

Regelungstechnik II Zusammenfassung Jorit Geurts jgeurts@student.ethz.ch	
1 Regelungstechnik I Grundlagen	
2 Definitionen	
2.1 Systemklassifikation	
<b>SISO</b> Input/Output scalar	<b>MIMO</b> Input/Output vektoriell
<b>Linear</b> Änderung des Ausgangs ist proportional zur Änderung des Eingangs.	<b>Nichtlinear</b> $\Sigma(\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2) \neq \alpha \cdot \Sigma(u_1) + \beta \cdot \Sigma(u_2)$
<b>Kausal</b> Ein kausales System hängt nicht von Eingängen in der Zukunft ab.	<b>Akausal</b> $y(t) = u(t + 5)$ $\int_{-\infty}^{t+1} u(t) dt$ <b>ÜF:</b> Zähler hat höhere Ordnung als Nenner
<b>Statisch</b> Der Ausgang bei statischen Systemen zur Zeit $t^*$ hängt nur vom Eingang zur Zeit $t^*$ ab. $y(t) = 3 \cdot u(t)$ $y(t) = \sqrt{u(t)}$	<b>Dynamisch</b> DGL $\rightarrow$ Dynamisch $y(t) = \int 0tu(\tau) d\tau$ $y(t) = u(t - \tau) \quad \forall \tau \neq 0$
<b>Zeitinvariant</b> Zeitinvariante Sys geben bei gleichen Eingängen zu unterschiedlichen Zeitpunkten und gleicher Anfangsbedingung die gleichen Ausgänge. $y(t) = \frac{d}{dt} u(t)$ $y(t) = 3 \cdot u(t)$	<b>Zeitvariant</b> $y(t) = \sin(t) \cdot u(t)$ $y(t) = u(t) + t$

## 3 Modellierung

### 3.1 Impulserhaltung

$$\frac{d}{dt}(mv) = \sum_i F_i$$

### 3.2 Drehimpulserhaltung

$$\frac{d}{dt}(J_B \dot{\theta}) = \Sigma_i T_i$$

### 3.3 Speichermethode

- Identifiziere die Systemgrenze (Zuflüsse, Ausflüsse)
- Identifiziere die relevanten Speicher im System (Masse, Energie, Ladung) und ihre zugehörigen Pegelvariablen.

- Formuliere die Differentialgleichung für alle relevanten Speicher

$$\frac{d}{dt}(\text{Speicherinhalt}) = \Sigma \text{Zuflüsse} - \Sigma \text{Abflüsse}$$

- Formuliere algebraische Relationen um Zuflüsse/Ausflüsse eines Speichers als Funktion der Pegelvariablen auszudrücken. Nach Einsetzen sollten sowohl der Speicherinhalt wie auch die Zuflüsse/Ausflüsse als Funktion der Pegelvariablen ausgedrückt sein.

- Identifiziere Systemparameter durch Experimente, Designspezifikationen oder Systemoptimierung.
- Validiere das Modell mit Experimenten

## 4 Normieren und Linearisieren

### 4.1 Normierung

$$x_i(t) = \frac{z_i(t)}{z_{i,0}}, \quad u(t) = \frac{v(t)}{v_0}, \quad y(t) = \frac{w(t)}{w_0}$$

Durch Ersetzen von  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$ ,  $v(t)$  und  $w(t)$  im nichtlinearen Modell resultiert das normierte nichtlineare Modell.  
**Es folgt:**

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_0(x(t), u(t)) \\ &= \left[ \begin{array}{c} \frac{z_{2,0}}{z_{1,0}} \cdot x_2(t) \\ -\frac{g}{z_{2,0}} \cdot \sin(\alpha) - \frac{k_3 \cdot z_{1,0}^3}{m \cdot z_{2,0}} \cdot x_1(t)^3 - \frac{v_0}{m} \cdot u(t) \cdot x_2(t) \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$y(t) = g_0(x(t), u(t)) = \frac{z_{1,0}}{\omega_0} \cdot x_1(t)$$

### 4.2 Berechnen Ruhelage $\{x_e, u_e\}$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = f(x_e, u_e)$$

### 4.3 Linearisieren

$$A \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_e, u_e}$$

$$b \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{0,1}}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{0,n}}{\partial u} \end{bmatrix}_{x_e, u_e}$$

$$c \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_0}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_0}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_e, u_e} \quad d \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_0}{\partial u} \end{bmatrix}$$

## 5 Allgemeine Lösung LZI System

### 5.1 Lineares Zeitinvariantes System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + b \cdot u(t) & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^{n \times 1} \\ y(t) &= c \cdot x(t) + d \cdot u(t) & c \in \mathbb{R}^{1 \times n}, d \in \mathbb{R} \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Zustandsgrösse  $x(t)$ :

$$x(t) = e^{A \cdot t} \cdot x_0 + \int_0^t e^{A \cdot (t-\rho)} \cdot b \cdot u(\rho) d\rho$$

daraus folgt für die Ausgangsgrösse  $y(t)$ :

$$y(t) = \underbrace{c \cdot e^{A \cdot t} \cdot x_0}_I + \underbrace{\int_0^t e^{A \cdot (t-\rho)} \cdot b \cdot u(\rho) d\rho}_{II} + \underbrace{d \cdot u(t)}_{III}$$

Die **natürliche Antwort** des Systems (*I*) ist **unabhängig** von  $u$ . Der Eingang  $u$  trägt einerseits zum Beitrag der **Systemdynamik** (*II*) bei und andererseits zum **Feedthrough Term** (*III*).

## 6 Stabilität

### 6.1 Lyapunov Stabilität

**Lyapunov** Stabilität bezieht sich auf das GGW der **Zustände**.

Stabilität nach Lyapunov erlaubt die Stabilitätsanalyse von Gleichgewichtspunkten (GGWP) von linearen und linearisierten Systemen. (A, b, c, d) Falls das System **Asymptotisch stabil** oder **instabil** ist, gilt dies auch für die Stabilität desselben GGWP im **nichtlinearen** System.

**Wichtig:** Falls ein GGWP eines linearisierten Systems einen **EW = 0** besitzt, lässt sich **keine** Aussage über die Stabilität desselben GGWP im **nichtlinearen** System machen.

$$EW(A) \equiv \sigma_i + j\omega_i$$

<b>1. Asymptotisch stabil:</b>	$\sigma_i < 0$ , für <b>alle</b> EW(A)
<b>2. Stabil:</b>	$\sigma_i \leq 0$ , min. ein EW(A) = 0
<b>3. Instabil:</b>	$\sigma_i > 0$ , min. ein EW(A) > 0

- Für  $\omega_i \neq 0$  oszilliert das System.
- Asymptotisch stabil**  $\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \rightarrow 0$

### 6.2 BIBO Stabilität

**BIBO** Stabilität bezieht sich auf das **I/O** Verhalten von  $\Sigma(s)$

Ein System ist BIBO stabil, falls für die Impulsantwort  $\sigma(t)$  folgendes gilt:

$$\int 0\infty |\sigma(t)| dt < \infty$$

Ein System mit Übertragungsfunktion  $\Sigma(s)$  ist **BIBO stabil**, falls alle **Pole**  $\pi_i$  **negativen Realteil** haben.

Anmerkung: Die Pole von  $\Sigma(s)$  entsprechen den EW von A falls das System vollständig steuerbar und beobachtbar, also **minimal** ist.

## 7 Systemanalyse Zeitbereich

Ein **vollständig steuerbar** und **vollständig beobachtbares** System ist **minimal**.

### 7.1 Steuerbarkeit/ Erreichbarkeit

Das System ist vollständig steuerbar/ erreichbar, wenn die **Steuerbarkeitsmatrix**  $\mathcal{R}$  **vollen Rang** hat.  
Für LZI Systeme gilt steuerbar = erreichbar

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} b, & A \cdot b, & A^2 \cdot b, & \dots, & A^{n-1} \cdot b \end{bmatrix}$$

Ein Punkt  $x_c \in \mathbb{R}^n$  ist **steuerbar**, falls ein  $u(t)$  existiert, das den Zustandsvektor des Systems von  $x(0) = x_c$  zum Zustand  $x(\tau) = 0$  in endlicher Zeit  $\tau$  bringt.  
Falls alle Punkt in  $\mathbb{R}$  steuerbar sind, heisst das System **vollständig steuerbar**.  
Ein System ist **potentiell stabilisierbar**, falls alle nicht-steuerbaren Zustände asymptotisch stabil sind.

Ein Punkt  $x_r \in \mathbb{R}^n$  ist **erreichbar**, falls ein  $u(t)$  existiert, das den Zustandsvektor des Systems vom Zustand  $x(0) = 0$  zum Zustand  $x(\tau) = x_r$  in endlicher Zeit  $\tau$  bringt.  
Falls alle Punkte in  $\mathbb{R}^n$  erreichbar sind, heisst das System **vollständig erreichbar**.

## 7.2 Beobachtbarkeit

Das System ist **vollständig** beobachtbar, wenn die **Beobachtbarkeitsmatrix**  $\mathcal{O}$  (observability matrix) **vollen Rang** hat.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ c \cdot A \\ c \cdot A^2 \\ \vdots \\ c \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

Das System ist **vollständig beobachtbar**, wenn man mit der Messung des Ausgangssignals  $y(t)$ ,  $t \in [0, \tau]$ ,  $\tau > 0$  eindeutig auf den Anfangszustand  $x(0)$  des Systems schliessen kann.

### 7.3 Detektierbarkeit

Ein System ist **detektierbar**, wenn alle nicht beobachtbaren Zustände asymptotisch stabil sind.

## 8 Systemantwort 1.Ordnung

### 8.1 System 1. Ordnung

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot x(t) + \frac{k}{\tau} \cdot u(t), \quad y(t) = x(t)$$

Mit Zeitkonstante  $\tau$  und Eingangsstärke  $k$ .  $\Sigma(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$

### 8.2 Impulsantwort

$$u(t) = \delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

Es folgt die allgemeine Lösung:

$$y_\delta(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left( x_0 + \frac{k}{\tau} \right)$$

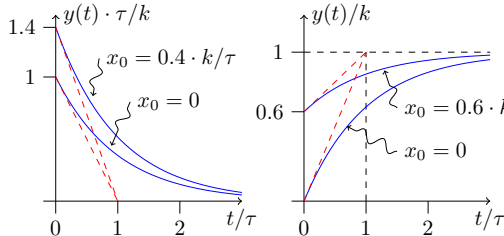
### 8.3 Sprungantwort

$$u(t) = h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Es folgt die allgemeine Lösung:

$$y_h(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot x_0 + k \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

## 8.4 Systemantworten - Impuls / Sprung



9 Systeme 2. Ordnung

9.1 Allgemeine Form

$$\Sigma(s) = k \cdot \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2} \quad \Sigma(0) = 1$$

Das System hat zwei Pole:

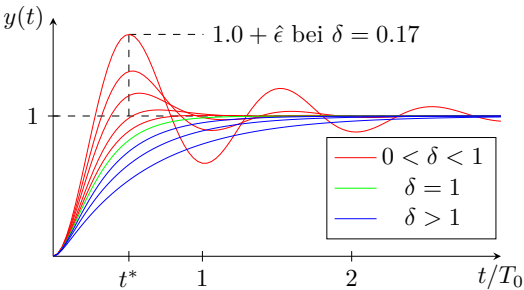
$$s_{1,2} = \pi_{1,2} = \omega_0 \cdot \left( -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1} \right)$$

Der Parameter  $\delta$  wird als Dämpfungsparameter bezeichnet.

- Für  $|\delta| < 1$  wird werden die Pole komplex. (Überschiessen)
- Für  $|\delta| > 1$  wird werden die Pole reel.

Der Parameter  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  entspricht der **natürlichen Frequenz**, mit  $T_0$  als **natürliche Periode**.

Die Zeitznormierte Sprungantwort für verschiedene  $\delta$  sieht wie folgt aus:

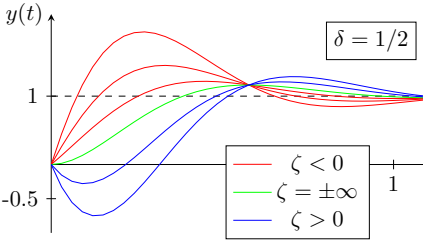


Eigenschaften des Dämpfungsparameters  $\delta$ :

$\delta \in (0, 1)$	<b>Unterkritisch gedämpft</b> Komplexe Pole Überschiessen
$\delta = 1$	<b>Kritisch gedämpft</b> Schnellstmögliches Konvergieren Kein Überschiessen
$\delta > 1$	<b>Überkritisch gedämpft</b> Reelle Pole Kein Überschiessen

9.2 Nullstelleneinfluss

- Je kleiner  $|\zeta|$ , desto stärker der Einfluss dieser Nullstelle. (→ Überschuss)
- Nullstelle nahe an einem Pol schwächt Einfluss des Pols.
- Für  $\zeta > 0$  gibt es einen **Undershoot**. (Nicht-minimalphasig) → Durch Änderung der Messgrösse, kann eine nicht-minimalphasige Nullstelle minimalphasig werden.



10 System Darstellungen

10.1 I/O Darstellung

$$y^{(n)}(t) + \dots + a_2 \cdot y^{(2)}(t) + a_1 \cdot y^{(1)}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot u^{(m)}(t) + \dots + b_2 \cdot u^{(2)}(t) + b_1 \cdot u^{(1)}(t) + b_0 \cdot u(t)$$

Die I/O Darstellung hat keine physikalische Koordinaten mehr, weshalb alle Anfangsbedingungen auf Null gesetzt werden:

$$y^{(n)} = 0, \forall n$$

10.2 Zustandsraum Normalform - Reglernormalform

Umwandlung von I/O Darstellung zu Zustandsraumdarstellung mittels kanonischer Koordinaten.

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & d \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & 1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \dots & d \end{array} \right]$$

10.3 Übertragungsfunktion

Ergibt **minimale Darstellung** unseres System. Nicht minimale Zustände werden gekürzt.

$$\Sigma(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b = \frac{c \cdot Adj(sI - A) \cdot b}{det(sI - A)}$$
$$= \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0}$$

$$\Sigma(s) = c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b$$

11 Frequenzgang / Frequenzantwort

11.1 Frequenzantwort

Harmonische Eingangsgrösse:

$$u(t) = \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$

Amplitude  $\alpha$ , Frequenz  $\omega$  in rad, Phasenverschiebung  $\phi$   
Der Ausgang eines Systems  $\Sigma(s)$ :

$$y(t) = y_{\text{transient}}(t) + y_{\infty}(t)$$

Unter der Annahme, dass  $\Sigma(s)$  **linear**, **zeitinvariant** und **asymptotisch stabil** ist, gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{transient}}(t) \rightarrow 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow y_{\infty}$$

Es gilt:

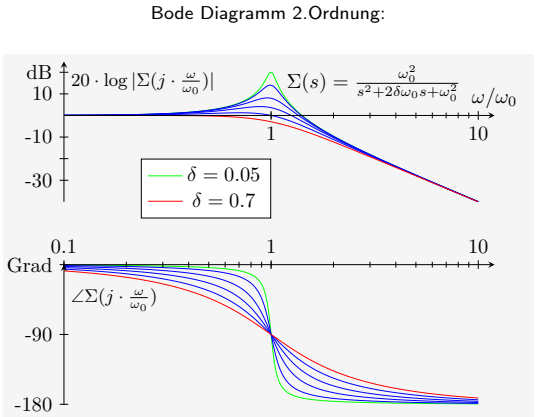
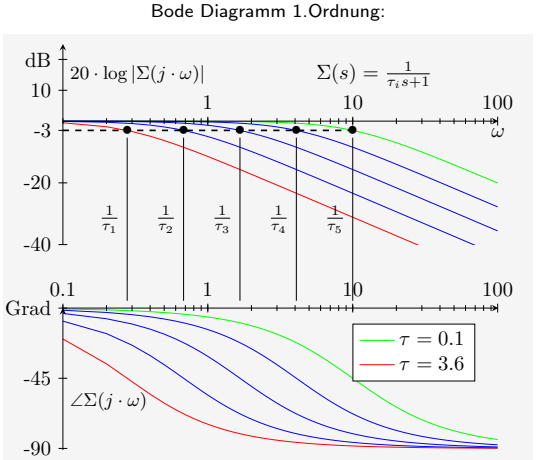
$$y_{\infty}(t) = m(\omega) \cdot \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi + \varphi(\omega))$$

Die Verstärkung  $m(\omega)$  und die Phasenverschiebung  $\varphi(\omega)$  sind systemabhängig:

$$y_{\infty}(t) = |\Sigma(j\omega)| \cdot \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi + \angle \Sigma(j\omega))$$

12 Bode

12.1 Bode Diagramme



**Vorsicht!** Die **resonante Frequenz** (maximale Verstärkung) ist nicht bei der natürlichen Frequenz  $\omega/\omega_0 = 1$ , sondern bei:

$$\omega_{max} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \delta^2}, \quad \delta \in \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

12.2 Umrechnung Dezimal und Dezibel

$$|\Sigma(s)|_{dB} = 20 \cdot \log_{10} |\Sigma(s)|$$

$$|\Sigma(s)| = 10^{\frac{|\Sigma(s)|_{dB}}{20}}$$

Dezimalskala	Dezibelskala
100	40
10	20
5	13.97
2	6.02
1	0
1/√2	-3.0103
0.1	-20
0.01	-40
0	-∞

12.3 Einfluss Pole und Nullstellen im Bode Diagramm

Pole/Zero Type	Magnitude	Phase
$Re(\pi_i) \leq 0 \rightarrow$ stable pole	-20 dB/dec	-90°
$Re(\pi_i) > 0 \rightarrow$ unstable pole	-20 dB/dec	+90°
$Re(\zeta_i) \leq 0 \rightarrow$ minphase zero	+20 dB/dec	+90°
$Re(\zeta_i) > 0 \rightarrow$ non-minphase zero	+20 dB/dec	-90°
$e^{-s \cdot \tau} \rightarrow$ Time delay	0 dB/dec	-ωτ

12.4 Bode's Law

The gradient of the magnitude plot ( $\kappa \cdot 20dB/dec$ ) determines the phase shift ( $\kappa \cdot \frac{\pi}{2}$ )

Gilt für Systeme mit  $\kappa \geq 2$

12.5 Asymptotische Eigenschaften von Frequenzantworten

Struktur einer allgemeinen Übertragungsfunktion:

$$\Sigma(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^k \cdot (s^{n-k} + a_{n-1-k} \cdot s^{n-1-k} + \dots + a_1 \cdot s + a_0)}$$

**Systemtyp  $k$**

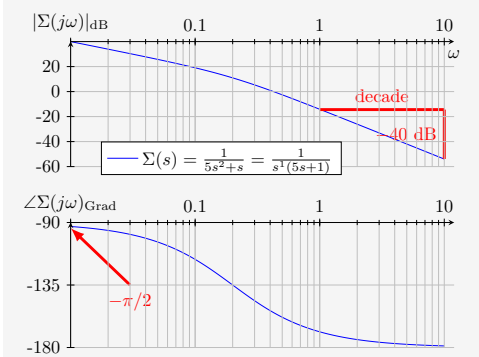
Der Systemtyp  $k$  entspricht der **Vielfachheit offener Integratoren** ( $\frac{1}{s^k}$ ) des Systems. Die Phase bei  $\omega = 0$  ist als folgende Funktion definiert:

$$\angle \Sigma(s) = \begin{cases} -k \cdot \frac{\pi}{2} & , \text{sign} \left( \frac{b_0}{a_0} \right) > 0 \\ -\pi - k \cdot \frac{\pi}{2} & , \text{sign} \left( \frac{b_0}{a_0} \right) < 0 \end{cases}$$

**Relativer Grad  $r = n - m$**  — (Steigung für  $w \rightarrow \infty$ )

$$\frac{\partial |\Sigma(j\omega)_{dB}|}{\partial \log(\omega)} = -r \cdot 20dB/dec, \quad w \rightarrow \infty$$

**Beispiel:** System  $\Sigma(s)$  mit  $k = 1, r = 2 - 0 = 2$

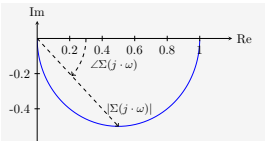


12.6 Nyquist Diagramme

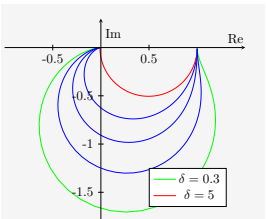
Ein allgemeines System 1. Ordnung bei der Frequenz  $s = j\omega$  hat folgende Magnitude und Phase:

$$|\Sigma(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}}$$
$$\angle \Sigma(j\omega) = -\arctan(\tau \cdot \omega)$$

Nyquist Diagramm 1.Ordnung:



Nyquist Diagramm 2.Ordnung:



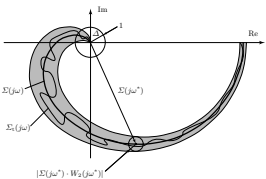
13 Modellunsicherheit

13.1 Nichtparametrische Unsicherheit

Die wahre Übertragungsfunktion  $\Sigma_t(s)$  liegt in der Menge  $\mathcal{S}$ :

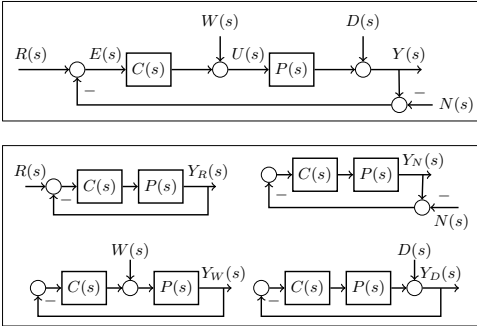
$$\mathcal{S} = \{\Sigma(s) \cdot (1 + \Delta \cdot W_2(s)) \mid |\Delta| \leq 1, \angle \Delta \in [-\pi, \pi]\}$$

- $\Sigma(s)$ : Nominelle ÜF, durch (imperfekte) Systemmodellierung gefunden.
- $\Delta$ : Unsicherheitsgenerator: Kreis in der komplexen Ebene.
- $W_2(s)$ : ÜF der Unsicherheit; quantifiziert die frequenz-abhängige Unsicherheit des Modells.



14 Analyse von Regelsystemen

14.1 Signale im Regelkreis:



$$Y_R(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \cdot R(s)$$

$$Y_N(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \cdot N(s)$$

$$Y_W(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} \cdot W(s)$$

$$Y_D(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} \cdot D(s)$$

Die gesamte Ausgangsgrösse  $Y(s)$  ergibt sich somit aus:

$$Y(s) = Y_R(s) + Y_N(s) + Y_W(s) + Y_D(s)$$

Kreisverstärkung	$L(s) = P(s) \cdot C(s)$	$(e \rightarrow y)$
Sensitivität	$S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$	$(d \rightarrow y, r \rightarrow e)$
Kompl. Sens.	$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$	$(r \rightarrow y, n \rightarrow y)$

Mit diesen kompakten Schreibweisen ergibt sich die folgende Beziehung:

$$Y(s) = S(s) \cdot [D(s) + P(s)W(s)] + T(s) \cdot [R(s) + N(s)]$$

Umrechnung

$$P(s) = \frac{z_1(s)}{z_2(s)} \quad C(s) = \frac{z_2(s)}{n_2(s)}$$

$$L(s) = \frac{z_1 z_2}{n_1 n_2} \quad T(s) = \frac{z_1 z_2}{n_1 n_2 + z_1 z_2} \quad S(s) = \frac{n_1 n_2}{n_1 n_2 + z_1 z_2}$$

14.2 Stabilität des geschlossenen Systems:

Für geschlossene Regelkreise ist die Stabilität gegeben, falls **alle ÜF asymptotisch stabil** sind ( $Re(\lambda_i) < 0, i = 1, \dots, n$ ). Die Beziehungen zwischen den Signalen sind gegeben durch:

$$\begin{bmatrix} U(s) \\ Y(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(s) & -S(s) \cdot C(s) & S(s) \cdot C(s) \\ S(s) \cdot P(s) & S(s) & T(s) \\ -S(s) \cdot P(s) & -S(s) & S(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W(s) \\ D(s) \\ R(s) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow S(s), T(s), S(s) \cdot C(s), S(s) \cdot P(s)$  dürfen nur asymptotisch stabile Pole haben.

Falls  $P(s)$  und  $C(s)$  nur asymptotisch stabile Pole haben, genügt es, die asymptotische Stabilität von  $S(s)$  und  $T(s)$  zu prüfen um die **interne Stabilität** zu garantieren.

14.3 Nyquist Theorem

Das Nyquist-Theorem kann die **asymptotische Stabilität** eines **geschlossenen** Regelkreissystems  $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$  durch Analyse seiner Kreisverstärkung  $L(s)$  (**offener** Regelkreis!) voraussagen. **Voraussetzungen:**

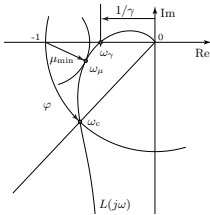
- Keine **Modellunsicherheit**  $W_2(s)$
- Keine **Kürzungen** von instabilen Polen/ nicht-minimalphasigen Nullstellen in  $L(s)$

14.3.1 Nominelles Stabilitätskriterium

$$n_c \stackrel{!}{=} \frac{n_0}{2} + n_+$$

- $n_c$ : Anzahl Umrundungen von  $L(j\omega)$  um den Punkt  $(-1 + j0)$ , wenn  $\omega$  zwischen  $(-\infty, \infty)$  variiert wird. (GGUZ positiv)
- $n_0$ : Anzahl Pole von  $L(s)$  mit Realteil = 0
- $n_+$ : Anzahl Pole von  $L(s)$  mit Realteil > 0

14.3.2 Phasen- und Verstärkungsreserve



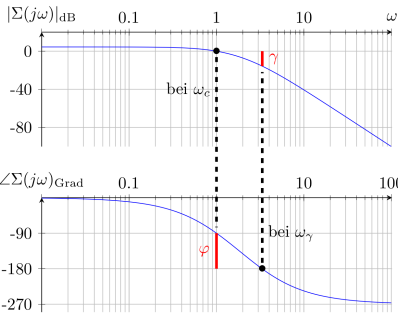
- $\gamma$ : Verstärkungsreserve zu  $(-1 + 0j)$  bei  $\angle L(j\omega) = -180^\circ$
- $\varphi$ : Phasenabstand zu  $-180^\circ$  bei der Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$
- $\mu$ : kleinste Distanz zwischen  $(-1 + 0j)$  und  $L(j\omega)$

$$\mu = \min_{\omega} |1 + L(j\omega)| = \frac{1}{\max_{\omega} |S(j\omega)|}$$

Um die Phasenreserve berechnen zu können, muss man die Phasen des offenen Regelkreises bei der Durchtrittsfrequenz berechnen.

1. Die Durchtrittsfrequenz durch Lösen der Gleichung  $|C(j\omega_c) \cdot P(j\omega_c)| = 1$
2. Nun wird die Phase bei der Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  ausgerechnet.  $\angle(L(j\omega_c))$
3. Um die Phasenreserve auszurechnen wird  $-\pi$  mit der soeben erhaltenen Phase bei der Durchtrittsfrequenz subtrahiert.

Auslesen der Reserven bei Bode-Diagrammen



14.3.3 Robustes Nyquist Theorem

Die wahre Kreisverstärkung des Systems  $L_t(s)$  liegt in der Menge  $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}} = \{L(s) \cdot (1 + \Delta \cdot W_2(s)) \mid |\Delta| \leq 1, \angle \Delta \in [-\pi, \pi]\}$$

Es wird angenommen, dass  $L(s)$  und  $L_t(s)$  dieselbe Anzahl instabile ( $n_+$ ) und stabile ( $n_0$ ) Pole haben.

Kriterium:

$$|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|, \forall \omega \in [0, \infty)$$

15 Design von Regelungssystemen

15.1 Frequenzbedingungen - Closed Loop

**Frequenzeigenschaften von Störungen und Rauschen**  
Intrinsische Kopplung von  $T(s)$  und  $S(s)$ :

$$T(s) + S(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} + \frac{1}{1 + L(s)} = 1$$

Die Einflüsse des Rauschens ( $N$  für Noise) und der Störung ( $D$  für Disturbance) auf den Ausgang sind wie folgt:

$$Y(s) = Y_D(s) + Y_N(s) = S(s) \cdot D(s) + T(s) \cdot N(s)$$

- **Rauschen** normalerweise bei **hohen** Frequenzen ( $\omega > \omega_n$ )
- **Störungen** normalerweise bei **tiefen** Frequenzen ( $\omega < \omega_d$ )

Daraus folgt:

**Für niedrige Frequenzen:**

$$|S(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right| \ll 1 \Rightarrow |L(j\omega)| \gg 1$$

**Für hohe Frequenzen:**

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| \ll 1 \Rightarrow |L(j\omega)| \ll 1$$

Global betrachtet, über alle  $\omega$ , muss  $S(s)$  für alle stabilen geschlossenen Regelkreise folgende Gleichung erfüllen:

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \cdot \sum_{i=1}^{n_+} \pi_i^+,$$

wobei  $n_+$  die Anzahl der instabilen Pole  $\pi^+$  von  $L(s)$  ist.

15.2 Beschränkungen Durchtrittsfrequenz

**Durchtrittsfrequenz:** Schnittp. 0-Linie im Bode Diagramm

$$|L(j\omega_c)| = 0\text{dB} = 1$$

**Bandbreite - Closed Loop:** Mass für höchste Frequenz des Eingangssignals die Regelkreis verfolgen kann.

$$|T(j\omega_b)| = -3\text{dB} \approx 0.7, \quad \omega_b \approx \omega_c$$

•**Beschränkung durch Modellunsicherheit:**

Aus dem robustem Stabilitätskriterium folgt:

$$|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|, \quad \forall \omega \in [0, \infty)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| < \left| \frac{1}{W_2(j\omega)} \right|$$

$$\Rightarrow |T(j\omega)| < |W_2^{-1}(j\omega)|$$

$$\omega_c \stackrel{!}{<} \frac{1}{10} \cdot \omega_2$$

$$|W_2(j\omega_2)| = 1$$

•**Beschränkung durch Totzeit  $\tau$ :**

$$L_{\tau}(s) = C(s) \cdot P(s) \cdot e^{(-\tau c + \tau p) \cdot s} = C(s) \cdot P(s) \cdot e^{-\tau \cdot s}$$

$$\omega_c \stackrel{!}{<} \frac{1}{2} \cdot \omega_{\tau} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tau}$$

Konservativer:  $\frac{1}{5}$

•**Beschränkung durch nicht-minimalphasige Nullstellen  $\omega_{\zeta+}$ :**

$$\omega_c \stackrel{!}{<} \frac{1}{2} \cdot \omega_{\zeta+}$$

Konservativer:  $\frac{1}{5}$

•**Beschränkung durch instabile Pole  $\pi^{+}$ :**

$$\omega_c \stackrel{!}{>} 2 \cdot \omega_{\pi^{+}}$$

wobei  $\omega_{\pi^{+}}$  der schnellste instabile Pol von L(s) ist (Pol mit dem grössten positiven Realteil)  
Konservativer: 5

Zusätzlich für instabile Pole  $\pi_i^{+}$  **mit Modellunsicherheit  $W_2(s)$**

$$\left|W_2(\pi_i^{+})\right| < 1, \quad \forall i$$

**Zusammenfassend für alle Beschränkungen:**

$$\max \left\{ 10 \cdot \omega_d, 2 \omega_{\pi^{+}} \right\} < \omega_c$$

$$\omega_c < \min \left\{ \frac{1}{10} \cdot \omega_n, \frac{1}{10} \cdot \omega_2, \frac{1}{2} \cdot \omega_{\tau}, \frac{1}{2} \cdot \omega_{\zeta+} \right\}$$

**15.3 Statischer Nachlauffehler**

$$E(s) = S(s) \cdot (R(s) + N(s) - D(s) - P(s) \cdot W(s))$$

Statischer Nachlauffehler auf **Sprungantwort**:

$$e_{\infty}^h = \lim_{t \rightarrow \infty} e^h(t) = \lim_{s \rightarrow 0+} s \cdot S(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0+} S(s) = S(0)$$

$$e_{\infty}^h = S(0) = \frac{1}{1 + L(0)}$$

$L(0)$  hängt vom Systemtyp  $k$  und der Kreisverstärkung  $L(s)$  ab:

$$L(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^k \cdot (s^{n-k} + a_{n-1-k} \cdot s^{n-1-k} + \dots + a_1 \cdot s + a_0)}$$

Es ergeben sich zwei Fälle für  $e_{\infty}^h$ :

$k = 0$

$\Rightarrow L(0) \rightarrow \frac{b_0}{a_0} \Rightarrow e_{\infty}^h = \frac{a_0}{a_0 + b_0}$

$k > 0$

$\Rightarrow L(0) \rightarrow \infty \Rightarrow e_{\infty}^h \rightarrow 0$

**15.4 Statischer Nachlauffehler für  $w(t)$**

Statischer Nachlauffehler auf **Sprungantwort** ( $w(t) = h(t)$ ):

$$\begin{aligned} e_{\infty}^h &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} -s \cdot S(s) P(s) W(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} -s \cdot \frac{P(s)}{1 + P(s) \cdot C(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{-P(0)}{1 + P(0) \cdot C(0)} \end{aligned}$$

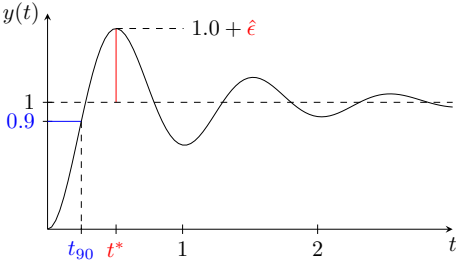
Für  $e_{\infty} = 0$  folgt  $|C(0)| = \infty$

**16 Spezifikationen**

**16.1 Spezifikationen - System 2. Ordnung**

Es wird **angenommen**, dass der geschlossene Regelkreis  $T(s)$  einem System **2. Ordnung** entspricht:

$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2} \quad T(0) = 1$$



$$\delta = \frac{-\ln(\hat{\epsilon})}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\hat{\epsilon})}}, \quad \omega_0 = (0.14 + 0.4 \cdot \delta) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{t_{90}}$$

$$\omega_c = \omega_0 \cdot \sqrt{\sqrt{4 \cdot \delta(\hat{\epsilon})^4 + 1} - 2 \cdot \delta(\hat{\epsilon})^2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{\sqrt{4 \cdot \delta(\hat{\epsilon})^4 + 1} - 2 \cdot \delta(\hat{\epsilon})^2}{2 \cdot \delta(\hat{\epsilon})} \right)$$

Die obigen Gleichungen können für  $\underline{\delta \in (0.45, 1)}$  folgendermassen vereinfacht werden:

$$\omega_c \approx \frac{1.7}{t_{90}}, \quad \varphi \approx 71^\circ - 117^\circ \cdot \hat{\epsilon}$$

**16.2 Frequenzbereich - Spezifikationen**

Um die **Auswirkungen von Störungen und Rauschen** um die Durchtrittsfrequenz zu minimieren, beschränkt man  $S(s)$  und  $T(s)$  mit einem **Maximalwert**.

