\pi}{n - m} \cdot (2 \cdot (i - 1) + 1) [\text{rad}], \quad i = 1, \dots, n - m$$

Zugehörigkeitstest

Um zu testen ob ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ auf der Wurzelortskurve liegt, wird Gl. (5) mit Hilfe von Gl. (6) umgeformt:

$$L(z) = -1/k_p \Rightarrow \angle L(z) = -\pi \bmod 2\pi$$

$$\sum_{i=1}^m \angle(z - \zeta_i) - \sum_{i=1}^n \angle(z - \pi_i) = -\pi \pm k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{N} \quad (7)$$

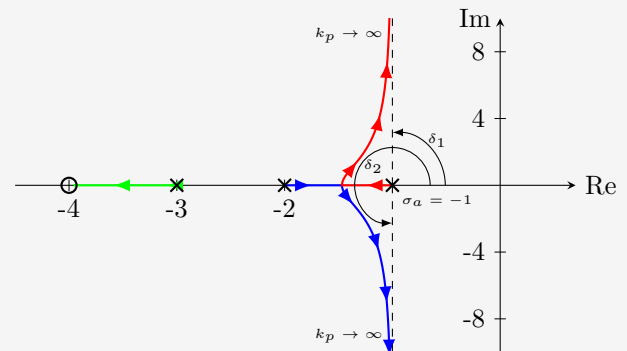
Beispiel: $L(s)$ sei:

$$L(s) = \frac{s + 4}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

Es folgt: $n = 3, m = 1, n - m = 2$. Das heisst zwei der Pole nähern sich für $k_p \rightarrow \infty$ den Asymptoten, die bei $\sigma_a + j \cdot 0$ starten, und denselben Punkt unter den Winkeln δ_i verlassen, wobei:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} \cdot (-1 - 2 - 3 - (-4)) = -1$$

$$\delta_1 = \frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot 0 + 1) = \frac{\pi}{2}, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot 1 + 1) = \frac{3\pi}{2}$$



Wir möchten nun testen ob der Punkt $z = -3.5 + j \cdot 0$ auf der Wurzelortskurve liegt. Dazu wenden wir Gl. (7) an:

$$\angle(-3.5 + 4) - \angle(-3.5 + 1) - \angle(-3.5 + 2) - \angle(-3.5 + 3) = 3\pi$$

3π hat die geforderte Form $-\pi + k \cdot 2\pi$, für $k = 2$. Der Punkt liegt also auf der Wurzelortskurve.

Kompensierung mit dem Wurzelortungsverfahren

Der Zugehörigkeitstest aus Gl. (7) ist besonders hilfreich, um einen Kompensator zu finden, der die Pole des geschlossenen Regelkreises an einem gewünschten Ort in der komplexen Ebene platziert. Diese Idee wird an einem Beispiel gezeigt.

Beispiel: Du möchtest einen Kompensator $C(s)$ für das System $P(s)$ auslegen, sodass die Pole von $T(s)$ bei $s_{1,2}^* = -4 \pm j \cdot 4$ rad/s liegen.

$$P(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 3)}$$

Du testest zuerst einen einfachen Kompensator $C_1(s) = 1$.

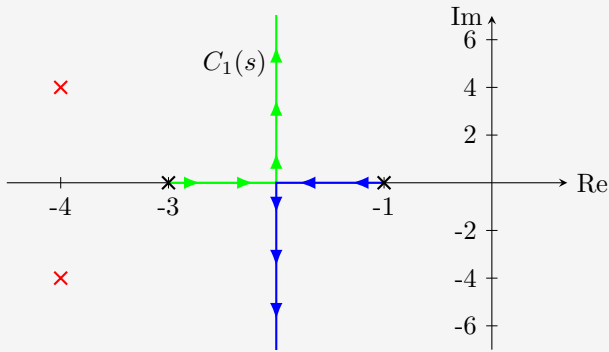


Abb. 6: Wurzelortskurve von $L = P \cdot C_1$ in blau und grün. Gewünschte Polplatzierung in rot.

Aus Abb. 6 ist ersichtlich, dass die gewünschten Pole (\times) nicht auf der Wurzelortskurve liegen. Das heisst für $C_1(s)$ gibt es kein k_p , sodass der geschlossene Regelkreis $T(s)$ die gewünschten Pole hat. Gl. (7) ist somit nicht erfüllt.

Die gewünschten Pole liegen links von den Polen des offenen Regelkreises. Um die Wurzelortskurve nach links zu biegen, platzierst du eine parametrisierte Nullstelle mit dem Kompensator $C_2(s) = s + \zeta$.

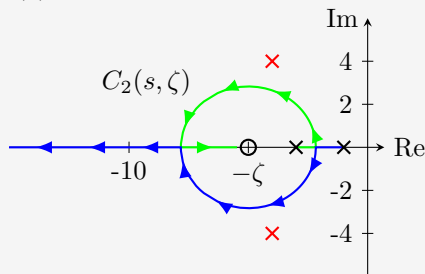


Abb. 7: Wurzelortskurve von $L = P \cdot C_2(s, \zeta)$ in blau und grün. Gewünschte Polplatzierung in rot.

Du möchtest nun ζ finden, sodass die gewünschten Pole auf der Wurzelortskurve liegen. Dafür wendest du Gl. (7) an:

$$L = \frac{(s + \zeta)}{(s + 1)(s + 3)} \Rightarrow \angle L = \angle(s + \zeta) - \angle(s + 1) - \angle(s + 3)$$

Spezifisch für $s = s_1^*$:

$$\begin{aligned} \angle(-4 + 4j + \zeta) - \angle(-4 + 4j + 1) - \angle(-4 + 4j + 3) = \\ \underbrace{\arctan\left(\frac{4}{\zeta - 4}\right)}_{\gamma} - \underbrace{\arctan\left(\frac{4}{-3}\right)}_{\alpha} - \underbrace{\arctan\left(\frac{4}{-1}\right)}_{\beta} \stackrel{!}{=} -\pi \\ \Rightarrow \gamma = -\pi + \alpha + \beta, \quad \zeta = 4 + 4/\tan(\gamma) \approx 7.25 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

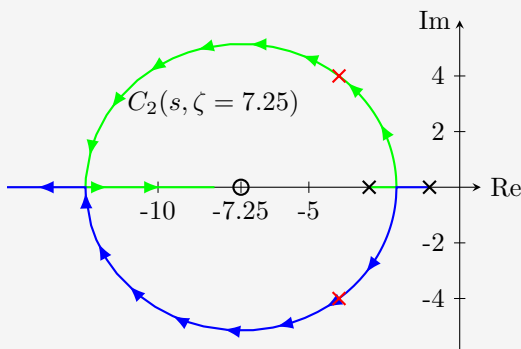


Abb. 8: Wurzelortskurve von $L = P \cdot C_2(s, \zeta)$ in blau und grün. Gewünschte Polplatzierung in rot.

Die gewünschten Pole liegen auf den Wurzelortskurven von $L(s) = P(s) \cdot C_2(s, \zeta = 7.25)$. Demnach ist es möglich ein k_p zu finden, sodass $T(s)$ die gewünschten Pole hat.

3 Numerische Verfahren

Mit numerischen Verfahren kann man für eine fixe Regelstruktur (z.B. PI) ein Optimierungsproblem lösen, um die Parameter k_p und T_i zu erhalten. Das Optimierungsproblem involviert eine Kostenfunktion $J(k_p, T_i)$, die durch die Wahl der optimalen Parameter k_p und T_i minimiert werden soll.

Beispiel: Du möchtest einen PI-Regler auslegen, der auf eine Sprungantwort kumulativ einen kleinen Fehler erzeugt, der den maximalen Überschuss möglichst reduziert, und der möglichst robust ist.

Ein Mass für den kumulativen Fehler ist die Summe aller quadrierten Fehler:

$$g_1 = \int_0^\infty e^2(t) dt$$

Der maximale Überschuss ist wie folgt definiert:

$$g_2 = \max_{t \in [0, \infty)} (y(t) - 1)$$

Die Robustheit kann mit der minimum return difference μ_{\min} ausgedrückt werden:

$$\mu_{\min} = \min_{\omega \in [0, \infty)} |1 + L(j\omega)|$$

Ein μ_{\min} von 1 resultiert in einem sehr robusten Regler:

$$g_3 = 1 - \min_{\omega \in [0, \infty)} |1 + L(j\omega)|$$

Du definierst deine Kostenfunktion:

$$J(k_p, T_i) = \kappa_1 \cdot g_1 + \kappa_2 \cdot g_2 + \kappa_3 \cdot g_3$$

Das resultierende Optimierungsproblem kann z.B. mit der Funktion `fminsearch` in Matlab gelöst werden und lautet:

$$\min_{k_p, T_i} J(k_p, T_i)$$

Die Tuning-Parameter $\kappa_{(\cdot)}$ sind ein Mass für die Wichtigkeit einer Grösse $g_{(\cdot)}$ in der Kostenfunktion J . Je grösser z.B. κ_3 (bei fixierten $\kappa_{1,2}$) gewählt wird, desto robuster wird der Regler (desto eher wird g_3 eingehalten). Jedoch werden die Ziele g_1 und g_2 dadurch relativ zu g_3 weniger gewichtet. Das heisst die Parameter $\kappa_{(\cdot)}$ erlauben einen *Trade-off* zwischen verschiedenen Zielen zu definieren. Dabei ist nur die relative Grösse der $\kappa_{(\cdot)}$ zu einander von Relevanz. So ist z.B. das minimum der Kostenfunktion für $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 1$ an derselben Stelle wie für $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 100$.

Eine weitere Möglichkeit die Parameter $\kappa_{(\cdot)}$ zu interpretieren ist wie folgt: Je grösser ein κ_i ist, desto *teurer* ist es das Ziel g_i nicht zu erfüllen. Das heisst um $J(k_p, T_i)$ zu minimieren ist es für die Optimierung viel lukrativer g_i möglichst gut zu erfüllen. Da die restlichen Ziele relativ zu g_i viel billiger sind, können diese leicht vernachlässigt werden, da dies die Gesamtkosten $J(k_p, T_i)$ nicht gross ändert.

Regelungstechnik II FS 2020

PID Praxiseinsatz

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Zusammenfassung Vorlesung 4

Buch Kapitel 14, Kapitel 7.5

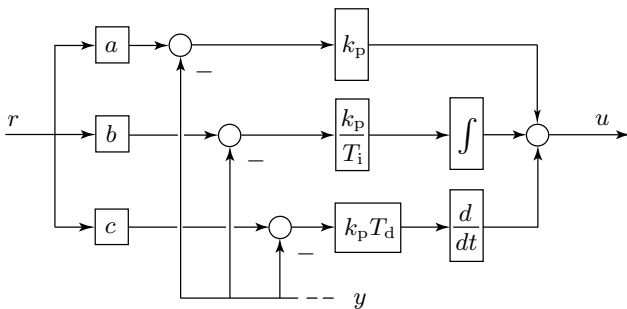
Bei Fragen: hrffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 12. März 2020

1 PID Regler in der Praxis

Der praktische Einsatz von Reglern bringt diverse bisher unerwähnte Schwierigkeiten mit sich. Die wichtigsten Einschränkungen werden im Folgenden diskutiert.

Set Point Weights

Die Standardregelstruktur dient vor allem zur Unterdrückung von Störungen. Natürlich werden Regler auch verwendet um spezifischen Referenzen $r(t)$ zu folgen. Schnelle Änderungen im Referenzsignal kann sehr hohe Eingänge $u(t)$ und ungewollte Transienten produzieren. Mit sogenannten *set point weights* (Abb. 1) kann das Regelverhalten verbessert werden.

Abb. 1: PID Regler mit Setpointverstärkungen a, b, c .

Das Referenzsignal wird für jeden Teil des Reglers (P, I, D) mit einer separaten Verstärkung (a, b, c) multipliziert. Das heisst, die Referenz wird "vormassiert", bevor sie durch den Regler geht.

- Um keinen statischen Nachlauffehler zu produzieren, falls die Referenz plötzlich konstant werden soll, wird normalerweise $b = 1$ gesetzt.
- Schnelle Referenzen erzeugen grosse Signale auf dem Differential-Pfad des Reglers ($\frac{d}{dt}(r - y) \approx \frac{d}{dt}r$). Normalerweise will man nur Änderungen aufgrund des Ausgangssignals dämpfen. Demnach setzt man oftmals $c = 0$, um hohe Ableitungen zu umgehen.
- Für die Verstärkung a auf dem proportionalen Signal kann man die Åström und Hägglund Regeln anwenden:

$$a = \alpha_{0,x} \cdot e^{\alpha_{1,x} \cdot \kappa + \alpha_{2,x} \cdot \kappa^2}$$

a	$\mu_{\min} = 0.7$			$\mu_{\min} = 0.5$		
	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$
PI	1.10	-0.0061	1.8	0.48	0.40	-0.17
PID	0.58	-1.3000	3.5	0.25	0.56	-1.20

Tabelle 1: Åström-Hägglund Koeffizient für PI und PID Regler.

Typischerweise ist $0 < a < 1$. Ein gut gewählter Wert von a kann das closed-loop Regelverhalten häufig verbessern.

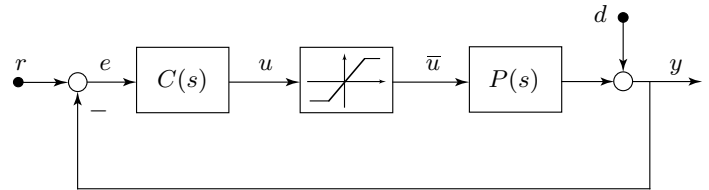
Saturationen und Anti Reset Windup (ARW)

Eine Saturation ist eine Nichtlinearität, die in jedem Regelsystem vorhanden ist. Aktuatoren können in Realität nie beliebig kleine oder beliebig grosse Sollsignale $u(t)$ umsetzen.

Die Nichtlinearität einer Saturation ist wie folgt definiert:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_{\min} & \text{if } u(t) < u_{\min} \\ u_{\max} & \text{if } u(t) > u_{\max} \\ u(t) & \text{else} \end{cases}$$

Falls der vom Regler $C(s)$ geforderte Ausgang u grösser ist als der maximal produzierbare Eingang u_{\max} des Aktuators, saturiert der Eingang bei $\bar{u} = u_{\max}$. Die gleiche Logik gilt für den minimal erreichbaren Eingang u_{\min} .

Abb. 2: Regelsystem mit Saturation auf u .

Beispiel: Das System $P(s)$ soll mit einem PI-Regler $C_{PI}(s)$ geregelt werden:

$$P(s) = \frac{1}{s(3s^2 + 4s + 1)}, \quad C_{PI}(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s}\right)$$

Eine Simulation mit $k_p = 0.3$ und $T_i = 13$ s führt zum gestrichelten Systemverhalten:

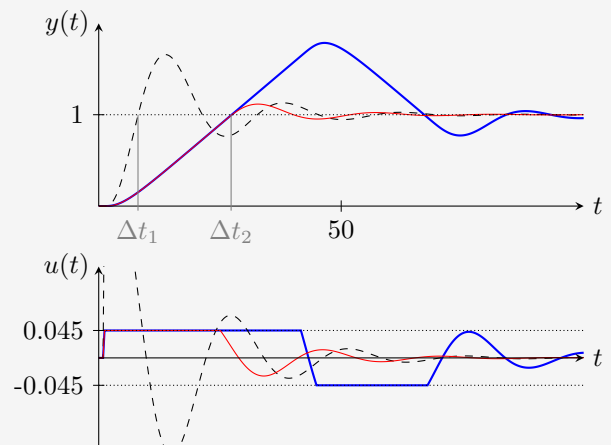


Abb. 3: Saturierendes Regelsystem.

Beim Auslegen wurde jedoch vernachlässigt, dass der Aktuator bei $|u(t)| = u_{\text{sat}} = 0.045$ saturiert. Mit der Aktuator-Sättigung resultiert effektiv die blaue Linie und damit eine schlechtere Reglerperformance. Mit einem ARW (siehe folgenden Abschnitt) resultiert die viel bessere Performance der roten Linie.

Um mit Saturationen umzugehen, muss man zuerst verstehen, was bei einem saturierten Regelsystem überhaupt passiert. Dadurch, dass das System langsamer reagiert als erwartet, kann sich der Integrator über eine längere Zeit t füllen ($\Delta t_1 < t < \Delta t_2$). Sobald sich das Vorzeichen des Fehlers ändert, überschiesst die Antwort das Ziel stärker, da sich der Integrator zuerst leeren muss.

Um die Saturation zu umgehen, kann man den Integrator durch ein *anti-reset-windup* (ARW) schwächen, sobald man erkennt, dass der Eingang saturiert (siehe Abb. 4, rote Box). In der roten Box sieht man eine mögliche Struktur eines anti reset-windup. Dabei ist $q(t) = u(t) - \bar{u}(t)$. Falls $u(t)$ nicht saturiert, ist $q(t) = 0$ und der ARW macht nichts. Falls man saturiert, wird die zu integrierende Grösse reduziert, sodass sich der Integrator in der Saturationsphase nicht zu stark füllt. Das heisst je stärker die Aktuatoren saturieren, desto mehr wirkt man der Integration entgegen. Dazu muss man die Saturationspunkte der Nichtlinearität kennen.

