

Regelungstechnik II FS 2020

LQG und LTR

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Zusammenfassung Vorlesung 10

Skript Kapitel 6

Bei Fragen: hraffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 25. Mai 2020

Bemerkung: Um die folgenden Reglerstrukturen detailliert und leicht nachvollziehbar herzuleiten, sind einige Blockdiagramme in dieser Zusammenfassung anders dargestellt als im Skript. Dies gilt insbesondere für die Folgeregelung und für den LQGI Teil. Beide Arten der Darstellung (Zusammenfassung und Skript) sind äquivalent. Bitte stören Sie sich nicht an den kleinen Unterschieden, sondern nutzen Sie beide Darstellungen um einen für Sie passenden Zugang zur Thematik zu finden. Keine Angst, die Fragen an der Prüfung werden genügend allgemein gestellt sein, sodass sie mit dem Verständnis von entweder Skript oder Zusammenfassung dafür vorbereitet sind.

Recap: Bis jetzt wurde das LQR-Entwurfsverfahren analysiert, das den Zustand $x(t)$ verwendet. Dies ist jedoch nicht praktisch, da zur Regelung nur die Signale $u(t)$ und $y(t)$ verfügbar sind. Deswegen wurde der Luenberger-Beobachter eingeführt, der basierend auf den Signalen $u(t)$ und $y(t)$ und den geschätzten Systemmatrizen \hat{A} , \hat{B} und \hat{C} eine Schätzung des Zustandes $\hat{x}(t)$ liefert. Nun werden wir sehen, dass eine Kombination von LQR-Regler und Luenberger-Beobachter sinnvoll ist, insbesondere weil der resultierende geschlossene Regelkreis garantiert stabil ist¹.

1 LQG-Regler

Eine Kombination aus LQR und Luenberger-Beobachter wird LQG (Linear Quadratic Gaussian) genannt. Der zurückgeführte Zustandsvektor $x(t)$ wird dabei mit der Schätzung $\hat{x}(t)$ ersetzt:

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t) \quad (1)$$

Das Blockdiagramm eines LQG-Reglers sieht wie folgt aus:

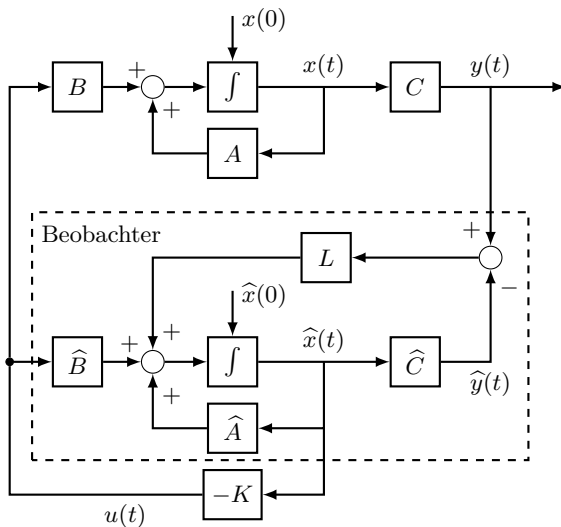


Abb. 1: LQG Struktur.

¹Garantierte Stabilität ist nur gegeben, falls die lineare Systembeschreibung exakt dem realen System entspricht, was im Normalfall nicht gegeben ist. Im Realfall ist der präzentrierte LQG-Regler trotzdem sehr mächtig, da er mit genügend Robustheit auch für reale Systeme stabilisierend wirken kann.

Stabilitätseigenschaften des LQG-Reglers

Das dynamische Verhalten von System und Beobachter in Abb. 1 kann wie folgt beschrieben werden:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad (2)$$

$$y = C \cdot x,$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot u(t) + L \cdot (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (3)$$

$$\hat{y} = C \cdot \hat{x}$$

Unter der Annahme dass die Systemmatrizen $\{A, B, C\}$ bekannt sind und im Beobachter zur Verfügung stehen, ersetzen wir $u(t)$ aus Gl. (1) in Gl. (2) und Gl. (3):