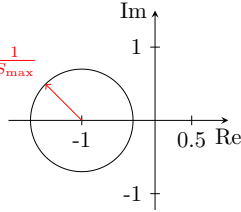
$$\|S\|_{\infty} < S_{max}, \quad \|T\|_{\infty} < T_{max}, \quad S_{max}, T_{max} > 1,$$

wobei per Definition  $\|\Sigma\|_{\infty} = \max_{\omega} |\Sigma(j\omega)|$  Die Bedingungen werden in Anforderungen an die Kreisverstärkung  $L(s)$  umgewandelt:

$$\|S\|_{\infty} < S_{max} \Leftrightarrow L(j\omega) \notin \left\{ |1 + z| \leq \frac{1}{S_{max}} \mid z \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\|T\|_{\infty} < T_{max} \Leftrightarrow$$

$$L(j\omega) \notin \left\{ \left| \frac{T_{max}^2}{T_{max}^2 - 1} + z \right| \leq \frac{T_{max}}{T_{max}^2 - 1} \mid z \in \mathbb{C} \right\}$$



**17 Reglerauslegung**

**17.1 PID-Regler**

PID-Reglerstruktur im Zeitbereich:

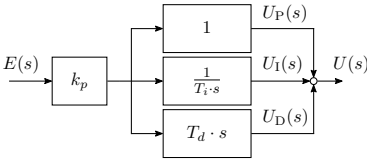
$$u_{PID}(t) = k_p \cdot \left( \underbrace{e(t)}_{\text{P-Term}} + \underbrace{\frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\text{I-Term}} + \underbrace{T_d \cdot \frac{d}{dt} e(t)}_{\text{D-Term}} \right)$$

Transformation in den Frequenzbereich:

$$C_{PID}(s) = k_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right) = \frac{U(s)}{E(s)}$$

$u(t)$  wird durch den D-Term sehr empfindlich auf **Rauschen**. Unterdrücken des Rauschens bei hohen Frequenzen mittels **roll-off Term**:

$$C_{PID}(s) = k_p \cdot \underbrace{\left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right)}_{\text{akausal}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^2}}_{\text{roll-off}}$$



**Pro Term ein Freiheitsgrad:** Dh. mit einem P Regler kann nur die Durchtrittsfrequenz oder die Phasenreserve eines Systems individuell verändert werden. Um beide Terme beeinflussen zu können braucht man mehr Freiheitsgrade.

**17.1.1 Proportionales Verhalten (P-Term)**

$$u_P(t) = k_p \cdot e(t), \quad U_P(s) = k_p \cdot E(s)$$

Der P-Term reagiert auf den **momentanen** Wert des Fehlers  $e(t)$ . Die Stärke der Reaktion ist **proportional** zur Grösse des momentanen Fehlers.

Kann nur **Magnitude** beeinflussen.

**17.1.2 Integratives Verhalten (I-Term)**

$$u_I(t) = \frac{k_p}{T_i} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad U_I(s) = \frac{k_p}{T_i} \cdot \frac{1}{s} \cdot E(s)$$

Der I-Term reagiert zum Zeitpunkt t proportional auf den **kumulierten** Fehler, für  $t \in [0, t]$ .

Falls ein statischer Nachlauffehler vorhanden ist, wird dieser aufintegriert und der Reglerausgang wird immer grösser, bis kein Fehler mehr vorhanden ist.

**Nachteil:** Ausgang kann theoretisch **beliebig gross** werden.

Je grösser  $T_i$ , desto **langsamer** die Reaktion.  
 $T_i \uparrow \Rightarrow$  positive Phasendrehung & verkleinerung der Gesamtverst.

**I-Terme führen immer zu einem Phasenverlust**

**17.1.3 Derivatives Verhalten (D-Term)**

$$u_D(t) = k_p \cdot T_d \cdot \frac{d}{dt} e(t), \quad U_D(s) = k_p \cdot T_d \cdot s \cdot E(s)$$

Der D-Term reagiert auf die **momentane Änderungsrate** des Fehlers.

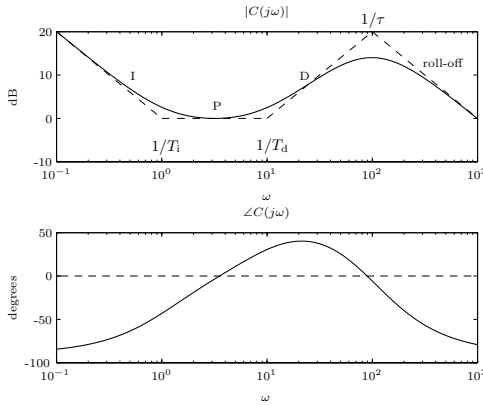
Der D-Term wirkt wie ein **Dämpfer** gegen ein schnelles Erhöhen oder Verringern des Fehlers.

Falls die Veränderung stark ist, kann der Reglerausgang **grösser** als der **grösstmögliche** Eingang eines Systems sein.

Faster initial response and less oscillative.

**D-Terme führen immer zu einem Phasenanstieg.**

**Bode Diagramm eines PID-Reglers mit roll-off Term**



1 Regelungstechnik II

2 Aström-Hägglund Verfahren

- Nur P-Regler, finde kritische Verstärkung  $k_p^*$  und  $T^*$
- $\mu_{\min} = 0.5 \Rightarrow$  aggressiver Regler
- $\mu_{\min} = 0.7 \Rightarrow$  konservativer/robuster Regler
- Geeignet falls Totzeit nicht signifikant ist.
- Es wird nicht unbedingt ein Modell der Strecke benötigt.  $k_p^*, \omega^*$  und  $|P(0)|$  können experimentell bestimmt werden.
- Diese Methode garantiert weder ein stabiles noch ein gutes Design!

$$k_p^* \cdot P(j\omega^*) \stackrel{!}{=} -1 + 0 \cdot j$$
$$T^* = \frac{2\pi}{\omega^*}$$

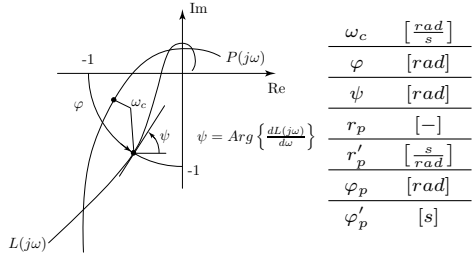
$$\kappa = \frac{1}{|P(0)| \cdot k_p^*}, \quad x = \alpha_{0,x} \cdot e^{\alpha_{1,x} \cdot \kappa + \alpha_{2,x} \cdot \kappa^2}$$

x	$\mu_{\min} = 0.7$			$\mu_{\min} = 0.5$		
	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$
$\frac{k_p}{k_p^*}$	0.053	2.90	-2.6	0.13	1.9	-1.30
$\frac{T^*}{T^*}$	0.900	-4.40	2.7	0.90	-4.4	2.70

x	$\mu_{\min} = 0.7$			$\mu_{\min} = 0.5$		
	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$
$\frac{k_p}{k_p^*}$	0.33	-0.31	-1.00	0.72	-1.60	1.20
$\frac{T^*}{T^*}$	0.76	-1.60	-0.36	0.59	-1.30	0.38
$\frac{T^*}{T^*}$	0.17	-0.46	-2.10	0.15	-1.40	0.56

3 Direktspezifikation

Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$ , Phasenreserve  $\varphi$  und Steigung  $\psi$  von  $L(j\omega)$  adS  $\omega_c$  sind wählbar.



$$P(j\omega_c) = r_p \cdot e^{j \cdot \varphi_p}$$

$$r'_p = \left. \frac{\partial r_p(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c}, \quad \varphi'_p = \left. \frac{\partial \varphi_p(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c}$$

$$k_p = -\frac{1}{r_p} \cos(\varphi - \varphi_p)$$
$$T_d = \frac{1}{2} \cdot \left( \tan(\psi - \varphi_p) \left( \frac{r'_p}{r_p} - \varphi'_p \tan(\varphi - \varphi_p) \right) + \tan(\varphi - \varphi_p) \left( \frac{1}{\omega_c} - \frac{r'_p}{r_p} \right) - \varphi'_p \right)$$
$$T_i = (T_d \cdot \omega_c^2 - \tan(\varphi - \varphi_p) \cdot \omega_c)^{-1}$$

Ein Regler der nach dieser Methode designed wurde ist nie sicher stabil. Stabilität muss immer im nach hinein noch überprüft werden.

4 Reglerauslegung mit Totzeit

4.1 Totzeit

Ein geschlossener Regelkreis kann eine Totzeiten im Regler und/ oder in der Regelstrecke haben. Die Totzeit ist **signifikant** falls gilt:

$$\frac{T}{T + \tau} > 0.3, \quad \text{mit } T = (T_c + T_p)$$

Wobei  $T_c$  die Totzeit des Reglers und  $T_p$  die Totzeit der Strecke  $P(s)$  ist.

$$P(s) \approx \frac{k}{\tau s + 1} \cdot e^{-T_p \cdot s}$$

Betragsmässig grosse Pole vernachlässigbar falls System höherer Ordnung vorliegt.

4.2 Einfacher Prädiktiver PI Regler

Wir versuchen mit einem Modell die Totzeit zu überbrücken/ die Zukunft vorauszusagen. Charakterisiert durch  $\sigma$ . Gegeben:

$$P(s) \approx \frac{k}{\tau s + 1} \cdot e^{-T s}$$

Gewünscht:

$$T^*(s) = \frac{1}{s\sigma\tau + 1} \cdot e^{-T s}$$

Es folgt:

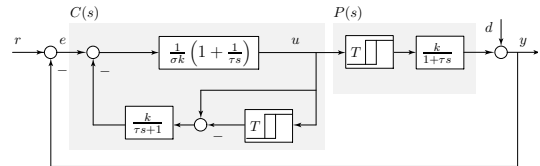
$$C(s) = \frac{T(s)}{P(s) \cdot (1 - T(s))} = \frac{\tau \cdot s + 1}{k \cdot (\sigma \cdot \tau \cdot s + 1 - e^{-T s})}$$

Dieser Regler ist nur möglich weil der rationale Teil der Strecke und der Sensitivität minimalphasig sind.

$$S(s) = 1 - \frac{1}{s\sigma\tau + 1} \cdot e^{-T s}$$

Wie man sieht gilt:  $\lim_{s \rightarrow 0} S(s) = 0$  das heisst es werden Fehler unterdrückt und das ist nur möglich wenn der Regler einen offenen Integrator hat (die Strecke hat keinen offenen Intergrator). Dass  $C(s)$  einen offenen Integrator hat kann man mit der Reihendefinition von  $e$  zeigen.

Man kann die Reglerstruktur auch anderst darstellen:



$U(s)$  kann dann folgendermassen dargestellt werden:

$$U(s) = \underbrace{\frac{1}{s k} \left( 1 + \frac{1}{\tau s} \right) E(s)}_{\text{PI-Regler}} - \underbrace{\frac{1}{\sigma \tau s} \left( 1 - e^{-T s} \right) U(s)}_{\text{Prädiktive Korrektur}}$$

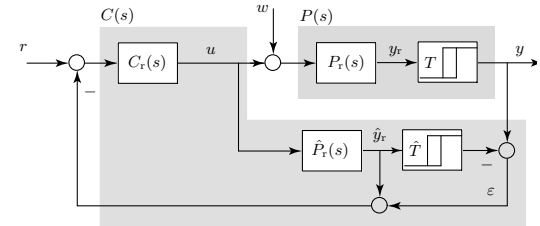
Es kann gezeigt werden, dass diese Übertragungsfunktion äquivalent mit dem oben definierten  $C(s)$  ist.

4.3 Smith Predictor

Man nimmt an, dass die Regelstrecke einen rationalen Teil und eine Totzeit hat.

$$P(s) = P_r(s) \cdot e^{-T s}$$

Dabei muss  $P_r(s)$  asymptotisch stabil sein.



$\hat{P}_r(s)$  entspricht dabei einer Schätzung der Regelstrecke. Und  $\hat{T}$  entspricht einer Schätzung der Totzeit der Strecke.

Die Totzeit ist physikalischer Herkunft und kann daher nicht komplett entfernt werden.

Für eine gute Robustheit, muss die Totzeit möglichst genau sein.

Wenn die Schätzungen perfekt sind und keine Störung  $w$  am Steuersignal wirkt, so ist  $\varepsilon = 0$ . Das heisst der Regler hat in sich eine Simulation mit welcher er die Strecke ohne Totzeit regelt. Der wahre Output ist dann der Output der Simulation um die Totzeit verschoben:

$$Y(s) = \frac{P_r(s) \cdot C_r(s)}{1 + P_r(s) \cdot C_r(s)} \cdot R(s) \cdot e^{-sT} = T_r(s) \cdot R(s) \cdot e^{-sT}$$

Die Übertragungsfunktion des Reglers ist:

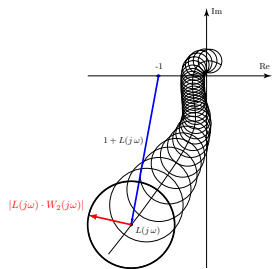
$$C(s) = \frac{C_r(s)}{1 + C_r(s) \cdot P(s) \cdot (1 - e^{-T s})}$$

Achtung je nach Aufgabe die Funktion neu Herleiten.

5 Regelgüte

5.1 Robuste Nyquist Stabilität

$$|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|$$



5.2 Nominelle Regelgüte

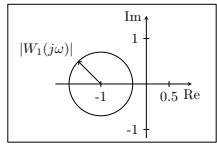
Eine betragsmässig kleine Sensitivität  $S(s)$  garantiert eine gute Störungsunterdrückung und gutes reference tracking.

Das Ziel ist es nun die Sensitivität Betragsmässig zu beschränken:

$$\|S(s) \cdot W_1(s)\|_{\infty} < 1 \quad \Rightarrow \quad |S(j\omega)| < |W_1^{-1}(j\omega)|$$

$$|W_1(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|$$

$L(j\omega)$  darf also nicht in einem um -1 zentrierten Kreis mit Radius  $|W_1(j\omega)|$  eintreten.

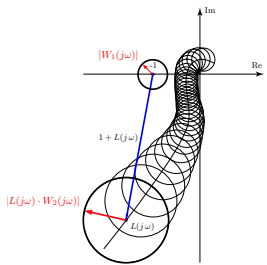


5.3 Robuste Regelgüte

Gleichzeitiges erfüllen des **robusten Nyquist Theorems** und der **nominellen Regelgüte**.

$$|W_1(j\omega) \cdot S(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot T(j\omega)| < 1$$

$$|W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|$$



**Approximative Spezifikationen:**

Wir formen obige Bedingung nach  $L(j\omega)$  um und untersuchen sie für verschieden Frequenzen:

Tiefe Frequenzen:  $\omega < 0.1 \cdot \omega_c \quad \Rightarrow \quad |L(j\omega)| \gg 1$

$$|L(j\omega)| > \frac{|W_1(j\omega)|}{1 - |W_2(j\omega)|}$$

Eine Lösung existiert für  $|W_2(j\omega)| < 1$  In Worten: Eine gute Performance erreicht man nur mit einem guten Modell.

Um zu überprüfen ob System dieses Kriterium erfüllt  $\omega \rightarrow 0$  laufen lassen. Und schauen ob die beiden Grenzwerte die Ungleichung erfüllen

Hohe Frequenzen:  $\omega > 10 \cdot \omega_c \quad \Rightarrow \quad |L(j\omega)| \ll 1$

$$|L(j\omega)| < \frac{1 - |W_1(j\omega)|}{|W_2(j\omega)|}$$

Eine Lösung existiert für  $|W_2(j\omega)| < 1$

Um zu überprüfen ob System dieses Kriterium erfüllt  $\omega \rightarrow \infty$  laufen lassen. Und schauen ob die beiden Grenzwerte die Ungleichung erfüllen

5.4 Kompatibilitätsbedingungen

$\omega_1$  ist definiert als:  $|W_1(j\omega_1)| = 1$ .

Unser System muss natürlich alle die alten Kompatibilitätsbedingungen erfüllen aber für  $\omega_1$  gibt es auch noch bedingungen:

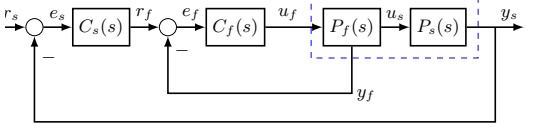
$$\omega_1 \approx \max\{10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \omega_n + \}$$

Für genaue Beschreibung: Theory Sheet!



6 Kaskadierte Regelsysteme

Kaskadierte Regelsysteme eignen sich für Systeme mit langsamen und schnellen Dynamiken. Um die volle Bandbreite der schnellen Dynamik auszunutzen, werden verschiedene Regler für die Teilsysteme ausgelegt.



Für die schnelle Dynamik wird oft kein Integrator verwendet. (Statischer Nachlauffehler kann vom 'langsamen' Regler eliminiert werden.)  
Regelstrecke muss **nicht asymptotisch stabil** sein.  
Die Regelstrecke kann Totzeiten enthalten.  
Es gibt keine Einschränkungen für den inneren Regelkreis.  
Kann wie ein "normaler" Regler verwendet werden. (wenn SISO)  
**Dynamik des Inneren Systems:**

$$\frac{y_s}{r_f} = P_I = \frac{C_f P_f}{1 + C_f P_f} \cdot P_s$$

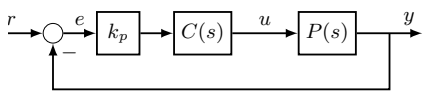
**Dynamik des Äusseren System:**

$$\frac{y_s}{r_s} = P_E = \frac{C_s P_I}{1 + C_s P_I} = \frac{C_s C_f P_f P_s}{1 + C_f P_f + C_s C_f P_f P_s}$$

**Achtung je nach Aufgabe die Funktion neu Herleiten.**

7 Wurzelortskurven - Root-Locus

Mit diesem Verfahren kann man die Pole des **geschlossenen Regelkreises** setzen.  
Hierfür wird folgende Regelstruktur betrachtet:



Die Verstärkung  $k_p$  des Reglers  $C(s)$  wird abgespaltet und separat geschrieben.  
Wenn man die Pole in Abhängigkeit von  $k_p$  plottet, erhält man die Wurzelortskurven.

**Annahmen:**

- stabiles, minimalphasiges  $L(s)$
- $k_p > 0$

Die Pole der geschlossenen Regelstrecke ergeben sich aus folgender Gleichung:

$$1 + k_p \cdot L(s) = 0$$

Mit  $L(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$  wird dieser Ausdruck zu:

$$1 + k_p \cdot \frac{b(s)}{a(s)} = 0$$

$$a(s) + k_p \cdot b(s) = p(s, k_p)$$

Wobei  $p(s, k_p)$  das Polynom des Root-Locus darstellt.

**Fallunterscheidung:**

Für sehr kleine  $k_p$  nähern sich die Pole von  $T(s)$  den **Polen** von  $L(s)$ .

$$k_p \rightarrow 0, \quad p(s, k_p) \approx a(s)$$

Für sehr grosse  $k_p$  nähern sich die Pole von  $T(s)$  den **Nullstellen** von  $L(s)$ .

$$k_p \rightarrow \infty, \quad p(s, k_p) \approx k_p \cdot b(s)$$

$L(s)$  besitzt:

- m Nullstellen
- n Pole

Für kausale (physikalisch realisierbare)  $L(s)$  gilt:  $n \geq m$

Die n-m übrigen Pole verschwinden gemäss den Asymptoten im Unendlichen.

Die **Asymptoten** starten alle im Punkt  $\sigma_a + j \cdot 0$

$$\sigma_a = \frac{1}{n-m} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \text{Re}(\pi_i) - \sum_{i=1}^m \text{Re}(\zeta_i) \right)$$

und verlassen diesen mit dem Winkel  $\delta_i$

$$\delta_i = \frac{\pi("3.14")}{n-m} \cdot (2 \cdot (i-1) + 1) [\text{rad}], \quad i = 1, \dots, n-m$$

7.1 Zugehörigkeitstest

Ist  $z \in \mathbb{C}$  Teil des Root-Locus bzw. möglicher Pol von  $T(s)$ ?

$$\sum_{i=1}^m \angle(z - \zeta_i) - \sum_{i=1}^n \angle(z - \pi_i) \stackrel{!}{=} -\pi \pm k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{N}$$

7.2 Alternativer Zugehörigkeitstest

geg.:  $P(s)$ , gewünschter Pol  $z$  von  $T(s)$

ges.:  $C(s)$

- $z$  ist nicht Teil des RL mit  $C(s) = 1$ .

1.  $C(s)$  mit **realer** Pol- oder Nullstelle erweitern

2. Mittels Zugehörigkeitstest Betrag der Pol- bzw. Nullstelle berechnen

7.3 Root-Locus Skizzierhilfen

- Immer symmetrisch zur reellen Achse

- Treffen sich zwei Pole  $\rightarrow 90^\circ$  in komplexer Ebene

- Alle Punkte auf der reellen Achse links von einer **ungeraden** Anzahl Polen und Nullstellen, sind potentielle Pole von  $T(s)$ .

- Pole laufen immer auf Nullstellen zu.

- Pole sind durch Kreuze gekennzeichnet / Nullstellen durch Kreise

- Pole von  $T(s)$  wandern von den Polen von  $L(s)$  zu den Nullstellen von  $L(s)$ , symmetrisch zur Reellen Achse.

- Abschnitte der Reellen-Achse sind mögliche Pole von  $T(s)$  wenn die Anzahl an Polen und Nullstellen rechts davon eine ungerade Zahl ist.

- Treffen sich zwei Polverläufe auf der Reellen Achse brechen sie mit  $90^\circ$  in die Komplexe Ebene aus.

- Überschüssige Pole wandern entlang von Asymptoten ins Unendliche.

8 Numerische Regleroptimierung

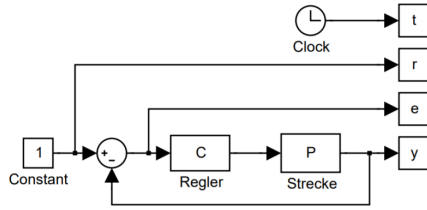
Man kriert eine Kostenfunktion  $J(k_p, T_i)$ , die durch die Wahl der optimalen Parameter  $k_p$  und  $T_i$  minimiert werden soll. Bsp.:

$$J(k_p, T_i) = \mu_1 \cdot \underbrace{\int_0^\infty e^2(t) dt}_{\text{static error}} + \mu_2 \cdot \underbrace{\max_t(y(t) - 1)}_{\text{Überschwingen}} + \mu_3 \cdot \underbrace{(1 - \min_\omega(|1 + L(j\omega)|))}_{\text{minimum return diff } \mu_{\min}}$$

8.0.1 Beispiel

Man hat einen PID Regler, mit roll-off (Tiefpass erster Ordnung, Eckfrequenz  $10 [\text{rad/s}]$ ). Dieser soll bezüglich Einheitssprung simuliert werden.

Simulations-file ist gegeben:



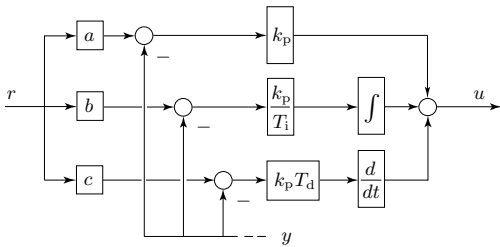
Das Gütekriterium soll aus dem maximalen Überschwinger von y und der Summe der Quadrate der Regelfehler e im Verhältnis 2:1 bestehen. Die Simulation soll 15s dauern.

Das ganze kann mit folgendem Matlab-Code gemacht werden:

```
%-----
% mfile 1
global C Cr
pC0 = [1,1,1];
Cr = tf(10,[1,10]);
Cp_opt = fminsearch(@opti,pC0)
%-----
% mfile 2
function J = opti(pC)
global C Cr
Cn = tf([pC(1)*pC(2)*pC(3),pC(1)*pC(2),pC(1)], [pC(2) 0]);
C = Cn*Cr;
sim('optiSys',15);
J = e'*e+2*max(y-1);
%-----
```

## 9 Regler in der Praxis

### 9.1 Set Point Weights



→ Kein Einfluss auf die **Stabilität o. Robustheit** des geschl. Regelkreises oder **Störungsunterdrückung**.  
→ Kann **reference tracking** beeinflussen.

Vormassieren der **Referenz r**.

- Normalerweise  $b = 1$ : Kein statischer Nachlauffehler, wenn  $r$  konstant 1 ist.
- Oft  $c = 0$ : Schnelle Referenzen → grosse Signale auf D-Teil. Normalerweise will man nur Änderungen des Ausgangssignals dämpfen.
- $a \rightarrow$  Aström-Hägglund

Bestimmung von **a** mittels **AH** Verfahren

$$a = \alpha_{0,x} \cdot e^{\alpha_{1,x} \cdot \kappa + \alpha_{2,x} \cdot \kappa^2}$$

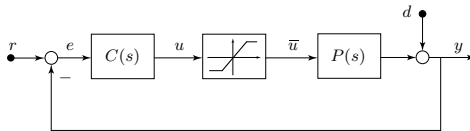
	$\mu_{\min} = 0.7$			$\mu_{\min} = 0.5$		
	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$
PI	1.10	-0.0061	1.8	0.48	0.40	-0.17
PID	0.58	-1.3000	3.5	0.25	0.56	-1.20

### 9.2 Saturation und Anti Reset Windup

#### Saturation

Aktuatoren können in der Realität nie beliebig kleine oder beliebig grosse Sollsignale  $u(t)$  umsetzen.

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_{\min} & \text{if } u(t) < u_{\min} \\ u_{\max} & \text{if } u(t) > u_{\max} \\ u(t) & \text{else} \end{cases}$$



#### Anti Reset Windup (ARW)

Falls man saturiert, wird die zu **integrierende Grösse reduziert**, sodass sich der Integrator in der Saturationsphase nicht zu stark füllt.

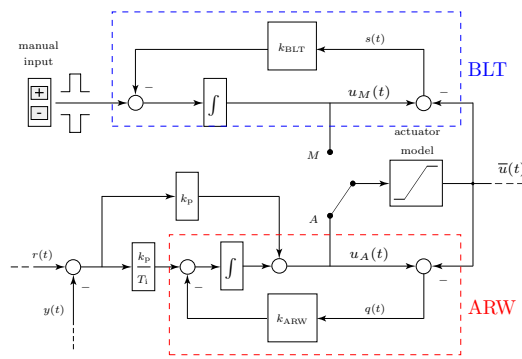
Je stärker die Aktuatoren saturieren, umso mehr wirkt man der Integration des Fehlers entgegen.

Nur bei offenem Integrator im Regler **sinnvoll und anwendbar**.

#### Bumpless Transfer

Um ein System zu testen, macht es oft Sinn einen manuellen (M) und einen automatischen Modus (A) zu haben.

Für einen reibungslosen Übergang zwischen den zwei Modi verwendet man folgende Regelstruktur:



### 9.2.1 Beispiel

$P(s) = \frac{3}{1+s}$  und  $C(s) = 1 + \frac{1}{5s}$ . Aktuator hat Saturation so dass:  $-0.5 \leq u \leq 0.5$ . Anti-Reset-Windup ist nicht vorhanden. Der Aktuator ist von Anfang an bis 2.3s saturiert bei einem Einheitssprung. **Frage:** Wie gross ist  $y(t = 1s)$ ?

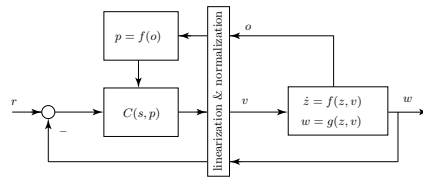
Weil der Aktuator saturiert ist bis 2.3s müssen wir die Antwort der Strecke auf einen Sprung der Höhe 0.5 berechnen:

$$y(s) = P(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{3}{s} \cdot \frac{1}{1+s} = \frac{3}{s(1+s)}$$

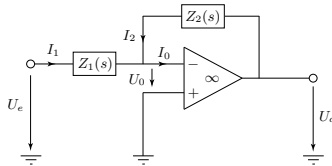
$$y(t) = \frac{3}{2} e^{-t} \cdot (e^t - 1) \Rightarrow y(t = 1) = 0.95$$

### 9.3 Gain Scheduling

Gain scheduling wird meist für **nichtlineare Systeme** verwendet, die um **verschiedene Betriebspunkte** linearisiert werden. Für jeden Betriebspunkt kann ein anderer linearer Regler ausgelegt werden.



### 9.4 Analoge Realisierung



Die Übertragungsfunktion von  $U_e(s)$  nach  $U_a(s)$  lautet:

$$\Sigma(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

$Z_1(s)$  und  $Z_2(s)$  bestehen aus Widerständen ( $R$ ), Induktoren ( $L$ ) und Kapazitäten ( $C$ ) mit den Impedanzen:

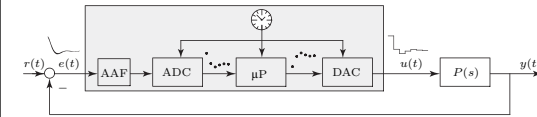
$$Z_R(s) = R, \quad Z_L(s) = sL, \quad Z_C(s) = \frac{1}{sC}$$

Es gelten die **Kirchhoff'schen Regeln**.

## 10 Zeitdiskrete Systeme

### 10.1 Zeitdiskrete Realisierung

Umwandlung eines continuous-time Reglers  $C(s)$  zu einem discrete-time Regler  $C(z)$ . In der Realität gibt es keine kontinuierlichen Berechnungen. Die neuen Eingänge  $u(t)$  werden nur zu fixen Zeitpunkten berechnet.



AAF: Anti-Aliasing Filter; Tiefpassfilter (z-Transform ist nicht eindeutig)

ADC: Analog-to-Digital Converter; Konvertiert kontinuierliche zu diskreten Signalen.

$\mu P$ : Mikroprozessor; Berechnet zeitdiskreten Eingang.

DAC: Digital-to-Analog Converter; Konvertiert diskrete zu kontinuierlichen Signalen.