Bumpless Transfer

Um ein System zu testen macht es oft Sinn einen Manuellen Modus (M) und einen Automatischen Modus (A) zu haben. Wenn man von einem Modus in den anderen wechselt, will man dies so reibungslos wie möglich machen (Bumpless Transfer). Dazu verwendet man folgende Regelstruktur:

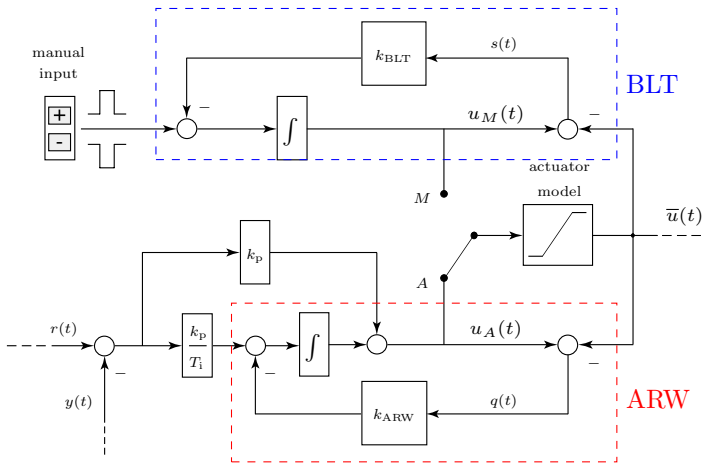


Abb. 4: Anti Reset-windup (ARW) und Bumpless Transfer (BLT) Regelung.

Während man im Modus A ist, regelt man $u_M(t)$ auf $u_A(t)$, sodass beim Wechsel von A nach M kein Sprung in der Eingangsgrösse auftritt. Umgekehrt regelt man im Modus M mit Hilfe der ARW-Rückführung das Signal $u_A(t)$ auf $u_M(t)$.

Gain Scheduling

Gain scheduling wird meist für nichtlineare Systeme verwendet, die um verschiedene Betriebspunkte linearisiert werden. Für jeden Betriebspunkt kann ein anderer linearer Regler ausgelegt werden.

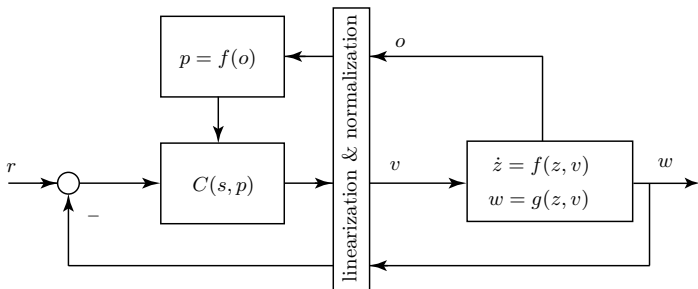


Abb. 5: Diagramm zu Gain scheduling.

Beispielsweise werden für einen PI-Regler die Verstärkungen $k_p(o)$, $T_i(o)$ zu Funktionen des Betriebspunktes o .

Analoge Realisierung

Mit analogen Schaltungen kann man eine Eingangsspannung U_e in eine Ausgangsspannung U_a umwandeln. Dabei kann man die Grundstruktur in Abb. 6 verwenden.

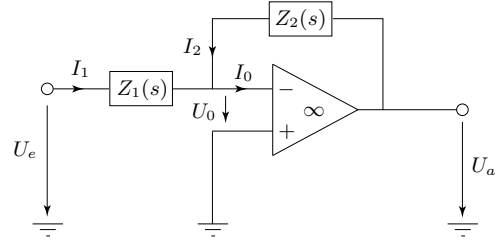


Abb. 6: Grundstruktur mit idealem analogem Opamp.

Die Übertragungsfunktion von $U_e(s)$ nach $U_a(s)$ lautet

$$\Sigma(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)},$$

wobei $Z_1(s)$ und $Z_2(s)$ aus Widerständen (R), Induktoren (L) und Kapazitäten (C) aufgebaut sind.

Die Impedanzen der Standard RLC Elemente lauten:

$$Z_R(s) = R, \quad Z_L(s) = sL, \quad Z_C(s) = \frac{1}{sC}.$$

Des Weiteren gelten die Kirchhoffschen Regeln für Serien- und Parallelschaltungen dieser Elemente.

Zeitdiskrete Realisierung

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie man ein continuous-time Regler $C(s)$, in einen discrete-time Regler $C(z)$ umwandelt. Die Diskretisierung bezieht sich in dem Fall auf eine Zeitdiskretisierung. Bis jetzt wurde angenommen, dass ein Regler $C(s)$ in jedem Zeitpunkt t berechnen kann was $u(t)$ sein soll. In der Realität läuft die Rechnung in einer fixen Taktfrequenz f_s . D.h. es können in Wirklichkeit nur zu fixen Zeitpunkten t_n neue Eingänge $u(n \cdot T_s) := u[k]$ berechnet werden:

$$t_n = \frac{n}{f_s} = n \cdot T_s, \quad n \in 0, 1, \dots \quad (1)$$

Die Diskretisierung findet statt, da der Mikroprozessor (μP), der die Rechnungen ausführt, auf einer fixen Frequenz läuft (dargestellt durch die Uhr in Abb. 7).

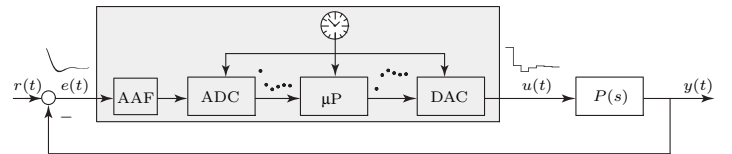


Abb. 7: Digitales Regelsystem.

- ADC : Steht für Analog-to-digital Converter. Konvertiert zeit-kontinuierliche Signale in zeit-diskrete Signale.
- μP : Steht für Mikroprozessor. Berechnet den zeitdiskreten Eingang $u[k]$.
- DAC : Steht für Digital-to-Analog Converter. Konvertiert zeit-diskrete Signale in zeit-kontinuierliche Signale.

Der DAC wird meistens mit einem *Zero-order Hold* (ZOH) Element realisiert:

$$u(t) = u[k] \quad \forall t \in [k \cdot T_s, (k+1) \cdot T_s),$$

Das heisst der Eingang $u[k]$ wird zwischen zwei Berechnungsschritten konstant gehalten.

Beispiel: Ein Signal $x(t)$ wird zuerst abgetastet, und dann wird ein zero-order hold (ZOH) angewandt.

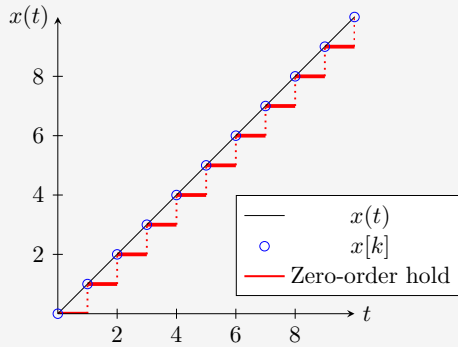


Abb. 8: Gesamtes Signal in blauen Kreisen, ZOH in rot.

Das Sampling geschieht mit einem ADC. Der zero-order hold wird mit dem DAC realisiert.

In Abb. 7 ist in der grauen Box noch ein weiteres Element: der analoge Anti-aliasing Filter (AAF). Der AAF ist nötig, da ein zeitdiskretes Signal nicht beliebig hohe Frequenzen repräsentieren kann. Energien der Frequenzen im analogen Signal, die höher als die maximal repräsentierbare Frequenz sind, werden bei der Diskretisierung ungewollt auf das gesamte Frequenzspektrum verteilt und verzerren dieses somit. Deshalb wählt man für den AAF einen Tiefpassfilter (System erster Ordnung) um hohe Frequenzen vor der Diskretisierung zu eliminieren.

Beispiel: Du sollst ein diskretes Signal zeichnen, dass für eine fixe Rate $f_s = \frac{1}{T_s}$ die höchstmögliche Frequenz hat.

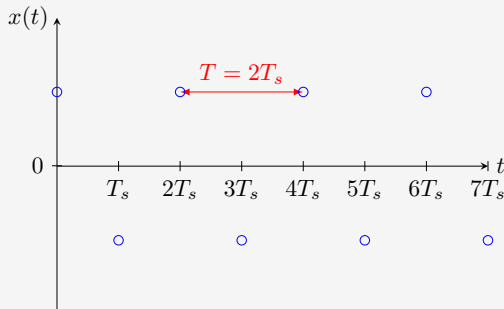


Abb. 9: Signal mit höchstmöglicher Frequenz für ein gegebenes T_s .

Die höchstmögliche Frequenz, die man in das Zeitraster $\{0, T_s, \dots\}$ legen kann, lautet:

$$f_{\max} = \frac{1}{T} = \frac{1}{2T_s}, \quad [f_{\max}] = \text{Hz} \quad (\text{Nyquist Frequenz})$$

Um einen diskreten Regler $C(z)$ zu erstellen verwendet man das diskrete Analogon der Laplace Transformation, die Z-Transformation:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \cdot x(k)$$

Einige wichtige Eigenschaften der Z-Transformation:

$$x(k+1) \leftrightarrow z \cdot X(z) - z \cdot x(0) \quad (2)$$

$$x(k-1) \leftrightarrow z^{-1} \cdot X(z) \quad (3)$$

$$z = e^{sT_s} \quad (4)$$

In der diskreten Welt ist die unabhängige Variable nicht mehr s , sondern z . Gln. (2) und (3) sind die diskreten Analogon der Laplace-Transformation einer Ableitung und einer Integration. Gl. (4) liefert die Beziehung zwischen $s \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$.

Beispiel: Mit Gl. (4) kann man das diskrete Equivalent eines asymptotisch stabilen Poles nach Lyapunov herleiten:

$$z = e^{\sigma T_s + \omega T_s j} = e^{\sigma T_s} \cdot e^{\omega T_s j} = a \cdot e^{\omega T_s j}$$

$$\text{asympt. stabil} \rightarrow \sigma < 0 \rightarrow 0 < a < 1$$

$$|z| = a \rightarrow |z| < 1$$

D.h. die ganze linke Halbebene ($\sigma < 0$, asymptotisch stabile Pole) im s -Raum wird zu einer Scheibe mit Radius 1 ($|z| < 1$) im z -Raum. Der Kreis mit Radius 1 ist nicht inbegriffen.

Emulationen

Die Umsetzung von Gl. (4) ist nichtlinear und deshalb praktisch umständlich, deshalb approximiert man den Zusammenhang häufig, ein Schritt der *Emulation* genannt wird. Emulationen sind dann sinnvoll, wenn die diskreten Zeitschritte T_s sehr klein sind im Vergleich zur Dynamik des beschriebenen Systems. Es gibt mehrere Approximationen für Gl. (4), die die Emulation mit der Approximation $e^x \approx 1 + x$ erleichtern. Dabei wird Gl. (4) jeweils etwas anders geschrieben:

$z = e^{sT_s}$	$\approx 1 + sT_s$	$\Rightarrow s \approx \frac{z-1}{T_s}$	Euler forward
$z = \frac{1}{e^{-sT_s}}$	$\approx \frac{1}{1 - sT_s}$	$\Rightarrow s \approx \frac{z-1}{zT_s}$	Euler backward
$z = \frac{e^{sT_s/2}}{e^{-sT_s/2}}$	$\approx \frac{1 + sT_s/2}{1 - sT_s/2}$	$\Rightarrow s \approx \frac{2(z-1)}{T_s(z+1)}$	Tustin Emulation

Die Tustin-Emulation wird am häufigsten verwendet, insbesondere weil damit die ganze linke s -Halbebene in einen Kreis mit Radius kleiner eins ($|z| < 1$) gemappt wird in der z -Ebene, d.h. ein stabiles kontinuierliches System resultiert in einem stabilen diskreten System (siehe Beispiel zur Stabilität oben). Die Euler backward Emulation erfüllt dieses Kriterium auch, die Euler forward Emulation hingegen nicht.

2 Algebraische Stabilitätskriterien

Es werden zwei Verfahren gezeigt, die zeigen, ob ein Polynom

$$a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0, \quad a_n > 0$$

alle Nullstellen in der linken komplexen Halbebene hat. Die Bedingungen $a_i > 0 \forall i$ ist notwendig aber nicht hinreichend.

Hurwitz Kriterium

Die Koeffizienten a_i seien bekannt. Falls alle Matrizen

$$H_1 = a_{n-1}, H_2 = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{bmatrix}, \dots$$

positiv definit sind, dann sind alle Nullstellen in der linken komplexen Ebene.

Kharitonov Kriterium

Die Koeffizienten a_i seien nicht exakt bekannt, man weiss jedoch, dass sie in einer gewissen Region liegen:

$$p(s, a) = [\underline{a}_n, \bar{a}_n] \cdot s^n + [\underline{a}_{n-1}, \bar{a}_{n-1}] \cdot s^{n-1} + \dots + [\underline{a}_0, \bar{a}_0]$$

Das Problem reduziert sich auf die Ecken eines Rechtecks in der komplexen Ebene und es müssen nur folgende Polynome mit dem Hurwitz-Kriterium getestet werden:

$$p_1(s) = \bar{a}_0 + \underline{a}_1 \cdot s + \underline{a}_2 \cdot s^2 + \bar{a}_3 \cdot s^3 + \dots$$

$$p_2(s) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot s + \underline{a}_2 \cdot s^2 + \underline{a}_3 \cdot s^3 + \dots$$

$$p_3(s) = \underline{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot s + \bar{a}_2 \cdot s^2 + \underline{a}_3 \cdot s^3 + \dots$$

$$p_4(s) = \underline{a}_0 + \underline{a}_1 \cdot s + \bar{a}_2 \cdot s^2 + \bar{a}_3 \cdot s^3 + \dots$$

Regelungstechnik II FS 2020

MIMO versus SISO Systeme

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Bei Fragen: hrappael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 26. März 2020

Zusammenfassung Vorlesung 5

Skript Kapitel 1

1 Systembeschreibung

Bisher wurden ausschliesslich SISO (single-input, single-output) Systeme betrachtet, d.h. $u(t) \in \mathbb{R}$ und $y(t) \in \mathbb{R}$. Neu werden MIMO (multiple-input, multiple-output) Systeme mit mehreren Ein- und Ausgängen betrachtet, wobei $u(t) \in \mathbb{R}^m$ und $y(t) \in \mathbb{R}^p$. Identisch zum SISO Fall kann das MIMO System im Zustandsraum dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t), \quad y(t) \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \quad (1)$$

Da $u(t)$ und $y(t)$ jetzt Vektoren sind, müssen die Matrizen B , C und D auf die Dimensionen der Eingänge und der Ausgänge angepasst werden. Das I/O (Input-Output) Verhalten des Systems in Gl. (1) wird identisch wie beim SISO Fall über die Laplace-Transformation hergeleitet:

$$\begin{aligned} s \cdot X(s) &= A \cdot X(s) + B \cdot U(s) \\ \Rightarrow X(s) &= (sI_{n \times n} - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) \\ \Rightarrow Y(s) &= \underbrace{(C \cdot (sI_{n \times n} - A)^{-1} \cdot B + D)}_{P(s)} \cdot U(s), \end{aligned} \quad (2)$$

wobei $sI_{n \times n}$ eine Einheitsmatrix der Dimension $n \times n$ ist.

Da $U(s) \in \mathbb{C}^m$ und $Y(s) \in \mathbb{C}^p$ wird $P(s)$ eine Matrix:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{1,1}(s) & P_{1,2}(s) & \dots & P_{1,m}(s) \\ P_{2,1}(s) & P_{2,2}(s) & \dots & P_{2,m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{p,1}(s) & P_{p,2}(s) & \dots & P_{p,m}(s) \end{bmatrix},$$

wobei jede Übertragungsfunktion $P_{i,j}(s) : u_j \rightarrow y_i$

$$P_{i,j}(s) = \frac{b_{m,i,j}s^m + \dots + b_{1,i,j}s + b_{0,i,j}}{s^n + a_{n-1,i,j}s^{n-1} + \dots + a_{1,i,j}s + a_{0,i,j}} = \frac{b_{i,j}(s)}{a_{i,j}(s)}$$

eine gebrochenrationale Funktion darstellt.

Zur Erinnerung: $P(s)$ beinhaltet nur steuerbare und beobachtbare Teile des Systems in Gl. (1).

Beispiel: Das folgende System soll geregelt werden:

$$\begin{aligned} P(s) &= \begin{bmatrix} P_{1,1}(s) & P_{1,2}(s) \\ P_{2,1}(s) & P_{2,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{s+1} & \frac{a_{12}}{s+1} \\ \frac{a_{21}}{s+1} & \frac{a_{22}}{s+1} \end{bmatrix}, \quad (3) \\ U(s) &= \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}, \quad Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Dabei seien $r_1(t) = h(t)$ und $r_2(t) = 0$, wobei $h(t)$ einen Sprung darstellt. Um die Übertragungsfunktion von $R(s)$ nach $Y(s)$ zu finden wird die folgende Regelstruktur betrachtet

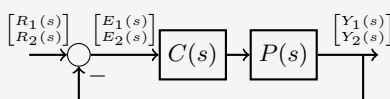


Abb. 1: Regelstruktur ohne Störung und ohne Rauschen.

Der Ausgang als Funktion des Fehlers lautet

$$Y(s) = P(s)C(s)E(s) = P(s)C(s) [R(s) - Y(s)].$$

Daraus folgt

$$Y(s) = [I + P(s)C(s)]^{-1} P(s)C(s)R(s)$$

Vorsicht! Die Reihenfolge der Matrixmultiplikation $P(s) \cdot C(s)$ kann nicht umgedreht werden, da diese Operation für allgemeine Matrizen nicht kommutiert.

Das System $P(s)$ wird nun für drei verschiedene Fälle der Verstärkung $P(0)$ simuliert:

$$P(0) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Fall 1: $a_{11}, a_{22} \gg a_{12}, a_{21}$

Die Systemparameter werden beispielhaft $a_{11} = a_{22} = 1$ und $a_{12} = a_{21} = 0.1$ gewählt. Die Matrix $P(0)$ ist diagonal dominant, es folgt näherungsweise

$$P(s) \approx \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{a_{22}}{s+1} \end{bmatrix}.$$

D.h. der Eingang $u_1(t)$ wirkt nur auf $y_1(t)$ und $u_2(t)$ wirkt nur auf $y_2(t)$. Somit kann das Gesamtsystem als zwei verschiedene SISO Systeme ($r_1 \rightarrow y_1$ und $r_2 \rightarrow y_2$) betrachtet werden. Die Reglermatrix wird unter dieser Annahme diagonal:

$$C(s) = \begin{bmatrix} C_1(s) & 0 \\ 0 & C_2(s) \end{bmatrix},$$

wobei im gegebenen Beispiel für $C_1(s)$ und $C_2(s)$ zwei identische PI Regler mit $k_p = 0.1$ und $T_i = 0.1$ s gewählt werden.