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) - B \cdot K \cdot \hat{x}(t) \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = (A - B \cdot K - L \cdot C) \cdot \hat{x}(t) + L \cdot C \cdot x(t)$$

Nun zeigen wir, dass der geschlossene Regelkreis resultierend aus Gl. (4) asymptotisch stabil ist. Dazu definieren wir den Zustandsvektor $\tilde{x}(t)$ und die Systemmatrix \tilde{A}_{cl} :

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -B \cdot K \\ L \cdot C & A - B \cdot K - L \cdot C \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{cl}} \cdot \tilde{x}(t)$$

Die Stabilität des geschlossenen Regelkreises wird definiert durch die Eigenwerte der Matrix \tilde{A}_{cl} . Diese sind in der gezeigten Form nicht einfach zu berechnen. Nach der folgenden Koordinatentransformation des Zustandsraumes wird die Berechnung hingegen sehr einfach²:

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ I_{n \times n} & -I_{n \times n} \end{bmatrix} \cdot \tilde{x} = T^{-1} \cdot \tilde{x}$$

Separation Principle

In den neuen Koordinaten \tilde{z} ergibt sich die Dynamik des geschlossenen Regelkreises in Gl. (4) wie folgt:

$$\frac{d}{dt}\tilde{z}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A - B \cdot K & B \cdot K \\ 0_{n \times n} & A - L \cdot C \end{bmatrix}}_{\text{gleiche Eigenwerte wie } \tilde{A}_{cl}} \cdot \tilde{z}(t) = T^{-1} \cdot \tilde{A}_{cl} \cdot T \cdot \tilde{z}(t)$$

Die Eigenwerte sind durch die gegebene Block-Struktur der Matrix nun direkt ablesbar.

n der Eigenwerte entsprechen den Eigenwerten der Hurwitz Matrix $A - B \cdot K$ und die anderen n Eigenwerte entsprechen den Eigenwerten der Hurwitz Matrix $A - L \cdot C$.

$$\text{eig}(T^{-1} \cdot \tilde{A}_{cl} \cdot T) = \text{eig}(\tilde{A}_{cl}) = \text{eig}(A - B \cdot K) \cup \text{eig}(A - L \cdot C)$$

Asymptotische Stabilität ist somit ohne explizite Berechnung der Eigenwerte garantiert, da beide Matrizen Hurwitz sind wenn K und L mit dem LQR-Auslegeverfahren bestimmt wurden. Dies wurde in den Zusammenfassungen der Vorlesungen 8 und 9 diskutiert.

²Die Umrechnung in die neuen Zustände erfolgt über eine Ähnlichkeitsabbildung (Koordinatentransformation), welche die Eigenwerte der Matrix nicht ändert, d.h. $\text{eig}(T^{-1} \cdot \tilde{A}_{cl} \cdot T) = \text{eig}(\tilde{A}_{cl})$. Bei der gewählten Transformation gilt $T^{-1} = T$.

2 LQG mit Folgeregelung

Herleitung durch Nullpunktverschiebung

Das System nähert sich mit dem LQG-Regler asymptotisch dem Ursprung. Wir können nun identisch zur LQR-Folgeregelung den Gleichgewichtspunkt des Systems verschieben nach $\{u_\infty, x_\infty\}$, indem wir den Regelkreis wie gezeigt in Abb. 2 ergänzen. Damit resultiert das Stellsignal als:

$$u(t) = u_\infty - K \cdot (\hat{x}(t) - \hat{x}_\infty) = u_\infty - K \cdot (\hat{x}(t) - x_\infty).$$

Es gilt $x_\infty = \hat{x}_\infty$, da der Fehler $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ asymptotisch gegen Null konvergiert. Somit entspricht der Gleichgewichtspunkt des Beobachters dem des wahren Systems.