Der DAC wird meistens mit einem **Zero-order Hold (ZOH)** realisiert. (Siehe Darstellung output Signal)

### 10.2 Anti-Aliasing - Bedingung

$f$  = Anzahl Zwischenräume pro Sekunde  
 $n \text{ bit} = 2^n - 1$  Samples möglich

$$f_s \geq 2 \cdot f_{max} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

**Totzeit  $\tau$  durch Abtasten**      **Phasenverlust durch Abtasten**

$$\tau = \frac{T_s}{2} s \quad \Delta\varphi = \frac{T_s}{2} \omega$$

### 10.3 Stabilität

Pole in der z-Ebene sind stabil, wenn sie innerhalb des Einheitskreises liegen.  $|\pi_i| < 1 \quad \forall i$

### 10.4 Z-Transformation

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \cdot x(k)$$

**Wichtige Eigenschaften:**

$$x(k+1) \leftrightarrow z \cdot X(z) - z \cdot x(0)$$

$$x(k-1) \leftrightarrow z^{-1} \cdot X(z)$$

$$z = e^{sT_s}, \quad x(k+n) = z^n X(z)$$

Ein Diskretes System kann dargestellt werden als:

$$x(k+1) = F \cdot x(k) + G \cdot u(k), \quad y(k)C \cdot x(k) + D \cdot u(k)$$

Wenn  $u(k) = 0 \quad \forall k$  dann gilt:

$$x(k+1) = F \cdot x(k), \quad \text{bzw.} \quad x(n) = F^n x(0)$$

$y(k = n)$  eines Diskreten System berechnen:

Beispiel:

$$\Sigma(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{az + b}{cz^2 + dz + e}$$

$$\rightarrow Y(z)(cz^2 + dz + e) = U(z)(az + b)$$

Einsetzen von  $Y(z)z^m = y(k+m)$  ergibt:

$$cy(k+2) + dy(k+1) + ey(k) = au(k+1) + bu(k)$$

Verschieben durch Koordinaten Transformation  $y(k+2) \rightarrow y(k)$

$$cy(k) + dy(k-1) + ey(k-2) = au(k-1) + bu(k-2)$$

Auflösen nach  $y(k)$ ,  $k = n$  setzen und gegebenen Werte Einsetzen

### 10.5 Emulationen

**Abtastzeit  $T_s$**  muss im Vergl. zur **Systemdynamik  $T_c$**  klein sein.

$$T_s < \frac{1}{10} T_c, \quad 10 \omega_c \leq \omega_s$$

**Tustin Emulation**

(Zeitkont. Pole bleiben stabil)

$$s \approx \frac{2 \cdot (z-1)}{T_s \cdot (z+1)} \Leftrightarrow z \approx \frac{1 + s \cdot \frac{T_s}{2}}{1 - s \cdot \frac{T_s}{2}}$$

**Euler Forward Emulation**

$$s \approx \frac{z-1}{T_s} \Leftrightarrow z \approx s \cdot T_s + 1$$

**Euler Backward Emulation**

(Zeitkont. Pole bleiben stabil)

$$s \approx \frac{z-1}{T_s \cdot z} \Leftrightarrow z \approx \frac{1}{1 - s \cdot T_s}$$

### 10.5.1 Abtastzeit bestimmen

Funktion gegeben und Abtastzeit gefragt.

1. Entsprechende Emulation einsetzen (eine von oben)
2. Pole bestimmen in Abhängigkeit der Abtastzeit bestimmen
3. Bedingungen setzen damit Pole Betrag kleiner 1 haben  $|\pi_i| < 1$
4. Abtastzeit bestimmen

**Beispiel:**

**Achtung das ist ein Beispiel mit der Euler Forward!!!**

**Am Test kann es eine andere sein!!!**

$$C(s) = \frac{a(s)}{b(s)} \stackrel{z.B.}{=} \frac{s+1}{(s+2)(s+10)}$$

Emulation einsetzen:

$$s = \frac{z-1}{T_s}$$

Der Nenner wird zu:

$$b(z) = \left( \frac{1}{T_s} (z-1) + 2 \right) \left( \frac{1}{T_s} (z-1) + 10 \right)$$

Die Pole werden somit:

$$\pi_1 = 1 - 2T_s, \quad \pi_2 = 1 - 10T_s$$

Da  $T_s$  real ist, kann man Extremfälle einsetzen.

$$1 - 2T_s > -1 \rightarrow T_s < 1s$$

$$1 - 2T_s < +1 \rightarrow T_s > 0s$$

$$1 - 10T_s > -1 \rightarrow T_s < 0.2s$$

$$1 - 10T_s < +1 \rightarrow T_s > 0s$$

Somit muss gelten:

$$0s < T_s < 0.2s$$

11 Algebraische Stabilitätskriterien

Im Folgenden werden zwei Verfahren gezeigt, die zeigen, ob ein Polynom

$$a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0, \quad \boxed{a_n > 0}$$

alle Nullstellen in der linken komplexen Halbebene hat. Die Bedingung  $a_i > 0 \ \forall i$  ist notwendig aber nicht hinreichend.

11.1 Hurwitz Kriterium

Die Koeffizienten  $a_i$  seien bekannt. Alle Nullstellen des obigen Polynoms liegen in der linken komplexen Halbebene, iff alle Determinanten der Untermatrizen von H strikt positiv sind.

$$H_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$H_n = \mathbb{R}^{n \times n} \tag{1}$$

11.2 Kharitonov Kriterium

"Robuste Hurwitz Stabilität"  
Die Koeffizienten  $a_i$  sind nicht exakt bekannt, man weiss jedoch in welchem Intervall sie liegen.

$$p(s, a) = [a_n, \bar{a}_n] \cdot s^n + [a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}] \cdot s^{n-1} + \dots + [a_0, \bar{a}_0]$$

Das Hurwitz Kriterium muss nur für die folgenden Polynome geprüft werden:

$$\begin{aligned} p_1(s) &= \bar{a}_0 + \underline{a}_1 \cdot s + \underline{a}_2 \cdot s^2 + \bar{a}_3 \cdot s^3 + \dots \\ p_2(s) &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot s + \underline{a}_2 \cdot s^2 + \underline{a}_3 \cdot s^3 + \dots \\ p_3(s) &= \underline{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot s + \bar{a}_2 \cdot s^2 + \underline{a}_3 \cdot s^3 + \dots \\ p_4(s) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1 \cdot s + \bar{a}_2 \cdot s^2 + \bar{a}_3 \cdot s^3 + \dots \end{aligned}$$

12 MIMO

13 Systembeschreibung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t), & x(t) &\in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t), & y(t) &\in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

$$\boxed{A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p \times m}}$$

Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) + \left\{ (sI - A)^{-1} \cdot x_0 \right\} \\ Y(s) &= \underbrace{(C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D)}_{P(s)} \cdot U(s) + \left\{ C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot x_0 \right\} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(s) = (C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D)} \in \mathbb{C}^{p \times m}$$

$P(s)$  enthält nur gleichzeitig steuerbare und beobachtbare Teile des Systems. (minimal)

$$\begin{aligned} T(s) &= (\mathbb{I} + PC)^{-1} \cdot PC \\ S(s) &= (\mathbb{I} + PC)^{-1} \\ Q(s) &= (\mathbb{I} + PC) \quad (\text{return difference}) \end{aligned}$$

Push-through rule:

$$G_1 \cdot (\mathbb{I} - G_2 G_1)^{-1} = (\mathbb{I} - G_1 G_2)^{-1} \cdot G_1$$

13.1 Inversen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

13.2 System Realisation

Von Übertragungsfunktion eine State-Space Darstellung erstellen  
Das Realisationsproblem ist in MIMO viel schwieriger als mit SISO Systemen vorallem weil man nicht weiss welches Koordinatensystem man wählen sollte.  
Einfach eine State-Space Darstellung zu finden ist einfach, diese hat aber meistens nicht beobachtbare/steuerbare Zustände.  
Es gibt Methoden die das direkte Herleiten einer minimalen State-Space Darstellung erlauben (nicht in dieser Vorlesung enthalten).

14 Stabilität, Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit

14.1 Stabilität nach Lyapunov

$$\boxed{\text{EW}(A) \equiv \sigma_i + j\omega_i}$$

<b>Asymptotisch stabil:</b>	$\sigma_i < 0$ , für alle $\text{EW}(A)$
<b>Stabil:</b>	$\sigma_i \leq 0$ , min. ein $\text{EW}(A) = 0$
<b>Instabil:</b>	$\sigma_i > 0$ , min. ein $\text{EW}(A) > 0$

14.2 Steuerbarkeit

Das System  $\{A, B, C, D\}$  ist vollständig steuerbar, falls die Steuerbarkeitsmatrix  $\mathcal{R}_n$  vollen Rang  $n$  hat.

$$\mathcal{R}_n = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n \cdot m)}$$

14.3 Beobachtbarkeit

Das System  $\{A, B, C, D\}$  ist vollständig beobachtbar, falls die Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathcal{O}_n$  vollen Rang  $n$  hat.

$$\mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n \cdot p) \times n}$$

14.4 Stabilität Closed Loop

Wir definieren den Controller in der Time-Domain:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} z(t) &= F \cdot z(t) + G \cdot e(t), & z(t) &\in \mathbb{R}^q, e(t) \in \mathbb{R}^p \\ u(t) &= H \cdot z(t) & u(t) &\in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

$$F \in \mathbb{R}^{q \times q}, \quad G \in \mathbb{R}^{q \times p} \quad H \in \mathbb{R}^{m \times q}$$

Dann ist die Standard-Feedback-Konfiguration asymptotisch stabil iff alle Eigenwerte der Matrix

$$\begin{bmatrix} A & BH \\ -GC & F \end{bmatrix}$$

einen negativen Realteil haben.

Nyquist Theorem:

Der Closed-Loop wird asymptotisch stabil sein iff der Nyquist plot:

$$\mathcal{N} = \det(I + P(j\omega) \cdot C(j\omega), \quad \omega \in [-\infty, \infty])$$

den Ursprung  $\frac{n_0}{2} + n_+$  mal umkreist. Wobei Umdrehungen im Gegenuhrzeigersinn positiv gezählt werden.  $n_0$  ist die Anzahl stabiler Pole und  $n_+$  die Anzahl instabiler Pole des Loop-Gains  $L(s)$

Das MIMO Nyquist resultat bringt uns allerdings nur in diagonal-dominanten Systemen voran. Für andere MIMO Systeme brauchen wir andere Synthese-Tools.

15 Pole und Nullstellen

MIMO Pole ( $\pi_i$ ) und Nullstellen ( $\zeta_j$ ) haben einen Betrag (Frequenz), eine Eingangs- ( $\delta^{in}$ ) und eine Ausgangsrichtung ( $\delta^{out}$ ). Pole:

$$P(s)|_{s=\pi_i} \cdot \delta_{\pi_i}^{in} = \infty \cdot \delta_{\pi_i}^{out}$$

Nullstellen:

$$P(s)|_{s=\zeta_j} \cdot \delta_{\zeta_j}^{in} = 0 \cdot \delta_{\zeta_j}^{out}$$

15.1 Matrix Minoren

Minoren einer Matrix sind die Determinanten aller quadratischen Submatrizen. Die Submatrizen werden durch Streichen einzelner Zeilen und Spalten der Matrix gebildet.

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{2(s+2)}{s+1} & \frac{3}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Die Minoren von  $P(s)$  sind:

$$\underbrace{\frac{2(s+2)}{s+1}, \frac{3}{s+1}, \frac{1}{s+1}, \frac{1}{s+2}}_{\text{Primitivminoren (1. Ordnung)}}, \underbrace{\frac{2s-1}{(s+1)^2}}_{\text{Hauptminor Höchste Ordnung}}$$

15.2 Minimale Pole

Die Pole von  $P(s)$  sind die Nullstellen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) der Nennerpolynome aller Minoren von  $P(s)$ .

Das kgV der Nennerpolyome der Minoren:

$$p(s) = (s+1)^2(s+2)$$

Die Pole sind folglich  $\{-1, -1, -2\}$

**Note:** Jeder Pol der MIMO ÜF muss auch ein Pol der einzelnen SISO ÜF sein.

15.3 Minimale Nullstellen

15.3.1 Definition Nullstellen

Die Definition für die Nullstellen eines State-Space Systems ist: Wir gehen davon aus, dass die Anfangsbedingung:  $x(t) = x_0$  gilt. Der Systemausgang  $y(t)$  ist nur Null für alle Zeiten  $t$  falls folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} (sI - A) \cdot X(s) - B \cdot U(s) &= 0 \\ C \cdot X(s) + D \cdot U(s) &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichungen definieren wir als Nullstellen. Es gibt nur nicht-triviale Lösungen iff die Matrix:

$$\begin{bmatrix} (sI - A) & -B \\ C & D \end{bmatrix}$$

singular ist. (Determinante = 0)

15.3.2 Kochrezept

Die Nullstellen von  $P(s)$  sind die Nullstellen des grössten gemeinsamen Teilers (ggT) der Zähler der Minoren höchster Ordnung von  $P(s)$  nach der Normalisierung, bei der alle Pole von  $P(s)$  im Nenner stehen. (Phu!)

Die Ordnung der Minoren entspricht der Dimension der Unterma-trix, aus welcher sie gebildet wurden.

1. Minoren höchster Ordnung finden:

$$\frac{2s-1}{(s+1)^2}$$

2. Normalisieren, sodass alle Pole im Nenner stehen:

$$\frac{2s-1}{(s+1)^2} \cdot \frac{(s+2)}{(s+2)}$$

3. Nullstellen des Zählers sammeln (ggT):

$$\text{ggT: } (2s-1)(s+2)$$

Die Nullstellen von  $P(s)$  sind somit:  $\{\frac{1}{2}, -2\}$

**Note:** Nicht jede Nullstelle eines MIMO Systems ist auch eine der Nullstellen, der SISO Übertragungsfunktionen.

**Note:** Falls  $P(s)$  quadratisch ist gilt: die Nullstellen von  $P(s)$  sind die Nullstellen von  $P(s)^{-1}$

15.4 Pol-Nullstellenkürzungen

minimal = vollst. steuerbar und beobachtbar

- System minimal  $\Leftrightarrow$  keine Kürzung
- System nicht minimal  $\Leftrightarrow$  Kürzung
- # MIMO Pole = # Zustände  $\Leftrightarrow$  keine Kürzung  $\Leftrightarrow$  minimal
- # MIMO Pole < # Zustände  $\Leftrightarrow$  Kürzung
- Minimale Systemordnung = # MIMO Pole

Falls das System minimal ist sind die Eigenwerte der Zustands-raumdarstellung Pole von der Übertragungsfunktion.  
**Pole und Nullstellen, die sich kürzen lassen, fallen mit den obigen Methoden bereits raus!**



16

Relative Gain Array (RGA)

"Wenn ein Regler vom Eingang  $u_1$  auf den Ausgang  $y_1$  basierend auf dem open-loop System  $P_{11}$  ausgelegt wird, welche veränderten Verhältnisse trifft dieser Regler an, wenn er im geregelten MIMO-System verwendet wird?"

Der (i,j)-Eintrag der RGA-Matrix beschreibt das Verhältnis zwischen den Übertragungsfunktionen  $u_j \rightarrow y_i$  im offenen (alle anderen Eingänge Null) und geschlossenen (alle anderen Ausgänge Null durch perfekte Regelung) System.

$$[RGA]_{ij} = \frac{\text{ÜF open loop}}{\text{ÜF closed loop}}$$

16.1

Eigenschaften Einträge

$[RGA]_{ij} < 0$

Die Verstärkung von  $u_j$  nach  $y_i$  kann durch Einflüsse der anderen Kreise das Vorzeichen wechseln kann – das System wird leicht instabil. Eine solche Ein-/Ausgangspaarung ist immer zu vermeiden.

$[RGA]_{ij} > 1$

Die Verstärkung im offenen Fall ist grösser als im geschlossenen. D.h. wenn wir einen Regler für den offenen Kreis entwerfen und dann den zweiten Kreis schliessen, wird die resultierende Verstärkung kleiner. Das Regelverhalten wird dadurch **träger**.

$[RGA]_{ij} < 1$

Die Verstärkung im offenen Fall ist kleiner als im geschlossenen. D.h. wenn wir einen Regler für den offenen Kreis entwerfen und dann den zweiten Kreis schliessen, wird die resultierende Verstärkung grösser. Das Regelverhalten wird dadurch **aggressiver**.

16.2

Berechnung RGA

Allgemeine Form einer  $2 \times 2$  Regelstrecke  $P(s)$

$$RGA(s) = \begin{bmatrix} \frac{P_{11}P_{22}}{P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}} & \frac{-P_{12}P_{21}}{P_{22}P_{11} - P_{21}P_{12}} \\ \frac{-P_{12}P_{21}}{P_{22}P_{11} - P_{21}P_{12}} & \frac{P_{11}P_{22}}{P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}} \end{bmatrix}$$

Allgemeine Formel

$$RGA(s) = P(s) \cdot \left( P(s)^{-1} \right)^T$$

Wobei  $\cdot \times$  eine elementweise Multiplikation beschreibt.

$$\left( P(s)^{-1} \right)^T = \left( P(s)^T \right)^{-1}$$

RGA für Gleichgewichtszustand (steady-state)  $\Rightarrow s \rightarrow 0$

16.3

SISO Regelung von MIMO System

- Jedes Steuersignal darf nur ein Output beeinflussen  
 $\Rightarrow$  Von jeder Spalte nur ein RGA-Element auswählen
- Jeder Output muss von einem Steuersignal gesteuert werden  
 $\Rightarrow$  Von jeder Zeile nur ein RGA-Element auswählen

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 1.1 & \textcolor{red}{0.8} & -1 \\ \textcolor{red}{0.8} & 0.1 & 0 \\ -1 & 0 & \textcolor{red}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_2 \rightarrow y_1 \\ u_1 \rightarrow y_2 \\ u_3 \rightarrow y_3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$  Dieses MIMO System würde sich mit 3 SISO-Reglern regeln.

16.4

Eigenschaften RGA

1. SISO-fähiges  $P_{ij}(j\omega^*) \leftrightarrow [RGA(j\omega^*)]_{ij} \approx 1$

Sinnvoller SISO Regler für  $u_j \rightarrow y_i$  **existiert**

2. Nicht SISO-fähiges  $P_{ij}(j\omega^*) \leftrightarrow [RGA(j\omega^*)]_{ij} \approx 0$

Es existiert **kein** sinnvoller SISO Regler für  $u_j \rightarrow y_i$ .

3. Instabiles Verhalten für  $P_{ij}(j\omega^*) \leftrightarrow [RGA(j\omega^*)]_{ij} < 0$

Ein SISO-Regler hat im MIMO System eine **entgegengesetzte Wirkung**.

- Summe der Zeilen/Spalten = 1
- RGA eines  $P(s)$  in Dreiecksform  $\rightarrow \mathbb{I}$
- $[RGA(s)]_{11} = [RGA(s)]_{22} = 1 - [RGA(s)]_{12}$
- $[RGA(s)]_{12} = [RGA(s)]_{21} = 1 - [RGA(s)]_{11}$
- $RGA$  = Einheitsmatrix heisst nicht dass Ausgang nur durch eine Eingangsgrösse beeinflusst wird.

17

Singulärwertzerlegung - SVD

Die Singulärwertzerlegung der Matrix  $M$  lautet:

$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

17.1

Berechnung SVD

Singulärwerte  $\sigma_i$  der Matrix  $M$  sind gegeben durch die positiven Wurzeln der EW von  $\bar{M}^T \cdot M$ .

$$\sigma_i(M) = \sqrt{\lambda_i(M^\dagger \cdot M)}$$

$M^\dagger = \bar{M}^T$  konjugiert und transponiert.

Anzahl (Singularwerte = 0) = Grösse - Rang

17.2

Wichtige Eigenschaften SVD

$y = M \cdot u$

- $\delta^{in}$  Eingangsrichtungen entsprechen den **Zeilen von  $V^T$**
- $\delta^{out}$  Ausgangsrichtungen entsprechen den **Spalten von  $U$**
- $\sigma_i(M) \in \mathbb{R}$  stehen auf der Diagonalen von  $\Sigma$
- $\sigma_{\min} \leq \frac{\|y\|}{\|u\|} \leq \sigma_{\max}$
- $U, V$  sind unitäre Matrizen:  $\bar{U}^T U = U \bar{U}^T = U \bar{U}^{-1} = \mathbb{I}$
- Ein MIMO-System hat **nicht** zwangsweise gleichviele Singulärwerte, wie die Ordnung des Systems ist.
- Die Anzahl der Singularwerte eines Systems mit m Eingängen und p Ausgängen ist:  $\min(m, p)$

17.3

$\delta$  aus SVD ablesen

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{2(s+2)}{s+1} & \frac{3}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\pi_i = \{-1, -1, -2\} \quad \zeta_i = \left\{ \frac{1}{2}, -2 \right\}$$

17.4

Pol- und Nullstelle bei  $s = -2$

$$P(-2) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\approx \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_U \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \infty & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_\Sigma \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{V^T}$$

Input Richt. aus  $V^T$  ablesen

$\delta_\pi^{in} = 1.$  Zeile von  $V^T$

$\delta_\zeta^{in} = 2.$  Zeile von  $V^T$

Output Richt. aus  $U$  ablesen

$\delta_\pi^{out} = 1.$  Spalte von  $U$

$\delta_\zeta^{out} = 2.$  Spalte von  $U$

17.5

Allgemeiner Fall:  $\omega = 4$  (steady state)

$$P(j \cdot 4) = \begin{bmatrix} 2.1 - 0.5j & 0.2 - 0.7j \\ 0.1 - 0.2j & 0.1 - 0.2j \end{bmatrix} \stackrel{svd}{=} U \left\{ \begin{bmatrix} -0.96 + 0.21j & 0.04 + 0.10j \\ -0.06 + 0.10j & -0.93 - 0.33j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2.3025 & 0 \\ 0 & 0.2060 \end{bmatrix} \cdot V^T \left\{ \begin{bmatrix} -0.94 + 0j & -0.15 - 0.28j \\ 0.32 + 0j & -0.45 - 0.83j \end{bmatrix} \right. \right.$$

Die **maximale** Anregungsrichtung ( $e^{j\Phi} \cdot \mu$ ) (zum SW 2.3025) entspricht der ersten Zeile von  $V^T$ .

$$\begin{bmatrix} -0.9476 + 0j \\ -0.15 - 0.28j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{j\varphi_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 e^{j\varphi_1} \\ \mu_2 e^{j\varphi_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.9476 \cdot e^{j\pi} \\ 0.3195 \cdot e^{-j2.06} \end{bmatrix}$$

Der Input im Zeitbereich (Inverse Fouriertransformation bei einer einzigen, bestimmten Frequenz) lautet wie folgt:

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0.9476 \cdot \cos(4 \cdot t + \pi) \\ 0.3195 \cdot \cos(4 \cdot t - 2.06) \end{bmatrix}$$

18

MIMO Frequenzantworten

$$u(t) = \begin{bmatrix} \mu_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \cdot h(t) \\ \mu_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \cdot h(t) \\ \dots \\ \mu_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_m) \cdot h(t) \end{bmatrix}$$

$$y_\infty(t) = \begin{bmatrix} \nu_1 \cdot \cos(\omega t + \psi_1) \cdot h(t) \\ \nu_2 \cdot \cos(\omega t + \psi_2) \cdot h(t) \\ \dots \\ \nu_m \cdot \cos(\omega t + \psi_m) \cdot h(t) \end{bmatrix}$$

Nach der Laplace Transformation mit

$$\Phi = \text{diag}(\varphi_i), \quad \mu = [\mu_1, \dots, \mu_m]^T$$

$$\Psi = \text{diag}(\psi_i), \quad \nu = [\nu_1, \dots, \nu_m]^T$$

$$U(s) = e^{\Phi \cdot s / \omega} \cdot \mu \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$Y(s) = e^{\Psi \cdot s / \omega} \cdot \nu \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Die Frequenzantwort lautet wie folgt:

$$Y(j\omega) = P(j\omega) \cdot U(j\omega)$$

$$e^{j \cdot \Psi} \cdot \nu = P(j\omega) \cdot e^{j \cdot \Phi} \cdot \mu$$

Die SVD Erkenntnisse liefern Schranken für die Verstärkung:

$$\sigma_{\min}(P(j\omega)) \leq \frac{\|\nu\|}{\|\mu\|} \leq \sigma_{\max}(P(j\omega))$$

Spezialfälle

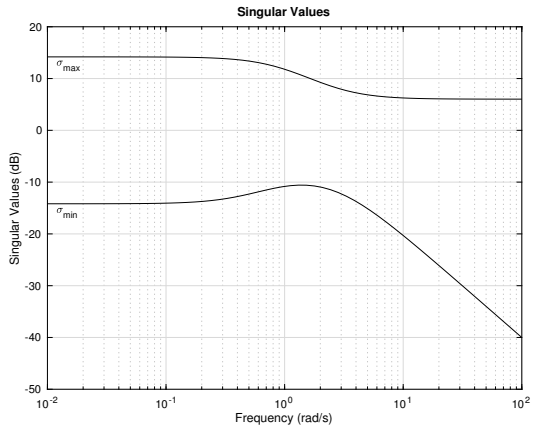
Wenn die Anregungsrichtung genau der Maximalen bzw. Minimalen Richtung entspricht, dann gilt:

- Für Maximal:
$$\|\nu\| = \sigma_{max} \cdot \|\mu\| \tag{2}$$
- Für Minimal:
$$\|\nu\| = \sigma_{min} \cdot \|\mu\| \tag{3}$$

19 Singulärwertverlauf

Singulärwertverläufe bilden Schranken für den Betrag der Ausgangsamplituden  $\| \nu \|$  im steady state bei verschiedenen Frequenzen.

Singulärwertverlauf von  $P(j\omega)$  aus Beispiel



19.1 Systemnorm

Die Systemnorm ist definiert als:

$$\|G(s)\|_{\infty} = \max_{\omega} \left( \max_i \sigma_i(G(j\omega)) \right)$$

Minimal return difference:

$$\mu_{\min} = \min_{\omega} \left( \min_i \sigma_i(\mathbb{I} + L(j\omega)) \right)$$

Minimale Phasenreserve:

$$\varphi > 2 \arcsin \left( \frac{1}{2 \max_{\omega} |T(j\omega)|} \right)$$

19.2 Singulärwertverlauf

Geg.: Plot von  $u$  & Singulärwertverlauf

Ges.: Mögliche Plots von  $y$

1. Frequenz des Eingangssignals  $\omega_0$  ablesen

Ausgangssignale haben die gleiche Frequenz  $\omega_0$  (und Periodendauer  $T_0$ ) wie das Eingangssignal.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

2. Maximalen und minimalen Singulärwert ablesen bei  $\omega = \omega_0$

3. Amplituden  $\mu$  vom Input  $u$  ablesen

$$\left. \begin{aligned} |u_1| &= \mu_1 = \dots \\ |u_2| &= \mu_2 = \dots \end{aligned} \right\} \rightarrow \|u\| = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2}$$

4. Amplituden  $\nu$  vom Ausgang  $y$  prüfen

$\| \nu \|$  = Norm der Vorfaktoren von Cosinus/Sinus!

$$\| \nu \| \stackrel{!}{\in} [\sigma_{\min} \cdot \|u\|, \sigma_{\max} \cdot \|u\|]$$

Im Allgemeinen gilt:

$$\|y_{\infty}(t)\| \leq \| \nu \| = \sigma_{max} \cdot \| \mu \|$$

Aber der Transient  $y(t)$  kann grösser sein:

$$y(t) \stackrel{kann}{>} \| \nu \| = \sigma_{max} \cdot \| \mu \|$$

20 LQR

Wir haben ein lineares und zeitinvariantes System gegeben:

$$\frac{d}{dt} x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad x(0) \neq 0, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m$$

Das Ziel ist es nun  $u^{opt}(t)$  zu finden, welches  $J(u)$  minimiert:

$$u^{opt}(t) = \min_{u(t)} J(u(t))$$

20.1 Quadratische Kostenfunktion  $J(u)$

$$J(u) = \int_0^{\infty} \left[ x^T(u(t)) \cdot Q \cdot x(u(t)) + u^T(t) \cdot R \cdot u(t) \right] dt$$

Der optimale Eingang  $u^*(t)$  minimiert die Kostenfunktion  $J(u)$ . Asymptotische Stabilität ist dem  $u^*(t)$  inhärent, denn für ein Minimum muss gelten:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$$

20.1.1 Stellgrößen  $Q$  und  $R$

- $Q$  gewichtet  $x(t)$  - Abweichung vom GGWP
- $R$  gewichtet  $u(t)$  - Grösse des Inputs

Für ein lösbares Problem müssen  $Q$  und  $R$  diese Beding. erfüllen:

$$\begin{aligned} Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n} & \text{ positiv semidefinit} & \forall \lambda \geq 0 \\ R = R^T \in \mathbb{R}^{m \times m} & \text{ positiv definit} & \forall \lambda > 0 \end{aligned}$$

Diese Bedingungen sorgen dafür, dass Abweichungen von 0 für  $x(t)$  und  $u(t)$  nur positiv positiv in die Kostenfunktion eintreten.

$Q \uparrow \hat{=} R \downarrow$  Abweichung vom Ursprung ist teuer. (cheap control)

$x(t)$  wird **schnell** in den Ursprung geregelt.  $u(t)$  wird **gross**.

$R \uparrow \hat{=} Q \downarrow$  Inputenergie ist teuer. (expensive control)

$x(t)$  wird **langsam** in den Ursprung geregelt.  $u(t)$  bleibt **klein**.

Wobei die absoluten Grössen dieser beiden Stellschrauben nicht wichtig sind, es sind nur die relativen Grössen wichtig! Also  $Q, R$  und  $\bar{Q} = 10Q, \bar{R} = 10R$  ergeben das selbe  $K$ !

Für  $Q$  unbekannt und  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  gilt:

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \Rightarrow x^T Q x = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

20.2 Lösung

$$u^*(t) = -K \cdot x(t)$$

$$K = \underbrace{R^{-1}}_{\text{Gewichtungs-}} \cdot \underbrace{B^T}_{\text{System}} \cdot \Phi, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Algebraische Riccati Gleichung:

$$\Phi \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^T \cdot \Phi - Q = 0$$

Wobei  $\Phi$  symmetrisch ist,  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und

$$\Phi = \Phi^T \stackrel{!}{>} 0 \quad \rightarrow \forall \text{ EW} > 0$$

Man braucht also folgende vier Matrizen für  $K$ :

$$\{A, B, Q, R\} \rightarrow K$$

20.2.1 Diese positiv definite Lösung für  $\Phi$  existiert garantiert für

C1  $\{A, B\}$  vollständig steuerbar

C2  $\{A, \bar{C}\}$  vollständig beobachtbar

(Diese Bedingung garantiert, dass die Zahl  $x^T Q x$  genug Information über die System-States beinhaltet)

Mit  $Q = \bar{C}^T \cdot \bar{C}$ , wobei:  $\bar{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  mit  $p = \text{rank}(Q)$   
Falls  $Q = C^T \cdot C$  wird  $x^T \cdot Q \cdot x \rightarrow \|y\|$  in der KF  $J(u)$ .

20.2.2 Eine Lösung  $\Phi$  existiert garantiert für

(Diese Lösung muss nicht unbedingt positiv definit sein!)

$\bar{C}1$   $\{A, B\}$  detektierbar

$\bar{C}2$   $\{A, \bar{C}\}$  stabilisierbar

Nützliche Beziehungen für Berechnung von  $\Phi$

Für reelle Zahlen gilt:

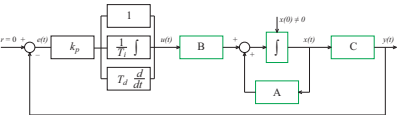
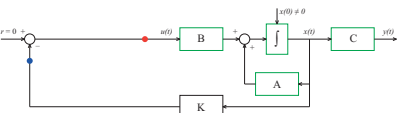
- $\mathbb{R}^T = \mathbb{R}$
- positiv definit  $\Leftrightarrow$  positiv ( $\mathbb{R} \geq 0$ )
- eig( $a$ ) =  $a$  mit  $a \in \mathbb{R}$

Für eine symmetrische  $2 \times 2$  Matrix gilt:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$\text{positiv definit} \Leftrightarrow b^2 < ac \quad \& \quad a > 0 \quad \& \quad c > 0$$

20.2.3 Übertragungsfunktionen



$$L_{LQR} = K \cdot [s\mathbb{I} - A]^{-1} \cdot B, \quad \text{rot} \rightarrow \text{blau}$$

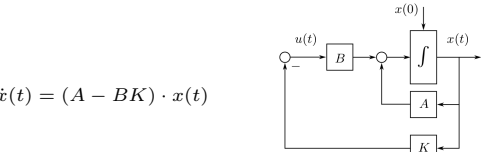
$$T_{LQR} = C \cdot [s\mathbb{I} - A]^{-1} \cdot B, \quad u \rightarrow y$$

$$\mu_{\min, LQR} = \min_{\omega} \sigma_{\min}(I + L_{LQR}(j\omega)) \geq 1$$

20.3 Eigenschaften

20.3.1 Stabilität

Die Closed-Loop-Dynamik eines Systems, das mit  $u^{opt} = -K \cdot x$  geregelt wird, ist:



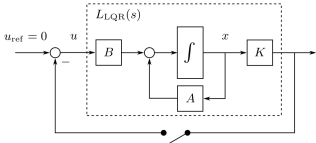
$$\dot{x}(t) = (A - BK) \cdot x(t)$$

Falls die Bedingungen für ein positiv definites  $\Phi$  erfüllt sind, so ist die Matrix  $A - BK$  garantiert Hurwitz, dh. alle Eigenwerte haben einen negativen Realteil.