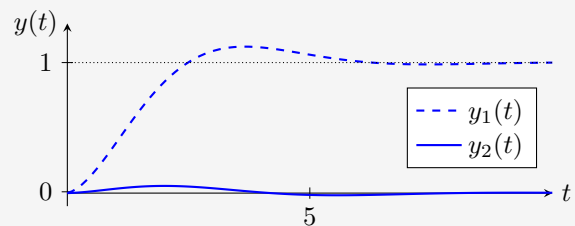


Abb. 2: Fall 1, MIMO Antwort für $r_1(t) = h(t)$ und $r_2(t) = 0$.

Obwohl $y_2(t)$ in Realität leicht vom Eingang $u_1(t)$ abhängt (an der leichten Erhöhung von $y_2(t)$ ersichtlich) lässt sich das System mit zwei separaten SISO Reglern gut regeln.

Fall 2: $a_{11}, a_{22} > a_{12}, a_{21}$

Die Diagonalelemente von $P(0)$ sind zwar immer noch grösser, jedoch nicht gross genug um das MIMO System klar in zwei SISO Systeme zu separieren. Beispielhaft werden $a_{11} = a_{22} = 1$ und $a_{12} = a_{21} = 0.8$ gewählt. Der gleiche Regler $C(s)$ wie im Fall 1 wird verwendet.

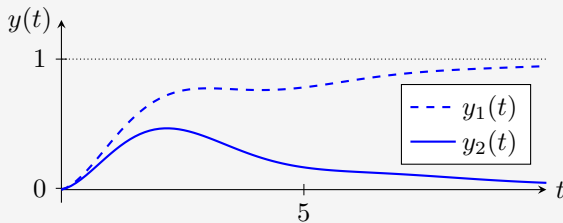


Abb. 3: Fall 2, MIMO Antwort für $r_1(t) = h(t)$ und $r_2(t) = 0$.

Die Systemantwort ist sichtlich schlechter. Das liegt daran, dass der Eingang $u_1(t)$ den Ausgang $y_2(t)$ nach oben zieht, und der Eingang $u_2(t)$ den Ausgang $y_1(t)$ nach unten zieht.

Fall 3: $a_{11}, a_{22} < a_{12}, a_{21}$

Falls die dominanten I/O Kanäle des Systems genau verkehrt geschätzt werden, destabilisiert sich das System mit dem Regler $C(s)$ aus Fall 1.

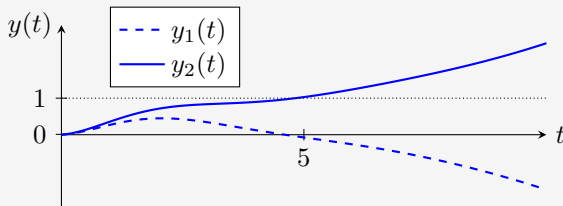


Abb. 4: Fall 3, MIMO Antwort für $r_1(t) = h(t)$ und $r_2(t) = 0$.

Man könnte $C(s)$ natürlich abändern, sodass $C_1(s)$ und $C_2(s)$ auf der Nebendiagonalen liegen, dann wäre das Verhalten äquivalent zu Fall 1.

2 Stabilität, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Die Analyse von MIMO Systemen ist identisch zu derjenigen von SISO Systemen.

Stabilität nach Lyapunov:

asymptotisch stabil nach Lyapunov:

Alle Eigenwerte von A haben negativen Realteil, $\text{Re}(\lambda_i) < 0$.

stabil nach Lyapunov:

Mindestens ein Eigenwert λ_k von A hat Realteil $\text{Re}(\lambda_k) = 0$ und alle anderen Eigenwerte haben negative Realteile.

instabil nach Lyapunov:

Mindestens ein Eigenwert λ_k von A hat einen positiven Realteil $\text{Re}(\lambda_k) > 0$.

Steuerbarkeit

Das System $\{A, B, C, D\}$ ist vollständig steuerbar falls die Steuerbarkeitsmatrix \mathcal{R}_n vollen Rang n hat.

$$\mathcal{R}_n = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times (n \cdot m)}$$

Beobachtbarkeit

Das System $\{A, B, C, D\}$ ist vollständig beobachtbar falls die Beobachtbarkeitsmatrix \mathcal{O}_n vollen Rang n hat.

$$\mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n \cdot p) \times n}$$

3 Pole und Nullstellen

Pole und Nullstellen sind im MIMO Fall etwas komplizierter.

Definition Matrix Minoren (wichtiges Werkzeug)

Minoren einer Matrix sind die Determinanten aller quadratischen Submatrizen. Die Submatrizen werden durch Streichen einzelner Zeilen und Spalten der Matrix gebildet.

Polstellen von MIMO Systemen

Die Pole von $P(s)$ sind die Nullstellen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) der Nennerpolynome aller Minoren von $P(s)$.

Nullstellen von MIMO Systemen

Die Nullstellen von $P(s)$ sind die Nullstellen des grössten gemeinsamen Teilers (ggT) der Zähler der Minoren höchster Ordnung von $P(s)$ nach der Normalisierung, bei der alle Pole von $P(s)$ im Nenner stehen.¹

Zur Erinnerung: Nullstellen $s = \zeta_i$ sind nicht-triviale Frequenzen, bei denen für ein spezifisches Eingangssignal $u(t)$ und spezifische Anfangsbedingungen $x(0)$ gilt: $y(t) = 0 \forall t$. D.h. die Laplace-Transformation von Gl. (1) erfüllt

$$(sI_{n \times n} - A) \cdot x - B \cdot u = 0, \quad (4)$$

$$C \cdot x + D \cdot u = 0,$$

wobei Gl. (4) nur eine nichttriviale Lösung hat, falls die folgende Matrix singular ist:

$$\begin{bmatrix} (sI_{n \times n} - A) & -B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Beispiel: Das System

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{2(s+2)}{s+1} & \frac{3}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{3}{s+2} \end{bmatrix}$$

wird auf Polstellen und Nullstellen analysiert.

Pole Schritt 1: Minoren finden

$$\frac{2(s+2)}{s+1}, \frac{3}{s+1}, \frac{1}{s+1}, \frac{1}{s+2}, \frac{2s-1}{(s+1)^2}$$

Pole Schritt 2: Das kgV der Pole aller Minoren finden

$$p(s) = (s+1)^2 \cdot (s+2)$$

$\Rightarrow P(s)$ hat somit eine zweifache Polstelle bei $s = -1$ und eine einfache Polstelle bei $s = -2$.

Nullstellen Schritt 1: Minoren höchster Ordnung finden^a

$$\frac{2s-1}{(s+1)^2}$$

Nullstellen Schritt 2: Minoren höchster Ordnung normalisieren, sodass alle Pole im Nenner stehen

$$\frac{(2s-1)}{(s+1)^2} \cdot \frac{(s+2)}{(s+2)}$$

Nullstellen Schritt 3: Übertragungs-Nullstellen sind die Nullstellen des ggT der normalisierten Minoren höchster Ordnung

$$\text{ggT: } (2s-1)(s+2)$$

$\Rightarrow P(s)$ hat somit eine einfache Nullstelle bei $s = \frac{1}{2}$ und eine einfache Nullstelle bei $s = -2$.

^aQuadratische Matrizen haben immer einen Minor höchster Ordnung.

¹Die Textdefinition ist eher schwer verständlich. Es empfiehlt sich das Verfahren mittels Beispielen zu verstehen.

Regelungstechnik II FS 2020

Relative-Gain Array (RGA), Singulärwerte

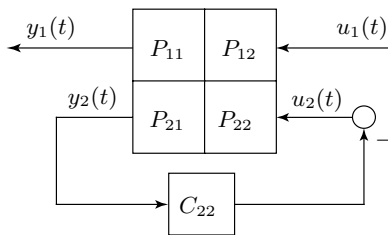
Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Bei Fragen: hruffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 26. März 2020

1 Relative Gain Array (RGA)

Mit dem Relative-Gain Array (RGA) kann man bestimmen, ob ein MIMO-System gut mit separaten SISO-Reglern regelbar ist. Dazu wird die Verstärkung $|P_{ij}(j\omega)|$ jeder Übertragungsfunktion von Eingang u_j auf Ausgang y_i bei Frequenz ω für zwei Extremfälle betrachtet. Das Verhältnis der beiden Werte ist der Relative-Gain. Das RGA ist schlussendlich eine Matrix mit den Verhältnissen aller Übertragungsfunktionen bei einer gegebenen Frequenz ω .

Die Extremfälle für die Übertragungsfunktion P_{11} werden illustrativ mit folgender Abbildung dargestellt:



Der Regler C_{22} sollte dabei als eine Art hypothetische Grösse verstanden werden, mit der entweder $u_2(t) = 0$ oder $y_2(t) = 0$ gesetzt werden kann, mehr dazu gleich jetzt.

Extremfall 1: "open-loop" $\leftrightarrow C_{22} = 0$

Das System wird "open-loop" betrachtet: Es wird angenommen dass der Regler $C_{22} = 0$ ist, d.h. dass nur der Eingang u_1 den Ausgang y_1 beeinflusst während im allgemeinen Fall alle anderen Eingänge null sind: $u_j = 0 \forall j \setminus \{1\}$. In diesem Fall ist die Übertragungsfunktion von u_1 auf y_1 :

$$P_{u_1 \rightarrow y_1}(s) = P_{11}(s).$$

Extremfall 2: "perfect closed-loop" $\leftrightarrow C_{22} = \infty$

Es wird angenommen, dass im allgemeinen Fall alle Ausgänge ausser der betrachtete Ausgang y_1 perfekt auf null geregelt werden, d.h. $y_i = 0 \forall i \setminus \{1\}$. Im gegebenen Beispiel heisst das, dass $u_2(t)$ so gewählt ist, dass $y_2(t) = 0 \forall t$. Dies wird schematisch mit einem Regler unendlicher Verstärkung $C_{22} = \infty$ dargestellt. Dann ist die Übertragungsfunktion von u_1 auf y_1 :

$$P_{u_1 \rightarrow y_1}(s) = \frac{P_{11}(s) \cdot P_{22}(s) - P_{12}(s) \cdot P_{21}(s)}{P_{22}(s)}.$$

Der Relative Gain ist das resultierende Verhältnis zwischen open-loop und closed-loop Verhalten:

$$[RGA(s)]_{11} = \frac{P_{11}(s) \cdot P_{22}(s)}{P_{11}(s) \cdot P_{22}(s) - P_{12}(s) \cdot P_{21}(s)}.$$

Dieses Verhältnis hat eine sehr schöne Interpretation: Es widerspiegelt die Änderung der Verstärkung von Eingang u_1 auf Ausgang y_1 im Fall, dass alle anderen Regelkreise des MIMO Systems perfekt geschlossen werden. Der Relative Gain beantwortet also die Frage: "Wenn ein Regler vom Eingang u_1 auf den Ausgang y_1 basierend auf dem open-loop System P_{11} ausgelegt wird, welche veränderten Verhältnisse trifft dieser Regler an, wenn er schlussendlich im geregelten MIMO-System verwendet wird?"

Zusammenfassung Vorlesung 6

Skript Kapitel 2

SISO-fähiges $P_{ij}(s) \leftrightarrow [RGA(s)]_{ij} \approx 1$

Die Verstärkung von Eingang u_j auf Ausgang y_i im MIMO-System ist identisch zur Verstärkung der Übertragungsfunktion $P_{ij}(s)$. Basierend auf $P_{ij}(s)$ kann also ein sinnvoller Regler entworfen werden, der den Ausgang y_i mit dem Eingang u_j regelt.

Nicht SISO-fähiges $P_{ij}(s) \leftrightarrow [RGA(s)]_{ij} \approx 0$

Die Verstärkung der Übertragungsfunktion $P_{ij}(s)$ ist vernachlässigbar im Vergleich zur resultierenden Verstärkung von Eingang u_j auf Ausgang y_i im MIMO System. Basierend auf $P_{ij}(s)$ kann also kein sinnvoller Regler entworfen werden, der den Ausgang y_i mit dem Eingang u_j regelt.

Instabiles Verhalten für $P_{ij}(s) \leftrightarrow [RGA(s)]_{ij} < 0$

Das Vorzeichen der Verstärkung der Übertragungsfunktion von u_j auf y_i im MIMO System ist unterschiedlich vom Vorzeichen von $P_{ij}(s)$. D.h. ein SISO-Regler, ausgelegt basierend auf $P_{ij}(s)$, hat, wenn er im MIMO-System verwendet wird, eine entgegengesetzte Wirkung. Der Regler führt also z.B. als Reaktion auf einen Sollsprung in y_i dazu, dass die Variable y_i nach unten anstatt nach oben geregelt wird, das MIMO System kann mit diesem Regler also destabilisiert werden.

Das RGA ist die Matrix mit den relativen gains aller Übertragungsfunktionen als Einträgen.

Das RGA einer 2×2 Regelstrecke $P(s)$ ist:

$$RGA(s) = \begin{bmatrix} \frac{P_{11}P_{22}}{P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}} & \frac{-P_{12}P_{21}}{P_{22}P_{11} - P_{21}P_{12}} \\ \frac{-P_{12}P_{21}}{P_{22}P_{11} - P_{21}P_{12}} & \frac{P_{11}P_{22}}{P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Das RGA eines allgemeinen MIMO-Systems $P(s)$ kann wie folgt berechnet werden:

$$RGA(s) = P(s) \cdot \times P(s)^{-\top},$$

wobei $\cdot \times$ eine elementweise Multiplikation beschreibt und $P(s)^{-\top}$ die Inverse der Transponierten ist.

Eigenschaften des RGA:

Aus Gl. (1) ist ersichtlich, dass die Summe der Spalten und der Zeilen des RGA immer 1 ergeben. Dies gilt auch für RGAs höherer Ordnung.

Dies führt, kombiniert mit der obigen Analyse zu den individuellen Einträgen $[RGA(s)]_{ij}$ zu folgendem Fazit:

Falls das RGA bei einer gegebenen Frequenz ω ungefähr eine Einheitsmatrix ist:

$$|RGA(j\omega)| \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dann ist das betrachtete MIMO-System bei dieser Frequenz mit individuellen SISO-Reglern regelbar. Oder allgemein: falls in jeder Zeile/Spalte ein Eintrag sehr nahe bei eins ist und die anderen nahe bei Null, sind diese Kombinationen von Ein- und Ausgängen gut mit einem SISO-Regler regelbar.

Beispiel: Das RGA des Systems

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{\tau s + 1} & \frac{a_{12}}{\tau s + 1} \\ \frac{a_{21}}{\tau s + 1} & \frac{a_{22}}{\tau s + 1} \end{bmatrix}$$

lautet

$$\text{RGA}(s) = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{-a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ \frac{-a_{12}a_{21}}{a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12}} & \frac{a_{11}a_{22}}{a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12}} \end{bmatrix}$$

Es werden 3 verschiedene Fälle betrachtet.

Fall 1: $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0.1$

Das RGA lautet:

$$\text{RGA}(s) = \begin{bmatrix} 1.01 & -0.01 \\ -0.01 & 1.01 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⇒ Das System kann gut mit 2 separaten SISO-Reglern geregelt werden, y_1 wird mit u_1 geregelt, y_2 mit u_2 .

Fall 2: $a_{11} = a_{22} = 0.1$, $a_{12} = a_{21} = 1$

Das RGA lautet:

$$\text{RGA}(s) = \begin{bmatrix} -0.01 & 1.01 \\ 1.01 & -0.01 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

⇒ Das System kann gut mit 2 separaten SISO-Reglern geregelt werden. y_1 wird mit u_2 geregelt, y_2 mit u_1 .

Fall 3: $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 1$, $a_{21} = -1$

Das RGA lautet:

$$\text{RGA}(s) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

⇒ Die einzelnen Ausgänge lassen sich schlecht mit individuellen Eingängen regeln, da im MIMO-System starke Quereinflüsse vom jeweils anderen Eingang zu erwarten sind.

2 Singulärwerte

Im Folgenden werden Eigenschaften zur linearen Abbildung

$$y = M \cdot u, \quad u \in \mathbb{C}^m, \quad y \in \mathbb{C}^p, \quad M \in \mathbb{C}^{p \times m}$$

beschrieben. Insbesondere erfüllt der Ausgang y folgende wichtige Eigenschaft:

$$\sigma_{\min}(M) \leq \frac{\|y\|}{\|u\|} \leq \sigma_{\max}(M),$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm ist und

$$\sigma_i(M) = \sqrt{\lambda_i(\bar{M}^\top \cdot M)} > 0,$$

die Singulärwerte der Matrix M sind. \bar{M}^\top ist die Transponierte der komplex-Konjugierten von M . Die Singulärwertzerlegung (SVD) der Matrix M lautet:

$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^\top,$$

wobei Σ die Singulärwerte σ_i auf der Hauptdiagonalen hat. U und V^\top sind unitäre (längenerhaltende) Transformationsmatrizen:

$$U \cdot U^\top = I, \quad V \cdot V^\top = I$$

Beispiel: Alle Eingänge $\{u \mid \|u\| = 1\}$ sollen mit

$$M = \begin{bmatrix} 0.4009 & -1.0133 \\ 1.4015 & -1.0480 \end{bmatrix}$$

abgebildet werden. Die Singulärwertzerlegung lautet:

$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}}_U \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}}_\Sigma \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V^\top}$$

Für die euklidische Norm beschreibt $\|u\| = 1$ einen Kreis mit Radius 1. Der Kreis wird mit V^\top zuerst um $\pi/4$ rotiert, dann werden die Hauptachsen des Kreises mit den Singulärwerten in Σ skaliert, sodass eine Ellipse entsteht. Letztendlich wird die Ellipse um $\pi/3$ rotiert.