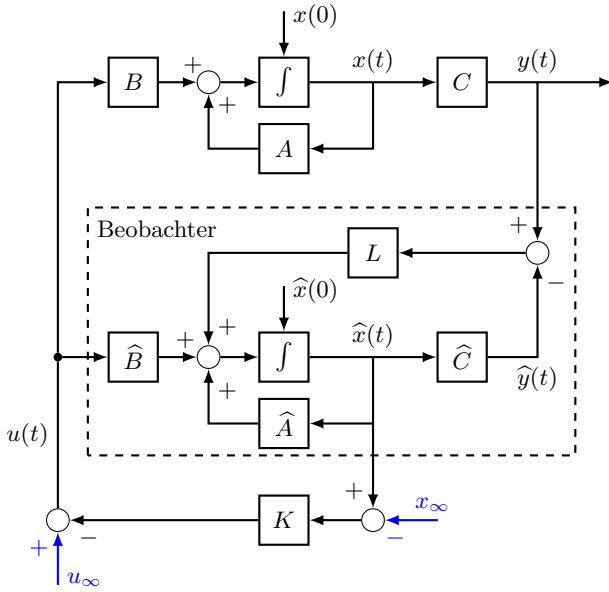


Abb. 2: LQG Struktur mit Nullpunktverschiebung (blau).

Umsetzung mit Vorsteuerung

Die Struktur in Abb. 2, als Nullpunktverschiebung hergeleitet, kann als Umsetzung einer Folgeregelung auf die Referenz $r(t)$ betrachtet werden, wie dargestellt in Abb. 3.

Die Referenz $r(t)$ ist ein Vektor mit konstanten Einträgen:

$$r(t) = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}, \quad r(t) = y_\infty = C \cdot x_\infty.$$

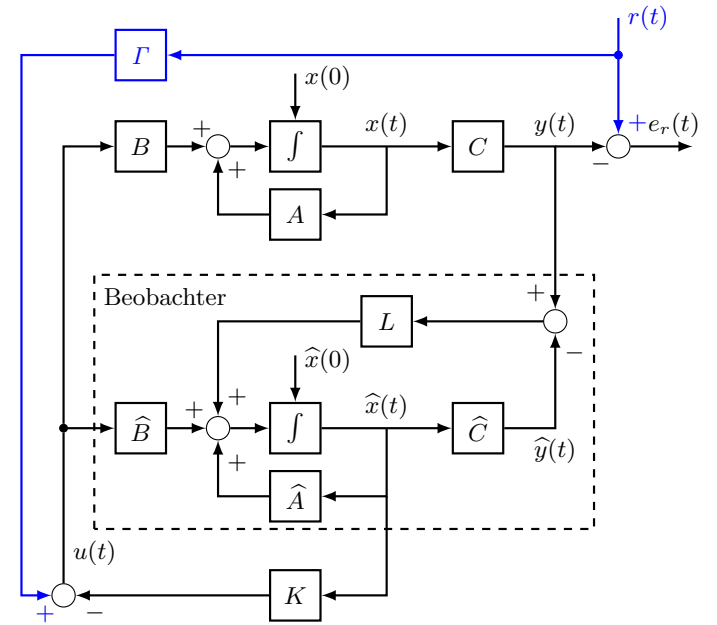


Abb. 3: LQG Struktur mit Folgeregelung (blau), äquivalent zu Abb. 2. wenn Γ gewählt wird wie definiert in Gl. (5).

Die Referenz $r(t)$ in Abb. 3, ist mit x_∞ und u_∞ in Abb. 2 über die steady-state Gleichung des Regelkreises gekoppelt:

$$\begin{aligned} 0 &= A \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty, \\ r(t) &= C \cdot x_\infty. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}}_F \cdot \begin{bmatrix} x_\infty \\ u_\infty \end{bmatrix}.$$

Die Signale x_∞ und u_∞ können also ersetzt werden mit einem Signal, das aus der Referenz $r(t)$ berechnet werden kann. Die Umrechnung $r(t) \rightarrow \{x_\infty, u_\infty\}$ ist nur möglich falls die Matrix F vollen Rang hat. Für passende C und B lässt sich folgende Beziehung finden:

$$\begin{aligned} u_\infty + K \cdot x_\infty &= \overbrace{-(C \cdot (A - BK)^{-1} B)^{-1}}^{\Gamma} \cdot r(t) \\ &= \Gamma \cdot r(t) \end{aligned} \quad (5)$$

Im Skript ist dieses Vorgehen basierend auf einer leicht anderen Darstellung hergeleitet. Die resultierenden Umsetzungen sind jedoch äquivalent.