20.3.2 Robustheit

Wir definieren zuerst die Kreisverstärkung für ein LQR-geregeltes System:

$$L_{LQR}(s) = K \cdot (s\mathbb{I} - A)^{-1} \cdot B$$



Wir können mit dieser Definition damit auch das Nyquist-Theorem (SISO) und die min. return difference  $\mu_{\min}$  (MIMO) verwenden.

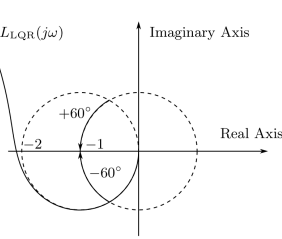
Für die Wahl  $R = r \cdot \mathbb{I}$  hat  $\mu_{\min}$  folgende Eigenschaft.

$$\mu_{\min, LQR} = \min_{\omega} \left( \min_i \sigma_i(I + L_{LQR}(j\omega)) \right) \geq 1$$

Im SISO fall vereinfacht sich diese Bedingung zu:

$$\mu_{\min, LQR} = \min_{\omega} (|1 + L_{LQR}(j\omega)|) \geq 1$$

Der Nyquist-Plot von  $L_{LQR}(j\omega)$  tritt also nicht in einen Kreis mit Radius 1 um den Kritischen Punkt -1 ein:



Unsere reale Strecke ist  $L_t(j\omega) = e^{-j\varphi} \cdot k \cdot L(j\omega)$   
Unser System bleibt stabil für:

$$k \in [0.5, \infty] \quad \varphi \in [-60, 60]$$

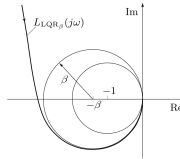
20.3.3 Robustheit verbessern

Die Robustheit kann durch Lösen der modifizierten Riccati Gleichung um einen Faktor  $\beta$  verbessert werden:

$$\frac{1}{\beta} \cdot \Phi_{\beta} \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi_{\beta} - \Phi_{\beta} \cdot A - A^T \cdot \Phi_{\beta} - Q = 0$$

$$\mu_{\min, LQR} = \min_{\omega} \left( \min_i \sigma_i(\beta \cdot \mathbb{I} + L_{LQR}(j\omega)) \right) \geq \beta$$

Für den SISO Fall tritt der Nyquist-Plot von  $L_{LQR}$  nicht in einen Kreis mit Radius  $\beta$  um den Punkt  $-\beta$



### 20.3.4 Störungsunterdrückung

Der LQR Controller kann im allgemeinen keine Störungen unterdrücken. Falls eine konstante Störung  $w(t) = w_\infty \cdot h(t)$  am Eingang herrscht, so wird das System nie instabil aber der Zustand wird auf einen Wert:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_\infty \neq 0$ .

Dieser Endzustand lässt sich berechnen durch:

$$x_\infty = -(A - BK)^{-1} B \cdot w_\infty$$

Diese Matrix ist immer invertierbar!

Falls die Strecke selber ein Integratives Verhalten aufweist, kann man kleine Störungsunterdrückungen erwarten. Aber im allgemeinen kann man damit nicht alle Störungen unterdrücken.

### 20.3.5 Zusammenfassung

- The LQR controller is a linear and time-invariant feedback of the state variable  $x(t)$ .
- The resulting closed-loop system matrix  $A - BK$  is guaranteed to be a Hurwitz matrix, i.e., all eigenvalues of  $A - BK$  have negative real parts.
- The conditions C1 and C2 are sufficient, but not necessary for a solution to the LQR problem to exist. Less restrictive conditions are known ( $\tilde{C}1$ ,  $\tilde{C}2$ ) that guarantee a meaningful solution as well.
- The resulting controller is not an optimal controller in the sense that it is the best possible one. The term optimal only refers to the fact that the controller is obtained as the solution to an optimization problem.
- The matrices Q and R are the "tuning knobs" with which the controller properties are influenced in a systematic way. The choice of meaningful weights is not trivial.
- The loop gain in Equation of the LQR always has excellent robustness properties.
- It is simple to prove that the Ricatti-Equation indeed yields a solution to the LQR problem, but it is more difficult to prove that this solution is the only one.
- For the solution of the Riccati Equation reliable numerical algorithms are known which are implemented in standard CACSD tools.

### 20.4 Poleplacement bei Zustandsregelung

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

Eigenwerte von  $A$  sind charakterisierend.

**Annahme:** System vollst. steuerbar

#### 20.4.1 Zustandsregelung

$$u(t) = -K \cdot x(t)$$

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) - B \cdot K \cdot x(t) = (A - B \cdot K) \cdot x(t)$$

Eigenwerte von  $A - BK$  sind charakterisierend für das resultierende geschlossene Regelsystem. (Lyapunov Stabilität)

**Die Eigenwerte von  $A - BK$  sind die Pole des geschlossenen Regelkreises!**

Für gegebene EW  $\lambda_i$  und gesuchte Zustandsrückführungsmatrix  $K$  lässt sich nun das EW Problem lösen.

$$\det(\text{diag}(\lambda) - (A - BK)) \stackrel{!}{=} \prod_i (\lambda - \lambda_i)$$

Mit Koeffizientenvergleich kann dann auf die Elemente von K geschlossen werden.

### 20.5 Folgeregung - Feedforward

#### 20.5.1 Zustands-Folgeregung

$(x_\infty, u_\infty)$  ist ein GGWP des Systems. Falls folgende Bedingung erfüllt ist:

$$A \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty \stackrel{!}{=} 0$$

Um das System zu einem Zustand  $x_\infty \neq 0$  zu regeln, definieren wir zwei neue Variablen:

$$\Delta x(t) = x(t) - x_\infty$$

$$\Delta u(t) = u(t) - u_\infty$$

Die neue Systemdynamik:

$$\Delta \dot{x} = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta u$$

Und die neue Kostenfunktion:

$$J(\Delta u) = \int_0^\infty [\Delta x^T \cdot Q \cdot \Delta x + \Delta u^T \cdot R \cdot \Delta u] dt$$

Es gilt nun:

$$\Delta u(t) = -K \cdot \Delta x(t)$$

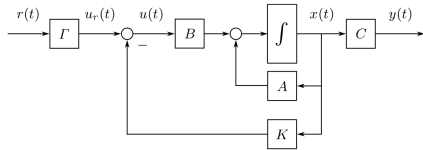
K ist die Lösung der Riccattgleichungen des ursprünglichen Problems.

Man kann dies nun auf zwei verschiedene Varianten implementieren. Für Variante b braucht man noch der Input der ursprünglichen Dynamik:

$$u = u_\infty - K \cdot (x - x_\infty)$$

#### 20.5.2 Ausgangs-Folgeregung

Um die Ausgänge  $y(t)$  auf die gewünschten Referenzen  $r(t)$  zu regeln, benutzt man die gleiche Idee wie oben: man gibt noch einen weiteren konstanten Input zu  $-Kx(t)$  hinzu:



Diese Feedforward Matrix berechnet sich mit:

$$\Gamma = -(C \cdot (A - BK)^{-1} \cdot B)^{-1} = -P(s)^{-1}$$

Diese existiert garantiert falls  $P(s)$  keine Nullstellen im Ursprung hat.

Das alles funktioniert nur für:

$$r(t) = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_m]^T \cdot h(t) = r_\infty h(t)$$

$$D = 0$$

$$n = m \Rightarrow \text{Gleich viele Eingänge \& Ausgänge}$$

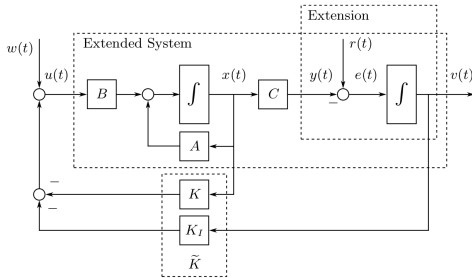
Ausserdem muss  $r_\infty$  zu einem GGWPunkt  $x_\infty$  gehören:

$$r_\infty = y_\infty = C \cdot x_\infty$$

### 21 LQRI

#### 21.1 Herleitung

Der Zustand wird um einen integrativen Fehler  $v(t)$  erweitert. Die LQR Formulierung führt alle Zustände asymptotisch in den Ursprung. → eliminiert den integrativen Fehler.



Der neue Grundzustand lautet  $\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ .

Daraus folgt die neue Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \begin{bmatrix} A \cdot x(t) + B \cdot (u(t) + w(t)) \\ -y(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (u(t) + w(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{I} \end{bmatrix} \cdot r(t) \\ &= \tilde{A} \cdot \tilde{x} + \tilde{B}_u \cdot u + \tilde{B}_w \cdot w + \tilde{B}_r \cdot r \end{aligned}$$

Mit  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  und  $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times m}$

#### 21.2 Lösung

Die LQR "Maschine" bringt die Zustände ins GGW. (hier: 0)

Mit den teils neuen Stellgrößen  $(\tilde{Q}, R)$ .

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_I \end{bmatrix} \quad Q_I = \gamma \cdot \mathbb{I}$$

$Q_I$  gewichtet Fehler  $v(t)$  (Integrator).

alternativ:

$$\tilde{Q} = \tilde{C}^T \cdot \tilde{C} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & \gamma \cdot \mathbb{I} \end{bmatrix}$$

mit  $C$ :  $Q = C^T \cdot C$  des LQR Problems

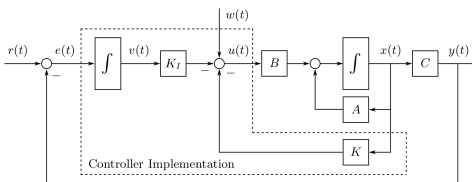
Durch lösen des LQR Problems erhält man die neue Zustandsrückführungsmatrix  $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{m \times (m+n)}$ .

$$\{\tilde{A}, \tilde{B}_u, \tilde{Q}, R\} \rightarrow \tilde{K} = [K, -K_I]$$

Mit  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $K_I \in \mathbb{R}^{m \times m}$

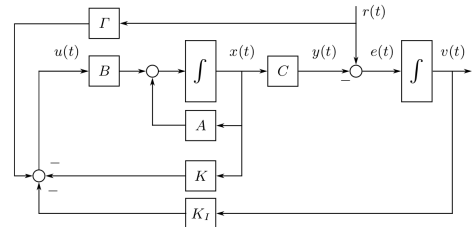
Es folgt der Output:

$$u(t) = -\tilde{K} \cdot \tilde{x}(t) = -K \cdot x(t) + K_I \cdot v(t)$$



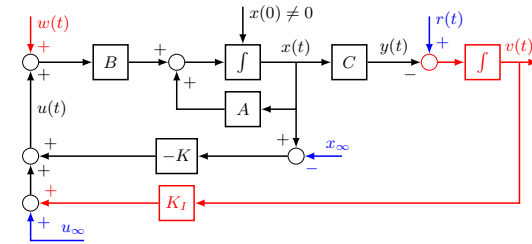
### 21.3 LQRI Folgeregung

Der LQRI würde an sich alleine schon eine konstanten Referenz folgen, da der Fehler erst Null ist, wenn  $r = y$  ist. Um die Konvergenz zu beschleunigen ist es ratsam einen Feedforward-Term einzubauen:



Hier berechnen sich alle Matrizen wie vorher.

Der LQRI Ansatz wird um die feedforward Signale  $u_\infty$  und  $x_\infty$  ergänzt. Wir wollen einer Referenz  $r(t) \neq 0$  folgen.



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) &= \begin{bmatrix} A \cdot x(t) + B \cdot (u(t) + w(t)) \\ r(t) - y(t) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{\text{Zustand}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \cdot \underbrace{(u(t) + w(t))}_{\text{Input inkl. Störung}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{I} \end{bmatrix} r(t) \end{aligned}$$

Es folgt der Output:

$$u(t) = u_\infty - K \cdot (x(t) - x_\infty) + K_I \cdot v(t)$$

#### 21.4 Finite Horizon

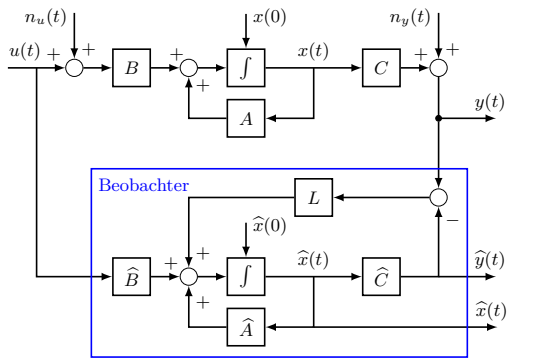
Kostenfunktion wird nur für ein bestimmtes Zeitintervall  $[t_a, t_b]$  formuliert.

$$J = x^T(t_b) \cdot P \cdot x(t_b) + \int_{t_a}^{t_b} (x^T \cdot Q(t) \cdot x + u^T \cdot R(t) \cdot u) dt$$

Asymptotische Stabilität kann nicht mehr garantiert werden. (Beschränkung auf finites Zeitintervall)

22 Beobachter

22.1 Herleitung



**Annahme:**  $\hat{A} = A, \hat{B} = B, \hat{C} = C$  (perfektes Modell)  
Merke:  $x(0)$  ist trotzdem unbekannt.  $\rightarrow \hat{y}(t) \neq y(t)$   
Wir definieren nun den Beobachtungsfehler:

$$x_e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Das Ziel ist nun, dass dieser Beobachtungsfehler asymptotisch stabil gegen Null konvergiert.  
Die Beobachterdynamik ist gegeben durch:

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) = \hat{A} \hat{x}(t) + \hat{B} u + L \cdot (y(t) - \hat{y}(t))$$
$$\hat{y} = \hat{C} \hat{x}$$

Mit Hilfe des Blockdiagramms können wir nun die Dynamik des Beobachtungsfehlers herleiten:

$$\frac{d}{dt} x_e(t) = (A - L \cdot C) \cdot x_e(t)$$

Wir müssen also sicherstellen, dass die Matrix  $A - L \cdot C$  Hurwitz ist (alle Eigenwerte kleiner Null). Dabei können wir nur  $L$  wählen, weil  $A$  und  $C$  Strecken-Matrizen sind.

eig(A - LC) < 0 => lim\_{t -> inf} x\_e(t) = 0

22.2 Polplatzierung von Hand

Man löse das EW-Problem mit den gewünschten EW  $\lambda_i$  und dem Freiheitsgrad  $L$ .

$$0 \stackrel{!}{=} \det(\lambda \mathbb{I} - (A - LC))$$

22.3 Polplatzierung LQR

Die LQR-Formulierung platziert die **EW** der Matrix  $(X - YZ)$  mit dem Freiheitsgrad  $Z$  so, dass die Matrix  $(X - YZ)$  **hurwitz** ist.

$$\text{eig}(A - LC) = \text{eig}((A - LC)^T) = \text{eig}(A^T - C^T L^T)$$

Mit folgenden Anpassungen entsteht die entsprechende LQR Formulierung.

A -> A^T  
B -> C^T  
Q = C^T . C -> B . B^T  
R = r . I -> q . I  
K -> L^T

$$\{A^T, C^T, \bar{B} \cdot \bar{B}^T, q \cdot \mathbb{I}\} \rightarrow L^T$$

L^T = 1/q . C . Psi, L in R^{n x p}  
Psi . C^T . 1/q . C . Psi - Psi . A^T - A . Psi - B . B^T = 0

Es existiert eine eindeutige, positiv definite Lösung  $\Psi$  falls:

- $\{A, C\}$  beobachtbar
- $\{A, \bar{B}\}$  steuerbar

Achtung:  $L$  kann nicht beliebig gross gewählt werden. (Verstärkt hochfrequentes Rauschen)

- q klein  $\rightarrow$  schneller Beobachter, Rauschen  $\uparrow$ , Abschätz.  $\uparrow$
- q gross  $\rightarrow$  langsamer Beobachter, Rauschen  $\downarrow$ , Abschätz.  $\downarrow$

Falls Rauschen am Ausgangssignal vorhanden ist, lautet die Dynamik des Beobachtungsfehlers:

$$\frac{d}{dt} x_e(t) = (A - L \cdot C) \cdot x_e(t) - L \cdot n_y(t)$$

22.4 Kalman Filter / Luenberger Beobachter

Falls die Störungen  $n_u(t)$  und  $n_y(t)$  Gaussian zero mean white noise Signale sind, und die Varianz der Gaussverteilung bekannt ist, kann diese Methode angewendet werden.

Die Lösung für  $L_K^T$  kann wiederum mit der Algebraischen Riccati Gleichung gefunden werden.

L\_K^T = R\_y^{-1} . C . P  
0 = PC^T R\_y^{-1} CP - PA^T - AP - BR\_u B^T

Wobei  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existiert, wenn  $\{A, C\}$  **beobachtbar** ist.

Die Eigenwerte des Kalman-Filters sind durch folgende Gleichung gegeben:

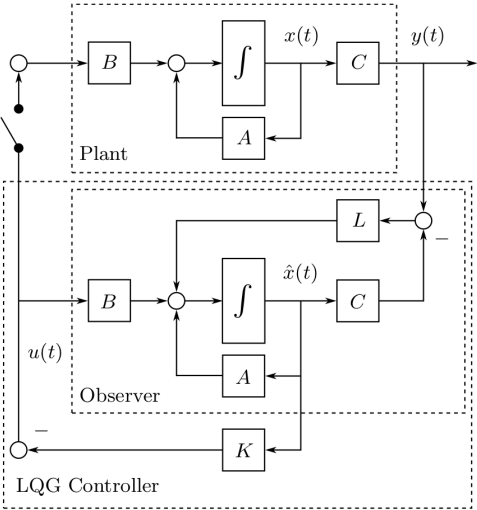
$$\det(s\mathbb{I} - (A - L_k C))$$

LQR	Luenberger	Kalman
A	A^T	A^T
B	C^T	C^T
Q = C^T . C	B . B^T	B . R_u . B^T
R	q . I	R_y
K	L^T	L_K^T
Phi	Psi	P

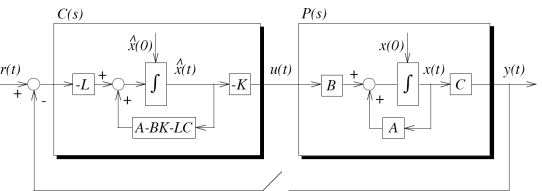
23 LQG

23.1 Herleitung

Die Kombination von **LQR** und **Luenberger Beobachter** wird **LQG** (Linear Quadratic Gaussian) genannt.  
Der LQG ist genau dann **stabil**, wenn Zustandsbeobachter und LQ-Regulator selbst stabil sind.



**Annahme:**  $\{A, B, C\}$  bekannt, (perfektes Modell)  
**Alternative Darstellung**



Die Übertragungsfunktion des Reglers wäre dann:

$$C(s) = K(s\mathbb{I} - (A - BK - LC))^{-1} L$$

Der Openloop des Systems ist dann:

$$L(s) = C(s) \cdot P(s)$$

23.1.1 Resultierender Regelkreis

Regelgesetz:  $u(t) = -K \cdot \hat{x}(t)$

Die Dynamik der closed-loop LQG controller-structure ist:

d/dt x(t) = A . x(t) - B . K . x-hat(t)  
d/dt x-hat(t) = (A - B . K - L . C) . x-hat(t) + L . C . x(t)

Wenn wir nun einen kombinierten Zustandsvektor definieren:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Bekommen wir folgendes lineares System:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{cl}} \cdot \tilde{x}(t)$$

Für den offenen Regelkreis bekommen wir:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

23.2 Eigenschaften

23.2.1 Stabilität

**Separation Principle**  
Mit einer geschickten Koordinatentransformation lässt sich  $\tilde{A}_{cl}$  auf folgende Form bringen.

$$\frac{d}{dt} \tilde{z}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0_{n \times n} & A - LC \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{cl} \text{ in coordinates } \tilde{z}} \cdot \tilde{z}(t) = T^{-1} \cdot \tilde{A}_{cl} \cdot T \cdot \tilde{z}(t)$$

Die entstandene Blockmatrix hat die selben EW wie  $\tilde{A}_{cl}$ . Die EW der Hurwitz Matrizen  $A - BK$  und  $A - LC$  sind per Definition stabil.

Die Eigenwerte von  $\tilde{A}_{cl}$  haben also alle einen negativen Realteil. Die Eigenwerte sind:

$$\lambda_i(\tilde{A}_{cl}) = \lambda_i(A - BK) \cup \lambda_i(A - LC)$$

Diesen Fakt nennt man das **separation principle**. Es impliziert, dass der State-Feedback-Regler und der Beobachter separat voneinander synthesiert und getuned werden können. Solange beide asymptotisch stabil sind wird es auch der Beobachter basierte State-Feedback-Controller sein.

23.2.2 Robustheit

Es gibt für den LQG gar keine Robustheitsgarantien. Folglich muss die Robustheit des LQG Controllers immer a posteriori überprüft werden.

23.2.3 Störungsunterdrückung

Wie der LQR controller ist auch der LQG controller nicht in der Lage störungen zu unterdrücken.

### 23.2.4 Zusammenfassung

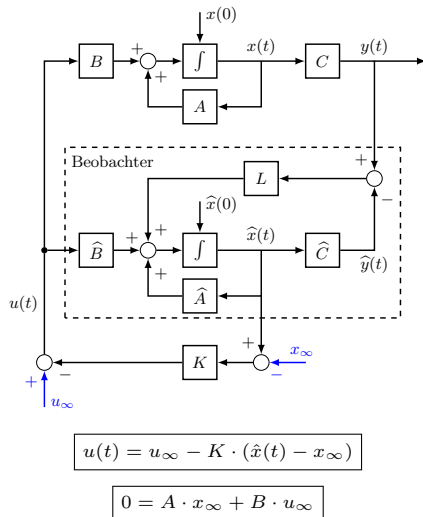
Ein control-loop der mit dem LQG verfahren synthetisiert wurde liefert ein closed loop-system, welches:

- garantiert stabil ist
- keine Robustheitsgarantien hat
- generell keine Störungen unterdrücken kann
- kann nicht für reference tracking genutzt werden

### 23.3 Folgeregung

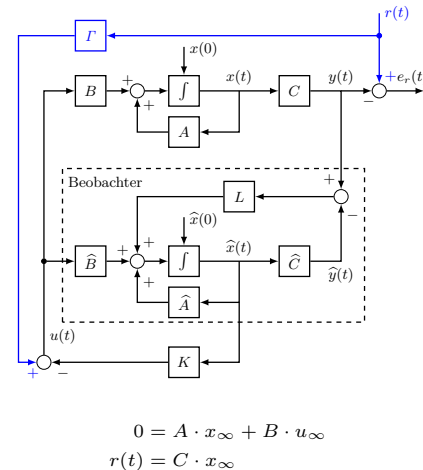
#### 23.3.1 Nullpunktverschiebung

Verschiebung des Gleichgewichtspunkts nach  $\{u_\infty, x_\infty\}$ .



#### 23.3.2 Vorsteuerung

Die folgende Methode ist Äquivalent zur Folgeregung durch Verschiebung des GGWP.



Durch Vergleich mit dem obigen System ergibt sich:

$$\Gamma = -(C \cdot (A - BK)^{-1} \cdot B)^{-1}$$

### 23.3.3 Resultierender Regelkreis

Regelgesetz:

$$u(t) = \Gamma \cdot r(t) - K \cdot \hat{x}(t)$$

Offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

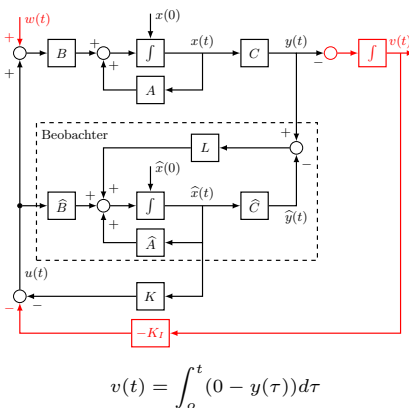
Geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \Gamma \cdot r(t)$$

### 23.4 LQGI

#### 23.4.1 Störungsunterdrückung

Analog zur LQRI Formulierung wird der Zustand um einen integrativen Fehler  $v(t)$  erweitert.



Mit dieser Erweiterung ergibt sich der Zustand:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

Das Eingangssignal

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t) + K_I \cdot v(t)$$

folgt aus der Lösung der LQRI-Formulierung:

$$\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\} \rightarrow \tilde{K} = [K, -K_I]$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_I \end{bmatrix}$$

#### Resultierender Regelkreis

Regelgesetz:

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t) + K_I \cdot v(t)$$

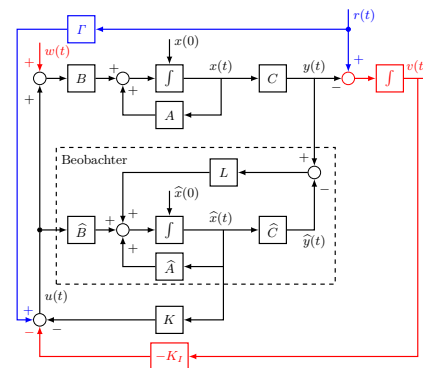
Offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ LC & A - LC - BK & 0 \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

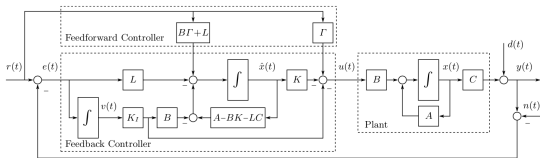
Geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK & BK_I \\ LC & A - LC - BK & BK_I \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot w(t)$$

### 23.4.2 Folgeregung



Alternative Darstellung:



Workflow für LQGI mit Folgeregung:

1. **LQRI:**  $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\} \rightarrow \tilde{K} = [K, -K_I]$ , dabei müssen  $\tilde{Q}$  und  $R$  iterativ eingestellt werden.
2. **LB:**  $\{A^T, C^T, \tilde{B} \tilde{B}^T, q\mathbb{I}\} \rightarrow L^T$ , dabei müssen  $\tilde{B}$  und  $q$  iterativ eingestellt werden.
3. **Vorsteuerung:**  $\Gamma = -(C \cdot (A - BK)^{-1} \cdot B)^{-1}$

#### Resultierender Regelkreis

Regelgesetz:

$$u(t) = \Gamma \cdot r(t) - K \cdot \hat{x}(t) + K_I \cdot v(t)$$

Offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ LC & A - LC - BK & 0 \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \cdot r(t)$$

Geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK & BK_I \\ LC & A - LC - BK & BK_I \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B\Gamma & B \\ B\Gamma & 0 \\ \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

### 23.5 LTR

LQG Regler sind zwar stabil aber nicht zwingend robust. Um die Robustheit zu verbessern kann durch iteratives verkleinern von  $q$  eine Robustere Dynamik erzeugt werden.

**Der LQG Regler wird an LQR Regler angenähert**

Die Beobachterverstärkung  $L$  wird wie folgt berechnet:

$$\{A^T, C^T, B \cdot B^T, q \cdot \mathbb{I}\} \xrightarrow{LQR} L^T$$

Durch verkleinern von  $q$  wird der Beobachter schneller.



24     MatLab
24.1     Grundlagen
<b>clear;</b> <i>Remove items from workspace, freeing up system memory</i>
<b>close(fig);</b> / <b>close all;</b> <i>Close one or all figures</i>
<b>clc;</b> <i>Clear command window</i>
<b>plot(x,y)</b> <i>Plots a graph with x and y being vectors</i>
<b>sim('simulinkfile.slx');</b> <i>Simulates the specified simulink file</i>
24.2     Systeme Definieren
<b>ss(A,B,C,D);</b> <i>Creates a state-space model</i>
<b>tf(ss_model);</b> <i>Creates a transfer function from a state-space model</i>
<b>tf('s');</b> <i>Creates a special variable s with which tf's can be defined</i>
<b>tf(numerator, denominator);</b> <i>Creates a tf with numerator and denominator</i>
Beispiel $\text{tf}([2,0], [4,0,3,-1]) \Rightarrow \frac{2s}{4s^3+3s-1}$
<b>T = feedback(P,C);</b> <i>Berechnet die komplementäre Sensitivität und kürzt dabei</i>
24.3     Zeitbereich Analyse
<b>System Antworten</b>
<b>step(sys);</b> <i>Step response plot of dynamic system; returns step response data</i> <i>Accepts state-space model and transfer function</i>
<b>impulse(sys);</b> <i>Impulse response plot of dynamic system; impulse response data</i> <i>Accepts state-space model and transfer function</i>
<b>Eigenwerte / Stabilität</b>
<b>e = eig(A);</b> <i>Returns column vec containing the eigenvalues of square matrix A</i>
<b>[V,D] = eig(A);</b> <i>Returns diagonal matrix D of eigenvalues and matrix V whose columns are the corresponding right eigenvectors, so that A*V = V*D.</i>
<b>Steuerbarkeit / Beobachtbarkeit</b>
<b>C = ctrb(A,B);</b> <i>Returns controllability matrix</i>
<b>C = ctrb(sys);</b> <i>Returns controllability matrix</i>
<b>O = obsv(A,C);</b> <i>Returns observability matrix</i>
<b>O = obsv(sys);</b> <i>Returns observability matrix</i>

24.4     Frequenzbereich Analysen
<b>Pole / Nullstellen</b>
<b>pole(sys);</b> <i>Returns the poles of the SISO or MIMO system</i>
<b>Z = zero(sys);</b> <i>Returns the zeros of the SISO system</i>
<b>[Z, gain] = zero(sys);</b> <i>Returns the zeros of the SISO system and the zero-pole-gain</i>
<b>Bode Plot</b>
<b>bode(sys1, sys2, ...);</b> <i>Creates a Bode plot of the frequency responses of the systems</i>
<b>[mag, phase, wout] = bode(sys);</b> <i>Returns magnitude, phase and the frequencies in 3 vectors</i> <i>This function draws no plot!</i>
<b>[mag, phase, wout] = bode(sys, w);</b> <i>Returns magnitude, phase and the frequencies in the specified frequency range w. This function draws no plot!</i>
<b>evalfr(sys, j*w);</b> <i>Evaluate frequency response at given frequency (j nicht vergessen!)</i>
<b>Nyquist Diagramm</b>
<b>nyquist(sys1, sys2, ...);</b> <i>Creates a nyquist plot of the frequency response of the systems</i>
<b>[re, im, w] = nyquist(sys);</b> <i>Returns the real and imaginary parts of the frequency response at the frequencies w</i>
<b>[re, im] = nyquist(sys, w);</b> <i>Returns the real and imaginary parts of the frequency response at the frequencies w</i>
<b>Sonstiges</b>
<b>[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(sys);</b> <i>Returns the gain margin Gm in absolute units, the phase margin Pm, and the corresponding frequencies Wcg and Wcp, of sys</i>
<b>rlocus(sys);</b> <i>Calculates and plots the root locus of the SISO model sys</i>
<b>[r,k]= rlocus(sys);</b> <i>Eeturns the vector of feedback gains k and the complex root locations r for these gains</i>
24.5     Diskrete Regelung
<b>sysd = c2d(sysc,Ts);</b> <i>Discretizes sysc using zero-order hold on the inputs and a sample time of Ts</i>
<b>sysd = c2d(sysc,Ts,method);</b> <i>Specifies the discretization method</i> <i>Example for method: 'tustin'</i>
24.6     MIMO spezifische Analyse
<b>RGA</b> Es gibt keinen Standard Befehl für die RGA, man kann aber die Definition benutzen: <b>P * inv(P')</b> <i>Calculates the RGA matrix of P</i>
<b>Bode (nur Magnitude)</b>
<b>bodemag(sys);</b> <i>Creates a Bode magnitude plot of the frequency response sys (no phase)</i>
<b>Singulärwertzerlegung</b>
<b>sigma(sys);</b> <i>Calculates the singular values of the frequency response of sys</i>