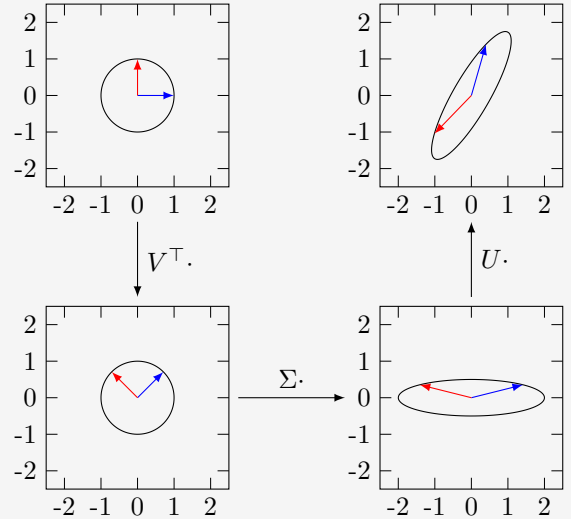
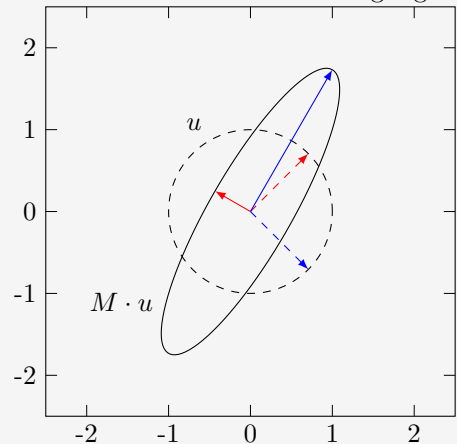


Abb. 1: Lineare Transformation M als Folge der Transformationen V^\top , Σ und U .

Die Transformationen V^\top und U beschreiben in diesem Beispiel reine Rotationen. Spiegelungen sind auch möglich und erfüllen somit auch Unitarität. Zusätzlich sollen die Eingänge gefunden werden, die den Ausgang maximal und minimal anregen. Da die Zeilen der Matrix V^\top orthonormal sind, entsprechen die Zeilen von V^\top den Eingängen, die die Hauptachsen anregen. Das heißt

$$\begin{aligned} \|Y\| &= \sigma_{\min} \quad \text{für} \quad u = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ \|Y\| &= \sigma_{\max} \quad \text{für} \quad u = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Abb. 2: Minimale und maximale Anregungsrichtung.



Regelungstechnik II FS 2020

Frequenzantworten von MIMO Systemen

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Zusammenfassung Vorlesung 7

Skript Kapitel 3

Bei Fragen: hrffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 7. April 2020

1 Frequenzantworten SISO - Recap

Ein lineares asymptotisch stabiles System $P(s)$, welches mit einem harmonischen Eingang

$$u(t) = \cos(\omega t) \cdot h(t),$$

bei der fixen Frequenz ω angeregt wird (wobei die Funktion h den Einheitssprung bezeichnet), produziert im eingeschwungenen Zustand ein harmonisches Signal bei derselben Frequenz:

$$y_\infty(t) = |P(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \angle P(j\omega))$$

Dabei ist die Systemantwort um $\varphi(\omega) = \angle P(j\omega)$ phasenverschoben, und um $m(\omega) = |P(j\omega)|$ skaliert. Um die Frequenzantwort übersichtlich darzustellen, können $\angle P(j\omega)$ und $|P(j\omega)|$ entweder gemeinsam in einem Nyquist-Diagramm dargestellt werden, oder separat in einem Bode-Diagramm.

2 Frequenzantworten MIMO

Im MIMO Fall ist der Eingang $u(t)$ ein Vektor harmonischer Funktionen:

$$u(t) = \begin{bmatrix} \mu_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \cdot h(t) \\ \mu_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \cdot h(t) \\ \vdots \\ \mu_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_m) \cdot h(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Die Frequenzanalyse beschränkt sich auf eine gemeinsame frei wählbare Anregungsfrequenz ω auf allen Kanälen. Die Anregungsmagnituden μ_i und Anregungsphasen φ_i können separat gewählt werden. Die Laplace-Transformierte von Gl. (1) lautet:

$$U(s) = \begin{bmatrix} e^{j\varphi_1} \cdot s/\omega \cdot \mu_1 \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ e^{j\varphi_2} \cdot s/\omega \cdot \mu_2 \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \vdots \\ e^{j\varphi_m} \cdot s/\omega \cdot \mu_m \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

und kann mit den Definitionen $\Phi = \text{diag}(\varphi_i) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_m]^T \in \mathbb{R}^m$ umgeschrieben werden zu:

$$U(s) = e^{\Phi \cdot s/\omega} \cdot \mu \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (3)$$

Ähnlich wie im SISO Fall ist die Systemantwort im eingeschwungenen Zustand ein Vektor harmonischer Funktionen bei derselben Frequenz ω :

$$y_\infty(t) = \begin{bmatrix} \nu_1 \cdot \cos(\omega t + \psi_1) \cdot h(t) \\ \nu_2 \cdot \cos(\omega t + \psi_2) \cdot h(t) \\ \vdots \\ \nu_m \cdot \cos(\omega t + \psi_m) \cdot h(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Identisch zu Gl. (3) wird die Laplace-Transformierte von Gl. (4) mit den Definitionen $\Psi = \text{diag}(\psi_i) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\nu = [\nu_1, \dots, \nu_m]^T \in \mathbb{R}^m$ zu

$$Y(s) = e^{\Psi \cdot s/\omega} \cdot \nu \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \quad (5)$$

Die Frequenzantwort $Y(j\omega)$ lautet

$$Y(j\omega) = P(j\omega) \cdot U(j\omega).$$

Einsetzen von Gl. (5) und Gl. (3) liefert

$$e^{j\Psi} \cdot \nu = P(j\omega) \cdot e^{j\Phi} \cdot \mu \quad (6)$$

Bemerkung: Gl. (6) beinhaltet den Term $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ nur deshalb nicht mehr, weil in der Konstruktion des Eingangs Gl. (1) die Frequenz auf allen Kanälen identisch gewählt wurden.

Gl. (6) hat die Form einer linearen Abbildung:

$$\underbrace{y}_{e^{j\Psi} \cdot \nu} = \underbrace{P(j\omega)}_M \cdot \underbrace{u}_{e^{j\Phi} \cdot \mu} \quad (7)$$

Eine lineare Abbildung $y = M \cdot u$ erfüllt die Eigenschaft

$$\sigma_{\min}(M) \leq \frac{\|y\|}{\|u\|} \leq \sigma_{\max}(M), \quad (8)$$

wobei $\sigma_{\min}(M)$ und $\sigma_{\max}(M)$ der kleinste, resp. grösste Singulärwert der Matrix M sind.

Einsetzen von Gl. (7) in Gl. (8) liefert:

$$\sigma_{\min}(P(j\omega)) \leq \frac{\|\nu\|}{\|\mu\|} \leq \sigma_{\max}(P(j\omega)) \quad (9)$$

wobei die Eigenschaft $\|e^{j\Psi}\| = \|e^{j\Phi}\| = 1$ verwendet wurde.

Die Singulärwerte in Gl. (9) geben für den eingeschwungenen Zustand Schranken vor für den Betrag der Amplituden $\|\nu\|$. Sie sind ein Mass für die worst-case Amplitude die man bei der Anregung einer gegebenen Frequenz ω erwarten kann.

Beispiel: Das System

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 0.3s + 1} & \frac{0.2}{s^2 + 0.5s + 1} \\ \frac{0.2}{s^2 + s + 1} & \frac{1}{s^2 + s + 1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

soll für $\{\mu \mid \|\mu\| = 1\}$ bei $\omega = 0.7 \text{ rad/s}$ so angeregt werden, dass $\|\nu\| = \sigma_{\max}(P(j \cdot 0.7))$ gilt.

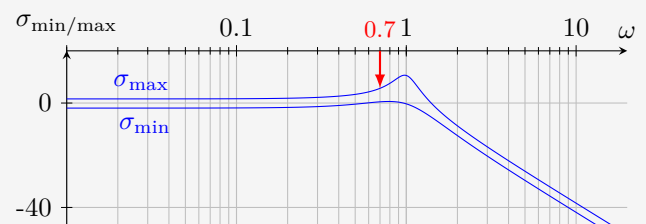


Abb. 1: Singulärwerte von $P(j\omega)$ als Funktion der Frequenz

Berechnung der Singulärwerte bei $\omega = 0.7 \text{ rad/s}$ liefert einen maximalen Singulärwert $\sigma_{\max}(P(j \cdot 0.7)) = 1.914$. Das heisst, man kann erwarten, dass die Ausgänge y_1 und y_2 je Amplituden ν_1 und ν_2 haben werden, die kleiner sind als 1.914. Die Norm $\|\nu\|$ jedoch, wird bei der maximalen Anregung 1.914

sein. Um die Anregungsrichtung zu finden, bei der $\|\nu\|$ maximal wird, verwendet man die Singulärwertzerlegung der Matrix $P(j \cdot 0.7)$:

$$P(j \cdot 0.7) = U \cdot \Sigma \cdot V^T = \begin{bmatrix} -0.8724 + 0.3635j & 0.3089 - 0.1068j \\ -0.2167 + 0.2447j & -0.6691 + 0.6675j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.914 & 0 \\ 0 & 1.056 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.9344 & -0.3525 + 0.0515j \\ 0.3562 & -0.9246 + 0.1351j \end{bmatrix}$$

Die maximale Anregungsrichtung entspricht der ersten Zeile von V^T , wenn der maximale Singulärwert in Σ an erster Stelle steht^a. Zur Bemerkung: der maximale Singulärwert in Σ stimmt mit dem aus Abb. 1 ausgelesenen Singulärwert überein. Die maximale Richtung lautet somit:

$$\zeta_{\max} = \begin{bmatrix} -0.9344 \\ -0.3525 + 0.0515j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j\pi} & 0 \\ 0 & e^{j2.9965} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9344 \\ 0.3562 \end{bmatrix}$$

Der Eingang lautet somit:

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0.9344 \cdot \cos(0.7 \cdot t + \pi) \\ 0.3562 \cdot \cos(0.7 \cdot t + 2.9965) \end{bmatrix}$$

Simulation des Systems mit Eingang $u(t)$ liefert:

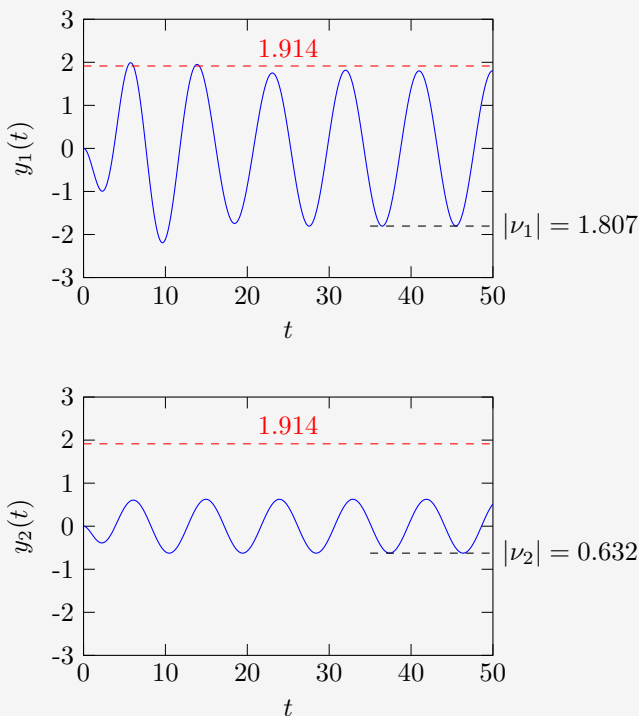


Abb. 2: Maximale kollektive Anregung der Eingänge $y_1(t)$ und $y_2(t)$ bei der Frequenz $\omega = 0.7$ rad/s.

Bemerkungen zu diesem Beispiel:

- $|\nu_1| < \sigma_{\max} \Rightarrow y_{1,\infty} < \sigma_{\max}$
- $|\nu_2| < \sigma_{\max} \Rightarrow y_{2,\infty} < \sigma_{\max}$
- $\sqrt{|\nu_1|^2 + |\nu_2|^2} = 1.914 = \sigma_{\max}$ (nur weil die maximale Richtung angeregt wird)
- $y_1(t) > \sigma_{\max}$ für $t \approx 5$ s, da das System noch nicht eingeschwungen ist

^aWo genau der maximale Singulärwert in der Matrix Σ eingetragen ist hängt vom Algorithmus ab, der zur Berechnung der Singulärwerte verwendet wird. Normalerweise sind die Singulärwerte in der Matrix Σ der Grösse nach sortiert sodass links oben der grösste Singulärwert steht und rechts unten der kleinste: $\Sigma = \text{diag}(\sigma_{\max}, \dots, \sigma_{\min})$.

3 Singulärwertverläufe als Werkzeug in der Regelungstechnik

Die Singulärwertverläufe (wie in Abb. 1) können für beliebige Übertragungsfunktionen, wie z.B. die Sensitivität $S(s)$, die komplementäre Sensitivität $T(s)$ oder die return difference $Q(s)$ berechnet werden:

$$T(s) = (I + P(s) \cdot C(s))^{-1} \cdot P(s) \cdot C(s)$$

$$S(s) = (I + P(s) \cdot C(s))^{-1}$$

$$Q(s) = I + P(s) \cdot C(s)$$

Mit der Definition der Systemnorm:

$$\|G(s)\|_{\infty} = \max_{\omega} \left(\max_i \sigma_i(G(j\omega)) \right),$$

hat dann z.B. die Sensitivität eine schöne Interpretation. Die Systemnorm $\|S(s)\|_{\infty}$ ist die maximal zu erwartende (worst-case) Verstärkung des Störungssignals.

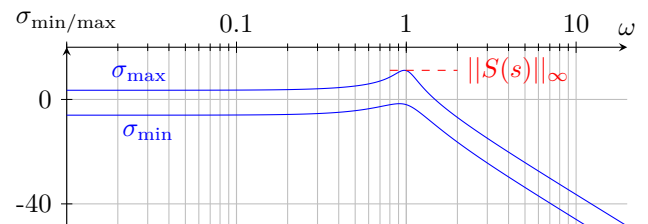


Abb. 3: Singulärwerte von $S(j\omega)$ als Funktion der Frequenz in blau. Systemnorm in rot.

Falls die Systemnorm $\|S(s)\|_{\infty}$ sehr klein ist, weiss man, dass man eine gute Störungsunterdrückung hat, da die Norm die maximale Verstärkung beschreibt.

Eine ähnliche Überlegung erlaubt es, mit der Minimum Return Difference (analog zum SISO-Fall) die Robustheit des Regelkreises im 'worst case' zu analysieren:

$$\mu_{\min} = \min_{\omega} \left(\min_i \sigma_i(I + L(j\omega)) \right).$$

Singulärwertverläufe vs. Bode-Verstärkungsverläufe:

Die Singulärwertverläufe sind also das MIMO Analogon der SISO Bode-Verstärkungsverläufe: basierend auf den Singulärwertverläufen lassen sich im MIMO Fall bei der Reglerauslegung und Systemanalyse ähnliche Überlegungen machen wie in der SISO Reglerauslegung basierend auf den Bode-Verstärkungsverläufen.

Der grosse Unterschied zwischen Singulärwertverläufen im MIMO Fall und Bode-Verstärkungsverläufen im SISO Fall ist, dass die Bode-Verläufe die effektive Verstärkung eines harmonischen Eingangssignales darstellen, während die Singulärwertverläufe nur eine worst-case Abschätzung sind.

Regelungstechnik II FS 2020

LQR State Feedback Regelung

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Zusammenfassung Vorlesung 8

Skript Kapitel 4

Bei Fragen: hraffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 28. April 2020

1 Infinite Horizon LQR Formulierung

Im Vergleich zu SISO-Reglern ist das Auslegen von MIMO-Reglern komplexer. Ein Ansatz, der einen intuitiven trade-off zwischen Regelfehler und Regleraufwand erlaubt, ist die *linear quadratic regulator* (LQR) Formulierung. Die Komponenten *linear*, *quadratic* und *regulator* werden nun separat betrachtet und schlussendlich zusammengefasst.

Linear: Das System welches geregelt wird ist *linear*:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m$$

Quadratic: Definition einer *quadratischen* Kostenfunktion:

$$J(u(t)) = \int_0^\infty \left(x(u(t))^\top \cdot Q \cdot x(u(t)) + u(t)^\top \cdot R \cdot u(t) \right) dt \quad (1)$$

Der optimale Eingang $u^*(t)$ minimiert die Kostenfunktion J :

$$u^*(t) = \arg \min J(u(t))$$

Die Zustände $x(t)$ und Eingänge $u(t)$ werden im Optimierungsproblem mit Q und R gewichtet, wobei

$$Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad Q \succcurlyeq 0, \quad \text{und} \quad R = R^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad R \succ 0$$

Das Symbol \succcurlyeq heisst positiv semidefinit und \succ positiv definit. Die Definitheit der Matrizen Q und R ist notwendig damit das Argument des Integrals in Gl. (1) quadratisch konvex ist. Somit ist das Minimum von $J(u)$ einzigartig, falls es existiert.

Regulator: Der Regler löst das *regulator* Problem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Das heisst der Regler bringt den Zustandsvektor in unendlicher Zeit in seinen Ursprung.

Zusammenfassend: LQR-Formulierung

$$\min J(u),$$

unter der Berücksichtigung der Dynamik:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t),$$

wobei Q und R einstellbare Grössen sind.

Beispielhaft werden zwei Fälle betrachtet:

$Q \uparrow \hat{=} R \downarrow$ ¹ Je grösser Q relativ zu R , desto teurer ist es wenn $x(t)$ nicht im Ursprung ist. Das heisst das System wird schnell an den Ursprung geregelt, um die Kosten tiefstmöglich zu halten. Dabei wird $u(t)$ jedoch betragsmässig gross sein.