3 LQGI zur Störungsunterdrückung

Die unbekannte Störung $w(t)$ wirkt additiv auf den Eingang $u(t)$, der in das physikalische System geht³ (siehe Abb. 4). Die Störung wirkt aber nicht auf den Beobachter, welcher nur das störungsfreie Stellsignal $u(t)$ kennt.

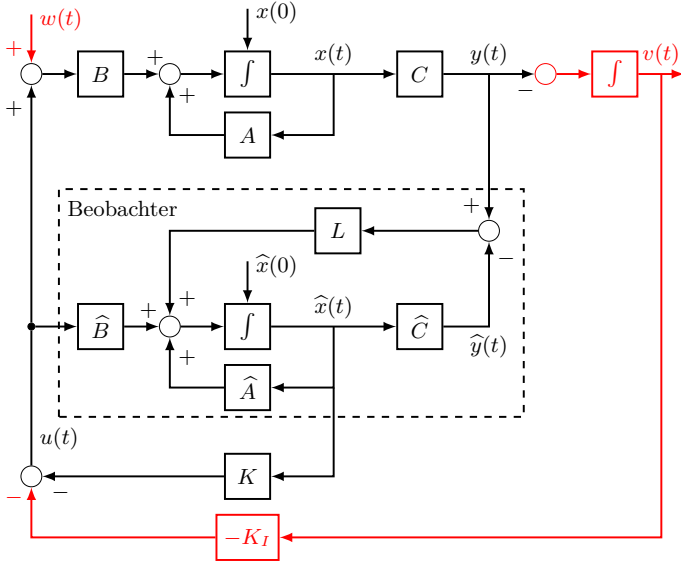


Abb. 4: LQGI Struktur zur Störungsunterdrückung (rot).

Für die Störungsunterdrückung wird nun das Integral des Regelfehlers $0 - y(t)$ als Zustand eingeführt:

$$v(t) = \int_0^t (0 - y(\tau)) d\tau$$

Diese Erweiterung führt zum erweiterten Zustandsvektor:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{2n+m},$$

mit Eingangssignal

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t) + K_I \cdot v(t),$$

wobei die Variablen K und K_I Teil der Lösung der bereits bekannten LQRI-Formulierung sind:

$$\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\} \rightarrow \tilde{K} = [K, -K_I],$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_I \end{bmatrix}$$

4 LQGI mit Folgeregelung

Wir können nun den Folgeregelungsansatz mit der Störungsunterdrückung kombinieren, wie gezeigt in Abb. 5.

Das Integral des Regelfehlers $v(t)$ wird dabei neu definiert, da die Referenz nun nicht mehr gleich null ist:

$$v(t) = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau.$$

Das Stellsignal resultiert als:

$$u(t) = \Gamma \cdot r(t) - K \cdot \hat{x}(t) + K_I \cdot v(t),$$

wobei Γ gleich definiert ist wie in Gl. (5), über die lineare Systemdarstellung $\{A, B, C\}$.

Der Workflow zu LQGI mit Folgeregelung lautet:

1. $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\} \rightarrow \tilde{K} = [K - K_I]$, dabei müssen \tilde{Q} und R iterativ eingestellt werden. Dieser Schritt geschieht entweder in einer Simulation in der $x(t)$ bekannt ist, oder auf dem physischen System mit $\hat{x}(t)$ und einem "schlecht" eingestellten L .
2. $\{A^\top, C^\top, \bar{B}\bar{B}^\top, qI\} \rightarrow L^\top$, dabei müssen \bar{B} und q iterativ eingestellt werden.
3. Hinzufügen der Vorsteuerung für die Folgeregelung über die Matrix Γ .