24.7     LQR
<b>K = lqr(A,B,Q,R);</b> <i>Calculates the optimal gain matrix K</i>
24.8     Arrays
Arrays können mit eckigen Klammern erstellt werden: M = [a11 a12; a21 a22]; ergibt: <div> <math display="block">\begin{bmatrix} a_{11} &amp; a_{12} \\ a_{21} &amp; a_{22} \end{bmatrix}</math> </div>
24.8.1     Accessing
Um ein Element eines Arrays zu accessen benutzt man folgenden Syntax: <div> <math display="block">[A]_{i,j} = \mathbf{A(i,j)};</math> </div> Um Spalten-Vektor zu accessen benutzt man folgenden Syntax: <div> <math display="block">v_j(A) = \mathbf{A(:,j)};</math> </div> Um Zeilen-Vektor zu accessen benutzt man folgenden Syntax: <div> <math display="block">v_i(A) = \mathbf{A(i,:)};</math> </div>
24.8.2     Creation
<b>diag(v);</b> <i>Returns a square diagonal matrix with the elements of vector v on the main diagonal.</i>
<b>eye(n);</b> <i>Returns an n-by-n identity matrix with ones on the main diagonal and zeros elsewhere.</i>
<b>zeros(n,m);</b> <i>Returns n by m matrix full of zeros</i>
<b>linspace(x1,x2,n);</b> <i>Generates a vector containing n points. The spacing between the points is (x2-x1)/(n-1)</i>
24.8.3     Lineare Algebra
<b>rank(A);</b> <i>Returns the rank of matrix A</i>
<b>inv(A);</b> <i>Returns inverse of matrix A</i>
<b>P';</b> <i>Returns transpose of P</i>
<b>P';</b> <i>Returns complex transpose of P</i>
<b>e = eig(A);</b> <i>Returns column vec containing the eigenvalues of square matrix A</i>
<b>[V,D] = eig(A);</b> <i>Returns diagonal matrix D of eigenvalues and matrix V whose columns are the corresponding right eigenvectors, so that A*V = V*D</i>
<b>s = svd(A);</b> <i>Returns the singular values of matrix A in descending order</i>
<b>[U,S,V] = svd(A);</b> <i>Performs a singular value decomposition of matrix A, such that A = U*S*V'</i>
24.8.4     Beträge
<b>abs(X);</b> <i>Returns the absolute value of each element in array X</i>
<b>n = norm(v);</b> <i>Returns the Euclidean norm of vector v</i>
<b>n = norm(v,p);</b> <i>Returns the generalized vector p-norm</i>
<b>n = norm(X)</b> <i>Returns the 2-norm or maximum singular value of matrix X</i>

24.8.5     Elementwise Operations
<b>.*</b> <i>Elementwise multiplication</i>
<b>.^</b> <i>Elementwise power</i>
24.9     Sonstiges
24.9.1     Komplexe Zahlen
Komplexe Zahlen können mit j definiert werden: <div> <math display="block">z = 3 + 4*j;</math> </div>
<b>real(z);</b> <i>Returns the real part of z</i>
<b>imag(z);</b> <i>Returns the imaginary part of z</i>
<b>conj(z);</b> <i>Returns the complex conjugate of z</i>
<b>anlge(z);</b> <i>Returns the phase angle in the interval <math>[-\pi, \pi]</math> for z</i>
<b>abs(z);</b> <i>Returns the absolute value of z</i>
24.9.2     Weitere Befehle
<b>ydb = mag2db(y);</b> <i>Expresses in decibels (dB) the magnitude measurements specified in y</i>
<b>y = db2mag(ydb);</b> <i>Returns the magnitude measurements, y that correspond to the decibel (dB) values specified in ydb</i>

25	Sonstiges
26	Mathematik
26.1	Lineare Algebra
Inverse einer Matrix:	
$A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)} \quad (4)$	
Adjunkten Formel: $2 \times 2$	
$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad adj(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$	
Adjunkten Formel: $3 \times 3$	
$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad (5)$	
$adj(A) = \begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix} \quad (6)$	
Matrix-Exponential:	
$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \quad e^D = \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & e^{d_n} \end{bmatrix}$	
26.2	Komplexe Zahlen
$(a + j \ b) \cdot (c + j \ d) = (ac - bd) + j(ad + bc)$	
$\frac{(a + j \ b)}{(c + j \ d)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$	
$ z  = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \angle z = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$	
$z \cdot \bar{z} = (a + j \ b) \cdot (a - j \ b) = a^2 + b^2$	
$\frac{1}{(a + j \ b)} = \frac{a - j \ b}{a^2 + b^2}$	
$\left  \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3 \cdot Z_4} \right  = \frac{ Z_1  \cdot  Z_2 }{ Z_3  \cdot  Z_4 }$	
$\angle \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3 \cdot Z_4} = \angle Z_1 + \angle Z_2 - \angle Z_3 - \angle Z_4$	
27	Dynamiken
Dynamik eines Beobachter:	
$\dot{x} = (A - L \cdot C) \cdot x, \quad EW(A - L \cdot C)$	
Dynamik eines LQR Regler:	
$\dot{x} = (A - B \cdot K) \cdot x, \quad EW(A - B \cdot K)$	
Regler eines Smith Predictor:	
$C = \frac{C_r}{1 + C_r \hat{P}_0 (1 - e^{-s\hat{\tau}})} = \frac{C_r}{1 + C_r (\hat{P}_0 - \hat{P})}$	
wobei $C_r$ berechnet wird durch den Fall ohne Totzeit	
Ab jetzt kann man mit $C$ und $P$ rechnen und dann einsetzen.	

28	RT II Sonstiges
28.0.1	Übertragungsfunktion
Resultierende Übertragungsfunktion in:	
$P(s) = \frac{1}{s + F} \quad (7)$	
28.0.2	Zusammensetzen von zwei Zustandsraumdarstellungen
$\begin{array}{l l} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) & \dot{z}(t) = F \cdot z(t) + G \cdot e(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) & u(t) = C \cdot z(t) \\ \text{oft } r = 0 & e(t) = r - y(t) \end{array}$	
$\dot{\zeta} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BH \\ -GC & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \quad (8)$	
28.0.3	PID und LQR Vergleich
<b>SISO:</b> $y$ als funktion von $x$ darstellen: $y = Cx$ $u$ als Funktion von PID Parameter und $x$ darstellen $u = -Kx \stackrel{!}{=} u(x, PID)$	
<b>MIMO:</b> Verbindung zwischen den Einzelnen Zuständen finden. $y$ als funktion von $x$ darstellen: $y = Cx$ $u$ als Funktion von PID Parameter und $x$ darstellen $u = -Kx \stackrel{!}{=} u(x, PID)$	
28.0.4	Eingeschwungener Zustand
Eingang der Integrale muss 0 sein:	
Begründung:	
1. keine Veränderung $\frac{dx}{dt} = 0$	
2. Fehler ist = 0 $\rightarrow$ Eingang Fehlerintegral = 0	

## Regelungstechnik II FS 2021

## PID Tuning, Prädiktive Regelung

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

## Zusammenfassung Vorlesung 1

## Buch Kapitel 11

Bei Fragen: hraiffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 25. Februar 2021

## 1 PID - Recap

Im Zeitbereich besteht die Reglerstruktur aus 3 additiven Termen: **Proportional**, **Integral**, und **Derivative**.

$$u_{\text{PID}}(t) = k_p \cdot \left( \underbrace{e(t)}_{\text{P-Term}} + \underbrace{\frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\text{I-Term}} + T_d \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} e(t)}_{\text{D-Term}} \right)$$

Im Frequenzbereich wird der Regler mit einem Roll-off Term erweitert. Der Roll-off Term macht den Regler kausal und dient zur Unterdrückung von Rauschen (hohe Frequenzen).

$$C_{\text{PID}}(s) = k_p \cdot \left( \underbrace{\frac{T_d \cdot T_i \cdot s^2 + T_i \cdot s + 1}{T_i \cdot s}}_{\text{nicht kausal}} \right) \cdot \underbrace{\frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^2}}_{\text{kausal}}$$

In Regelungstechnik 1 wurde das Ziegler-Nichols-Verfahren zur Bestimmung von Werten für  $k_p$ ,  $T_i$  und  $T_d$  eingeführt. Im Folgenden werden zwei weitere Verfahren diskutiert.

## 2 Åström-Hägglund Verfahren

Wie beim Ziegler-Nichols-Verfahren will man mit dem Åström-Hägglund-Verfahren empirisch sinnvolle Werte für die Parameter  $k_p$ ,  $T_i$  und  $T_d$  finden. Das Verfahren basiert auf der Auswertung sehr vieler Systeme  $P(s)$ , für welche im Mittel ein Regelkreis mit gewünschter Robustheit resultiert. Man kann dabei wählen, ob man einen aggressiven Regler ( $\mu_{\min} \approx 0.5$ ) oder einen robusten Regler ( $\mu_{\min} \approx 0.7$ ) will.

**Vorgehen:** Zuerst wird die Verstärkung eines reinen P-Reglers eingestellt, sodass das System bei  $k_p^*$  mit der Periode  $T^*$  grenzstabil oszilliert. Zusätzlich braucht man die statische Verstärkung  $|P(0)|$  sowie die gewünschte Robustheit  $\mu_{\min}$ . Die gegebenen Grössen parametrieren den PID-Regler.

$$\text{Schema: } \left\{ \underbrace{\mu_{\min}}_{\text{spezifiziert}}, \underbrace{|P(0)|, k_p^*, T^*}_{\text{aus System}} \right\} \rightarrow \underbrace{\{k_p, T_i, T_d\}}_{\text{resultiert}}$$

Die PID Parameter  $x \in \{k_p/k_p^*, T_i/T^*, T_d/T^*\}$  berechnen sich mit folgender Formel und den dazugehörigen Tabellen:

$$x = \alpha_{0,x} \cdot e^{\alpha_{1,x} \cdot \kappa + \alpha_{2,x} \cdot \kappa^2}, \quad \kappa^{-1} = |P(0)| \cdot k_p^* \quad (1)$$

$x$	$\mu_{\min} = 0.7$			$\mu_{\min} = 0.5$		
	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$
$k_p/k_p^*$	0.053	2.90	-2.60	0.13	1.90	-1.30
$T_i/T^*$	0.900	-4.40	2.70	0.90	-4.40	2.70

Tabelle 1: Åström-Hägglund Koeffizienten für den PI-Regler

$x$	$\mu_{\min} = 0.7$			$\mu_{\min} = 0.5$		
	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$
$k_p/k_p^*$	0.33	-0.31	-1.00	0.72	-1.60	1.20
$T_i/T^*$	0.76	-1.60	-0.36	0.59	-1.30	0.38
$T_d/T^*$	0.17	-0.46	-2.10	0.15	-1.40	0.56

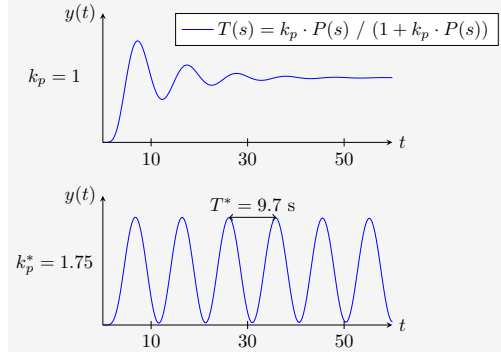
Tabelle 2: Åström-Hägglund Koeffizienten für den PID-Regler

## Beispiel: Åström - Hægglund

Folgendes System ist gegeben:

$$P(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1)} \quad (2)$$

Zuerst werden  $\{k_p^*, T^*, |P(0)|, \mu_{\min}\}$  bestimmt. Aus Gl. (2) ist ersichtlich dass  $|P(0)| = 1$ . Der Regler soll robust sein, d.h. wir spezifizieren  $\mu_{\min} = 0.7$ . Eine Erhöhung von  $k_p = 1$  auf  $k_p^* = 1.75$  ergibt  $T^* = 9.7$  s:

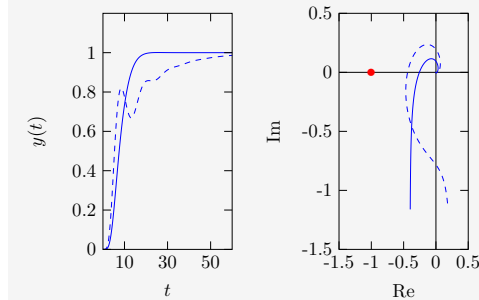


Es wird ein PI-Regler mit Gl. (1) ausgelegt:

$$\kappa = 1/(|P(0)| \cdot k_p^*) \approx 0.57 \quad (3)$$

$$k_p = 0.053 \cdot e^{2.9 \cdot \kappa - 2.6 \cdot \kappa^2} \cdot k_p^* \approx 0.21 \quad (4)$$

$$T_i = 0.9 \cdot e^{-4.4 \cdot \kappa + 2.7 \cdot \kappa^2} \cdot T^* \approx 1.71 \text{ s} \quad (5)$$

Abb. 1: Sprungantwort links, Nyquist-Diagramm des open-loop gain  $L(j\omega)$  rechts. Ziegler-Nichols Auslegung gestrichelt, Åström-Hægglund solide.

**Wichtig!** Oftmals ergibt die Åström-Hægglund Methode bessere Resultate als die Ziegler-Nichols Methode. Dies ist jedoch nicht immer der Fall.

## 3 Direktspezifikationen

Folgende Parameter der resultierenden Übertragungsfunktion  $L(j\omega) = P(j\omega) \cdot C(j\omega)$  werden vorgängig spezifiziert:

- die Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$
- die Phasenreserve  $\varphi$
- die Steigung  $\psi$  bei der Frequenz  $\omega_c$

Spezifikationen an  $L(j\omega)$  sowie die Eigenschaften von  $P(j\omega)$  werden dann in Anforderungen an  $C(j\omega)$  umgerechnet. Bei gegebener PID-Reglerstruktur können diese eindeutig in die Reglerparameter umgerechnet werden.

$$\text{Schema: } \left\{ \underbrace{\omega_c, \varphi, \psi}_{\text{spezifiziert}}, \underbrace{r_P, \varphi_P, r'_P, \varphi'_P}_{\text{aus } P(j\omega)} \right\} \rightarrow \underbrace{\{k_p, T_i, T_d\}}_{\text{resultiert}}$$

Für  $P(j\omega)$  werden bei gewünschter Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  die Parameter  $\{r_P, \varphi_P, r'_P, \varphi'_P\}$  ausgelesen.

$$P(j\omega_c) = r_P \cdot e^{j\varphi_P}, \quad r'_P = \left. \frac{\partial r_P(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c}, \quad \varphi'_P = \left. \frac{\partial \varphi_P(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c}$$

Folgende Formeln berechnen dann die Reglerparameter:

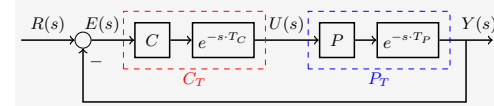
$$\begin{aligned} k_p &= -\frac{1}{r_P} \cos(\varphi - \varphi_P) \\ T_d &= \frac{1}{2} \cdot \left( \tan(\psi - \varphi_P) \cdot \left( \frac{r'_P}{r_P} - \varphi'_P \tan(\varphi - \varphi_P) \right) \right. \\ &\quad \left. + \tan(\varphi - \varphi_P) \cdot \left( \frac{1}{\omega_c} - \frac{r'_P}{r_P} \right) - \varphi'_P \right) \\ T_i &= (T_d \cdot \omega_c^2 - \tan(\varphi - \varphi_P) \cdot \omega_c)^{-1} \end{aligned}$$

Die Phase muss jeweils in Radian eingesetzt werden.

**Vorsicht!** Dieses Verfahren produziert nur für sinnvolle Spezifikationen  $\{\omega_c, \varphi, \psi\}$  auch sinnvolle Reglerparameter  $\{k_p, T_i, T_d\}$ . Ausserdem ist die Stabilität nicht garantiert.

## 4 Totzeiten - Recap

Regelstrecke und/oder Regler können Totzeiten enthalten.

Abb. 2: Regelstruktur mit Totzeiten  $T_C$  und  $T_P$ 

Die gesamte Totzeit  $T$  des Regelkreises ist:

$$e^{-sT} = e^{-sT_C} \cdot e^{-sT_P} = e^{-s(T_C + T_P)}$$

Eine Totzeit  $T$  ist signifikant, falls sie gross ist relativ zur Zeitkonstante  $\tau$  des Systems. Faustregel:

$$\frac{T}{T + \tau} > 0.3 \rightarrow \text{Totzeit signifikant}$$

Standard PID-Regler eignen sich nicht für Systeme mit signifikanter Totzeit  $T_P$ . Faktisch kann kein kausaler Regler die Totzeit in der Systemantwort  $y(t)$  entfernen. Ein sinnvoller Regler resultiert nur, wenn die geschlossenen Regelkreisgrössen  $\{T(s), S(s)\}$  dieselbe Totzeit  $T_P$  beinhalten wie das System. Das wird mit dem Entwurf prädiktiver Regler erreicht. Im Folgenden werden zwei prädiktive Regler vorgestellt.

## 5 Prädiktiver PI-Regler für einfache Regelstrecken

Gegeben: Eine Regelstrecke erster Ordnung mit Totzeit  $T_P$ .

$$P(s) \approx \frac{k}{\tau \cdot s + 1} \cdot e^{-sT_P}$$

Gesucht: resultierende komplementäre Sensitivität  $T(s)$  als System erster Ordnung mit gegebener Zeitkonstante, einstellbar durch den Tuningparameter  $\sigma$ :

$$T(s) = \frac{1}{\sigma \cdot \tau \cdot s + 1} \cdot e^{-sT_P} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

Auflösen nach  $L(s)$  ergibt:

$$L(s) = \frac{T(s)}{1 - T(s)} \Rightarrow C(s) = \frac{T(s)}{P(s) \cdot (1 - T(s))}$$

Einsetzen von  $T(s)$  und  $P(s)$  liefert:

$$C(s) = \frac{\tau \cdot s + 1}{k \cdot (\sigma \cdot \tau \cdot s + 1 - e^{-sT_P})}$$

Die Eingangsgrösse  $U(s)$  lautet somit:

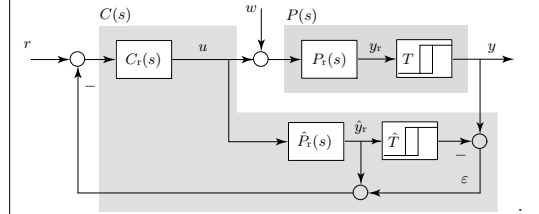
$$U(s) = \underbrace{\frac{1}{\sigma k} \left( 1 + \frac{1}{\tau s} \right) \cdot E(s)}_{\text{PI-Regler}} - \underbrace{\frac{1}{\sigma \tau s} (1 - e^{-sT_P}) \cdot U(s)}_{\text{Prädiktive Korrektur}}$$

Falls  $T_P = 0$  wird die prädiktive Korrektur 0 und der resultierende Eingang wird zu einem einfachen PI-Regler.

## 6 Smith Predictor

Beim Smith Predictor nimmt man an, dass die Regelstrecke einen rationalen Teil und eine Totzeit hat:

$$P(s) = P_r(s) \cdot e^{-sT}$$



Falls man eine perfekte Schätzung der Regelstrecke hat ( $P_r(s) = \hat{P}_r(s)$ ,  $T = \hat{T}$ ) und keine Störung vorhanden ist ( $w = 0$ ), resultiert folgende komplementäre Sensitivität:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = e^{-sT} \cdot \frac{P_r(s) C_r(s)}{1 + P_r(s) C_r(s)} = e^{-sT} \cdot T_r(s) \quad (6)$$

Das heisst, die Form der Systemantwort  $y(t)$  ist dieselbe wie die des rationalen Systems ohne Totzeit ( $T_r(s)$ ). Jedoch ist sie um die Totzeit verschoben ( $e^{-sT}$ ). Dies wird an der Regelstruktur ersichtlich. Für  $P_r(s) = \hat{P}_r(s)$ ,  $T = \hat{T}$ ,  $w = 0$  wird  $\varepsilon = 0$ . In dem Fall wird das unverschobene perfekt geschätzte Signal  $\hat{y}$  rückgeführt, und somit wird die Totzeit überbrückt. Modellfehler und Störungen ( $P_r(s) \neq \hat{P}_r(s)$ ,  $T \neq \hat{T}$ ,  $w \neq 0$ ) werden durch das Fehlersignal  $\varepsilon \neq 0$  kompensiert. In diesem Fall werden die Übertragungsfunktionen jedoch um einiges komplizierter als Gl. (6).

## Regelungstechnik II FS 2021

### Spezifikation der Sensitivität

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

### 1 Multiplikative Unsicherheit der komplementären Sensitivität

**Zur Erinnerung.** Aus der multiplikativen Modellunsicherheit  $W_2(s)$  der Strecke wurde das robuste Nyquist Theorem abgeleitet. Daraus kann eine Bedingung an die komplementäre Sensitivität  $T(j\omega)$  abgeleitet werden.

$$|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \Rightarrow |T(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| < 1 \quad (1)$$

Das robuste Nyquist Theorem aus Gl. (1) kann in der Nyquist Ebene interpretiert werden: Der rot eingezeichnete Unsicherheitsradius  $|L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)|$  darf nicht länger als das blaue Verbindungsstück  $|1 + L(j\omega)|$  sein, um zusätzliche Umkreisungen des Punktes  $(-1, 0)$  zu vermeiden.

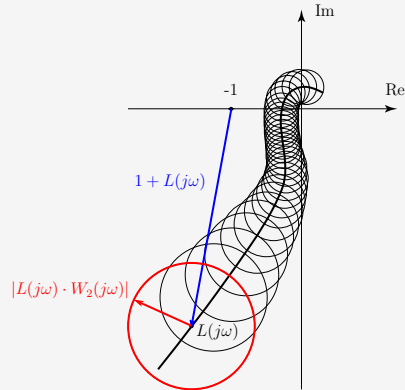


Abb. 1: Robustes Stabilitätskriterium nach Nyquist.

### 2 Multiplikative Spezifikation an Sensitivität

Die Sensitivität  $S(s)$  ist bei jedem Regelsystem sehr wichtig. Eine betragsmässig kleine Sensitivität garantiert eine gute Störungsunterdrückung und gutes reference tracking. Eine sinnvolle Spezifikation ist demnach, den Betrag der Sensitivität  $|S(j\omega)|$  frequenzabhängig zu limitieren. Die Phase spielt dabei praktisch keine Rolle.

#### Nominelle Regelgüte

Um die Sensitivität betragsmässig zu begrenzen wird mit einer rationalen Übertragungsfunktion  $W_1(s)$  gefordert:

$$\|S(s) \cdot W_1(s)\|_\infty < 1 \Rightarrow |S(j\omega)| < |W_1^{-1}(j\omega)| \quad (2)$$

Gl. (2) kann umgeschrieben werden:

$$|W_1(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad (3)$$

Die geometrische Interpretation von Gl. (3) in der Nyquist Ebene ist, dass  $L(j\omega)$  nicht in einen  $-1$  zentrierten Kreis mit Radius  $|W_1(j\omega)|$  eintreten darf, siehe Abb. 2.

## Zusammenfassung Vorlesung 2

### Buch Kapitel 10.4.3

Bei Fragen: hralfael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 4. März 2021

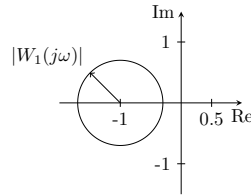


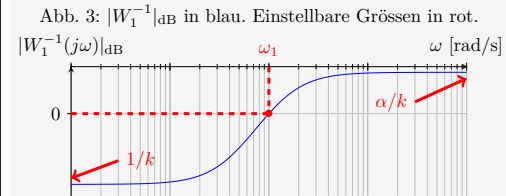
Abb. 2: Darstellung der nicht zulässigen Region aus Gl. (3).

#### Konstruktion von $W_1$ :

Ein Beispiel einer sinnvollen Sensitivitätsspezifikation  $W_1(s)$  hat folgende Form:

$$W_1(s) = k \cdot \frac{\tau \cdot s + 1}{\alpha \cdot \tau \cdot s + 1}, \quad k > 1, \quad \alpha > k$$

$$\tau^2 = \frac{k^2 - 1}{\omega_1^2 \cdot (\alpha^2 - k^2)}, \quad |W_1(j\omega_1)| = 1$$



#### Robuste Regelgüte

Nun soll gleichzeitig das robuste Nyquist Theorem und die nominelle Spezifikation der Sensitivität erfüllt sein. In anderen Worten sollen Gl. (1) und Gl. (2) gleichzeitig gelten.

$$|W_1(j\omega) \cdot S(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot T(j\omega)| < 1$$

$$\Rightarrow |W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad (4)$$

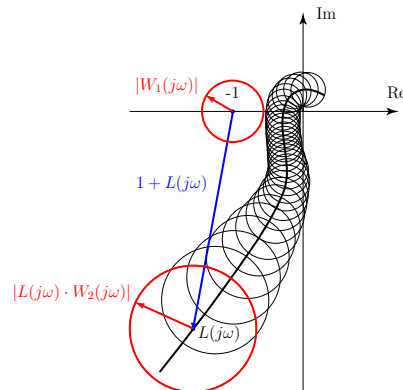


Abb. 4: Robuste Regelgüte.

Um Spezifikationen der Sensitivität und Modellunsicherheiten in jedem Fall zu berücksichtigen darf die summierte Länge der beiden roten Pfeile nie länger als die blaue Verbindung werden. In anderen Worten: Die beiden roten Kreise dürfen sich für alle Frequenzen nicht schneiden.

#### Approximative Spezifikationen

Um einen Regler zu finden, der Gl. (4) erfüllt, ist es einfacher, wenn Gl. (4) auf  $L(j\omega)$  umformuliert wird. Dies ist einfach für sehr hohe Frequenzen und sehr tiefe Frequenzen.

Tiefe Frequenzen:  $\omega < 0.1 \cdot \omega_c \Rightarrow |L(j\omega)| \gg 1$

Gl. (4) kann approximiert werden:

$$|W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| < |L(j\omega)|$$

$$\Rightarrow |L(j\omega)| > \frac{|W_1(j\omega)|}{1 - |W_2(j\omega)|}$$

Eine Lösung kann nur existieren falls  $|W_2(j\omega)| < 1$ .

Hohe Frequenzen:  $\omega > 10 \cdot \omega_c \Rightarrow |L(j\omega)| \ll 1$

Gl. (4) kann approximiert werden:

$$|W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| < 1$$

$$\Rightarrow |L(j\omega)| < \frac{1 - |W_1(j\omega)|}{|W_2(j\omega)|}$$

Diese Approximationen berücksichtigen das Frequenzband  $[0.1 \cdot \omega_c, 10 \cdot \omega_c]$  nicht. In diesem Band ist es vor allem wichtig Stabilität und Robustheit zu garantieren.

#### Kompatibilitätsbedingung

**Zur Erinnerung.** Die Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  des open-loop gains  $L(j\omega)$  soll folgende Bedingungen erfüllen.

$$\max\{10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \omega_{\pi+}\} < \omega_c < \min\left\{\frac{\omega_n}{10}, \frac{\omega_n}{10}, \frac{\omega_\tau}{2}, \frac{\omega_{\zeta+}}{2}\right\}$$

konservativer mit 5                      konservativer mit  $\frac{1}{5}$

Dabei ist  $\omega_d$  die Frequenz der Störung,  $\omega_{\pi+}$  der schnellste instabile Pol von  $L(s)$ ,  $\omega_n$  die Frequenz des Rauschens,  $\omega_2$  die Frequenz bei der  $W_2(j\omega_2) = 1$ ,  $\omega_\tau$  die Frequenz der Totzeit und  $\omega_{\zeta+}$  die Frequenz der langsamsten nicht-minimalphasigen Nullstelle.

Die Frequenz  $\omega_1$ , bei der  $|W_1(j\omega_1)| = 1$  gilt, muss kleiner als  $\omega_2$  sein, sodass  $\omega_c$  genügend Marge hat. Jedoch muss  $\omega_1$  auch grösser sein als die untere Schranke für  $\omega_c$ . Als Faustregel wählt man als erste Schätzung:

$$\omega_1 \approx \max\{10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \omega_{\pi+}\} \quad (5)$$

Zusätzlich muss  $\omega_1$  grösser gewählt werden, je grösser die gewünschte Phasenreserve  $\varphi$  ist. Dies kann mit der Magnitude der Sensitivität bei  $\omega_c$  interpretiert werden:

$$|S(j\omega_c)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1 + 1 \cdot e^{-j(\pi-\varphi)}|}$$

$$= \frac{1}{|1 - e^{j\varphi}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos(\varphi)}}$$

In der Regel nimmt  $|S(j\omega)|$  mit ansteigender Frequenz zu und schneidet die 0 dB Linie einmalig, siehe Abb. 6.

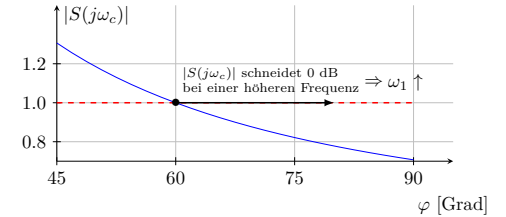


Abb. 5:  $|S(j\omega_c)|$  in blau,  $|S(j\omega)| = 1$  in rot.

Abb. 5 zeigt die Magnitude der Sensitivität als Funktion der Phasenreserve. Die Magnitude wird kleiner, je grösser die gewünschte Phasenreserve ist. Das heisst, die Sensitivität muss die 0 dB Linie bei einer höheren Frequenz schneiden, je grösser die Phasenreserve sein soll. Dies hat zur Folge, dass  $\omega_1$  höher spezifiziert werden muss.

Die Schlussfolgerung, dass  $\omega_1$  grösser sein muss, je grösser die Phasenreserve ist, kann auch umgedreht werden.  $|W_1(j\omega)|$  wird bis zu  $\omega_1$  grösser als 1 sein (siehe Abb. 3). Je grösser  $|W_1(j\omega)|$  ist, desto grösser muss die Phasenreserve sein (siehe Abb. 4), da  $L(j\omega)$  nicht in den Kreis mit Radius  $|W_1(j\omega)|$  eintreten darf.

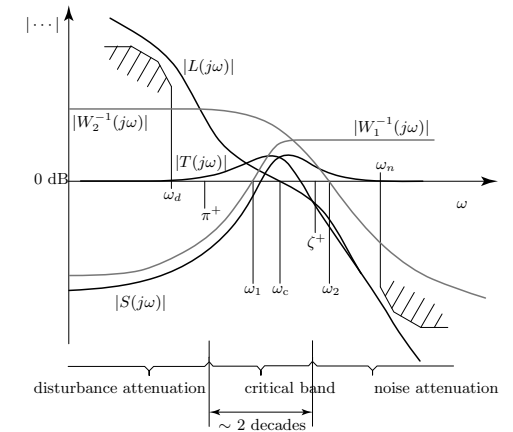


Abb. 6: Zusammenfassendes Bild aller Bedingungen und Spezifikationen.

## Regelungstechnik II FS 2021

## Kaskadierte Systeme, Wurzelortskurven, Numerische Verfahren

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Bei Fragen: hr@fael.ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 18. Februar 2021

## Zusammenfassung Vorlesung 3

## Kapitel 13.2, 13.3, 11.7

## 1 Kaskadierte Regelsysteme

Kaskadierte Regelsysteme eignen sich für SIMO (single-input, multiple-output) Systeme mit einer schnellen und einer langsamen Teildynamik. Um die volle Bandbreite der schnellen Dynamik auszunützen werden separate Regler für das schnelle und für das langsame Teilsystem ausgelegt.

In Abb. 1 ist ersichtlich, dass das schnelle Teilsystem  $P_f$  den Eingang  $u_s$  für das langsame Teilsystem  $P_s$  liefert. Das schnelle System wird geregelt, indem  $y_f$  rückgeführt wird;  $y_f$  ist oftmals proportional zu  $u_s$ , dies ist aber nicht immer der Fall.

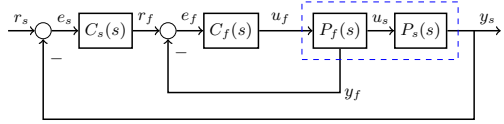


Abb. 1: Kaskadierte Regelstruktur. Der Index  $s$  ('slow') steht für langsame Teildynamiken, und  $f$  ('fast') für schnelle.

Um die Bandbreite des schnellen Teilsystems auszunützen wird für  $C_f(s)$  oftmals kein Integrator verwendet. Der langsame Regler  $C_s(s)$  hingegen hat oftmals einen Integrator um einen statischen Nachlauffehler zu eliminieren.

**Beispiel:** Die folgende Differentialgleichung beschreibt das System in Abb. 2. Die Position  $y$  und die Geschwindigkeit  $\dot{y}$  können direkt gemessen werden.

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Wir wählen  $x = y$  und  $v = \dot{y}$ . Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= v(t) \\ \frac{d}{dt}v(t) &= -x(t) - v(t) + u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

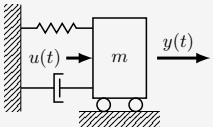


Abb. 2: Aktuiertes Feder-Dämpfer System.