$Q \downarrow \hat{=} R \uparrow$ Je grösser R relativ zu Q , desto teurer ist es viel Energie mit den Ausgangsgrössen auszugeben. Das heisst das System wird langsam (mit betragsmässig kleinem Regelsignal $u(t)$) in den Ursprung geregelt.

¹Eine Erhöhung der Eigenwerte von Q hat den gleichen Effekt wie eine Reduzierung derer von R . Die relative Grösse ist von Relevanz.

2 Lösung der LQR-Formulierung

Die Lösung der LQR-Formulierung ist eine lineare Zustandsrückführung und lautet

$$u^*(t) = -K \cdot x(t), \quad \text{wobei} \quad K = R^{-1} \cdot B^\top \cdot \Phi. \quad (2)$$

Dabei ist Φ die einzige positiv definite Lösung der algebraischen Riccati Gleichung:

$$\Phi \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^\top \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^\top \cdot \Phi - Q = 0 \quad (3)$$

Wählt man

$$Q = \bar{C}^\top \cdot \bar{C}, \quad \bar{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad \text{wobei} \quad p = \text{rank}(Q),$$

dann existiert die positiv definite Matrix Φ garantiert, falls $\{A, B\}$ steuerbar und $\{A, \bar{C}\}$ beobachtbar sind. Diese Bedingungen sind hinreichend, aber nicht notwendig.

Bemerkungen:

- Die Matrix \bar{C} hat generell nichts mit der Matrix C zu tun. Falls jedoch ein Systemausgang $y = C \cdot x$ definiert wird, und $\bar{C} = C$ gewählt wird, wird die euklidische Norm des Systemausganges $\|y(t)\|_2$ in der Kostenfunktion berücksichtigt, da:
$$x^\top \cdot Q \cdot x = x^\top \cdot \bar{C}^\top \cdot \bar{C} \cdot x = x^\top \cdot C^\top \cdot C \cdot x = y^\top \cdot y = \|y\|_2.$$
- Die Matrix K ist statisch, sie muss für gegebene $\{A, B, Q, R\}$ nur einmal berechnet werden.
- Der Begriff *infinite horizon* bezieht sich auf die Integrationsgrenzen in Gl. (1), die von *null* bis *unendlich* gehen.
- Die Dynamik des nach Gl. (2) geregelten Systems lautet $\dot{x} = (A - BK)x$. Die Matrix $A - BK$ ist garantiert Hurwitz (Realteil aller Eigenwerte kleiner null), d.h. der geschlossene Regelkreis ist asymptotisch stabil.
- Der open loop gain lautet $L_{\text{LQR}}(s) = K \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B$ (siehe Abb. 1). Der open loop gain betrachtet den offenen Pfad vom roten zum blauen Punkt, wobei beim blauen Punkt aufgeschnitten wird.
- Normalerweise steht nicht der ganze Zustand $x(t)$ als Messung zur Verfügung. In Kapitel 5 wird der LQR Ansatz basierend auf einer Schätzung $\hat{x}(t)$ eingeführt.
- Der Regler (Gl. (2)) führt die Zustände linear zurück, man spricht von einer linearen Zustandsrückführung oder einem "linear state feedback controller".

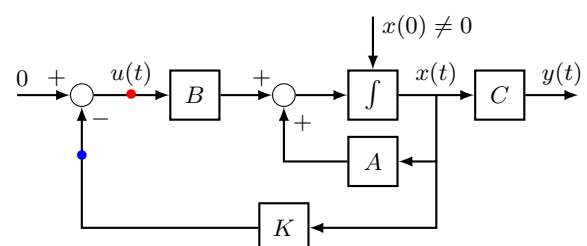
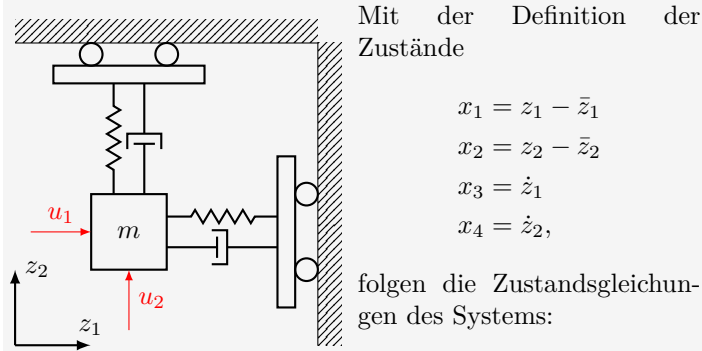


Abb. 1: Standard LQR-Struktur

Beispiel 1: Ein Klotz mit Masse $m = 1$ sei in z_1 - und in z_2 -Richtung mit einem Dämpfer und mit einer Feder verbunden. (Der Einfachheit halber lassen wir im Folgenden die Einheiten weg und betrachten normierte Grössen.) Die Federn seien bei $\bar{z}_1 = 1$ und $\bar{z}_2 = 1$ im Gleichgewicht. Die Federkonstante sei $k = 0.5$ und die Dämpferkonstante sei $c = 0.05$.



$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0 & -0.05 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.05 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_u$$

Um das System mit der LQR-Formulierung an den Ursprung zu regeln, müssen die Matrizen Q und R noch eingestellt werden. Eine erste, willkürliche Wahl ist $Q = I_{4 \times 4}$ und $R = I_{2 \times 2}$. Die Matrizen A , B , Q , und R werden nun in Gl. (3) eingesetzt, und das Gleichungssystem wird nach Φ aufgelöst. Anschliessend wird K mit Gl. (2) berechnet. Eine Simulation des Systems, startend in $x_0 = [1, 1, 0, 5]$ liefert:

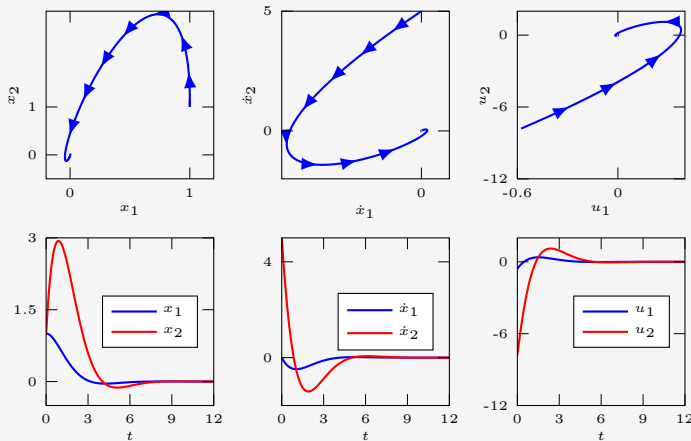


Abb. 2: Systemantwort für $Q = I_{4 \times 4}$ und $R = I_{2 \times 2}$.

Das System soll nun in x_2 -Richtung etwas schneller an den Ursprung geregelt werden. Dafür kann man z.B. den Eintrag $Q(2, 2)$ auf 3 erhöhen, sodass:

$$Q_{\text{neu}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dadurch, dass $Q(2, 2)$ erhöht wird, macht man nicht-null Werte des zweiten Zustands x_2 teurer. Das Minimum der Kostenfunktion wird demnach in eine Richtung verschoben, die x_2 kleiner hält. K_{neu} wird berechnet und das System wird simuliert, startend in x_0 :

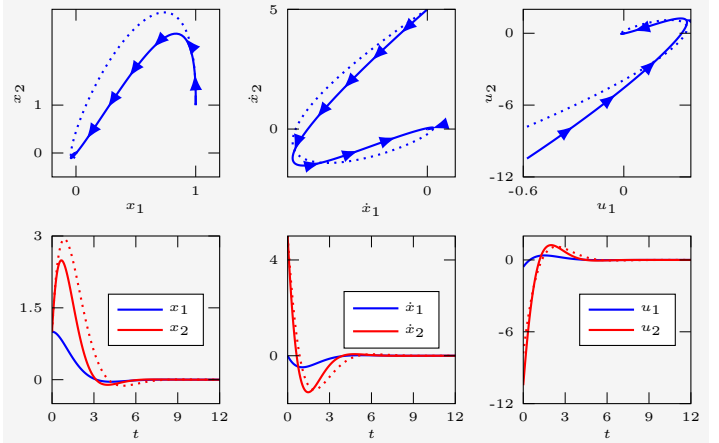


Abb. 3: Systemantwort für Q_{neu} und $R = I_{2 \times 2}$.

Im neuen $x_1 - x_2$ Graph sieht man, dass x_2 merklich weniger ausschlägt, wie erwartet. Um x_2 tief zu halten, wird u_2 (siehe $u_1 - u_2$ Graph) jedoch grösser.

Bemerkungen:

- Die Richtungen x_1 und x_2 sind entkoppelt. Somit wären zwei SISO-Regler auch genügend.
- Der Workflow lautet: System aufstellen $\rightarrow A$ und B extrahieren $\rightarrow Q$ und R wählen $\rightarrow \Phi$ mit Gl. (3) berechnen $\rightarrow K$ mit Gl. (2) berechnen $\rightarrow x_0$ wählen und simulieren.

3 Folgeregelung - Infinite Horizon LQR

Die LQR-Formulierung löst nur das Regulator Problem und erscheint zunächst etwas einschränkend. Man kann jedoch die Linearität des System ausnützen um einen gewünschten Zustand x_∞ anzusteuern. **Zur Erinnerung:** Ein lineares System beschreibt die Dynamik der Differenzen. Wir können den Ursprung des Systems demnach in einen neuen Punkt verschieben, mit den Definitionen $\Delta x = x - x_\infty$, und $\Delta u = u - u_\infty$. Die Dynamik des Systems in den neuen Variablen lautet:

$$\Delta \dot{x} = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta u,$$

wobei die Kostenfunktion nun lautet:

$$J(\Delta u) = \int_0^\infty (\Delta x^\top(t) \cdot Q \cdot \Delta x(t) + \Delta u^\top(t) \cdot R \cdot \Delta u(t)) dt$$

Das neue Regulator Problem lautet somit:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x(t) = 0.$$

Die A und B Matrizen bleiben in dem Fall vom originalen System unverändert. Man kann sich auch vorstellen, dass man das lineare System um einen neuen Punkt $\{x_\infty, u_\infty\}$ linearisiert. Dies entspricht bei einem linearen System einer Ursprungsverschiebung. Die Lösung des Regulatorproblems der Dynamik der Differenzen lautet nun:

$$\Delta u = u - u_\infty = -K \cdot \Delta x = -K \cdot (x - x_\infty).$$

Der Eingang auf das originale System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ lautet somit:

$$u = u_\infty - K \cdot (x - x_\infty),$$

wobei u_∞ ein statisches feedforward Signal ist, welches das System am gewünschten Punkt x_∞ hält. Im Gleichgewicht

sind alle Ableitungen null:

$$0 = A \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty.$$

Bemerkungen

- Die Stellgrösse u_∞ ist statisch für eine statische Referenz x_∞ .
- Die Folgeregelung mit feedforward kann keine Störungen unterdrücken.
- Die Matrizen A und B beinhalten physikalische Werte, wie z.B. Massen, Federkonstanten und Dämpferkonstanten, die nie exakt geschätzt werden können. Dadurch wird das feedforward Signal u_∞ in der Realität nie genau richtig sein.

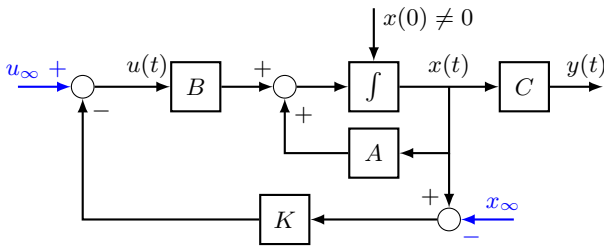


Abb. 4: LQR mit feedforward Signal u_∞ . In blau die Erweiterungen gegenüber der Standardstruktur.

Beispiel 2: Das System aus dem vorherigen Beispiel soll nun zur Position $x_{1,\infty} = 2$ und $x_{2,\infty} = 2$ geregelt werden. Falls das System im Punkt $\{x_{1,\infty}, x_{2,\infty}\}$ im Gleichgewicht ist, werden die Geschwindigkeiten null sein, d.h. $x_{3,\infty} = x_{4,\infty} = 0$. Der gewünschte Zustand lautet somit $x_\infty = [2, 2, 0, 0]^T$.

Zuerst wird das statische feedforward Signal berechnet. Intuitiv werden die Federn im Zustand $x = x_\infty$ komprimiert sein. Im Gleichgewicht wird $\{u_\infty\}$ demnach genau die Kraft der komprimierten Federn ausgleichen. Das System soll nun bei $x = x_\infty$ mit $u = u_\infty$ im Gleichgewicht sein:

$$A \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty \stackrel{!}{=} 0$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0 & -0.05 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,\infty} \\ u_{2,\infty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Auflösen nach u_∞ ergibt $u_{1,\infty} = u_{2,\infty} = 1$. Intuitiv: Die komprimierten Federn drücken im Gleichgewicht genau mit einer Kraft von $F_{(.)} = k \cdot r_{(.)} = 0.5 \cdot 2 = 1 = u_{(.),\infty}$.

Das System wird simuliert, startend im Punkt $x_0 = [1, 1, 0, 5]^T$, mit $Q = I_{4 \times 4}$, $R = I_{2 \times 2}$, $x_\infty = [2, 2, 0, 0]^T$, $u = u_\infty - K \cdot (x - x_\infty)$:

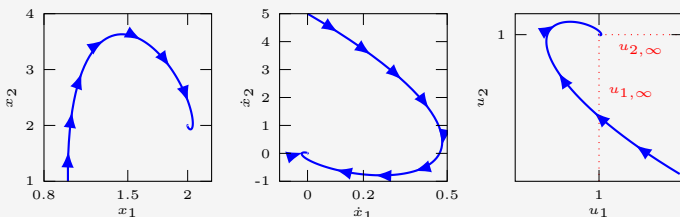


Abb. 5: Systemantwort für das Referenzproblem.

Wie erwartet regelt das System auf den Punkt $[2, 2, 0, 0]^T$.

4 Störungsunterdrückung - LQRI

Das Standard LQR-Problem eignet sich besonders gut für Systeme ohne Modellfehler und ohne Störung $w(t)$ auf dem Eingangssignal. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man Störungen und Modellfehler unterdrücken kann. Dafür wird integratives Verhalten eingeführt. Um die Struktur aus Abb. 1 mit einem integrativen Verhalten zu erweitern wird die Ausgangsgrösse $y(t) = C \cdot x(t)$ eingeführt. Man wünscht $y(t) \stackrel{!}{=} 0$. Um Störungen zu unterdrücken wird das Integral des Fehlers als neuer Zustand definiert:

$$v(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau = \int_0^t (0 - y(\tau)) d\tau.$$

Der neue Gesamtzustand lautet somit:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Die Ableitung des Zustandes lautet (siehe Abb. 6):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) &= \begin{bmatrix} A \cdot x(t) + B \cdot (u(t) + w(t)) \\ -y(t) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \cdot (u(t) + w(t)). \end{aligned}$$

In anderen Worten erfüllt das neue System $\dot{v} = y(t) = 0$ im Gleichgewicht.

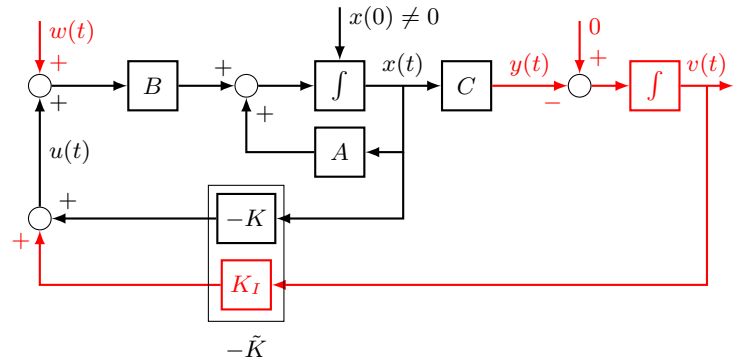


Abb. 6: LQRI-Struktur. Erweiterungen gegenüber der Standardstruktur in rot.

Die Standard LQR-Formulierung kann nun mit den Matrizen \tilde{A} und \tilde{B} gelöst werden, wobei die Dimension der Q Matrix angepasst werden muss:

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_I \end{bmatrix}, \quad Q_I = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_m \end{bmatrix}$$

Mit Q_I kann man einstellen wie stark die Integratoren wirken sollen. Die Lösung des LQRI-Problems lautet:

$$\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\} \rightarrow \tilde{K} = [K, -K_I] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)},$$

$$u(t) = -\tilde{K} \cdot \tilde{x}(t) = u_K + u_{K_I} = -K \cdot x(t) + K_I \cdot v(t).$$

Bemerkungen:

- Die Matrix \tilde{K} ist statisch, sie muss für gegebene $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\}$ nur einmal berechnet werden.
- Mit $Q = C^T \cdot C$ kann wiederum direkt $y(t)$ in der Kostenfunktion berücksichtigt werden.