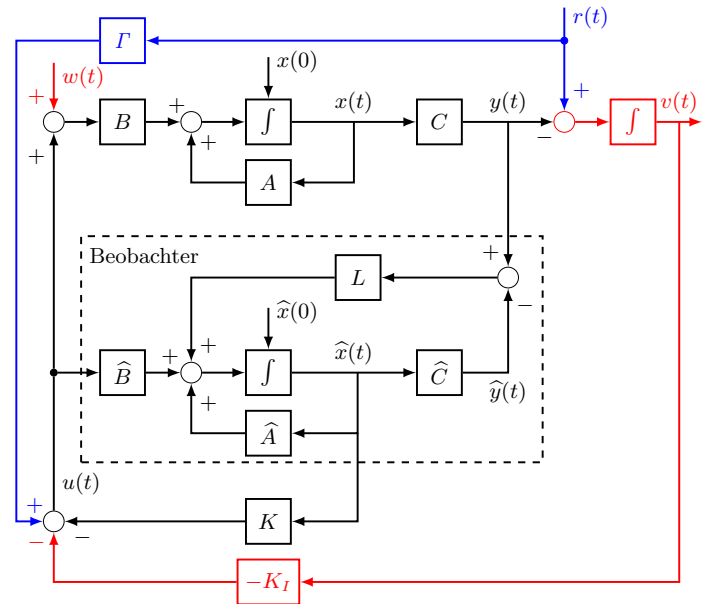


Abb. 5: LQGI mit zusätzlicher Folgeregelung (blau).

5 Bemerkungen zu Störungsunterdrückung und Folgeregelung

Eine Vorsteuerung (ein zusätzliches Stellsignal, welches von der Referenz r abhängt und nicht vom Regelfehler e , äquivalent zur Matrix Γ) wurde bisher in RT1 und RT2 nicht detailliert betrachtet. Vorsteuerungen können verwendet werden um die Performance des Regelkreises zu verbessern: er reagiert schneller auf Sollwertänderungen, da sich nicht zuerst ein Fehler aufbauen muss, bevor der Reglerausgang angepasst wird. Robustheit, Stabilität und das steady-state Verhalten (kein statischer Nachlauffehler) des Regelkreises werden durch die Vorsteuerung nicht beeinflusst.

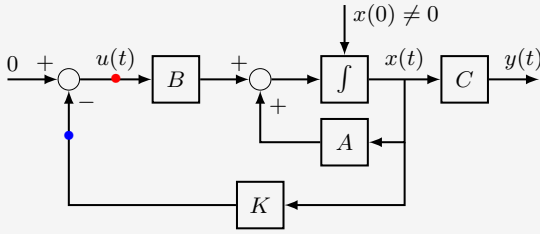
Robustheit, Stabilität und steady-state Verhalten sind generell die wichtigen Aspekte eines Regelkreises: meist ist es nicht wichtig, sehr schnell zu regeln, viel eher wünscht man sich garantierte Stabilität in allen möglichen Situationen. Da Stabilität und Robustheit und fehlerfreies steady-state Verhalten⁴ auch ohne Vorsteuerungssignale gegeben sind, könnte man die Vorsteuerungssignale auch weglassen (so wie in Abb. 4). Änderungen des Referenzsignales würden das System als Störung beeinflussen und durch den Integrator kompensiert werden.

³Bei einem realen System sind Störungen dieser Art nicht vermeidbar, auch wenn sie sehr klein sein können. Die Störungen können ebenso an einem anderen Punkt in die Strecke eintreten, denn das hier präsentierte Vorgehen unterdrückt alle möglichen konstanten Störungen.

⁴Durch die integrative Erweiterung zur Störungsunterdrückung.

6 Resultierende Regelkreise

Recap: Der offene Regelkreis $L_{\text{LQG}}(s)$ des LQR Regelkreises ist von $u(t)$ nach $Kx(t)$ definiert (rot nach blau). Für SISO Systeme tritt dieser offene Regelkreis nicht ein in den Kreis mit Radius 1 um den Punkt -1 im Nyquist Diagramm.



Um die LQG Formulierung mit der LQR Formulierung zu vergleichen muss $L_{\text{LQG}}(s)$ analog definiert sein, der Regelkreis muss beim Systemeingang u geschnitten werden.⁵

Wir können für alle betrachteten modellbasierten Reglerstrukturen die resultierenden Systemgleichungen der offenen und geschlossenen Regelreise darstellen:

Offener Regelkreis : $u \rightarrow -u_{\text{LQG}}$,

Geschlossener Regelkreis : $r \rightarrow y$,

wobei gilt: $u_{\text{LQG}} = -[K \quad K_I] \cdot [\tilde{x}(t) \ v(t)]^\top$.