Das Ziel ist, die Position zu regeln. Jedoch ist in Gl. (1) ersichtlich, dass  $u(t)$  direkt auf die Geschwindigkeit wirkt und nur indirekt auf die Position. Folgende Teildynamiken können hergeleitet werden:

$$u \rightarrow v: \quad P_f(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1} \quad (2)$$

$$v \rightarrow x: \quad P_s(s) = \frac{1}{s} \quad (3)$$

$$u \rightarrow x: \quad P(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (4)$$

## Zur Erinnerung:

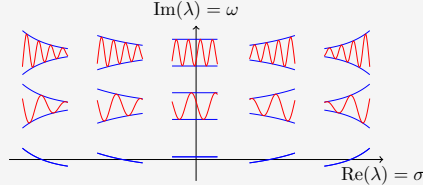


Abb. 3: Systemantwort als Funktion der Eigenwerte. Rot: Einfluss Imaginärteil, Blau: Einfluss Realteil.

Pole mit grösserem negativen Realteil klingen schneller ab als Pole mit kleinerem negativem Realteil. Die Pole in Gln. (2) bis (4) sind:

$$\begin{aligned} u \rightarrow v \quad (P_f): \quad & s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ v \rightarrow x \quad (P_s): \quad & s = 0 \\ u \rightarrow x \quad (P): \quad & s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Das System  $P_f$  ist also definitiv schneller als das System  $P_s$ . Obwohl  $P$  die gleichen Pole wie  $P_f$  hat, wird  $P_f$  schneller sein, da die zusätzliche Nullstelle bei  $s = 0$  die Phase anhebt.

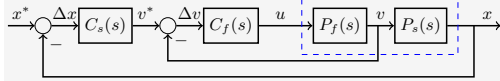


Abb. 4: Kaskadierte Regelstruktur für das Beispiel.

Für den Regler  $C_f$  kann ein P-Regler verwendet werden. Für den Regler  $C_s$  kann ein PI-Regler verwendet werden. Ein detaillierter Vergleich zwischen kaskadiertem und nicht kaskadiertem Regelverhalten ist im Buch in *Example 13.2.1* auf Seiten 225ff zu finden.

2 Wurzelortskurven-Verfahren<sup>1</sup>

Mit diesem Verfahren kann man die Pole des geschlossenen Regelkreises an einen spezifischen Ort setzen. Es wird folgendes Regelverhalten betrachtet:

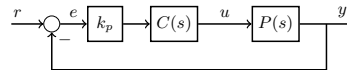


Abb. 5: Grundstruktur des Wurzelortskurven-Verfahrens.

Der Regler  $C(s)$  heisst in diesem Kontext Kompensator. Die Verstärkung  $k_p$  wird vom Kompensator abgespalten und in der Regelstruktur separat geschrieben. Wenn man die Pole des geschlossenen Regelkreises für alle  $k_p$  zeichnet, erhält man die Wurzelortskurven.

**Vorsicht!** Wir gehen im Folgenden von stabilen, minimalphasigen  $L(s)$  aus. Ausserdem muss gelten  $k_p > 0$ .

## Regeln des Wurzelortskurven-Verfahrens

Der geschlossene Regelkreis hat die Übertragungsfunktion:

$$T(s) = \frac{k_p \cdot C(s) \cdot P(s)}{1 + k_p \cdot C(s) \cdot P(s)} = \frac{k_p \cdot L(s)}{1 + k_p \cdot L(s)}$$

Die Pole des geschlossenen Regelkreises sind demnach Lösungen folgender Gleichung:

$$1 + k_p \cdot L(s) = 0 \quad (5)$$

Die offene Verstärkung  $L(s)$  ist eine reell-rationale Übertragungsfunktion:

$$L(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{(s - \zeta_1) \cdot (s - \zeta_2) \cdot \dots \cdot (s - \zeta_m)}{(s - \pi_1) \cdot (s - \pi_2) \cdot \dots \cdot (s - \pi_n)} \quad (6)$$

Daraus folgt:

$$1 + k_p \cdot \frac{b(s)}{a(s)} = 0 \Rightarrow a(s) + k_p \cdot b(s) = p(s, k_p)$$

Die Scharen der Nullstellen von  $p(s, k_p)$  repräsentieren die Wurzelortskurven. Das Polynom  $p(s, k_p)$  hat Ordnung  $n$ . Das Polynom kann für Extremfälle von  $k_p$  betrachtet werden:

$k_p \rightarrow 0 \Rightarrow p(s, k_p) \approx a(s)$  Für sehr kleine  $k_p$  konvergieren die  $n$  Nullstellen von  $p(s, k_p)$  zu den  $n$  Nullstellen von  $a(s)$ . Das heisst, die Pole von  $T(s)$  nähern sich den Polen von  $L(s)$ .

$k_p \rightarrow \infty \Rightarrow p(s, k_p) \approx k_p \cdot b(s)$  Für sehr grosse  $k_p$  konvergieren  $m$  Nullstellen von  $p(s, k_p)$  zu den  $m$  endlichen Nullstellen von  $b(s)$ . Das heisst die Pole von  $T(s)$  nähern sich den Nullstellen von  $L(s)$ . Jedoch hat  $p(s, k_p)$  Ordnung  $n$ , d.h. es bleiben  $n - m$  Nullstellen von  $p(s, k_p)$  übrig. Was mit den restlichen Nullstellen passiert, kann wie folgt interpretiert werden:

$$L(s) = \underbrace{\frac{(s - \zeta_1)(s - \zeta_2) \dots (s - \zeta_m)}{(s - \pi_1)(s - \pi_2) \dots (s - \pi_m)}}_m \underbrace{\frac{(-s/\infty + 1) \dots (-s/\infty + 1)}{(s - \pi_{m+1}) \dots (s - \pi_n)}}_{n-m}$$

**Zur Erinnerung:** Nullstellen, die im Unendlichen platziert sind, haben keinen Einfluss auf die Systemdynamik. Das heisst, wir können  $L(s)$  mit  $n - m$  Nullstellen erweitern, ohne das Systemverhalten zu ändern.

Die Hauptidee ist nun, dass sich die  $n - m$  übriggebliebenen Pole von  $L(s)$  den  $n - m$  im Unendlichen platzierten Nullstellen asymptotisch nähern. Insbesondere starten alle Asymptoten im Punkt  $\sigma_a + j \cdot 0$ , wobei:

$$\sigma_a = \frac{1}{n - m} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \text{Re}(\pi_i) - \sum_{i=1}^m \text{Re}(\zeta_i) \right)$$

Die Asymptoten verlassen den Punkt  $\sigma_a + j \cdot 0$  unter dem Winkel  $\delta_i$ , wobei:

$$\delta_i = \frac{\pi}{n - m} \cdot (2 \cdot (i - 1) + 1) [\text{rad}], \quad i = 1, \dots, n - m$$

## Zugehörigkeitstest

Um zu testen ob ein Punkt  $z \in \mathbb{C}$  auf der Wurzelortskurve liegt, wird Gl. (5) mit Hilfe von Gl. (6) umgeformt:

$$L(z) = -1/k_p \Rightarrow \angle L(z) = -\pi \text{ mod } 2\pi$$

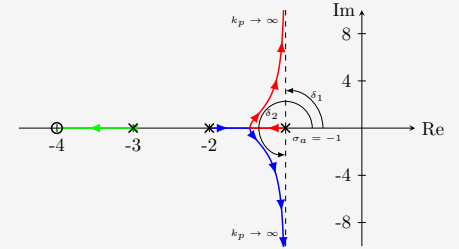
$$\sum_{i=1}^m \angle(z - \zeta_i) - \sum_{i=1}^n \angle(z - \pi_i) = -\pi \pm k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{N} \quad (7)$$

**Beispiel:**  $L(s)$  sei:

$$L(s) = \frac{s + 4}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

Es folgt:  $n = 3, m = 1, n - m = 2$ . Das heisst, zwei der Pole nähern sich für  $k_p \rightarrow \infty$  den Asymptoten, die bei  $\sigma_a + j \cdot 0$  starten, und denselben Punkt unter den Winkeln  $\delta_i$  verlassen, wobei:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{1}{2} \cdot (-1 - 2 - 3 - (-4)) = -1 \\ \delta_1 &= \frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot 0 + 1) = \frac{\pi}{2}, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot 1 + 1) = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$



Wir möchten nun testen ob der Punkt  $z = -3.5 + j \cdot 0$  auf der Wurzelortskurve liegt. Dazu wenden wir Gl. (7) an:

$$\angle(-3.5 + 4) - \angle(-3.5 + 1) - \angle(-3.5 + 2) - \angle(-3.5 + 3) = 3\pi$$

$3\pi$  hat die geforderte Form  $-\pi + k \cdot 2\pi$ , für  $k = 2$ . Der Punkt liegt also auf der Wurzelortskurve.

## Kompensierung mit dem Wurzelortungsverfahren

Der Zugehörigkeitstest aus Gl. (7) ist besonders hilfreich, um einen Kompensator zu finden, der die Pole des geschlossenen Regelkreises an einem gewünschten Ort in der komplexen Ebene platziert. Diese Idee wird an einem Beispiel gezeigt.

**Beispiel:** Du möchtest einen Kompensator  $C(s)$  für das System  $P(s)$  auslegen, sodass die Pole von  $T(s)$  bei  $s_{1,2}^* = -4 \pm j \cdot 4$  rad/s liegen.

$$P(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 3)}$$

Du testest zuerst einen einfachen Kompensator  $C_1(s) = 1$ .



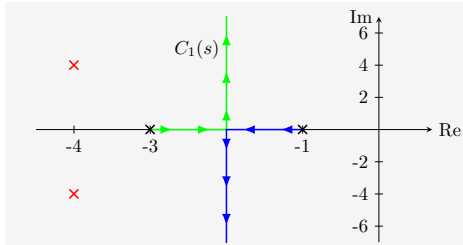


Abb. 6: Wurzelortskurve von  $L(s) = P(s) \cdot C_1(s)$  in blau und grün. Gewünschte Polplatzierung in rot.

Aus Abb. 6 ist ersichtlich, dass die gewünschten Pole (×) nicht auf der Wurzelortskurve liegen. Das heisst, für  $C_1(s)$  gibt es kein  $k_p$ , sodass der geschlossene Regelkreis  $T(s)$  die gewünschten Pole hat. Gl. (7) ist somit nicht erfüllt.

Die gewünschten Pole liegen links von den Polen von  $L(s)$ . Um die Wurzelortskurve nach links zu biegen, verwendest du einen Kompensator mit Nullstelle:  $C_2(s) = s + \zeta$ .

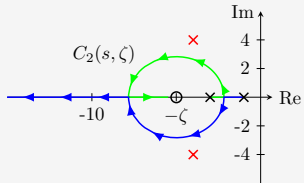


Abb. 7: Wurzelortskurve von  $L(s) = P(s) \cdot C_2(s, \zeta)$  in blau und grün. Gewünschte Polplatzierung in rot.

Du möchtest nun  $\zeta$  finden, sodass die gewünschten Pole auf der Wurzelortskurve liegen. Dafür wendest du Gl. (7) an:

$$L = \frac{(s + \zeta)}{(s + 1)(s + 3)} \Rightarrow \angle L = \angle(s + \zeta) - \angle(s + 1) - \angle(s + 3)$$

Spezifisch für  $s = s_1^*$ :

$$\begin{aligned} \angle(-4 + 4j + \zeta) - \angle(-4 + 4j + 1) - \angle(-4 + 4j + 3) = \\ \underbrace{\arctan\left(\frac{4}{\zeta - 4}\right)}_{\gamma} - \underbrace{\arctan\left(\frac{4}{-3}\right)}_{\alpha} - \underbrace{\arctan\left(\frac{4}{-1}\right)}_{\beta} \stackrel{!}{=} -\pi \\ \Rightarrow \gamma = -\pi + \alpha + \beta, \quad \zeta = 4 + 4/\tan(\gamma) \approx 7.25 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

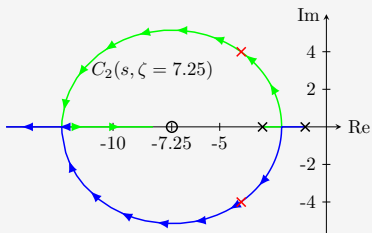


Abb. 8: Wurzelortskurve von  $L(s) = P(s) \cdot C_2(s, \zeta)$  in blau und grün. Gewünschte Polplatzierung in rot.

Die gewünschten Pole liegen auf den Wurzelortskurven von  $L(s) = P(s) \cdot C_2(s, \zeta = 7.25)$ . Demnach ist es möglich, ein  $k_p$  zu finden, sodass  $T(s)$  die gewünschten Pole hat.

### 3 Numerische Verfahren

Mit numerischen Verfahren kann man für eine gegebene Regelstruktur (z.B. PI) ein Optimierungsproblem lösen, um die Parameter  $k_p$  und  $T_i$  zu erhalten. Das Optimierungsproblem involviert eine Kostenfunktion  $J(k_p, T_i)$ , die durch die Wahl der optimalen Parameter  $k_p$  und  $T_i$  minimiert werden soll.

**Beispiel:** Wir möchten einen PI-Regler auslegen, der auf eine Sprungantwort kumulativ einen kleinen Fehler erzeugt, der den maximalen Überschwinger möglichst klein hält, und der möglichst robust ist.

Ein Mass für den kumulativen Fehler ist die Summe aller quadrierten Fehler:

$$g_1 = \int_0^\infty e^2(t) dt$$

Der maximale Überschwinger ist wie folgt definiert:

$$g_2 = \max_{t \in [0, \infty)} (y(t) - 1)$$

Die Robustheit kann mit der *minimum return difference*  $\mu_{\min}$  quantifiziert werden. Wir definieren die Funktion  $g_3$  als

$$g_3 = -\mu_{\min} = -\min_{\omega \in [0, \infty)} |1 + L(j\omega)|$$

Durch das Minus-Zeichen gilt: Minimiert man  $g_3$ , so maximiert man die Robustheit. Schlussendlich benutzen wir die Faktoren  $\kappa_i > 0$  um die Kostenfunktion  $J$  als gewichtete Summe zu definieren:

$$J(k_p, T_i) = \kappa_1 \cdot g_1 + \kappa_2 \cdot g_2 + \kappa_3 \cdot g_3$$

Der Wert der Kostenfunktion hängt von den Reglerparametern  $k_p$  und  $T_i$  ab, denn die Gütekriterien  $g_i$  nehmen unterschiedliche Werte an, wenn man die Reglerparameter variiert. Folglich kann man ein Optimierungsproblem formulieren, um die Kostenfunktion zu minimieren:

$$\min_{k_p, T_i} J(k_p, T_i)$$

Um die optimalen Reglerparameter zu erhalten, kann dieses Problem z.B. numerisch mit der Funktion `fminsearch` in Matlab gelöst werden.

Die Faktoren  $\kappa_i$  sind dabei ein Mass für die Wichtigkeit der Grösse  $g_i$  in der Kostenfunktion  $J$ . Als Beispiel: Je grösser  $\kappa_3$  (bei fixierten  $\kappa_{1,2}$ ) gewählt wird, desto robuster wird der Regler. Jedoch werden die Gütekriterien  $g_1$  und  $g_2$  dadurch relativ zu  $g_3$  weniger stark gewichtet. Weil er nur einen geringen Einfluss auf den Wert der Kostenfunktion hat, kann beispielsweise der Überschwinger in diesem Fall für die optimalen Reglerparameter grösser ausfallen. Daher können die Faktoren  $\kappa_i$  als *Tuning-Parameter* angesehen werden, die es erlauben einen *Trade-off* zwischen verschiedenen Zielen zu definieren. Dabei ist nur die relative Grösse der  $\kappa_i$  zueinander von Relevanz. So ist z.B. das Minimum der Kostenfunktion für  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 1$  an derselben Stelle wie für  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 100$ .

## Regelungstechnik II FS 2021

### PID Praxiseinsatz

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

### 1 PID-Regler in der Praxis

Der praktische Einsatz von Reglern bringt diverse bisher unerwähnte Schwierigkeiten mit sich. Die wichtigsten Einschränkungen werden im Folgenden diskutiert.

#### Set Point Weights

Die Standardregelstruktur dient vor allem zur Unterdrückung von Störungen. Natürlich werden Regler auch verwendet um spezifischen Referenzsignalen  $r(t)$  zu folgen. Schnelle Änderungen im Referenzsignal können jedoch betragsmässig sehr grosse Eingänge  $u(t)$  und ungewollte Transienten produzieren. Mit sogenannten *set point weights* (Abb. 1) kann das Regelverhalten verbessert werden.

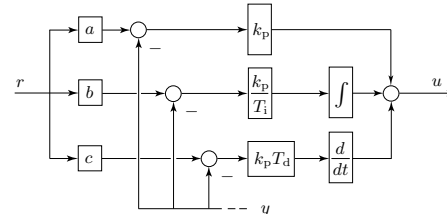


Abb. 1: PID-Regler mit Setpointverstärkungen  $a, b, c$ .

Das Referenzsignal wird für jeden Teil des Reglers (P, I, D) mit einer separaten Verstärkung ( $a, b, c$ ) multipliziert. Das heisst, die Referenz wird "vormassiert", bevor sie durch den Regler geht.

- I-Teil: Um keinen statischen Nachlauffehler zu produzieren, falls der Referenzwert konstant wird, setzt man normalerweise  $b = 1$ .
- D-Teil: Schnelle Referenzänderungen führen zu grossen Signalen auf dem Differential-Pfad des Reglers ( $\frac{d}{dt}(r - y) \approx \frac{d}{dt}r$ ). Deshalb setzt man oftmals  $c = 0$ , damit grosse Ableitungen nicht auf den Eingang  $u$  durchschlagen.
- P-Teil: Für die Verstärkung  $a$  auf dem proportionalen Signal kann man die folgenden Äström und Hägglund Regeln anwenden:

$$a = \alpha_{0,x} \cdot e^{\alpha_{1,x} \cdot \kappa + \alpha_{2,x} \cdot \kappa^2}$$

	$\mu_{\min} = 0.7$			$\mu_{\min} = 0.5$		
	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$	$\alpha_{0,x}$	$\alpha_{1,x}$	$\alpha_{2,x}$
PI	1.10	-0.0061	1.8	0.48	0.40	-0.17
PID	0.58	-1.3000	3.5	0.25	0.56	-1.20

Tabelle 1: Äström-Hägglund-Koeffizienten für PI und PID-Regler.

Typischerweise ist  $0 < a < 1$ . Ein gut gewählter Wert von  $a$  kann das closed-loop Regelverhalten häufig verbessern.

#### Saturationen und Anti Reset Windup (ARW)

Eine Saturation ist eine Nichtlinearität, die in jedem realen Regelsystem vorhanden ist. Aktuatoren können in Realität nie beliebig kleine oder beliebig grosse Sollsignale  $u(t)$  umsetzen.

## Zusammenfassung Vorlesung 4

### Buch Kapitel 14.1-14.3, Kapitel 7.5

Bei Fragen: hr@iaf.ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 19. März 2021

Die Nichtlinearität einer Saturation ist wie folgt definiert:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_{\min} & \text{if } u(t) < u_{\min} \\ u_{\max} & \text{if } u(t) > u_{\max} \\ u(t) & \text{else} \end{cases}$$

Falls der vom Regler  $C(s)$  geforderte Ausgang  $u$  grösser ist als der maximal produzierbare Eingang  $u_{\max}$  des Aktuators, saturiert der Eingang bei  $\bar{u} = u_{\max}$ . Die gleiche Logik gilt für den minimal erreichbaren Eingang  $u_{\min}$ .

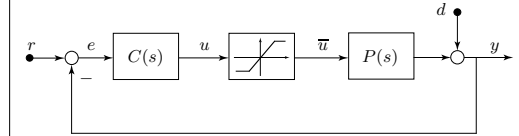


Abb. 2: Regelsystem mit Saturation auf  $u$ .

**Beispiel:** Das System  $P(s)$  soll mit einem PI-Regler  $C_{PI}(s)$  geregelt werden:

$$P(s) = \frac{1}{s \cdot (3s^2 + 4s + 1)}, \quad C_{PI}(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s}\right)$$

Eine Simulation mit  $k_p = 0.3$  und  $T_i = 13$  s führt zum gestrichelten Systemverhalten:

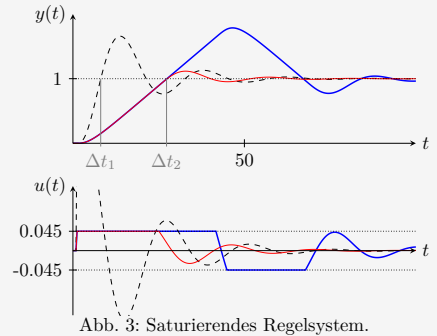


Abb. 3: Saturierendes Regelsystem.

Beim Auslegen wurde jedoch vernachlässigt, dass der Aktuator bei  $|u(t)| = u_{\text{sat}} = 0.045$  saturiert. Mit der Aktuator-Sättigung resultiert effektiv die blaue Linie und damit eine schlechtere Reglerperformance. Mit einem ARW (siehe folgenden Abschnitt) resultiert die viel bessere Performance der roten Linie.

Um mit Saturationen umzugehen, muss man zuerst verstehen, was bei einem saturierten Regelsystem überhaupt passiert. Dadurch, dass das System langsamer reagiert als erwartet, kann sich der Integrator über eine längere Zeit  $t$  füllen ( $\Delta t_1 < t < \Delta t_2$ ). Sobald sich das Vorzeichen des Fehlers ändert, überschiesst die Antwort das Ziel stärker, da sich der Integrator zuerst leeren muss.

Um die Saturation zu umgehen, kann man den Integrator durch ein *Anti Reset Windup* (ARW) schwächen, sobald man erkennt, dass der Eingang saturiert (siehe Abb. 4, rote Box). In der roten Box sieht man eine mögliche Struktur eines anti reset-windup. Dabei ist  $q(t) = u(t) - \bar{u}(t)$ . Falls  $u(t)$  nicht saturiert, ist  $q(t) = 0$  und der ARW macht nichts. Falls man saturiert, wird die zu integrierende Grösse reduziert, sodass sich der Integrator in der Saturationsphase nicht zu stark füllt. Das heisst je stärker die Aktuatoren saturieren, desto mehr wirkt man der Integration entgegen. Dazu muss man die Saturationspunkte der Nichtlinearität kennen.

### Bumpless Transfer

Um ein System zu testen, macht es oft Sinn einen Manuellen Modus (M) und einen Automatischen Modus (A) zu haben. Wenn man von einem Modus in den anderen wechselt, will man dies so reibungslos wie möglich machen (Bumpless Transfer). Dazu verwendet man folgende Regelstruktur:

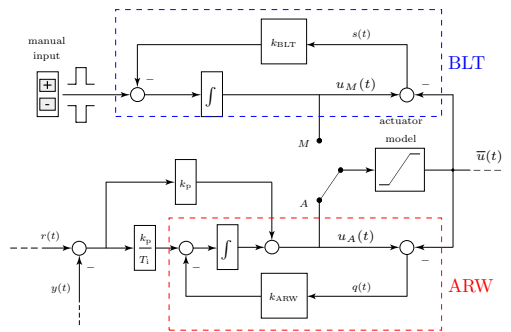


Abb. 4: Anti Reset Windup (ARW) und Bumpless Transfer (BLT) Regelung.

Während man im Modus A ist, regelt man  $u_M(t)$  auf  $u_A(t)$ , sodass beim Wechsel von A nach M kein Sprung in der Eingangsgrösse auftritt. Umgekehrt regelt man im Modus M mit Hilfe der ARW-Rückführung das Signal  $u_A(t)$  auf  $u_M(t)$ .

### Gain Scheduling

Gain Scheduling wird meist für nichtlineare Systeme verwendet, die um verschiedene Betriebspunkte linearisiert werden. Für jeden Betriebspunkt kann ein anderer linearer Regler ausgelegt werden.

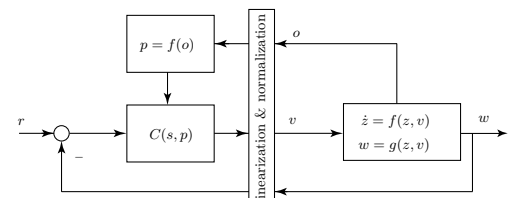


Abb. 5: Diagramm zu Gain Scheduling.

Beispielsweise werden für einen PI-Regler die Verstärkungen  $k_p(o)$ ,  $T_i(o)$  zu Funktionen des Betriebspunktes  $o$ .

### Analoge Realisierung

Mit analogen Schaltungen kann man eine Eingangsspannung  $U_e$  in eine Ausgangsspannung  $U_a$  umwandeln. Dabei kann man die Grundstruktur in Abb. 6 verwenden.

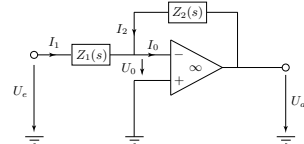


Abb. 6: Grundstruktur mit idealem analogem Opamp.

Die Übertragungsfunktion von  $U_e(s)$  nach  $U_a(s)$  lautet

$$\Sigma(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)},$$

wobei  $Z_1(s)$  und  $Z_2(s)$  aus Widerständen ( $R$ ), Induktoren ( $L$ ) und Kapazitäten ( $C$ ) aufgebaut sind. Die Impedanzen der Standard RLC-Elemente lauten:

$$Z_R(s) = R, \quad Z_L(s) = sL, \quad Z_C(s) = \frac{1}{sC}.$$

Des Weiteren gelten die Kirchhoffschen Regeln für Serien- und Parallelschaltungen dieser Elemente.

### 2 Algebraische Stabilitätskriterien

Die folgenden zwei Verfahren testen, ob alle Realteile der Nullstellen eines Polynoms  $p(s)$  negativen Realteil haben.

$$p(s) = a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0, \quad a_n > 0$$

Dabei ist  $a_i > 0 \forall i$  notwendig, aber nicht hinreichend.

Die Verfahren können auf das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion eines Systems  $\Sigma(s)$  angewendet werden, um zu bestimmen, ob das System  $\Sigma(s)$  stabil ist.

#### Hurwitz Kriterium

Die Koeffizienten  $a_i$  sind exakt bekannt. Die Nullstellen des Polynoms  $p(s)$  haben garantiert alle negative Realteile dann und nur dann, wenn die  $n$  quadratischen Sub-Matrizen  $H_1$  bis  $H_n$  der Matrix  $H_n$  alle eine strikt positive Determinante haben.

$$H_n = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & \dots & H_n \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

#### Kharitonov Kriterium

Die Koeffizienten  $a_i$  seien nicht exakt bekannt, man weiss jedoch, dass sie in einer gewissen Region liegen:

$$p(s, a) = [\underline{a}_n, \bar{a}_n] \cdot s^n + [\underline{a}_{n-1}, \bar{a}_{n-1}] \cdot s^{n-1} + \dots + [\underline{a}_0, \bar{a}_0]$$

Das Problem reduziert sich auf die Ecken eines Rechtecks in der komplexen Ebene und es müssen nur folgende Polynome mit dem Hurwitz-Kriterium getestet werden:

$$\begin{aligned} p_1(s) &= \bar{a}_0 + \underline{a}_1 \cdot s + \underline{a}_2 \cdot s^2 + \bar{a}_3 \cdot s^3 + \dots \\ p_2(s) &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot s + \underline{a}_2 \cdot s^2 + \underline{a}_3 \cdot s^3 + \dots \\ p_3(s) &= \underline{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot s + \bar{a}_2 \cdot s^2 + \bar{a}_3 \cdot s^3 + \dots \\ p_4(s) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1 \cdot s + \bar{a}_2 \cdot s^2 + \bar{a}_3 \cdot s^3 + \dots \end{aligned}$$

## Regelungstechnik II FS 2021

### Diskrete Regelung

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

### 1 Einleitung: Diskrete Regelung

In diesem Kapitel wird ein zeitkontinuierlicher Regler  $C(s)$  in einen zeitdiskreten Regler  $C(z)$  umwandelt. Die Diskretisierung bezieht sich in dem Fall auf eine Zeitdiskretisierung.

#### Zeitdiskrete Realisierung

Bis jetzt wurde angenommen, dass ein Regler  $C(s)$  in jedem Zeitpunkt  $t$  berechnen kann, was  $u(t)$  sein soll. In der Realität läuft die Rechnung mit einer fixen Taktfrequenz  $f_s$ . D.h. es können in Wirklichkeit nur zu fixen Zeitpunkten  $t_k$  neue Eingänge  $u(k \cdot T_s) = u[k]$  berechnet werden, wobei  $T_s$  die Samplingzeit bezeichnet:

$$t_k = \frac{k}{f_s} = k \cdot T_s, \quad k \in \{0, 1, \dots\} \quad (1)$$

Die Diskretisierung findet statt, da der Mikroprozessor ( $\mu P$ ), der die Rechnungen ausführt, mit einer fixen Frequenz läuft (dargestellt durch die Uhr in Abb. 1).

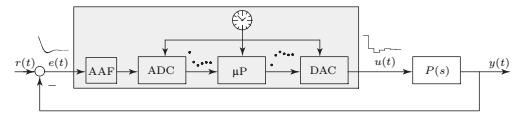


Abb. 1: Digitales Regelsystem.

ADC: Steht für Analog-to-Digital Converter. Konvertiert zeitkontinuierliche Signale in zeitdiskrete Signale.

$\mu P$ : Steht für Mikroprozessor. Berechnet den zeitdiskreten Eingang  $u[k]$ .

DAC: Steht für Digital-to-Analog Converter. Konvertiert zeitdiskrete Signale in zeitkontinuierliche Signale.

Der DAC wird meistens mit einem *Zero-Order Hold* (ZOH) Element realisiert, wobei der Eingang  $u[k]$  zwischen zwei Berechnungsschritten konstant gehalten wird:

$$u(t) = u[k] \quad \forall t \in [k \cdot T_s, (k+1) \cdot T_s)$$

**Beispiel:** Ein Signal  $x(t)$  wird zuerst abgetastet, und dann wird ein ZOH angewandt.

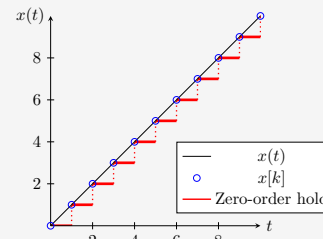


Abb. 2: Abgetastetes Signal in blauen Kreisen, ZOH in rot.

Das Sampling geschieht mit einem ADC. Der ZOH-Prozess läuft im DAC ab.

## Zusammenfassung Vorlesung 5

### Buch Kapitel 14.4

Bei Fragen: hr@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 25. März 2021

In Abb. 1 ist in der grauen Box noch ein weiteres Element: der analoge Anti-Aliasing Filter (AAF). Der AAF ist nötig, da ein zeitdiskretes Signal nicht beliebig hohe Frequenzen repräsentieren kann. Energien der Frequenzen im analogen Signal, die höher als die maximal repräsentierbare Frequenz sind, werden bei der Diskretisierung ungewollt auf das gesamte Frequenzspektrum verteilt und verzerren dieses somit. Deshalb wählt man für den AAF einen Tiefpassfilter um hohe Frequenzen vor der Diskretisierung zu eliminieren.

**Beispiel:** Du sollst ein diskretes Signal zeichnen, das für eine fixe Rate  $f_s = \frac{1}{T_s}$  die höchstmögliche Frequenz hat.

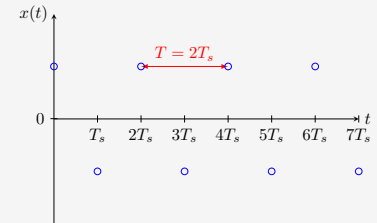


Abb. 3: Signal mit höchstmöglicher Frequenz für ein gegebenes  $T_s$ .

Die höchstmögliche Frequenz  $f_{\max}$ , die man in das Zeitraster  $\{0, T_s, 2T_s, \dots\}$  legen kann, wird als **Nyquist-Frequenz** bezeichnet und lautet:

$$f_{\max} = \frac{1}{T} = \frac{1}{2T_s}, \quad [f_{\max}] = \text{Hz}$$

### z-Transformation

Um einen diskreten Regler  $C(z)$  zu erstellen, verwendet man das diskrete Analogon der Laplace-Transformation, die Z-Transformation:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \cdot x[k]$$

Einige wichtige Eigenschaften der Z-Transformation:

$$x[k+1] \leftrightarrow z \cdot X(z) - z \cdot x[0] \quad (2)$$

$$x[k-1] \leftrightarrow z^{-1} \cdot X(z) \quad (3)$$

$$z = e^{s \cdot T_s} \quad (4)$$

In der diskreten Welt ist die unabhängige Variable nicht mehr  $s$ , sondern  $z$ . Gl. (4) liefert die exakte Beziehung zwischen  $s \in \mathbb{C}$  und  $z \in \mathbb{C}$ .