Beispiel 3: Das Masse-Feder-Dämpfer System soll mit einem Standard LQR-Regler in den Ursprung geregelt werden. Dabei wirke nun eine statische Störung $w = [0.5, 0.5]^\top$. Mit $\tilde{Q} = I_{4 \times 4}$, $R = I_{2 \times 2}$, startend in $x_0 = [1, 1, 0, 5]^\top$:

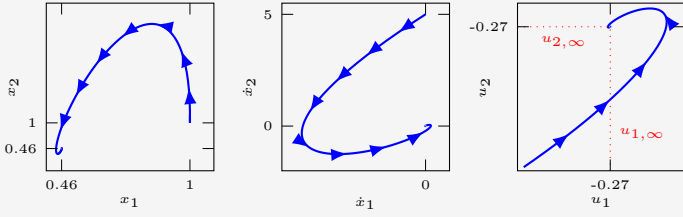


Abb. 7: Systemantwort für $Q = I_{4 \times 4}$, $R = I_{2 \times 2}$ und $w = [0.5, 0.5]^\top$

Das System kommt bei einem Zustand $x_\infty \neq 0$ zum Stillstand. Die liegt daran, dass die *erwartete* Systemgleichung im Gleichgewicht lautet:

$$0 = A \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty \quad (\text{erwartet})$$

Jedoch ist die *wahre* Gleichgewichtsgleichung

$$0 = A \cdot x_\infty + B \cdot (u_\infty + w). \quad (\text{wahr})$$

Der Gleichgewichtspunkt lautet somit:

$$x_\infty = -(A - B \cdot K)^{-1} \cdot B \cdot w = [0.46, 0.46, 0, 0]^\top, \\ u_\infty = -K \cdot x_\infty = [-0.27, -0.27, 0, 0]^\top.$$

Da die ungewollte Störung das Erreichen des Ziels $x_\infty = 0$ verhindert, wird die LQRI-Formulierung verwendet. Mit

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\tilde{Q} = I_{6 \times 6}$, $R = I_{2 \times 2}$, $w = [0.5, 0.5]^\top$, startend im Zustand $\tilde{x}_0 = [1, 1, 0, 5, 0, 0]^\top$:

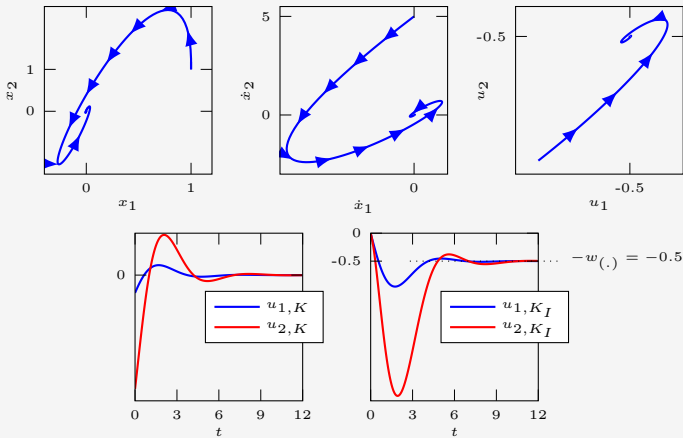


Abb. 8: Systemantwort für $\tilde{Q} = I_{6 \times 6}$, $R = I_{2 \times 2}$ und $w = [0.5, 0.5]^\top$.

Das System regelt an den gewünschten Ursprung, obwohl eine Störung w vorhanden ist. Das Ziel wird erreicht, da der integrative Teil des Eingangs genau die Störung kompensiert:

$$A \cdot x_\infty + B \cdot (u_\infty + w) = A \cdot x_\infty + B \cdot (u_{\infty,K} + \underbrace{u_{\infty,K_I} + w}_0) \\ = A \cdot x_\infty + B \cdot u_{\infty,K} = A \cdot x_\infty - B \cdot K \cdot x_\infty \\ = (A - B \cdot K) \cdot x_\infty \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_\infty = 0$$

5 Folgeregelung mit Störungsunterdrückung

Wir können nun den LQRI Ansatz um die feedforward Signale u_∞ und x_∞ erweitern um auf eine Referenz mit Störungsunterdrückung zu regeln (siehe Abb. 9).

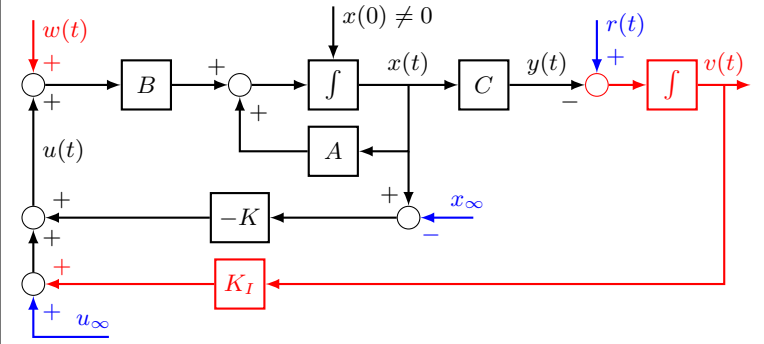


Abb. 9: LQRI-Struktur für Folgeregelung

Da nun auf eine Referenz geregelt wird, muss der Fehler im Zustand $v(t)$ neu definiert werden:

$$v(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau.$$

Die Ableitung des Zustands lautet nun:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A \cdot x(t) + B \cdot (u(t) + w(t)) \\ r(t) - y(t) \end{bmatrix} \\ = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \cdot (u(t) + w(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \cdot r(t).$$

Die Lösung des Problems folgt:

$$\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\} \rightarrow \tilde{K} = [K, -K_I] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}, \\ u(t) = u_\infty - K \cdot (x(t) - x_\infty) + K_I \cdot v(t).$$

Beispiel 4: Das Masse-Feder-Dämpfer System soll mit einem LQRI und feedforward an die Position $r = [2, 2]^\top$ geregelt werden. Mit $\tilde{Q} = I_{6 \times 6}$, $R = I_{2 \times 2}$, $w = [0.25, 0.25]^\top$,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

startend in $\tilde{x}_0 = [1, 1, 0, 1, 0, 0]^\top$:

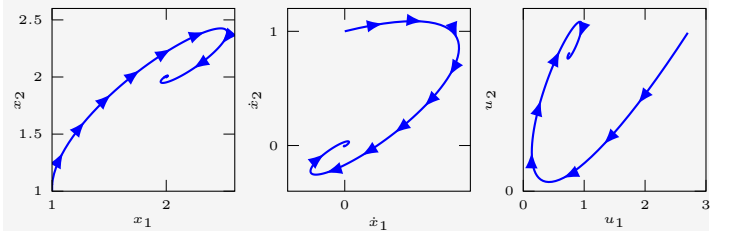


Abb. 10: Systemantwort für $\tilde{Q} = I_{6 \times 6}$, $R = I_{2 \times 2}$, $r = [2, 2]^\top$, $w = [0.25, 0.25]^\top$.

Bemerkungen:

- Q_I könnte besser eingestellt werden, sodass das System nicht so stark überschießt.
- Betrachte Abb. 9. Die feedforward Größen u_∞ und x_∞ sind nicht zwingend notwendig um das System auf die Referenz $r(t)$ zu regeln. Falls sie weggelassen werden,

kann das Signal $r(t)$ als eine auf $y(t)$ wirkende Störung interpretiert werden. Dadurch würde der Integrator die Signale $w(t)$ und $r(t)$ kompensieren. Ohne das feedforward Signal kann das System allerdings unnötige Transienten aufzeigen, da sich der Integrator für die Referenz $r(t)$ zuerst füllen müsste.

6 Eigenschaften von Infinite Horizon Reglern

Der resultierende geschlossene Regelkreis der infinite horizon LQR-Formulierung ist garantiert stabil und hat schöne Robustheitseigenschaften:

Stabilität:

Die Matrix $A - B \cdot K$ des geschlossenen Regelkreises ist garantiert Hurwitz (stabil).

Robustheit:

Für die Wahl $R = r \cdot I$ kann hat die die minimum return difference μ_{\min} folgende Eigenschaft:

$$\mu_{\min, \text{LQR}} = \min_{\omega} \left(\min_i \sigma_i(I + L_{\text{LQR}}(j\omega)) \right) \geq 1 \quad (4)$$

Im SISO-Fall hat diese Eigenschaft eine schöne Interpretation: sie garantiert Gl. (4), dass der Nyquist-Plot nie in den um -1 zentrierten Kreis mit Radius 1 eintritt. Wie in Abb. 11 geometrisch ersichtlich, garantiert dies wiederum eine Verstärkungsreserve (gain margin) von $\gamma \in [0.5, \infty)$ und eine Phasenreserve (phase margin) von $\varphi \geq 60^\circ$, was einer relativ guten Robustheit entspricht.

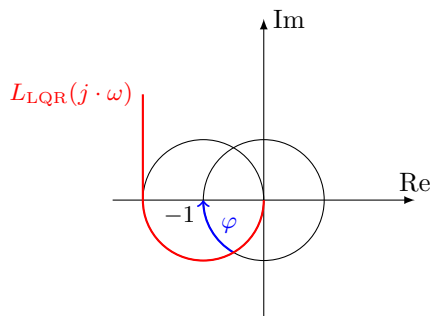


Abb. 11: L_{LQR} für den Extremfall $\gamma = 0.5$ und $\varphi = 60^\circ$.

Modifiziert man die Riccati-Gleichung mit $\beta > 1$ wie folgt

$$\frac{1}{\beta} \cdot \Phi_{\beta} \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^{\top} \cdot \Phi_{\beta} - \Phi_{\beta} \cdot A - A^{\top} \cdot \Phi_{\beta} - Q = 0$$

so resultiert die Lösung Φ_{β} . Damit wird der Regelkreis noch robuster, da dann gilt:

$$\mu_{\min, \text{LQR}} = \min_{\omega} \left(\min_i \sigma_i(\beta I + L_{\text{LQR}}(j\omega)) \right) \geq \beta.$$

Das heisst der Nyquist-Plot tritt nie in den um $-\beta$ zentrierten Kreis mit Radius β ein.

7 Finite Horizon LQR

Das Integral der Standardformulierung geht von null bis unendlich. Die Lösung des Standardproblems ist einiges einfacher als wenn das Problem nur über ein Zeitintervall t_a bis t_b integriert wird. In diesem Fall lautet die Kostenfunktion:

$$J(u) = x^{\top}(t_b) \cdot P \cdot x(t_b) + \int_{t_a}^{t_b} \left(x^{\top} \cdot Q(t) \cdot x + u^{\top} \cdot R(t) \cdot u \right) dt.$$

Mit der Kostenmatrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P = P^{\top} \succcurlyeq 0$ (positiv semi-definit) wird eine Abweichung des finalen Zustands $x(t_b)$ vom Ursprung bestraft. Das System kann in diesem Fall zeitvariant sein:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad x(t_a) = x_a. \quad (5)$$

Die Lösung der finite horizon Formulierung lautet:

$$u(t) = -K(t) \cdot x(t), \quad \text{wobei } K(t) = R^{-1}(t) \cdot B^{\top}(t) \cdot \Phi(t).$$

Die Matrix $\Phi(t)$ ist die Lösung der differential matrix Riccati Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \Phi(t) \cdot B(t) \cdot R^{-1}(t) \cdot B^{\top}(t) \cdot \Phi(t) - \Phi(t) \cdot A(t) - A^{\top}(t) \cdot \Phi(t) - Q(t),$$

wobei $\Phi(t)$ durch Rückwärtsintegration von $\Phi(t_b) = P$ gefunden werden kann.

Bemerkungen:

- Die Matrix $K(t)$ ist zeitabhängig. Sie muss entsprechend der Zeitabhängigkeit der Matrizen $\{A(t), B(t), Q(t), R(t)\}$ berechnet werden.
- Die Matrix P ist eine neue Tuninggrösse.
- Die Matrix $K(t)$ ist nur für das Zeitintervall $t \in [t_a, t_b]$ gültig. Für Zeiten $t > t_b$ muss $K(t)$ neu evaluiert werden.
- asymptotische Stabilität kann nicht garantiert werden, da für $t > t_b$ nicht optimiert wird.
- Es wird nicht erwartet, dass Sie die Gleichungen von Hand lösen können.

8 Finite Horizon Folgeregelung

Zusätzlich zur zeitvarianten Dynamik aus Gl. (5) wird nun der zeitvariante Ausgang eingeführt:

$$y(t) = C(t) \cdot x(t)$$

Die Kosten die über ein Zeitintervall $[t_a, t_b]$ integriert werden, lauten:

$$J(u) = (r(t_b) - y(t_b))^{\top} \cdot P \cdot (r(t_b) - y(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} \left((r(t) - y(t))^{\top} \cdot Q(t) \cdot (r(t) - y(t)) + u(t)^{\top} \cdot R(t) \cdot u(t) \right) dt$$

Die Lösung der finite horizon Folgeregelung lautet:

$$u(t) = -K(t) \cdot x(t) + v(t)$$

Die Gleichungen um $K(t)$ und $v(t)$ zu finden sind kompliziert und werden im Theory Sheet ausgelassen. Die relevanten Punkte sind in den Bemerkungen zusammengefasst.

Bemerkungen:

- Die Referenztrajektorie $r(t)$ ist eine Wahl, die vor dem Lösen des Optimierungsproblems festgelegt wird.
- Die Matrix $K(t)$ ist zeitabhängig. Sie muss entsprechend der Zeitabhängigkeit der Matrizen $\{A(t), B(t), Q(t), R(t)\}$ berechnet werden.
- Die Matrix $K(t)$ ist nur für das Zeitintervall $t \in [t_a, t_b]$ gültig. Für Zeiten $t > t_b$ muss $K(t)$ neu evaluiert werden.
- $v(t)$ ist ein zeitabhängiges feedforward Signal, welches nur im Zeitintervall $t \in [t_a, t_b]$ für eine spezifische Referenz $r(t)$ gültig ist.

Regelungstechnik II FS 2020

Zustandsbeobachter

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Zusammenfassung Vorlesung 9

Skript Kapitel 5

Bei Fragen: hruffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 12. Mai 2020

1 Zustandsbeobachter

Die linearen Zustandsregler, die im letzten Kapitel behandelt wurden, sind praktisch nicht umsetzbar, da uns nur der Systemeingang $u(t)$ und der Systemausgang $y(t)$ zur Verfügung stehen¹. Es ist jedoch möglich die Signale $u(t)$ und $y(t)$ mit einem *Beobachter* zu kombinieren um eine *Schätzung* $\hat{x}(t)$ des Zustandes zu erhalten. Das System kann danach mit den geschätzten Werten des Zustandes geregelt werden.

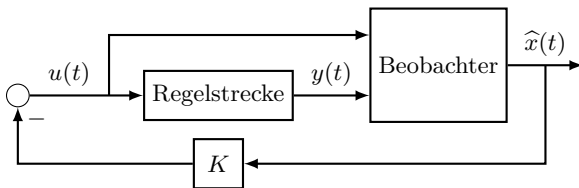


Abb. 1: Beobachter zur Regelung mit Ausgangsrückführung.

2 Luenberger Beobachter

Das Ziel ist, eine Beobachtdynamik $\frac{d}{dt}\hat{x}(t)$ so zu konstruieren, dass der Beobachtungsfehler $e(t)$ asymptotisch gegen null konvergiert:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0. \quad (1)$$

Genau dann würde die Schätzung $\hat{x}(t)$ im Grenzfall dem wahren Zustand $x(t)$ entsprechen. Die folgende Beobachtdynamik erfüllt diese Anforderung unter gewissen Bedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= \hat{A} \cdot \hat{x}(t) + \hat{B} \cdot u(t) + L \cdot (y - \hat{y}(t)) \\ \hat{y} &= \hat{C} \cdot \hat{x}(t) \end{aligned}$$

Dabei ist die Beobacherverstärkung L der Freiheitsgrad. Diese Struktur eines Beobachters wird Luenberger Beobachter genannt. Ein Blockdiagramm der Struktur ist in Abb. 2 ersichtlich.

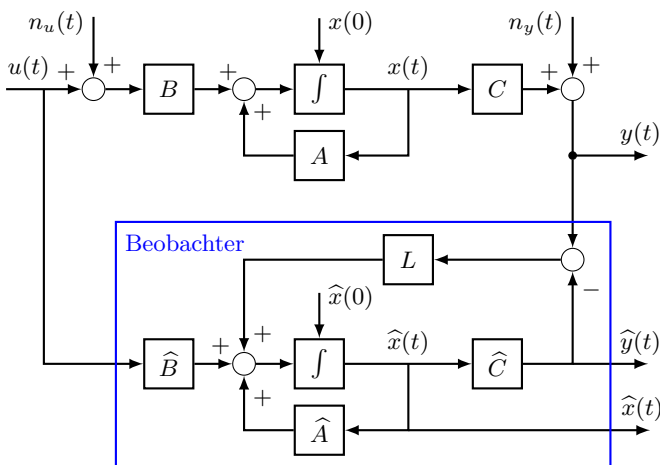


Abb. 2: Blockdiagramm des Luenberger Beobachters.

¹Es kann durchaus sein, dass alle Zustände direkt messbar sind, dann ist $y(t) = x(t)$.

Die Dynamik des physikalischen Systems ist an Abb. 2 ablesbar und lautet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot (u(t) + n_u(t)) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + n_y(t) \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass die Systemmatrizen perfekt bestimmt wurden ($\hat{A} = A, \hat{B} = B, \hat{C} = C$) und weder Störungen noch Rauschen vorliegen ($n_u(t) = n_y(t) = 0$), kann die Dynamik des Fehlers hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e(t) &= \frac{d}{dt}x(t) - \frac{d}{dt}\hat{x}(t) \\ &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) - (A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot u(t) + L \cdot (y(t) - \hat{y}(t))) \\ &= A \cdot (x(t) - \hat{x}(t)) - L \cdot C \cdot (x(t) - \hat{x}(t)) \\ &= (A - L \cdot C) \cdot e(t), \quad e(0) = x(0) - \hat{x}(0) \neq 0 \end{aligned}$$

Der Fehler konvergiert also gegen 0 (siehe Gl. (1)), falls die Matrix $A - L \cdot C$ Hurwitz² ist. Die Beobacherverstärkung L wird verwendet um dies zu erreichen. Im Folgenden werden zwei Methoden gezeigt, die die Platzierung der Pole ermöglichen.

Polplatzierung von Hand:

Man kann sich ein charakteristisches Wunsch-Polynom definieren, und nach dem Freiheitsgrad L auflösen:

$$\det(A - L \cdot C - \lambda I) \stackrel{!}{=} (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda) = 0,$$

wobei λ_i die gewünschten Eigenwerte sind.