Die Betrachtung des offenen Regelkreises ist wichtig für die Analyse der Robustheit. Der geschlossene Regelkreis dient der Analyse der Stabilität und des zu erwartenden transienten Verhalten des Systems. Ausgangspunkt zur Berechnung der Regelkreise sind die Gleichungen des Systems und des Beobachters, diese können aus den entsprechenden Blockdiagrammen gelesen werden:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot u(t) + L \cdot (y(t) - \hat{y}(t))$$

$$\frac{d}{dt}v(t) = r(t) - y(t), \quad (\text{nur für integrative Strukturen})$$

$$y(t) = C \cdot x(t), \text{ mit}$$

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \text{ oder } \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

LQG Regler (Abb. 1)

Regelgesetz

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t)$$

Offener Regelkreis

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

Geschlossener Regelkreis

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t)$$

⁵Der offene LQG Regelkreis kann bei Bedarf auch beim Ausgang y geschnitten werden, er kann dann aber nicht direkt mit dem offenen LQR Regelkreis verglichen werden, da dies dort nicht möglich ist.

LQG mit Folgeregelung (Abb. 3)

Regelgesetz

$$u(t) = \Gamma \cdot r(t) - K \cdot \hat{x}(t)$$

Offener Regelkreis

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

Geschlossener Regelkreis

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \Gamma \cdot r(t)$$

LQGI zur Störungsunterdrückung (Abb. 4)

Regelgesetz

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t) + K_I \cdot v(t)$$

Offener Regelkreis

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ LC & A - LC - BK & 0 \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

Geschlossener Regelkreis

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK & BK_I \\ LC & A - BK - LC & BK_I \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot w(t)$$

LQGI mit Folgeregelung (Abb. 5)

Regelgesetz

$$u(t) = \Gamma \cdot r(t) - K \cdot \hat{x}(t) + K_I \cdot v(t)$$

Offener Regelkreis

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ LC & A - LC - BK & 0 \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} r(t)$$

Geschlossener Regelkreis

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK & BK_I \\ LC & A - BK - LC & BK_I \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B\Gamma & B \\ B\Gamma & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

Berechnung der Übertragungsfunktionen

Die offenen Regelkreise haben die Form:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \tilde{A}_{\text{ol}} \cdot \tilde{x}(t) + \tilde{B}_{\text{ol}} \cdot u(t) + \tilde{B}_r \cdot r(t)$$

$$-u_{\text{LQG}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & K & -K_I \end{bmatrix}}_{\tilde{K}} \cdot \tilde{x}(t).$$

Die Übertragungsfunktion der offenen Regelkreise $L(s)$ von u nach $-u_{\text{LQR}}$ lautet somit

$$L_{\text{LQG}}(s) = \tilde{K} \cdot (sI - \tilde{A}_{\text{ol}})^{-1} \cdot \tilde{B}_{\text{ol}}, \quad \{u \rightarrow -u_{\text{LQR}}\}$$

7 Wiederherstellung der Robustheit: LTR

Recap: Der offene Regelkreis des LQR-Reglers ist:

$$L_{\text{LQR}}(s) = K \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B,$$

welcher hervorragende Robustheitseigenschaften aufweist:

$$\mu_{\min, \text{LQR}} = \min_{\omega} \left(\min_i \sigma_i(I + L_{\text{LQR}}(j\omega)) \right) \geq 1 \quad (6)$$

Leider kann zur return difference des LQG-Reglers

$$\mu_{\min, \text{LQG}} = \min_{\omega} \left(\min_i \sigma_i(I + L_{\text{LQG}}(j\omega)) \right)$$

keine Aussage getroffen werden. Insbesondere kann $\mu_{\min, \text{LQG}}$ arbiträr klein sein. D.h. die Robustheit muss nach dem Auslegen des Reglers zwingend analysiert werden.