**Beispiel:** Mit Gl. (4) kann man das diskrete Äquivalent eines asymptotisch stabilen Pols nach Lyapunov herleiten:

$$z = e^{\sigma T_s + \omega T_s j} = e^{\sigma T_s} \cdot e^{\omega T_s j} = a \cdot e^{\omega T_s j}$$

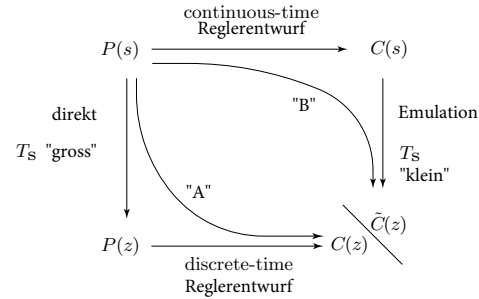
$$\text{asympt. stabil} \rightarrow \sigma < 0 \rightarrow 0 < a < 1$$

$$|z| = a \rightarrow |z| < 1$$

D.h. die ganze linke Halbebene ( $\sigma < 0$ , asymptotisch stabile Pole) im  $s$ -Raum wird zu einer Scheibe mit Radius 1 ( $|z| < 1$ ) im  $z$ -Raum. Der Kreis mit Radius 1 ist nicht inbegriffen.

## 2 Entwurf diskreter Regler

Beim Entwurf diskreter Regler werden grundsätzlich zwei mögliche Pfade unterschieden, im Folgenden **Pfad A** und **Pfad B** genannt.



### Pfad A: Diskreter Reglerentwurf

Wenn die Samplingzeit  $T_s$  relativ gross ist im Vergleich zur Dynamik/Zeitkonstante des Systems.

1. System  $P(s)$  mit einem Zero-Order Hold diskretisieren, es resultiert  $P(z)$ , eine diskrete Systembeschreibung.
2. Diskreten Regler  $C(z)$  basierend auf  $P(z)$  entwerfen.

Es existiert eine ausführliche Theorie zum Entwurf diskreter Regler  $C(z)$  basierend auf diskreten Systemen  $P(z)$ . Dies wird in der Vorlesung RT2 jedoch nicht besprochen.

### Pfad B: Emulation

Wenn die Samplingzeit  $T_s$  relativ klein ist im Vergleich zur Dynamik des Systems (was häufig der Fall ist).

1. Mit der Theorie aus RT1 und RT2 wird ein kontinuierlicher Regler  $C(s)$  für das System  $P(s)$  ausgelegt.
2. Mit einer Emulation wird  $\tilde{C}(z)$ , eine diskrete Version des kontinuierlichen Reglers  $C(s)$ , erstellt.

### Emulation

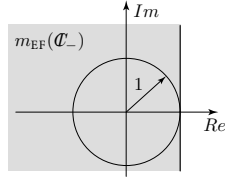
Durch eine Emulation wird die Variable  $s$  im kontinuierlichen Zeitbereich mit der Variable  $z$  im diskreten Zeitbereich ersetzt. Exakt ist das möglich mit Gl. (4). Unglücklicherweise ist Gl. (4) nichtlinear und deshalb praktisch nicht umsetzbar. Deshalb approximiert man den Zusammenhang häufig, ein Schritt der *Emulation* genannt wird. Emulationen sind dann sinnvoll, wenn die diskreten Zeitschritte  $T_s$  klein sind im Vergleich zur Dynamik des beschriebenen Systems. Es gibt mehrere Approximationen für Gl. (4), die die Emulation mit der Approximation  $e^x \approx 1 + x$  erleichtern. Dabei wird Gl. (4) jeweils etwas anders geschrieben.

Welche der folgenden Emulationen am sinnvollsten ist, hängt vom jeweiligen spezifischen Problem ab und muss über Computersimulationen des Regelsystems oder über Experimente am realen System ermittelt werden. Oft lohnt es sich die einfachste, garantiert Stabilität erhaltende Methode zu verwenden (Euler Backward), häufig wird jedoch auch die Tustin Emulation benutzt.

### Euler Forward Emulation

$$z = e^{s \cdot T_s} \approx 1 + s \cdot T_s$$

$$\Rightarrow s \approx \frac{z-1}{T_s}$$

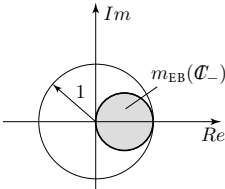


Mit der Euler Forward Emulation wird die linke Halbebene in der  $s$ -Ebene ( $\text{Re}(s) < 0$ ) auf den grau hinterlegten Bereich in der  $z$ -Ebene abgebildet. D.h. stabile Pole in  $C(s)$  können zu instabilen Polen in  $\tilde{C}(z)$  werden. (Siehe Beispiel oben: ein stabiles System in der  $z$ -Ebene hat alle Pole innerhalb des Kreises mit Radius 1 um den Ursprung.) Für den Regelkreis kann das fatale Folgen haben, weshalb diese Emulation meist nicht verwendet wird.

### Euler Backward Emulation

$$z = \frac{1}{e^{-s \cdot T_s}} \approx \frac{1}{1 - s \cdot T_s}$$

$$\Rightarrow s \approx \frac{z-1}{z \cdot T_s}$$

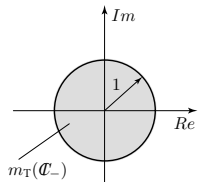


Mit der Euler Backward Emulation wird die linke Halbebene in der  $s$ -Ebene auf den gezeigten Bereich in der  $z$ -Ebene abgebildet. D.h. alle stabilen Pole in  $C(s)$  werden garantiert zu stabilen Polen in  $\tilde{C}(z)$ . Ein stabiler Regler  $C(s)$  resultiert also in einem garantiert stabilen Regler  $\tilde{C}(z)$ .

### Tustin Emulation (Bilineare Emulation)

$$z = \frac{e^{sT_s/2}}{e^{-sT_s/2}} \approx \frac{1 + sT_s/2}{1 - sT_s/2}$$

$$\Rightarrow s \approx \frac{2(z-1)}{T_s(z+1)}$$



Mit der Tustin Emulation wird die linke Halbebene in der  $s$ -Ebene auf den Kreis mit Radius kleiner eins ( $|z| < 1$ ) in der  $z$ -Ebene abgebildet. Das bedeutet, dass alle stabilen Pole in  $C(s)$  garantiert zu stabilen Polen in  $\tilde{C}(z)$  werden. Ein stabiler Regler  $C(s)$  wird also zu einem garantiert stabilen Regler  $\tilde{C}(z)$ .

**Beispiel:** Für ein System wurde ein zeitkontinuierlicher PI-Regler  $C(s)$  ausgelegt:

$$C(s) = k_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} \right)$$

Der Regler soll schlussendlich auf einem Mikroprozessor laufen und muss daher in diskreter Form implementiert werden. Dazu gehen wir in zwei Schritten vor.

1. *Emulation:* Beispielhaft wenden wir die Euler Backward Emulation an und erhalten so die diskrete Version  $\tilde{C}(z)$  des PI-Reglers:

$$\tilde{C}(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{z \cdot T_s}} = k_p \cdot \frac{(T_i + T_s) \cdot z - T_i}{T_i \cdot (z - 1)}$$

2. *Implementierung:* Zur Erinnerung: die diskrete Übertragungsfunktion  $\tilde{C}(z)$  des Reglers beschreibt den Zusammenhang zwischen der Z-Transformation des Regelfehlers  $E(z)$  und dem Reglerausgang  $U(z)$ :

$$\tilde{C}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} \rightarrow U(z) = \tilde{C}(z) \cdot E(z)$$

Einsetzen der Übertragungsfunktion des Reglers liefert:

$$T_i \cdot (z - 1) \cdot U(z) = k_p \cdot ((T_i + T_s) \cdot z - T_i) \cdot E(z)$$

Wir multiplizieren auf beiden Seiten mit  $z^{-1}$  und erhalten:

$$T_i \cdot U(z) - T_i \cdot z^{-1} \cdot U(z) = k_p \cdot (T_i + T_s) \cdot E(z) - k_p \cdot T_i \cdot z^{-1} \cdot E(z)$$

Durch Anwendung der Definition der Z-Transformation in Gl. (3) und Umformen erhalten wir schlussendlich eine Differenzengleichung, die einfach implementiert werden kann:

$$u[k] = u[k-1] + k_p \cdot \frac{T_i + T_s}{T_i} \cdot e[k] - k_p \cdot e[k-1]$$

Dabei hängt der Input  $u[k]$  vom Fehler zum Zeitpunkt  $k$  sowie vom Input und vom Fehler aus dem vorherigen Zeitschritt  $k-1$  ab.

*Bemerkung:* Durch das Multiplizieren mit  $z^{-1}$  haben wir die gesamte Differenzengleichung um einen Index verschoben. Ohne diesen Zwischenschritt hätten wir Gl. (2) anwenden können und hätten die folgende Beschreibung erhalten:

$$u[k+1] = u[k] + k_p \cdot \frac{T_i + T_s}{T_i} \cdot e[k+1] - k_p \cdot e[k]$$

Der Unterschied liegt nur in der Definition des *aktuellen* Zeitschrittes. Die Frage ist: verwenden wir die Werte aus dem vorherigen Zeitschritt ( $k-1$ ) um den jetzigen Reglerausgang ( $k$ ) zu berechnen, oder verwenden wir die aktuellen Werte ( $k$ ) um den nächsten Ausgangswert ( $k+1$ ) zu berechnen? In jedem Fall ist der Reglerausgang während eines gegebenen Zeitschrittes vom Fehler zu Beginn dieses Zeitschrittes sowie vom Fehler und dem Reglerausgang aus dem vorherigen Zeitschritt abhängig; für die Implementierung sind also beide Beschreibungen äquivalent.

## Regelungstechnik II FS 2021

## MIMO versus SISO Systeme

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

## Zusammenfassung Vorlesung 6

## Skript Kapitel 1

Bei Fragen: hralfael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 8. April 2021

## 1 Systembeschreibung

Bisher wurden SISO (single-input, single-output) Systeme betrachtet, d.h.  $u(t) \in \mathbb{R}$  und  $y(t) \in \mathbb{R}$ .

Neu werden MIMO (multiple-input, multiple-output) Systeme mit mehreren Ein- und Ausgängen betrachtet, wobei  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  und  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ . Identisch zum SISO Fall kann das MIMO System im Zustandsraum dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t), \quad y(t) \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \quad (1)$$

Da  $u(t)$  und  $y(t)$  jetzt Vektoren sind, müssen die Matrizen  $B$ ,  $C$  und  $D$  auf die Dimensionen der Eingänge und der Ausgänge angepasst werden. Das I/O (Input-Output) Verhalten des Systems in Gl. (1) wird identisch wie beim SISO Fall über die Laplace-Transformation hergeleitet:

$$\begin{aligned} s \cdot X(s) &= A \cdot X(s) + B \cdot U(s) \\ \Rightarrow X(s) &= (s \cdot I_{n \times n} - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) \\ \Rightarrow Y(s) &= \underbrace{(C \cdot (s \cdot I_{n \times n} - A)^{-1} \cdot B + D)}_{P(s)} \cdot U(s), \end{aligned} \quad (2)$$

wobei  $I_{n \times n}$  eine Einheitsmatrix der Dimension  $n \times n$  ist.

Da  $U(s) \in \mathbb{C}^m$  und  $Y(s) \in \mathbb{C}^p$  wird  $P(s)$  eine Matrix:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{1,1}(s) & P_{1,2}(s) & \dots & P_{1,m}(s) \\ P_{2,1}(s) & P_{2,2}(s) & \dots & P_{2,m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{p,1}(s) & P_{p,2}(s) & \dots & P_{p,m}(s) \end{bmatrix},$$

wobei jede Übertragungsfunktion  $P_{i,j}(s) : u_j \rightarrow y_i$  eine gebrochen-rationale Funktion darstellt:

$$P_{i,j}(s) = \frac{b_{m,i,j} \cdot s^m + \dots + b_{1,i,j} \cdot s + b_{0,i,j}}{s^n + a_{n-1,i,j} \cdot s^{n-1} + \dots + a_{1,i,j} \cdot s + a_{0,i,j}} = \frac{b_{i,j}(s)}{a_{i,j}(s)}$$

**Zur Erinnerung:**  $P(s)$  beinhaltet nur die gleichzeitig steuerbaren und beobachtbaren Teile des Systems in Gl. (1).

**Beispiel:** Das folgende System soll geregelt werden:

$$\begin{aligned} P(s) &= \begin{bmatrix} P_{1,1}(s) & P_{1,2}(s) \\ P_{2,1}(s) & P_{2,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{s+1} & \frac{a_{12}}{s+1} \\ \frac{a_{21}}{s+1} & \frac{a_{22}}{s+1} \end{bmatrix}, \\ U(s) &= \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}, \quad Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

Dabei seien  $r_1(t) = h(t)$  (Einheitssprung) und  $r_2(t) = 0$ . Um die Übertragungsfunktion von  $R(s)$  nach  $Y(s)$  zu finden wird die folgende Regelstruktur betrachtet

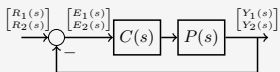


Abb. 1: Regelstruktur ohne Störung und ohne Rauschen.

Der Ausgang als Funktion des Fehlers lautet:

$$Y(s) = P(s) \cdot C(s) \cdot E(s) = P(s) \cdot C(s) \cdot [R(s) - Y(s)]$$

Daraus folgt:

$$Y(s) = [I + P(s)C(s)]^{-1} \cdot P(s) \cdot C(s) \cdot R(s)$$

**Vorsicht!** Die Reihenfolge der Matrixmultiplikation  $P(s) \cdot C(s)$  kann nicht umgedreht werden, da diese Operation für allgemeine Matrizen nicht kommutiert.

Das System  $P(s)$  wird nun für drei verschiedene Fälle der Verstärkung  $P(0)$  simuliert:

$$P(0) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

**Fall 1:**  $a_{11}, a_{22} \gg a_{12}, a_{21}$

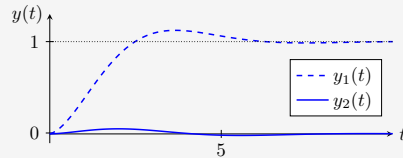
Die Systemparameter werden beispielhaft  $a_{11} = a_{22} = 1$  und  $a_{12} = a_{21} = 0.1$  gewählt. Die Matrix  $P(0)$  ist diagonaldominant, es folgt näherungsweise

$$P(s) \approx \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{a_{22}}{s+1} \end{bmatrix}.$$

D.h. der Eingang  $u_1(t)$  wirkt nur auf  $y_1(t)$  und  $u_2(t)$  wirkt nur auf  $y_2(t)$ . Somit kann das Gesamtsystem in zwei SISO Systeme ( $r_1 \rightarrow y_1$  und  $r_2 \rightarrow y_2$ ) unterteilt werden. Die Reglermatrix wird unter dieser Annahme diagonal:

$$C(s) = \begin{bmatrix} C_1(s) & 0 \\ 0 & C_2(s) \end{bmatrix},$$

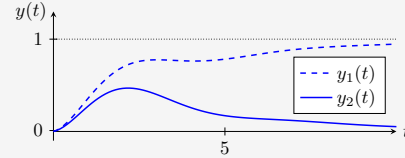
wobei im gegebenen Beispiel für  $C_1(s)$  und  $C_2(s)$  zwei identische PI-Regler mit  $k_p = 0.1$  und  $T_i = 0.1$  s gewählt werden.

Abb. 2: Fall 1, MIMO Antwort für  $r_1(t) = h(t)$  und  $r_2(t) = 0$ .

Obwohl  $y_2(t)$  in Realität leicht vom Eingang  $u_1(t)$  abhängt (an der leichten Erhöhung von  $y_2(t)$  ersichtlich) lässt sich das System mit zwei separaten SISO-Reglern gut regeln.

**Fall 2:**  $a_{11}, a_{22} > a_{12}, a_{21}$

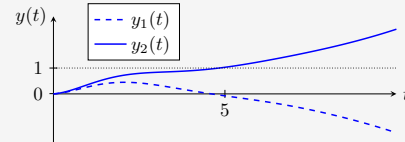
Die Diagonalelemente von  $P(0)$  sind zwar immer noch grösser, jedoch nicht gross genug um das MIMO System klar in zwei SISO Systeme zu separieren. Beispielhaft werden  $a_{11} = a_{22} = 1$  und  $a_{12} = a_{21} = 0.8$  gewählt. Der gleiche Regler  $C(s)$  wie im Fall 1 wird verwendet.

Abb. 3: Fall 2, MIMO Antwort für  $r_1(t) = h(t)$  und  $r_2(t) = 0$ .

Die Systemantwort ist sichtlich schlechter. Das liegt daran, dass der Eingang  $u_1(t)$  den Ausgang  $y_2(t)$  nach oben zieht, und der Eingang  $u_2(t)$  den Ausgang  $y_1(t)$  nach unten zieht.

**Fall 3:**  $a_{11}, a_{22} \ll a_{12}, a_{21}$

Falls die dominanten I/O Kanäle des Systems genau verkehrt geschätzt werden, destabilisiert sich das System mit dem Regler  $C(s)$  aus Fall 1.

Abb. 4: Fall 3, MIMO Antwort für  $r_1(t) = h(t)$  und  $r_2(t) = 0$ .

Man könnte  $C(s)$  natürlich abändern, sodass  $C_1(s)$  und  $C_2(s)$  auf der Nebendiagonale liegen, dann wäre das Verhalten äquivalent zu Fall 1.

## 2 Stabilität, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Die Analyse von MIMO Systemen ist identisch zu derjenigen von SISO Systemen.

## Stabilität nach Lyapunov:

asymptotisch stabil nach Lyapunov:

Alle Eigenwerte von  $A$  haben negativen Realteil,  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ .

stabil nach Lyapunov:

Mindestens ein Eigenwert  $\lambda_k$  von  $A$  hat Realteil  $\text{Re}(\lambda_k) = 0$  und alle anderen Eigenwerte haben negative Realteile.

instabil nach Lyapunov:

Mindestens ein Eigenwert  $\lambda_k$  von  $A$  hat einen positiven Realteil  $\text{Re}(\lambda_k) > 0$ .

## Steuerbarkeit

Das System  $\{A, B, C, D\}$  ist vollständig steuerbar, falls die Steuerbarkeitsmatrix  $\mathcal{R}_n$  vollen Rang  $n$  hat.

$$\mathcal{R}_n = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times (n \cdot m)}$$

## Beobachtbarkeit

Das System  $\{A, B, C, D\}$  ist vollständig beobachtbar falls die Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathcal{O}_n$  vollen Rang  $n$  hat.

$$\mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n \cdot p) \times n}$$

## 3 Pole und Nullstellen

Einfluss und Bestimmung von Polen und Nullstellen eines Systems sind im MIMO Fall komplizierter als im SISO Fall.

## Definition Matrix Minoren (wichtiges Werkzeug)

Minoren einer Matrix sind die Determinanten aller quadratischen Submatrizen. Die Submatrizen werden durch Streichen einzelner Zeilen und Spalten der Matrix gebildet.

## Polstellen von MIMO Systemen

Die Pole von  $P(s)$  sind die Nullstellen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) der Nennerpolynome aller Minoren von  $P(s)$ .

## Nullstellen von MIMO Systemen

Die Nullstellen von  $P(s)$  sind die Nullstellen des grössten gemeinsamen Teilers (ggT) der Zähler der Minoren höchster Ordnung von  $P(s)$  nach der Normalisierung, bei der alle Pole von  $P(s)$  im Nenner stehen.<sup>1</sup>

**Zur Erinnerung:** Nullstellen  $s = \zeta_i$  sind nicht-triviale Frequenzen, bei denen für ein spezifisches Eingangssignal  $u(t)$  und spezifische Anfangsbedingungen  $x(0)$  gilt:  $y(t) = 0 \forall t$ . D.h. die Laplace-Transformation von Gl. (1) erfüllt

$$\begin{aligned} (s \cdot I_{n \times n} - A) \cdot X - B \cdot U &= 0, \\ C \cdot X + D \cdot U &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

wobei Gl. (4) nur eine nichttriviale Lösung hat, falls die folgende Matrix singular ist:

$$\begin{bmatrix} (s \cdot I_{n \times n} - A) & -B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

## Beispiel:

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{2(s+2)}{s+1} & \frac{3}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix}$$

wird auf Polstellen und Nullstellen analysiert.

## Pole Schritt 1: Minoren finden

$$\frac{2(s+2)}{s+1}, \frac{3}{s+1}, \frac{1}{s+1}, \frac{1}{s+2}, \frac{2s-1}{(s+1)^2}$$

## Pole Schritt 2: Das kgV der Pole aller Minoren finden

$$p(s) = (s+1)^2 \cdot (s+2)$$

$\Rightarrow P(s)$  hat somit eine zweifache Polstelle bei  $s = -1$  und eine einfache Polstelle bei  $s = -2$ .

Nullstellen Schritt 1: Minoren höchster Ordnung finden<sup>a</sup>

$$\frac{2s-1}{(s+1)^2}$$

## Nullstellen Schritt 2: Minoren höchster Ordnung normalisieren, sodass alle Pole im Nenner stehen:

$$\frac{(2s-1)}{(s+1)^2} \cdot \frac{(s+2)}{(s+2)}$$

## Nullstellen Schritt 3: Übertragungs-Nullstellen sind die Nullstellen des ggT der Zähler der normalisierten Minoren höchster Ordnung

$$\text{ggT: } (2s-1)(s+2)$$

$\Rightarrow P(s)$  hat somit eine einfache Nullstelle bei  $s = \frac{1}{2}$  und eine einfache Nullstelle bei  $s = -2$ .

<sup>a</sup>Quadratische Matrizen haben immer einen Minor höchster Ordnung.

<sup>1</sup>Die Textdefinition ist eher schwer verständlich. Es empfiehlt sich das Verfahren mittels Beispielen zu verstehen.



## Regelungstechnik II FS 2021

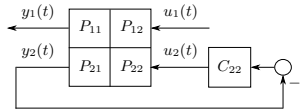
## Relative Gain Array (RGA), Singulärwerte

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

## 1 Relative Gain Array (RGA)

Mit dem Relative Gain Array (RGA) kann man bestimmen, ob ein MIMO-System gut mit separaten SISO-Reglern regelbar ist. Dazu wird die Verstärkung  $|P_{ij}(j\omega)|$  jeder Übertragungsfunktion von Eingang  $u_j$  auf Ausgang  $y_i$  bei Frequenz  $\omega$  für zwei Extremfälle betrachtet. Das Verhältnis der beiden Werte ist der Relative Gain. Das RGA ist schlussendlich eine Matrix mit den Verhältnissen aller Übertragungsfunktionen bei einer gegebenen Frequenz  $\omega$ .

Die Extremfälle für die Übertragungsfunktion  $P_{11}$  werden illustrativ mit folgender Abbildung dargestellt:



Der Regler  $C_{22}$  sollte dabei als eine Art hypothetische Grösse verstanden werden, mit der entweder  $u_2(t) = 0$  oder  $y_2(t) = 0$  gesetzt werden kann, mehr dazu im Folgenden.

**Extremfall 1: "open-loop"**  $\leftrightarrow [C_{22} = 0]$ 

Das System wird "open-loop" betrachtet: Es wird angenommen dass der Regler  $C_{22} = 0$  ist, d.h. dass nur der Eingang  $u_1$  den Ausgang  $y_1$  beeinflusst während im allgemeinen Fall alle anderen Eingänge null sind:  $u_j = 0 \forall j \setminus \{1\}$ . In diesem Fall ist die Übertragungsfunktion von  $u_1$  auf  $y_1$ :

$$P_{u_1 \rightarrow y_1}(s) = P_{11}(s).$$

**Extremfall 2: "perfect closed-loop"**  $\leftrightarrow [C_{22} = \infty]$ 

Es wird angenommen, dass im allgemeinen Fall alle Ausgänge ausser der betrachtete Ausgang  $y_1$  perfekt auf null geregelt werden, d.h.  $y_i = 0 \forall i \setminus \{1\}$ . Im gegebenen Beispiel heisst das, dass  $u_2(t)$  so gewählt ist, dass  $y_2(t) = 0 \forall t$ . Dies wird schematisch mit einem Regler unendlicher Verstärkung  $C_{22} = \infty$  dargestellt. Dann ist die Übertragungsfunktion von  $u_1$  auf  $y_1$ :

$$P_{u_1 \rightarrow y_1}(s) = \frac{P_{11}(s) \cdot P_{22}(s) - P_{12}(s) \cdot P_{21}(s)}{P_{22}(s)}.$$

**Der Relative Gain** ist das resultierende Verhältnis zwischen open-loop und closed-loop Verhalten:

$$[RGA(s)]_{11} = \frac{P_{11}(s) \cdot P_{22}(s)}{P_{11}(s) \cdot P_{22}(s) - P_{12}(s) \cdot P_{21}(s)}.$$

Dieses Verhältnis hat eine sehr schöne Interpretation: Es widerspiegelt die Änderung der Verstärkung von Eingang  $u_1$  auf Ausgang  $y_1$  im Fall, dass alle anderen Regelkreise des MIMO Systems perfekt geschlossen werden. Der Relative Gain beantwortet also die Frage: "Wenn ein Regler vom Eingang  $u_1$  auf den Ausgang  $y_1$  basierend auf dem open-loop System  $P_{11}$  ausgelegt wird, welche veränderten Verhältnisse trifft dieser Regler an, wenn er schlussendlich im geregelten MIMO-System verwendet wird?"

## Zusammenfassung Vorlesung 7

## Skript Kapitel 2

Bei Fragen: hrafael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 22. April 2021

**SISO-fähiges  $P_{ij}(s) \leftrightarrow [RGA(s)]_{ij} \approx 1$** 

Die Verstärkung von Eingang  $u_j$  auf Ausgang  $y_i$  im closed-loop geregelten MIMO-System ist identisch zur Verstärkung der Übertragungsfunktion  $P_{ij}(s)$ . Basierend auf  $P_{ij}(s)$  kann also ein sinnvoller Regler entworfen werden, der den Ausgang  $y_i$  mit dem Eingang  $u_j$  regelt.

**Nicht SISO-fähiges  $P_{ij}(s) \leftrightarrow [RGA(s)]_{ij} \approx 0$** 

Die Verstärkung der Übertragungsfunktion  $P_{ij}(s)$  ist vernachlässigbar im Vergleich zur resultierenden Verstärkung von Eingang  $u_j$  auf Ausgang  $y_i$  im closed-loop geregelten MIMO System. Basierend auf  $P_{ij}(s)$  kann also kein sinnvoller Regler entworfen werden, der den Ausgang  $y_i$  mit dem Eingang  $u_j$  regelt.

**Instabiles Verhalten für  $P_{ij}(s) \leftrightarrow [RGA(s)]_{ij} < 0$** 

Das Vorzeichen der Verstärkung der Übertragungsfunktion von  $u_j$  auf  $y_i$  im MIMO System unterscheidet sich vom Vorzeichen von  $P_{ij}(s)$ . D.h. ein SISO-Regler, ausgelegt basierend auf  $P_{ij}(s)$ , hat, wenn er im closed-loop geregelten MIMO-System verwendet wird, eine entgegengesetzte Wirkung. Dieser Regler entspricht einem positiven Feedback, das MIMO System kann mit diesem Regler also destabilisiert werden.

**Das RGA** ist die Matrix mit den Relative Gains aller Übertragungsfunktionen als Einträgen.

Das RGA einer  $2 \times 2$  Regelstrecke  $P(s)$  ist:

$$RGA(s) = \begin{bmatrix} \frac{P_{11}P_{22}}{P_{11}P_{22}-P_{12}P_{21}} & \frac{-P_{12}P_{21}}{P_{11}P_{22}-P_{12}P_{21}} \\ \frac{-P_{12}P_{21}}{P_{11}P_{22}-P_{12}P_{21}} & \frac{P_{11}P_{22}}{P_{11}P_{22}-P_{12}P_{21}} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Das RGA eines allgemeinen MIMO-Systems  $P(s)$  kann wie folgt berechnet werden:

$$RGA(s) = P(s) \cdot \times P(s)^{-T},$$

wobei  $\cdot \times$  eine elementweise Multiplikation beschreibt und  $P(s)^{-T}$  die Inverse der Transponierten ist.

**Eigenschaften des RGA:**

Aus Gl. (1) ist ersichtlich, dass die Summe der Spalten und der Zeilen des RGA immer 1 ergeben. Dies gilt auch für RGAs höherer Ordnung.

Dies führt, kombiniert mit der obigen Analyse zu den individuellen Einträgen  $[RGA(s)]_{ij}$ , zu folgendem Fazit:

Falls das RGA bei einer gegebenen Frequenz  $\omega$  ungefähr eine Einheitsmatrix ist:

$$|RGA(j\omega)| \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dann ist das betrachtete MIMO-System bei dieser Frequenz mit individuellen SISO-Reglern regelbar. Oder allgemein: falls in jeder Zeile/Spalte ein Eintrag sehr nahe bei 1 ist und die anderen nahe bei 0, sind diese Kombinationen von Ein- und Ausgängen gut mit einem SISO-Regler regelbar.

**Beispiel:** Das RGA des Systems

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{\tau s + 1} & \frac{a_{12}}{\tau s + 1} \\ \frac{a_{21}}{\tau s + 1} & \frac{a_{22}}{\tau s + 1} \end{bmatrix}$$

lautet

$$RGA(s) = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{-a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ \frac{-a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{bmatrix}$$

Es werden 3 verschiedene Fälle betrachtet.

**Fall 1:**  $a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = a_{21} = 0.1$

Das RGA lautet:

$$RGA(s) = \begin{bmatrix} 1.01 & -0.01 \\ -0.01 & 1.01 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$  Das System kann gut mit 2 separaten SISO-Reglern geregelt werden,  $y_1$  wird mit  $u_1$  geregelt,  $y_2$  mit  $u_2$ .

**Fall 2:**  $a_{11} = a_{22} = 0.1, a_{12} = a_{21} = 1$

Das RGA lautet:

$$RGA(s) = \begin{bmatrix} -0.01 & 1.01 \\ 1.01 & -0.01 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$  Das System kann gut mit 2 separaten SISO-Reglern geregelt werden.  $y_1$  wird mit  $u_2$  geregelt,  $y_2$  mit  $u_1$ .

**Fall 3:**  $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 1, a_{21} = -1$

Das RGA lautet:

$$RGA(s) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$  Die einzelnen Ausgänge lassen sich schlecht mit individuellen Eingängen regeln, da im MIMO-System starke Quereinflüsse vom jeweils anderen Eingang zu erwarten sind.

**2 Singulärwerte**

Im Folgenden werden Eigenschaften zur linearen Abbildung

$$y = M \cdot u, \quad u \in \mathbb{C}^m, y \in \mathbb{C}^p, M \in \mathbb{C}^{p \times m}$$

beschrieben. Insbesondere erfüllt der Ausgang  $y$  folgende wichtige Eigenschaft:

$$\sigma_{\min}(M) \leq \frac{\|y\|}{\|u\|} \leq \sigma_{\max}(M),$$

wobei  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm ist und

$$\sigma_i(M) = \sqrt{\lambda_i(\bar{M}^T \cdot M)} > 0,$$

die Singulärwerte der Matrix  $M$  sind.  $\bar{M}^T$  ist die Transponierte der komplex-konjugierten von  $M$ . Die Singulärwertzerlegung (SVD) der Matrix  $M$  lautet:

$$M = U \cdot \Sigma \cdot \bar{V}^T,$$

wobei  $\Sigma$  die Singulärwerte  $\sigma_i$  auf der Hauptdiagonalen hat.  $U$  und  $\bar{V}^T$  sind unitäre (längenerhaltende) Transformationsmatrizen:

$$U \cdot \bar{U}^T = I, \quad V \cdot \bar{V}^T = I$$

**Beispiel:** Alle Eingänge  $\{u \mid \|u\| = 1\}$  sollen mit

$$M = \begin{bmatrix} 0.4009 & -1.0133 \\ 1.4015 & -1.0480 \end{bmatrix}$$

abgebildet werden. Die Singulärwertzerlegung lautet:

$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}}_U \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}}_\Sigma \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V^T}$$

Für die euklidische Norm beschreibt  $\|u\| = 1$  einen Kreis mit Radius 1. Der Kreis wird mit  $V^T$  zuerst um  $\pi/4$  rotiert, dann werden die Hauptachsen des Kreises mit den Singulärwerten in  $\Sigma$  skaliert, sodass eine Ellipse entsteht. Letztendlich wird die Ellipse um  $\pi/3$  rotiert.