Polplatzierung mit der LQR Formulierung:

Recap: die LQR-Formulierung platziert die Eigenwerte der Matrix $A - B \cdot K$ mit dem Freiheitsgrad K so, dass die Matrix $A - B \cdot K$ Hurwitz ist.

$$\text{LQR findet } K \text{ sodass } \operatorname{Re}(\operatorname{eig}(A - B \cdot K)) < 0$$

Wir wollen nun dasselbe mit der Matrix $A - L \cdot C$ erreichen, wobei der Freiheitsgrad L eingestellt wird. L steht dabei jedoch "vor" dem C , und K "nach" dem B . Wir müssen zuerst folgenden Fakt der linearen Algebra verwenden:

$$\operatorname{eig}(X) = \operatorname{eig}(X^T), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Somit folgt:

$$\operatorname{eig}(A - L \cdot C) = \operatorname{eig}((A - L \cdot C)^T) = \operatorname{eig}(A^T - C^T \cdot L^T)$$

Das heisst wir können zur Berechnung der Beobacherverstärkung L auch die LQR-Formulierung verwenden. Indem wir die Eigenwerte der Matrix $A^T - C^T \cdot L^T$ mit der LQR-Formulierung platzieren, wissen wir sofort, dass $A - L \cdot C$ auch Hurwitz ist (Realteile der Eigenwerte kleiner null). Somit ist garantiert, dass der Fehler $e(t)$ asymptotisch gegen null konvergiert, so wie gewünscht in Gl. (1).

²Realteil aller Eigenwerte ist kleiner null

Zur Erinnerung:

Die Lösung der LQR-Formulierung lautet

$$K = R^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi, \text{ wobei für } \Phi \text{ gilt:} \quad (2)$$

$$\Phi \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^T \cdot \Phi - Q = 0.$$

Mit den Änderungen

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A^T \\ B &\rightarrow C^T \\ Q &= \bar{C}^T \cdot \bar{C} \rightarrow \bar{B} \cdot \bar{B}^T \\ R &= r \cdot I \rightarrow q \cdot I \\ K &\rightarrow L^T \\ \Phi &\rightarrow \Psi, \end{aligned}$$

folgt die Lösung der Polplatzierung mit Freiheitsgrad L^T :

$$L^T = \frac{1}{q} \cdot C \cdot \Psi \quad (3)$$

$$\Psi \cdot C^T \cdot \frac{1}{q} \cdot C \cdot \Psi - \Psi \cdot A^T - A \cdot \Psi - \bar{B} \cdot \bar{B}^T = 0.$$

Falls die Matrizen $\{A, C\}$ beobachtbar und $\{A, \bar{B}\}$ steuerbar sind, existiert eine eindeutige positiv definite Lösung Ψ .

Bemerkungen:

- Die Matrix L ist statisch. Sie muss für gegebene $\{A^T, C^T, \bar{B} \cdot \bar{B}^T, q \cdot I\}$ nur einmal berechnet werden.
- Die Matrizen \bar{B} und der Faktor q werden iterativ eingestellt, bis zufriedenstellende Performance erreicht wird.
- Falls Rauschen n_y am Ausgangssignal vorhanden ist, lautet die Fehlerdynamik:

$$\frac{d}{dt}e(t) = (A - L \cdot C) \cdot e(t) - L \cdot n_y(t)$$

Das heisst L kann nicht beliebig gross gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärken würde (siehe Abb. 3).

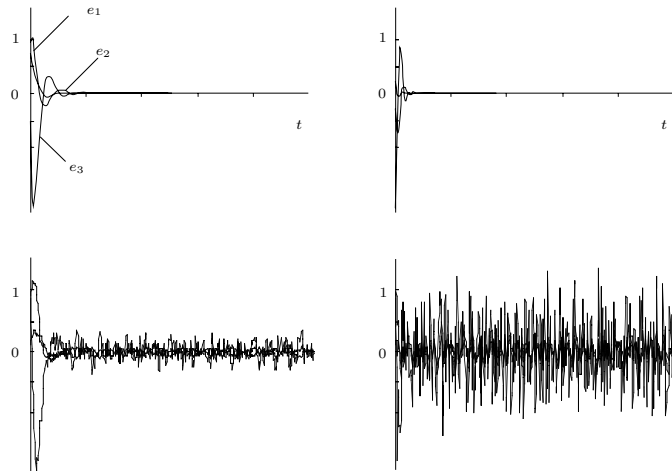


Abb. 3: Transiente der Fehlerdynamik für ein System dritter Ordnung. Links: "langsame" Fehlerdynamik, Rechts: "schnelle" Fehlerdynamik. Oben: kein Rauschen. Unten: Rauschen.

3 Kalman Filter als Luenberger Beobachter

Falls die Störungen $n_u(t)$ und $n_y(t)$ Gaussian zero mean white noise Signale sind, und die Varianz der Gaussverteilung bekannt ist, dann kann ein "optimales" L gefunden werden, welches die Varianz des Beobachtungsfehlers $e(t)$ minimiert. Die Kovarianzmatrix eines zero mean white noise Signals ist:

$$E\{n(t) \cdot n^T(t - \tau)\} = R \cdot \delta(\tau), \quad (4)$$

wobei E der Erwartungswert ist, δ ein Diracimpuls, und $R = R^T \succeq 0$ eine konstante positiv semi-definite Matrix. Gl. (4) besagt, dass das Signal $n(t)$ perfektes Rauschen ist (es korreliert nur für $\tau = 0$ mit sich selber, sonst nicht ($\tau \neq 0$)).

Um den Kalman Filter zu verwenden müssen die Kovarianzmatrizen der Störungssignale bekannt sein:

$$E\{n_u(t) \cdot n_u(t - \tau)\} = R_u \cdot \delta(\tau), \quad R_u \succeq 0$$

$$E\{n_y(t) \cdot n_y(t - \tau)\} = R_y \cdot \delta(\tau), \quad R_y \succeq 0$$

Die Matrizen R_u und R_y können durch statistische Analyse gefunden werden. Wie dies genau geschieht sprengt den Rahmen von Regelungstechnik II. Deswegen wird im Folgenden die Lösung präsentiert, ohne Beweis.

Beim Tunen des Luenberger Beobachter können wir $\bar{B} \cdot \bar{B}^T$ und q einstellen. Es stellt sich heraus, dass die Änderung

$$\begin{aligned} \bar{B} \cdot \bar{B}^T &\rightarrow B \cdot R_u \cdot B^T \\ q \cdot I &\rightarrow R_y \end{aligned}$$

die Lösung des Kalman Filters liefert. Das heisst man muss beim Kalman Filter nichts mehr tunen. Die Kovarianzen R_u und R_y liefern direkt die optimalen Tuning-Parameter die varianzminimierend wirken. Die Lösung kann wiederum über die Riccati-Gleichung gefunden werden:

$$\begin{aligned} L_K^T &= R_y^{-1} \cdot C \cdot P \\ P \cdot C^T \cdot R_y^{-1} \cdot C \cdot P - P \cdot A^T - A \cdot P - B \cdot R_u \cdot B^T &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

wobei $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die positiv definite Lösung der Riccati Gleichung, garantiert existiert wenn $\{A, C\}$ beobachtbar ist.

Bemerkungen:

- Die Matrix L_K ist statisch. Sie muss für gegebene $\{A^T, C^T, B \cdot R_u \cdot B^T, R_y\}$ nur einmal berechnet werden.
- Der Kalman Filter hat keine Tuning-Parameter mehr; R_u und R_y werden durch statistische Analyse bestimmt.

Zusammenfassung:

Gl. (2), Gl. (3) und Gl. (5) sind identisch in der Form und können alle mit dem LQR-Formalismus gelöst werden. Folgende Tabelle fasst die Ähnlichkeit zusammen:

LQR	Luenberger	Kalman
A	A^T	A^T
B	C^T	C^T
$Q = \bar{C}^T \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot \bar{B}^T$	$B \cdot R_u \cdot B^T$
R	$q \cdot I$	R_y
K	L^T	L_K^T
Φ	Ψ	P

Tabelle 1: "Konvertierungstabelle" zwischen LQR-Regler, Luenberger-Filter und Kalman-Filter.

Regelungstechnik II FS 2020

LQG und LTR

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Zusammenfassung Vorlesung 10

Skript Kapitel 6

Bei Fragen: hruffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 25. Mai 2020

Bemerkung: Um die folgenden Reglerstrukturen detailliert und leicht nachvollziehbar herzuleiten, sind einige Blockdiagramme in dieser Zusammenfassung anders dargestellt als im Skript. Dies gilt insbesondere für die Folgeregelung und für den LQGI Teil. Beide Arten der Darstellung (Zusammenfassung und Skript) sind äquivalent. Bitte stören Sie sich nicht an den kleinen Unterschieden, sondern nutzen Sie beide Darstellungen um einen für Sie passenden Zugang zur Thematik zu finden. Keine Angst, die Fragen an der Prüfung werden genügend allgemein gestellt sein, sodass sie mit dem Verständnis von entweder Skript oder Zusammenfassung dafür vorbereitet sind.

Recap: Bis jetzt wurde das LQR-Entwurfsverfahren analysiert, das den Zustand $x(t)$ verwendet. Dies ist jedoch nicht praktisch, da zur Regelung nur die Signale $u(t)$ und $y(t)$ verfügbar sind. Deswegen wurde der Luenberger-Beobachter eingeführt, der basierend auf den Signalen $u(t)$ und $y(t)$ und den geschätzten Systemmatrizen \hat{A} , \hat{B} und \hat{C} eine Schätzung des Zustandes $\hat{x}(t)$ liefert. Nun werden wir sehen, dass eine Kombination von LQR-Regler und Luenberger-Beobachter sinnvoll ist, insbesondere weil der resultierende geschlossene Regelkreis garantiert stabil ist¹.

1 LQG-Regler

Eine Kombination aus LQR und Luenberger-Beobachter wird LQG (Linear Quadratic Gaussian) genannt. Der zurückgeführte Zustandsvektor $x(t)$ wird dabei mit der Schätzung $\hat{x}(t)$ ersetzt:

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t) \quad (1)$$

Das Blockdiagramm eines LQG-Reglers sieht wie folgt aus:

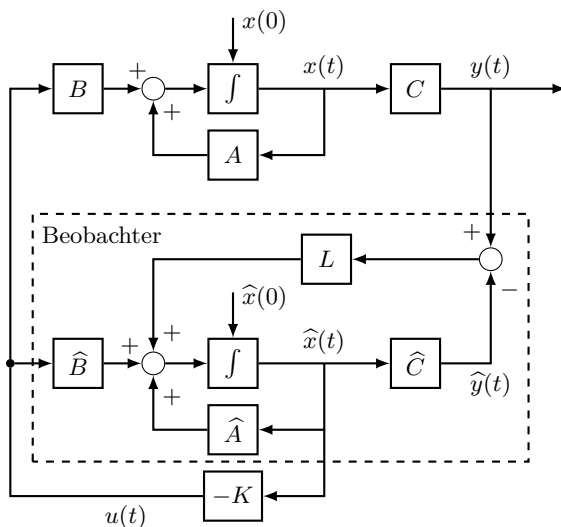


Abb. 1: LQG Struktur.

¹Garantierte Stabilität ist nur gegeben, falls die lineare Systembeschreibung exakt dem realen System entspricht, was im Normalfall nicht gegeben ist. Im Realfall ist der präsentierte LQG-Regler trotzdem sehr mächtig, da er mit genügend Robustheit auch für reale Systeme stabilisierend wirken kann.

Stabilitätseigenschaften des LQG-Reglers

Das dynamische Verhalten von System und Beobachter in Abb. 1 kann wie folgt beschrieben werden:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad (2)$$

$$y = C \cdot x,$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot u(t) + L \cdot (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (3)$$

$$\hat{y} = C \cdot \hat{x}$$

Unter der Annahme dass die Systemmatrizen $\{A, B, C\}$ bekannt sind und im Beobachter zur Verfügung stehen, ersetzen wir $u(t)$ aus Gl. (1) in Gl. (2) und Gl. (3):

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) - B \cdot K \cdot \hat{x}(t) \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = (A - B \cdot K - L \cdot C) \cdot \hat{x}(t) + L \cdot C \cdot x(t)$$

Nun zeigen wir, dass der geschlossene Regelkreis resultierend aus Gl. (4) asymptotisch stabil ist. Dazu definieren wir den Zustandsvektor $\tilde{x}(t)$ und die Systemmatrix \tilde{A}_{cl} :

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -B \cdot K \\ L \cdot C & A - B \cdot K - L \cdot C \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{cl}} \cdot \tilde{x}(t)$$

Die Stabilität des geschlossenen Regelkreises wird definiert durch die Eigenwerte der Matrix \tilde{A}_{cl} . Diese sind in der gezeigten Form nicht einfach zu berechnen. Nach der folgenden Koordinatentransformation des Zustandsraumes wird die Berechnung hingegen sehr einfach²:

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ I_{n \times n} & -I_{n \times n} \end{bmatrix} \cdot \tilde{x} = T^{-1} \cdot \tilde{x}$$

Separation Principle

In den neuen Koordinaten \tilde{z} ergibt sich die Dynamik des geschlossenen Regelkreises in Gl. (4) wie folgt:

$$\frac{d}{dt}\tilde{z}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A - B \cdot K & B \cdot K \\ 0_{n \times n} & A - L \cdot C \end{bmatrix}}_{\text{gleiche Eigenwerte wie } \tilde{A}_{cl}} \cdot \tilde{z}(t) = T^{-1} \cdot \tilde{A}_{cl} \cdot T \cdot \tilde{z}(t)$$

Die Eigenwerte sind durch die gegebene Block-Struktur der Matrix nun direkt ablesbar.

n der Eigenwerte entsprechen den Eigenwerten der Hurwitz Matrix $A - B \cdot K$ und die anderen n Eigenwerte entsprechen den Eigenwerten der Hurwitz Matrix $A - L \cdot C$.

$$\text{eig}(T^{-1} \cdot \tilde{A}_{cl} \cdot T) = \text{eig}(\tilde{A}_{cl}) = \text{eig}(A - B \cdot K) \cup \text{eig}(A - L \cdot C)$$

Asymptotische Stabilität ist somit ohne explizite Berechnung der Eigenwerte garantiert, da beide Matrizen Hurwitz sind wenn K und L mit dem LQR-Auslegeverfahren bestimmt wurden. Dies wurde in den Zusammenfassungen der Vorlesungen 8 und 9 diskutiert.

²Die Umrechnung in die neuen Zustände erfolgt über eine Ähnlichkeitsabbildung (Koordinatentransformation), welche die Eigenwerte der Matrix nicht ändert, d.h. $\text{eig}(T^{-1} \cdot \tilde{A}_{cl} \cdot T) = \text{eig}(\tilde{A}_{cl})$. Bei der gewählten Transformation gilt $T^{-1} = T$.

2 LQG mit Folgeregelung

Herleitung durch Nullpunktverschiebung

Das System nähert sich mit dem LQG-Regler asymptotisch dem Ursprung. Wir können nun identisch zur LQR-Folgeregelung den Gleichgewichtspunkt des Systems verschieben nach $\{u_\infty, x_\infty\}$, indem wir den Regelkreis wie gezeigt in Abb. 2 ergänzen. Damit resultiert das Stellsignal als:

$$u(t) = u_\infty - K \cdot (\hat{x}(t) - \hat{x}_\infty) = u_\infty - K \cdot (\hat{x}(t) - x_\infty).$$

Es gilt $x_\infty = \hat{x}_\infty$, da der Fehler $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ asymptotisch gegen Null konvergiert. Somit entspricht der Gleichgewichtspunkt des Beobachters dem des wahren Systems.

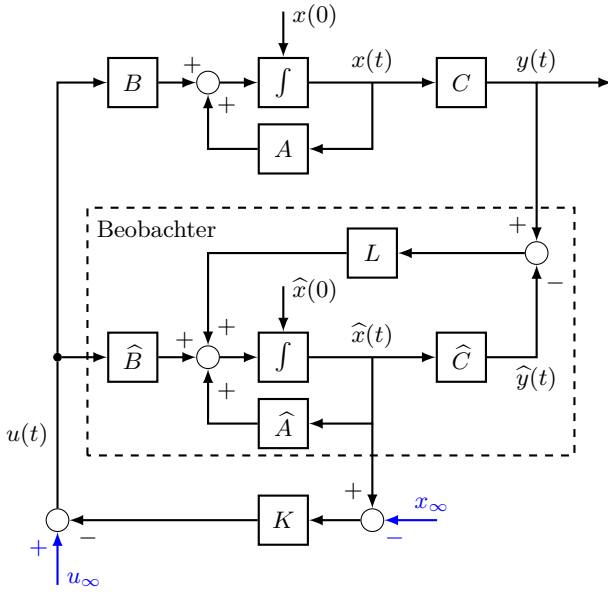


Abb. 2: LQG Struktur mit Nullpunktverschiebung (blau).

Umsetzung mit Vorsteuerung

Die Struktur in Abb. 2, als Nullpunktverschiebung hergeleitet, kann als Umsetzung einer Folgeregelung auf die Referenz $r(t)$ betrachtet werden, wie dargestellt in Abb. 3.

Die Referenz $r(t)$ ist ein Vektor mit konstanten Einträgen:

$$r(t) = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}, \quad r(t) = y_\infty = C \cdot x_\infty.$$

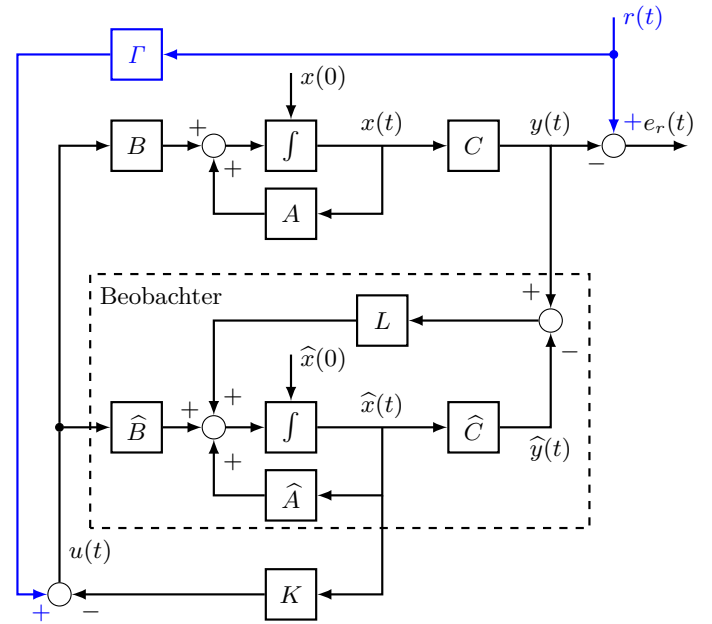


Abb. 3: LQG Struktur mit Folgeregelung (blau), äquivalent zu Abb. 2. wenn Γ gewählt wird wie definiert in Gl. (5).