Loop-Transfer Recovery (LTR)

Es ist möglich die Robustheit des originalen LQR-Problems mit einem LQG zu approximieren, nämlich dann, wenn der Beobachter sehr schnell eingestellt ist. Dann konvergiert der Fehler in der Zustandsschätzung $x(t) - \hat{x}(t)$ sehr schnell gegen null, im Grenzfalle unendlich schnell. Die Wiederherstellung der Robustheit wird *loop-transfer recovery (LTR)* genannt.

Zur Erinnerung: Die Beobachterverstärkung L kann wie folgt gefunden werden:

$$\{A^\top, C^\top, B \cdot B^\top, q \cdot I\} \xrightarrow{LQR} L^\top,$$

wobei q ein einstellbarer Tuningparameter ist. Die Dynamik des Fehlers in der Zustandsschätzung (Gl. (7)) ist garantiert stabil, da die LQR-Entwurfsmethodik Eigenwerte mit Realteil kleiner null garantiert:

$$\dot{e}(t) = (A - L(q) \cdot C) \cdot e(t). \quad (7)$$

Je kleiner q beim Tunen gewählt wird, desto schneller wird die Dynamik des Fehlers. Schneller heisst in diesem Fall, dass die Eigenwerte der Matrix $(A - L(q) \cdot C)$ weiter links in der komplexen Ebene liegen und betragsmässig grösser sind. Entsprechend konvergiert der Fehler schneller zu null.

Dynamik des Fehlers in der Zustandsschätzung

Wir analysieren nun die Fehlerdynamik für $\lim_{q \rightarrow 0}$.

Bemerkung: Die Eigenwerte einer inversen Matrix, entsprechen den Inversen der Eigenwerte der Matrix:

$$\text{eig}(X^{-1}) = 1/\text{eig}(X) \quad (8)$$

Mit Gl. (7) und Gl. (8) folgt:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \dot{e}(t) = \lim_{q \rightarrow 0} (A - L(q) \cdot C)^{-1} \cdot \dot{e}(t) = 0, \quad (9)$$

da die Eigenwerte von $(A - L(q) \cdot C)^{-1}$ asymptotisch gegen null gehen. Mit Gl. (9) und $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, folgt:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \hat{x}(t) = x(t), \quad \forall t$$

Das heisst, das System verhält sich für extrem kleine q als ob gar keine Beobachterdynamik vorhanden wäre. Oder in anderen Worten: Für $q \rightarrow 0$ verhält sich der LQG-Regler wie ein LQR-Regler und erfüllt somit die gleichen Robustheitsgarantien (siehe Gl. (6) und Abb. 6).

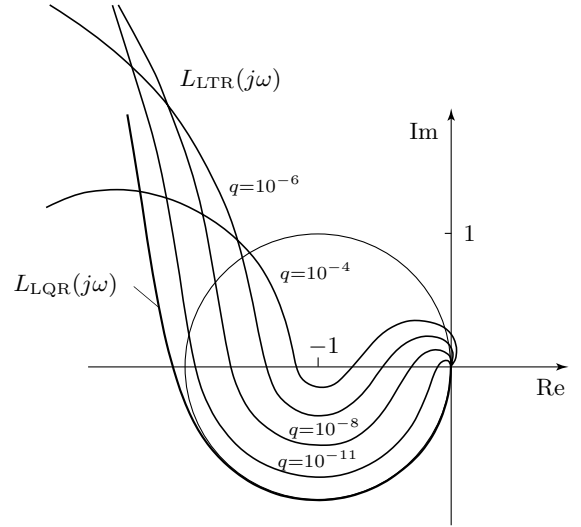


Abb. 6: L_{LTR} für verschiedene q .

Bemerkungen:

- Der Wert von q sollte in Realität nicht beliebig klein gewählt werden, da dies zur Verstärkung von hochfrequentem Rauschen führt.
- Falls die Regelstrecke nichtminimalphasige Nullstellen hat, approximiert der LTR-Ansatz den LQR-Regler häufig so gut wie möglich. (Bei nichtminimalphasigen Systemen ist die Durchtrittsfrequenz der offenen Kreisverstärkung inhärent noch oben beschränkt, in diesem Fall ist eine perfekte Approximation des offenen LQR Kreisverstärkung nicht möglich.)