Die Referenz $r(t)$ in Abb. 3, ist mit x_∞ und u_∞ in Abb. 2 über die steady-state Gleichung des Regelkreises gekoppelt:

$$\begin{aligned} 0 &= A \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty, \\ r(t) &= C \cdot x_\infty. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}}_F \cdot \begin{bmatrix} x_\infty \\ u_\infty \end{bmatrix}.$$

Die Signale x_∞ und u_∞ können also ersetzt werden mit einem Signal, das aus der Referenz $r(t)$ berechnet werden kann. Die Umrechnung $r(t) \rightarrow \{x_\infty, u_\infty\}$ ist nur möglich falls die Matrix F vollen Rang hat. Für passende C und B lässt sich folgende Beziehung finden:

$$\begin{aligned} u_\infty + K \cdot x_\infty &= \overbrace{-(C \cdot (A - BK)^{-1} B)^{-1}}^{\Gamma} \cdot r(t) \\ &= \Gamma \cdot r(t) \end{aligned} \quad (5)$$

Im Skript ist dieses Vorgehen basierend auf einer leicht anderen Darstellung hergeleitet. Die resultierenden Umsetzungen sind jedoch äquivalent.

3 LQGI zur Störungsunterdrückung

Die unbekannte Störung $w(t)$ wirkt additiv auf den Eingang $u(t)$, der in das physikalische System geht³ (siehe Abb. 4). Die Störung wirkt aber nicht auf den Beobachter, welcher nur das störungsfreie Stellsignal $u(t)$ kennt.

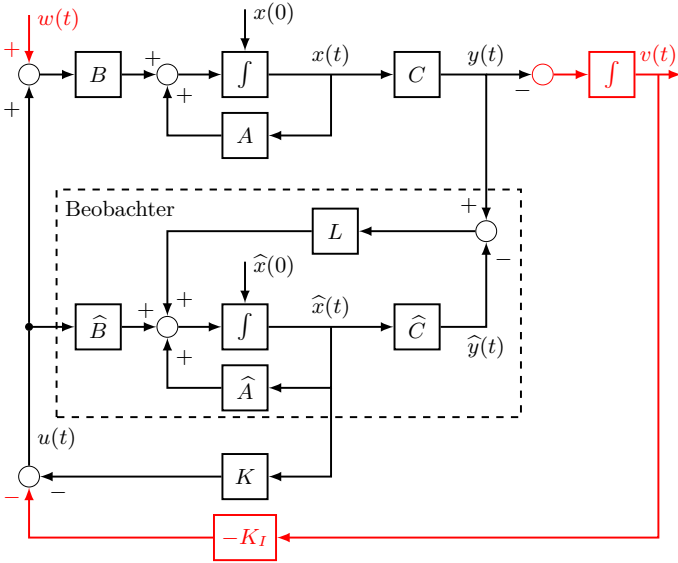


Abb. 4: LQGI Struktur zur Störungsunterdrückung (rot).

Für die Störungsunterdrückung wird nun das Integral des Regelfehlers $0 - y(t)$ als Zustand eingeführt:

$$v(t) = \int_0^t (0 - y(\tau)) d\tau$$

Diese Erweiterung führt zum erweiterten Zustandsvektor:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{2n+m},$$

mit Eingangssignal

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t) + K_I \cdot v(t),$$

wobei die Variablen K und K_I Teil der Lösung der bereits bekannten LQRI-Formulierung sind:

$$\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\} \rightarrow \tilde{K} = [K, -K_I],$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_I \end{bmatrix}$$

4 LQGI mit Folgeregelung

Wir können nun den Folgeregelungsansatz mit der Störungsunterdrückung kombinieren, wie gezeigt in Abb. 5.

Das Integral des Regelfehlers $v(t)$ wird dabei neu definiert, da die Referenz nun nicht mehr gleich null ist:

$$v(t) = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau.$$

Das Stellsignal resultiert als:

$$u(t) = \Gamma \cdot r(t) - K \cdot \hat{x}(t) + K_I \cdot v(t),$$

wobei Γ gleich definiert ist wie in Gl. (5), über die lineare Systemdarstellung $\{A, B, C\}$.

Der Workflow zu LQGI mit Folgeregelung lautet:

1. $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\} \rightarrow \tilde{K} = [K - K_I]$, dabei müssen \tilde{Q} und R iterativ eingestellt werden. Dieser Schritt geschieht entweder in einer Simulation in der $x(t)$ bekannt ist, oder auf dem physischen System mit $\hat{x}(t)$ und einem "schlecht" eingestellten L .
2. $\{A^\top, C^\top, \bar{B}\bar{B}^\top, qI\} \rightarrow L^\top$, dabei müssen \bar{B} und q iterativ eingestellt werden.
3. Hinzufügen der Vorsteuerung für die Folgeregelung über die Matrix Γ .

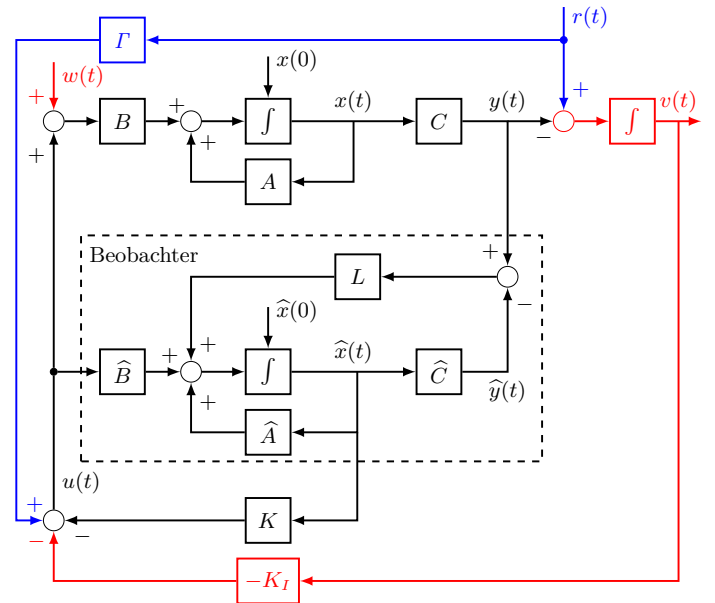


Abb. 5: LQGI mit zusätzlicher Folgeregelung (blau).

5 Bemerkungen zu Störungsunterdrückung und Folgeregelung

Eine Vorsteuerung (ein zusätzliches Stellsignal, welches von der Referenz r abhängt und nicht vom Regelfehler e , äquivalent zur Matrix Γ) wurde bisher in RT1 und RT2 nicht detailliert betrachtet. Vorsteuerungen können verwendet werden um die Performance des Regelkreises zu verbessern: er reagiert schneller auf Sollwertänderungen, da sich nicht zuerst ein Fehler aufbauen muss, bevor der Reglerausgang angepasst wird. Robustheit, Stabilität und das steady-state Verhalten (kein statischer Nachlauffehler) des Regelkreises werden durch die Vorsteuerung nicht beeinflusst.

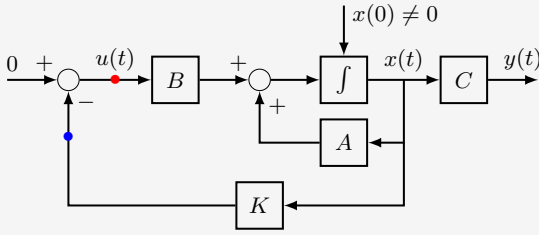
Robustheit, Stabilität und steady-state Verhalten sind generell die wichtigen Aspekte eines Regelkreises: meist ist es nicht wichtig, sehr schnell zu regeln, viel eher wünscht man sich garantierte Stabilität in allen möglichen Situationen. Da Stabilität und Robustheit und fehlerfreies steady-state Verhalten⁴ auch ohne Vorsteuerungssignale gegeben sind, könnte man die Vorsteuerungssignale auch weglassen (so wie in Abb. 4). Änderungen des Referenzsignales würden das System als Störung beeinflussen und durch den Integrator kompensiert werden.

³Bei einem realen System sind Störungen dieser Art nicht vermeidbar, auch wenn sie sehr klein sein können. Die Störungen können ebenso an einem anderen Punkt in die Strecke eintreten, denn das hier präsentierte Vorgehen unterdrückt alle möglichen konstanten Störungen.

⁴Durch die integrative Erweiterung zur Störungsunterdrückung.

6 Resultierende Regelkreise

Recap: Der offene Regelkreis $L_{\text{LQG}}(s)$ des LQR Regelkreises ist von $u(t)$ nach $Kx(t)$ definiert (rot nach blau). Für SISO Systeme tritt dieser offene Regelkreis nicht ein in den Kreis mit Radius 1 um den Punkt -1 im Nyquist Diagramm.



Um die LQG Formulierung mit der LQR Formulierung zu vergleichen muss $L_{\text{LQG}}(s)$ analog definiert sein, der Regelkreis muss beim Systemeingang u geschnitten werden.⁵

Wir können für alle betrachteten modellbasierten Reglerstrukturen die resultierenden Systemgleichungen der offenen und geschlossenen Regelreise darstellen:

Offener Regelkreis : $u \rightarrow -u_{\text{LQG}}$,

Geschlossener Regelkreis : $r \rightarrow y$,

wobei gilt: $u_{\text{LQG}} = -[K \quad -K_I] \cdot [\tilde{x}(t) \ v(t)]^\top$.

Die Betrachtung des offenen Regelkreises ist wichtig für die Analyse der Robustheit. Der geschlossene Regelkreis dient der Analyse der Stabilität und des zu erwartenden transienten Verhalten des Systems. Ausgangspunkt zur Berechnung der Regelkreise sind die Gleichungen des Systems und des Beobachters, diese können aus den entsprechenden Blockdiagrammen gelesen werden:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot u(t) + L \cdot (y(t) - \hat{y}(t))$$

$$\frac{d}{dt}v(t) = r(t) - y(t), \quad (\text{nur für integrative Strukturen})$$

$$y(t) = C \cdot x(t), \text{ mit}$$

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \text{ oder } \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

LQG Regler (Abb. 1)

Regelgesetz

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t)$$

Offener Regelkreis

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

Geschlossener Regelkreis

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t)$$

⁵Der offene LQG Regelkreis kann bei Bedarf auch beim Ausgang y geschnitten werden, er kann dann aber nicht direkt mit dem offenen LQR Regelkreis verglichen werden, da dies dort nicht möglich ist.

LQG mit Folgeregelung (Abb. 3)

Regelgesetz

$$u(t) = \Gamma \cdot r(t) - K \cdot \hat{x}(t)$$

Offener Regelkreis

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

Geschlossener Regelkreis

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \Gamma \cdot r(t)$$

LQGI zur Störungsunterdrückung (Abb. 4)

Regelgesetz

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t) + K_I \cdot v(t)$$

Offener Regelkreis

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ LC & A - LC - BK & 0 \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

Geschlossener Regelkreis

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK & BK_I \\ LC & A - BK - LC & BK_I \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot w(t)$$

LQGI mit Folgeregelung (Abb. 5)

Regelgesetz

$$u(t) = \Gamma \cdot r(t) - K \cdot \hat{x}(t) + K_I \cdot v(t)$$

Offener Regelkreis

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ LC & A - LC - BK & 0 \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} r(t)$$

Geschlossener Regelkreis

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK & BK_I \\ LC & A - BK - LC & BK_I \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B\Gamma & B \\ B\Gamma & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

Berechnung der Übertragungsfunktionen

Die offenen Regelkreise haben die Form:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \tilde{A}_{\text{ol}} \cdot \tilde{x}(t) + \tilde{B}_{\text{ol}} \cdot u(t) + \tilde{B}_r \cdot r(t)$$

$$-u_{\text{LQG}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & K & -K_I \end{bmatrix}}_{\tilde{K}} \cdot \tilde{x}(t).$$

Die Übertragungsfunktion der offenen Regelkreise $L(s)$ von u nach $-u_{\text{LQR}}$ lautet somit

$$L_{\text{LQG}}(s) = \tilde{K} \cdot (sI - \tilde{A}_{\text{ol}})^{-1} \cdot \tilde{B}_{\text{ol}}, \quad \{u \rightarrow -u_{\text{LQR}}\}$$

7 Wiederherstellung der Robustheit: LTR

Recap: Der offene Regelkreis des LQR-Reglers ist:

$$L_{\text{LQR}}(s) = K \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B,$$

welcher hervorragende Robustheitseigenschaften aufweist:

$$\mu_{\min, \text{LQR}} = \min_{\omega} \left(\min_i \sigma_i(I + L_{\text{LQR}}(j\omega)) \right) \geq 1 \quad (6)$$

Leider kann zur return difference des LQG-Reglers

$$\mu_{\min, \text{LQG}} = \min_{\omega} \left(\min_i \sigma_i(I + L_{\text{LQG}}(j\omega)) \right)$$

keine Aussage getroffen werden. Insbesondere kann $\mu_{\min, \text{LQG}}$ arbiträr klein sein. D.h. die Robustheit muss nach dem Auslegen des Reglers zwingend analysiert werden.

Loop-Transfer Recovery (LTR)

Es ist möglich die Robustheit des originalen LQR-Problems mit einem LQG zu approximieren, nämlich dann, wenn der Beobachter sehr schnell eingestellt ist. Dann konvergiert der Fehler in der Zustandsschätzung $x(t) - \hat{x}(t)$ sehr schnell gegen null, im Grenzfalle unendlich schnell. Die Wiederherstellung der Robustheit wird *loop-transfer recovery (LTR)* genannt.

Zur Erinnerung: Die Beobachterverstärkung L kann wie folgt gefunden werden:

$$\{A^T, C^T, B \cdot B^T, q \cdot I\} \xrightarrow{LQR} L^T,$$

wobei q ein einstellbarer Tuningparameter ist. Die Dynamik des Fehlers in der Zustandsschätzung (Gl. (7)) ist garantiert stabil, da die LQR-Entwurfsmethodik Eigenwerte mit Realteil kleiner null garantiert:

$$\dot{e}(t) = (A - L(q) \cdot C) \cdot e(t). \quad (7)$$

Je kleiner q beim Tunen gewählt wird, desto schneller wird die Dynamik des Fehlers. Schneller heisst in diesem Fall, dass die Eigenwerte der Matrix $(A - L(q) \cdot C)$ weiter links in der komplexen Ebene liegen und betragsmässig grösser sind. Entsprechend konvergiert der Fehler schneller zu null.

Dynamik des Fehlers in der Zustandsschätzung

Wir analysieren nun die Fehlerdynamik für $\lim_{q \rightarrow 0}$.

Bemerkung: Die Eigenwerte einer inversen Matrix, entsprechen den Inversen der Eigenwerte der Matrix:

$$\text{eig}(X^{-1}) = 1/\text{eig}(X) \quad (8)$$

Mit Gl. (7) und Gl. (8) folgt:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \dot{e}(t) = \lim_{q \rightarrow 0} (A - L(q) \cdot C)^{-1} \cdot \dot{e}(t) = 0, \quad (9)$$

da die Eigenwerte von $(A - L(q) \cdot C)^{-1}$ asymptotisch gegen null gehen. Mit Gl. (9) und $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, folgt:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \hat{x}(t) = x(t), \quad \forall t$$

Das heisst, das System verhält sich für extrem kleine q als ob gar keine Beobachterdynamik vorhanden wäre. Oder in anderen Worten: Für $q \rightarrow 0$ verhält sich der LQG-Regler wie ein LQR-Regler und erfüllt somit die gleichen Robustheitsgarantien (siehe Gl. (6) und Abb. 6).

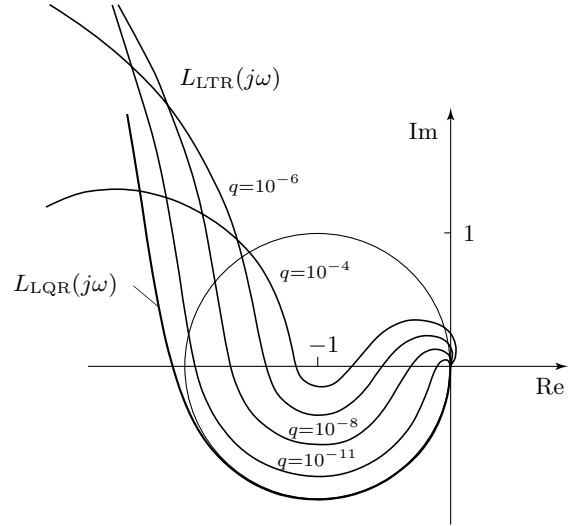


Abb. 6: L_{LTR} für verschiedene q .

Bemerkungen:

- Der Wert von q sollte in Realität nicht beliebig klein gewählt werden, da dies zur Verstärkung von hochfrequentem Rauschen führt.
- Falls die Regelstrecke nichtminimalphasige Nullstellen hat, approximiert der LTR-Ansatz den LQR-Regler häufig so gut wie möglich. (Bei nichtminimalphasigen Systemen ist die Durchtrittsfrequenz der offenen Kreisverstärkung inhärent noch oben beschränkt, in diesem Fall ist eine perfekte Approximation des offenen LQR Kreisverstärkung nicht möglich.)