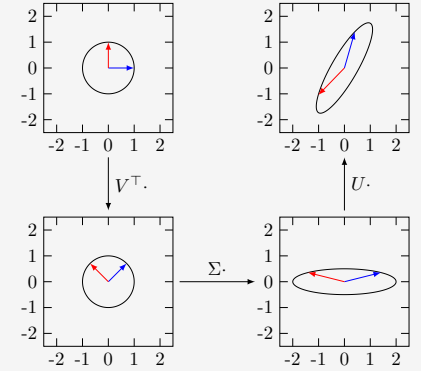


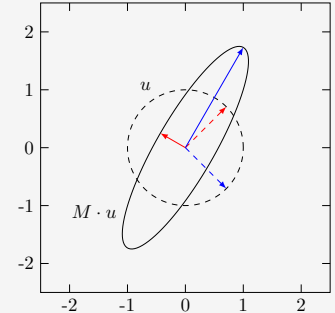
Abb. 1: Lineare Transformation  $M$  als Folge der Transformationen  $V^T$ ,  $\Sigma$  und  $U$ .

Die Transformationen  $V^T$  und  $U$  beschreiben in diesem Beispiel reine Rotationen. Spiegelungen sind auch möglich und erfüllen somit auch Unitarität. Zusätzlich sollen die Eingänge gefunden werden, die den Ausgang maximal und minimal anregen. Da die Zeilen der Matrix  $V^T$  orthonormal sind, entsprechen die Zeilen von  $V^T$  den Eingängen, die die Hauptachsen anregen. Das heisst

$$\|Y\| = \sigma_{\min} \quad \text{für} \quad u = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\|Y\| = \sigma_{\max} \quad \text{für} \quad u = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Abb. 2: Minimale und maximale Anregungsrichtung.





## Regelungstechnik II FS 2021

## Frequenzantworten von MIMO Systemen

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

## Zusammenfassung Vorlesung 8

## Skript Kapitel 3

Bei Fragen: hrfael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 29. April 2021

## 1 Frequenzantworten SISO - Recap

Ein lineares asymptotisch stabiles System  $P(s)$ , welches mit einem harmonischen Eingang

$$u(t) = \cos(\omega t) \cdot h(t)$$

bei der fixen Frequenz  $\omega$  angeregt wird ( $h(t)$  ist der Einheits-sprung), produziert im eingeschwungenen Zustand ein harmonisches Signal bei derselben Frequenz:

$$y_\infty(t) = |P(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \angle P(j\omega))$$

Dabei ist die Systemantwort um  $\varphi(\omega) = \angle P(j\omega)$  phasenverschoben, und um  $m(\omega) = |P(j\omega)|$  skaliert. Um die Frequenzantwort übersichtlich darzustellen, können  $\angle P(j\omega)$  und  $|P(j\omega)|$  entweder gemeinsam in einem Nyquist-Diagramm dargestellt werden, oder separat in einem Bode-Diagramm.

## 2 Frequenzantworten MIMO

Im MIMO-Fall ist der Eingang  $u(t)$  ein Vektor harmonischer Funktionen:

$$u(t) = \begin{bmatrix} \mu_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \cdot h(t) \\ \mu_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \cdot h(t) \\ \vdots \\ \mu_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_m) \cdot h(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Die Frequenzanalyse beschränkt sich auf eine gemeinsame frei wählbare Anregungsfrequenz  $\omega$  auf allen Kanälen. Die Anregungsmagnituden  $\mu_i$  und Anregungsphasen  $\varphi_i$  können separat gewählt werden. Die Laplace-Transformierte von Gl. (1) lautet:

$$U(s) = \begin{bmatrix} e^{j\varphi_1 \cdot s/\omega} \cdot \mu_1 \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ e^{j\varphi_2 \cdot s/\omega} \cdot \mu_2 \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \vdots \\ e^{j\varphi_m \cdot s/\omega} \cdot \mu_m \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

und kann mit den Definitionen  $\Phi = \text{diag}(\varphi_i) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und  $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_m]^\top \in \mathbb{R}^m$  umgeschrieben werden zu:

$$U(s) = e^{\Phi \cdot s/\omega} \cdot \mu \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (3)$$

Ähnlich wie im SISO-Fall ist die Systemantwort im eingeschwungenen Zustand ein Vektor harmonischer Funktionen bei derselben Frequenz  $\omega$ :

$$y_\infty(t) = \begin{bmatrix} \nu_1 \cdot \cos(\omega t + \psi_1) \cdot h(t) \\ \nu_2 \cdot \cos(\omega t + \psi_2) \cdot h(t) \\ \vdots \\ \nu_m \cdot \cos(\omega t + \psi_m) \cdot h(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Identisch zu Gl. (3) wird die Laplace-Transformierte von Gl. (4) mit den Definitionen  $\Psi = \text{diag}(\psi_i) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und  $\nu = [\nu_1, \dots, \nu_m]^\top \in \mathbb{R}^m$  zu

$$Y(s) = e^{\Psi \cdot s/\omega} \cdot \nu \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (5)$$

Die Frequenzantwort  $Y(j\omega)$  lautet

$$Y(j\omega) = P(j\omega) \cdot U(j\omega).$$

Einsetzen von Gl. (5) und Gl. (3) liefert

$$e^{j\Psi} \cdot \nu = P(j\omega) \cdot e^{j\Phi} \cdot \mu \quad (6)$$

**Bemerkung:** Gl. (6) beinhaltet den Term  $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$  nur deshalb nicht mehr, weil in der Konstruktion des Eingangs Gl. (1) die Frequenz auf allen Kanälen identisch gewählt wurde.

Gl. (6) hat die Form einer linearen Abbildung:

$$\underbrace{y}_{e^{j\Psi} \cdot \nu} = \underbrace{M}_{P(j\omega)} \cdot \underbrace{u}_{e^{j\Phi} \cdot \mu} \quad (7)$$

Eine lineare Abbildung  $y = M \cdot u$  erfüllt die Eigenschaft

$$\sigma_{\min}(M) \leq \frac{\|y\|}{\|u\|} \leq \sigma_{\max}(M), \quad (8)$$

wobei  $\sigma_{\min}(M)$  und  $\sigma_{\max}(M)$  der kleinste und grösste Singulärwert der Matrix  $M$  sind.

Einsetzen von Gl. (7) in Gl. (8) liefert:

$$\sigma_{\min}(P(j\omega)) \leq \frac{\|\nu\|}{\|\mu\|} \leq \sigma_{\max}(P(j\omega)) \quad (9)$$

wobei die Eigenschaft  $\|e^{j\Psi}\| = \|e^{j\Phi}\| = 1$  verwendet wurde.

Die Singulärwerte in Gl. (9) geben für den eingeschwungenen Zustand Schranken vor für den Betrag der Amplituden  $\|\nu\|$ . Sie sind ein Mass für die worst-case Amplitude die man bei der Anregung mit einer gegebenen Frequenz  $\omega$  erwarten kann.

**Beispiel:** Das System

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 0.3s + 1} & \frac{0.2}{s^2 + 0.5s + 1} \\ \frac{0.2}{s^2 + s + 1} & \frac{1}{s^2 + s + 1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

soll für  $\{\mu \mid \|\mu\| = 1\}$  bei  $\omega = 0.7 \text{ rad/s}$  so angeregt werden, dass  $\|\nu\| = \sigma_{\max}(P(j \cdot 0.7))$  gilt.

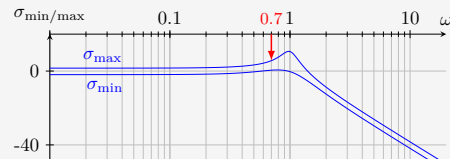


Abb. 1: Singulärwerte von  $P(j\omega)$  als Funktion der Frequenz

Die Berechnung der maximalen Singulärwerte bei  $\omega = 0.7 \text{ rad/s}$  liefert  $\sigma_{\max}(P(j \cdot 0.7)) = 1.914$ . Das heisst, man kann erwarten, dass die Ausgänge  $y_1$  und  $y_2$  je Amplituden  $\nu_1$  und  $\nu_2$  haben werden, die kleiner sind als 1.914.

Die Norm  $\|\nu\|$  jedoch wird bei der maximalen Anregung 1.914 sein. Um die Anregungsrichtung zu finden, bei der  $\|\nu\|$  maximal wird, verwendet man die Singulärwertzerlegung der Matrix  $P(j \cdot 0.7)$ :

$$P(j \cdot 0.7) = U \cdot \Sigma \cdot \bar{V}^\top = \begin{bmatrix} -0.8724 + 0.3635j & 0.3089 - 0.1068j \\ -0.2167 + 0.2447j & -0.6691 + 0.6675j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.914 & 0 \\ 0 & 1.056 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.9344 & -0.3525 + 0.0515j \\ 0.3562 & -0.9246 + 0.1351j \end{bmatrix}$$

Die maximale Anregungsrichtung entspricht der ersten Spalte von  $V$ , wenn der maximale Singulärwert in  $\Sigma$  an erster Stelle steht<sup>a</sup>. Zur Bemerkung: der maximale Singulärwert in  $\Sigma$  stimmt mit dem aus Abb. 1 ausgelesenen Singulärwert überein. Die maximale Richtung lautet somit:

$$\zeta_{\max} = \begin{bmatrix} -0.9344 \\ -0.3525 - 0.0515j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j \cdot \pi} & 0 \\ 0 & e^{-j \cdot 2.9965} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9344 \\ 0.3562 \end{bmatrix}$$

Der Eingang lautet damit:

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0.9344 \cdot \cos(0.7 \cdot t + \pi) \\ 0.3562 \cdot \cos(0.7 \cdot t - 2.9965) \end{bmatrix}$$

Eine Simulation des Systems mit Eingang  $u(t)$  liefert:

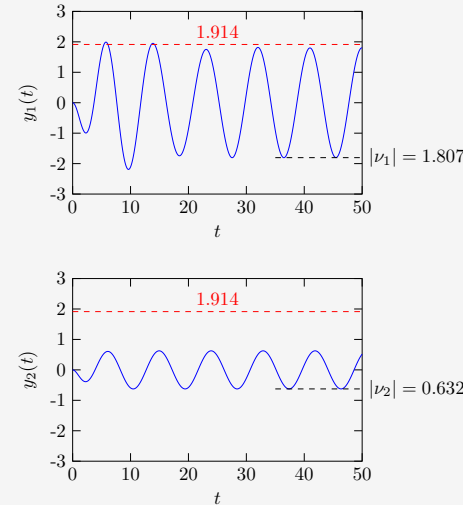


Abb. 2: Maximale kollektive Anregung der Eingänge  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  bei der Frequenz  $\omega = 0.7 \text{ rad/s}$ .

**Bemerkungen zu diesem Beispiel:**

- $|\nu_1| < \sigma_{\max} \Rightarrow y_{1,\infty} < \sigma_{\max}$
- $|\nu_2| < \sigma_{\max} \Rightarrow y_{2,\infty} < \sigma_{\max}$
- $\sqrt{|\nu_1|^2 + |\nu_2|^2} = 1.914 = \sigma_{\max}$  (nur weil die maximale Richtung angeregt wird)
- $y_1(t) > \sigma_{\max}$  für  $t \approx 5 \text{ s}$ , da das System noch nicht eingeschwungen ist

<sup>a</sup>Wo genau der maximale Singulärwert in der Matrix  $\Sigma$  eingetragen ist, hängt vom Algorithmus ab, der zur Berechnung der Singulärwerte verwendet wird. Normalerweise sind die Singulärwerte in der Matrix  $\Sigma$  der Grösse nach sortiert, sodass links oben der grösste Singulärwert steht und rechts unten der kleinste:  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_{\max}, \dots, \sigma_{\min})$ .

## 3 Singulärwertverläufe als Werkzeug in der Regelungstechnik

Die Singulärwertverläufe (wie in Abb. 1) können für beliebige Übertragungsfunktionen, wie z.B. die Sensitivität  $S(s)$ , die komplementäre Sensitivität  $T(s)$  oder die 'return difference'  $Q(s)$  berechnet werden:

$$T(s) = (I + P(s) \cdot C(s))^{-1} \cdot P(s) \cdot C(s)$$

$$S(s) = (I + P(s) \cdot C(s))^{-1}$$

$$Q(s) = I + P(s) \cdot C(s)$$

Mit der Definition der Systemnorm

$$\|G(s)\|_\infty = \max_\omega \left( \max_i \sigma_i(G(j\omega)) \right),$$

hat dann z.B. die Sensitivität eine schöne Interpretation. Die Systemnorm  $\|S(s)\|_\infty$  ist die maximal zu erwartende (worst-case) Verstärkung des Störungssignals.

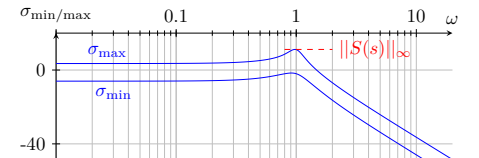


Abb. 3: Singulärwerte von  $S(j\omega)$  als Funktion der Frequenz in blau. Systemnorm in rot.

Falls die Systemnorm  $\|S(s)\|_\infty$  sehr klein ist, weiss man, dass man eine gute Störungsunterdrückung hat, da die Norm die maximale Verstärkung beschreibt.

Eine ähnliche Überlegung erlaubt es, mit der Minimum Return Difference (analog zum SISO-Fall) die Robustheit des Regelkreises im 'worst case' zu analysieren:

$$\mu_{\min} = \min_\omega \left( \min_i \sigma_i(I + L(j\omega)) \right).$$

**Singulärwertverläufe vs. Bode-Verstärkungsverläufe:**

Die Singulärwertverläufe sind also das MIMO-Analogon der SISO-Bode-Verstärkungsverläufe: basierend auf den Singulärwertverläufen lassen sich im MIMO Fall bei der Reglerauslegung und Sytemanalyse ähnliche Überlegungen machen wie in der SISO Reglerauslegung mit den Bode-Verstärkungsverläufen.

Der grosse Unterschied zwischen Singulärwertverläufen im MIMO-Fall und Bode-Verstärkungsverläufen im SISO-Fall ist, dass die Bode-Verläufe die effektive Verstärkung eines harmonischen Eingangssignales darstellen, während die Singulärwertverläufe nur eine worst-case Abschätzung sind.

## 1 Infinite Horizon LQR Formulierung

Im Vergleich zu SISO-Reglern ist das Auslegen von MIMO-Reglern komplexer. Ein Ansatz, der einen intuitiven trade-off zwischen Regelfehler und Regleraufwand erlaubt, ist die *linear quadratic regulator* (LQR) Formulierung. Die Komponenten *linear*, *quadratic* und *regulator* werden nun separat betrachtet.

**Linear:** Das System, welches geregelt wird, ist *linear*:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m$$

**Quadratic:** Definition einer *quadratischen* Kostenfunktion:

$$J(u(t)) = \int_0^\infty \left( x(u(t))^\top \cdot Q \cdot x(u(t)) + u(t)^\top \cdot R \cdot u(t) \right) dt \quad (1)$$

Der optimale Eingang  $u^*(t)$  minimiert die Kostenfunktion  $J$ :

$$u^*(t) = \arg \min J(u(t))$$

Die Zustände  $x(t)$  und Eingänge  $u(t)$  werden im Optimierungsproblem mit  $Q$  und  $R$  gewichtet, wobei

$$Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad Q \succcurlyeq 0, \quad \text{und} \quad R = R^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad R \succ 0$$

Das Symbol  $\succcurlyeq$  heisst positiv semidefinit und  $\succ$  positiv definit. Die Definitheit der Matrizen  $Q$  und  $R$  ist notwendig, damit das Argument des Integrals in Gl. (1) quadratisch konvex ist. Somit ist das Minimum von  $J(u)$  einzigartig, falls es existiert.

**Regulator:** Der Regler löst das *regulator* Problem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Das heisst, der Regler bringt den Zustandsvektor in unendlicher Zeit in seinen Ursprung.

Die Matrizen  $Q$  und  $R$  sind einstellbare Grössen, welche verwendet werden, um das Optimierungsproblem so zu definieren, dass die resultierende Lösung zufriedenstellend ist. Mehr dazu später.

Beispielhaft werden zwei Fälle betrachtet:

$Q \uparrow \hat{=} R \downarrow$  Je grösser  $Q$  relativ zu  $R$ , desto teurer ist es, wenn  $x(t)$  nicht im Ursprung ist. Das heisst, das System wird schnell an den Ursprung geregelt, um die Kosten tiefstmöglich zu halten. Dabei wird  $u(t)$  jedoch betragsmässig gross sein.

$Q \downarrow \hat{=} R \uparrow$  Je grösser  $R$  relativ zu  $Q$ , desto teurer ist es, viel Energie mit den Ausgangsgrössen auszugeben. Das heisst, das System wird langsam (mit betragsmässig kleinem Regelsignal  $u(t)$ ) in den Ursprung geregelt.

<sup>1</sup>Eine Erhöhung der Eigenwerte von  $Q$  hat den gleichen Effekt wie eine Reduzierung derer von  $R$ . Nur die relative Grösse ist von Relevanz.

## 2 Lösung der LQR-Formulierung

Die Lösung der LQR-Formulierung ist eine lineare Zustandsrückführung und lautet

$$u^*(t) = -K \cdot x(t), \quad \text{wobei} \quad K = R^{-1} \cdot B^\top \cdot \Phi \quad (2)$$

Dabei ist  $\Phi$  die einzige positiv definite Lösung der algebraischen Riccati Gleichung:

$$\Phi \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^\top \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^\top \cdot \Phi - Q = 0 \quad (3)$$

Wählt man

$$Q = \tilde{C}^\top \cdot \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad \text{wobei} \quad p = \text{rank}(Q)$$

dann existiert die positiv definite Matrix  $\Phi$  garantiert, falls  $\{A, B\}$  vollständig steuerbar und  $\{A, \tilde{C}\}$  vollständig beobachtbar sind. Diese Bedingungen sind hinreichend, aber nicht notwendig.

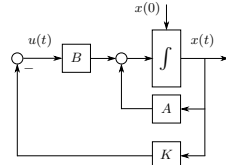
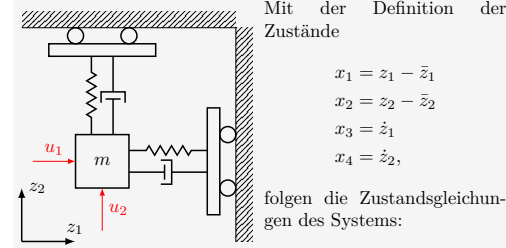


Abb. 1: Standard LQR: lineare Zustandsrückführung

**Bemerkungen:**

- Die Matrix  $\tilde{C}$  hat generell nichts mit der Systemausgangsmatrix  $C$  zu tun. Falls jedoch ein Systemausgang  $y = C \cdot x$  definiert wird, und  $\tilde{C} = C$  gewählt wird, wird die euklidische Norm des Systemausganges  $\|y(t)\|_2$  in der Kostenfunktion berücksichtigt, da: 
$$x^\top \cdot Q \cdot x = x^\top \cdot \tilde{C}^\top \cdot \tilde{C} \cdot x = x^\top \cdot C^\top \cdot C \cdot x = y^\top \cdot y = \|y\|_2^2$$
- Die Matrix  $K$  ist statisch, sie muss für gegebene  $\{A, B, Q, R\}$  nur einmal berechnet werden.
- Der Begriff *infinite horizon* bezieht sich auf die Integrationssschranken in Gl. (1): von null bis *unendlich*.
- Die Dynamik des nach Gl. (2) geregelten Systems lautet  $\frac{d}{dt}x = (A - BK) \cdot x$ . Die Matrix  $A - BK$  ist garantiert Hurwitz (Realteil aller Eigenwerte kleiner null), d.h. der geschlossene Regelkreis ist asymptotisch stabil.
- Der open loop gain lautet  $L_{LQR}(s) = K \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B$ . Dies entspricht einer Öffnung des Kreises am Systemeingang.
- Normalerweise steht nicht der ganze Zustand  $x(t)$  als Messung zur Verfügung. Im späteren LQG Kapitel wird der LQR Ansatz basierend auf einer Schätzung von  $x(t)$  eingeführt.
- Der Regler (Gl. (2)) führt die Zustände linear zurück, man spricht von einer linearen Zustandsrückführung oder einem "linear state feedback controller".

**Beispiel 1:** Ein Klotz mit Masse  $m = 1$  sei in  $z_1$ - und in  $z_2$ -Richtung mit einem Dämpfer und mit einer Feder verbunden. (Der Einfachheit halber lassen wir im Folgenden die Einheiten weg und betrachten normierte Grössen.) Die Federn seien bei  $\bar{z}_1 = 1$  und  $\bar{z}_2 = 1$  im Gleichgewicht. Die Federkonstante sei  $k = 0.5$  und die Dämpferkonstante sei  $c = 0.05$ .



Mit der Definition der Zustände

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 - \bar{z}_1 \\ x_2 &= z_2 - \bar{z}_2 \\ x_3 &= \dot{z}_1 \\ x_4 &= \dot{z}_2, \end{aligned}$$

folgen die Zustandsgleichungen des Systems:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0 & -0.05 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.05 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_u$$

Um das System mit der LQR-Formulierung an den Ursprung zu regeln, müssen die Matrizen  $Q$  und  $R$  noch eingestellt werden. Eine erste, willkürliche Wahl ist  $Q = I_{4 \times 4}$  und  $R = I_{2 \times 2}$ . Die Matrizen  $A$ ,  $B$ ,  $Q$ , und  $R$  werden nun in Gl. (3) eingesetzt, und das Gleichungssystem wird nach  $\Phi$  aufgelöst. Anschliessend wird  $K$  mit Gl. (2) berechnet. Eine Simulation des Systems, startend in  $x_0 = [1, 1, 0, 5]$ , liefert:

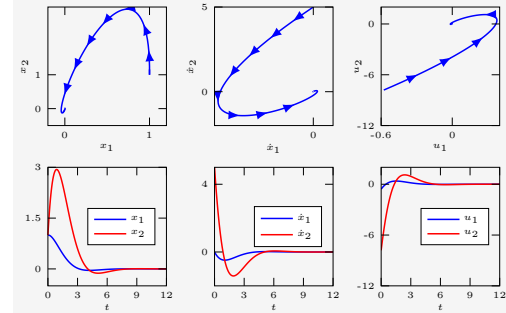


Abb. 2: Systemantwort für  $Q = I_{4 \times 4}$  und  $R = I_{2 \times 2}$ .

Das System soll nun in  $x_2$ -Richtung etwas schneller an den Ursprung geregelt werden. Dafür kann man z.B. den Eintrag  $Q(2, 2)$  auf 3 erhöhen, sodass:

$$Q_{\text{neu}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dadurch, dass  $Q(2, 2)$  erhöht wird, macht man Werte ungleich null des zweiten Zustands  $x_2$  teurer. Das Minimum der Kostenfunktion wird demnach in eine Richtung verschoben, die  $x_2$  kleiner hält.  $K_{\text{neu}}$  wird berechnet und das System wird simuliert, startend in  $x_0$ :

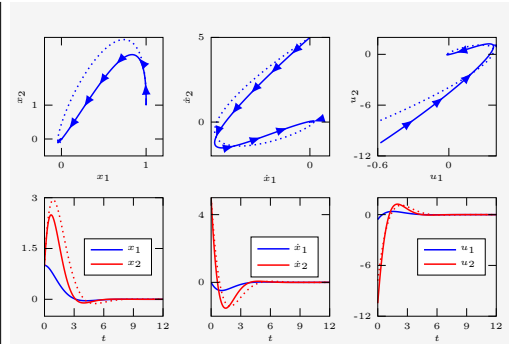


Abb. 3: Systemantwort für  $Q_{\text{neu}}$  und  $R = I_{2 \times 2}$ .

Im neuen  $x_1 - x_2$  Graph sieht man, dass  $x_2$  merklich weniger ausschlägt, wie erwartet. Um  $x_2$  tief zu halten, wird  $u_2$  (siehe  $u_1 - u_2$  Graph) jedoch grösser.

**Bemerkungen:**

- Die Richtungen  $x_1$  und  $x_2$  sind in diesem Beispiel entkoppelt. Somit wären zwei SISO-Regler auch genügend.
- Der Workflow lautet: System modellieren  $\rightarrow A$  und  $B$  extrahieren  $\rightarrow Q$  und  $R$  wählen  $\rightarrow \Phi$  mit Gl. (3) berechnen  $\rightarrow K$  mit Gl. (2) berechnen  $\rightarrow x_0$  wählen und simulieren.

## 3 Eigenschaften von Infinite Horizon Reglern

**Stabilität:**

Die Matrix  $A - B \cdot K$  des geschlossenen Regelkreises ist garantiert Hurwitz. Der resultierende geschlossene Regelkreis ist also auch garantiert stabil.

**Störungsunterdrückung:**

Der Standard LQR Regelkreis kann konstante Störungen nicht unterdrücken. Eine integrative Erweiterung, wie weiter unten gezeigt, ermöglicht dies jedoch.

**Robustheit:**

Für die Wahl  $R = r \cdot I$  hat die die minimum return difference  $\mu_{\min, LQR}$  folgende Eigenschaft:

$$\mu_{\min, LQR} = \min_{\omega} \left( \min_i \sigma_i(I + L_{LQR}(j\omega)) \right) \geq 1 \quad (4)$$

Im SISO-Fall hat diese Eigenschaft eine schöne Interpretation: Gl. (4) garantiert, dass der Nyquist-Plot nie in den um  $-1$  zentrierten Kreis mit Radius 1 eintritt. Wie in Abb. 4 geometrisch ersichtlich, garantiert dies wiederum, dass der Regelkreis auch bei einer Verstärkung  $k$  im Bereich  $k \in [0.5, \infty)$  noch garantiert stabil ist. Zudem hat der Kreis eine Phasenreserve (phase margin) von  $\varphi \geq 60^\circ$ , was einer sehr guten Robustheit entspricht.

Modifiziert man die Riccati-Gleichung mit  $\beta > 1$  wie folgt

$$\frac{1}{\beta} \cdot \Phi_\beta \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^\top \cdot \Phi_\beta - \Phi_\beta \cdot A - A^\top \cdot \Phi_\beta - Q = 0$$

so resultiert die Lösung  $\Phi_\beta$ . Damit wird der Regelkreis noch robuster, da dann gilt:

$$\mu_{\min, \beta} = \min_{\omega} \left( \min_i \sigma_i(\beta I + L_{LQR}(j\omega)) \right) \geq \beta.$$

Das heisst, dass der Nyquist-Plot nie in dem um  $-\beta$  zentrierten Kreis mit Radius  $\beta$  eintritt.

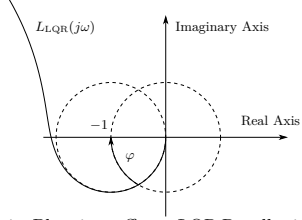


Abb. 4: Nyquist Plot eines offenen LQR Regelkreises  $L_{LQR}(s)$ .

#### 4 Folgeregelung - Infinite Horizon LQR

Die LQR-Formulierung löst nur das Regulator Problem und erscheint zunächst etwas einschränkend. Man kann jedoch die Linearität des Systems ausnützen, um einen gewünschten konstanten Zustand  $x_\infty$  oder eine gewünschte konstante Referenz  $r_\infty$  für einen gegebenen Systemausgang  $y(t)$  anzusteuern.

##### Zustandsreferenz

Ein lineares System beschreibt die Dynamik von Differenzen. Wir können den Ursprung des Systems demnach in einen neuen Punkt  $\{u_\infty, x_\infty\}$  verschieben, mit den Definitionen  $\Delta x = x - x_\infty$ , und  $\Delta u = u - u_\infty$ . Die Dynamik des Systems in den neuen Variablen lautet:

$$\Delta \dot{x} = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta u$$

Die Regelung auf den konstanten Zustand  $x_\infty$  erfolgt durch Subtraktion von  $x_\infty$  sowie Addition von  $u_\infty$  an der geeigneten Stelle im Regelkreis, wie gezeigt in Abb. 5, oder analog und identisch durch Addition eines einzigen konstanten Wertes am Reglerausgang, wie in Abb. 6.

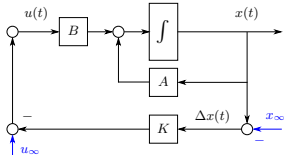


Abb. 5: Subtraktion von  $x_\infty$  sowie Addition von  $u_\infty$ .

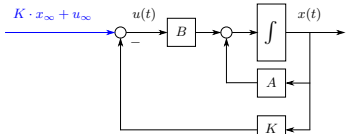


Abb. 6: Addition eines konstanten Wertes am Systemeingang.

##### Bemerkungen

- Der Wert  $u_\infty$  ist statisch für eine statische Referenz  $x_\infty$ .
- Die Folgeregelung mit feedforward kann keine Störungen unterdrücken.

##### Ausgangsreferenz

Wenn das System ein Ausgangssignal  $y(t) = C \cdot x(t)$  besitzt, kann dieser Ausgang mit einer Vorsteuerung auf eine gewünschte konstante Referenz  $r(t) = r_\infty \cdot h(t)$  geregelt

werden. Das dafür nötige konstante Vorsteuersignal (wie gesehen bei der Zustandsreferenz) kann wie folgt berechnet werden:

$$u_r(t) = - \underbrace{(C(A - BK)^{-1}B)^{-1}}_{\Gamma} \cdot r(t) \quad (5)$$

Die Matrix  $\Gamma$  existiert garantiert, falls die Übertragungsfunktion des linearen System  $\{A, B, C, D\}$  keine Nullstellen im Ursprung hat.

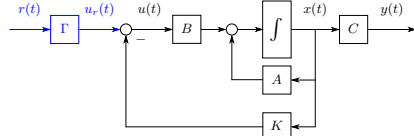


Abb. 7: Addition eines einzigen konstanten Wertes am Reglerausgang durch eine Vorsteuerung.

**Beispiel 2:** Das System aus dem vorherigen Beispiel soll nun zur Position  $x_{1,\infty} = 2$  und  $x_{2,\infty} = 2$  geregelt werden. Falls das System im Punkt  $\{x_{1,\infty}, x_{2,\infty}\}$  im Gleichgewicht ist, werden die Geschwindigkeiten null sein, d.h.  $x_{3,\infty} = x_{4,\infty} = 0$ . Der gewünschte Zustand lautet somit  $x_\infty = [2, 2, 0, 0]^T$ .

Zuerst wird das statische feedforward Signal berechnet. Intuitiv werden die Federn im Zustand  $x = x_\infty$  komprimiert sein. Im Gleichgewicht wird  $\{u_\infty\}$  demnach genau die Kraft der komprimierten Federn ausgleichen. Das System soll nun bei  $x = x_\infty$  mit  $u = u_\infty$  im Gleichgewicht sein:

$$A \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty \stackrel{!}{=} 0$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0 & -0.05 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,\infty} \\ u_{2,\infty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Auflösen nach  $u_\infty$  ergibt  $u_{1,\infty} = u_{2,\infty} = 1$ . Intuitiv: Die komprimierten Federn drücken im Gleichgewicht genau mit einer Kraft von  $F_{(.)} = k \cdot r_{(.)} = 0.5 \cdot 2 = 1 = u_{(.),\infty}$ .

Das System wird simuliert, startend im Punkt  $x_0 = [1, 1, 0, 5]^T$ , mit  $Q = I_{4 \times 4}$ ,  $R = I_{2 \times 2}$ ,  $x_\infty = [2, 2, 0, 0]^T$ , und  $u = u_\infty - K \cdot (x - x_\infty)$ :

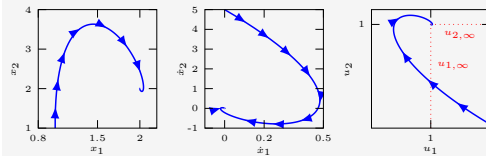


Abb. 8: Systemantwort für das Referenzproblem.

Wie erwartet regelt das System auf den Punkt  $[2, 2, 0, 0]^T$ .

#### 5 Störungsunterdrückung - LQRI

Das Standard LQR-Problem eignet sich für theoretische Systeme ohne Modellfehler und ohne Störungen. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man konstante Störungen (z.B.  $w(t) = w_\infty \cdot h(t)$  am Eingang) und Modellfehler unterdrücken kann. Dafür wird integratives Verhalten eingeführt.

Um die Struktur aus Abb. 1 mit einem integrativen Verhalten zu erweitern, werden die Ausgangsgröße  $y(t) = C \cdot x(t)$  sowie die Referenz  $r(t)$  eingeführt, wie illustriert in Abb. 9. Man wünscht  $y(t) = r(t) = r_\infty \cdot h(t)$ . Um konstante Störungen zu unterdrücken, kann das Integral des Regelfehlers als neuer Zustand definiert werden:

$$v(t) = \int_0^t e(\tau) \, d\tau = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) \, d\tau.$$

Der erweiterte Zustandsvektor des Systems lautet somit:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Die Ableitung des Zustandes lautet (siehe Abb. 9):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) &= \begin{bmatrix} A \cdot x(t) + B \cdot (u(t) + w(t)) \\ r(t) - y(t) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \cdot (u(t) + w(t)) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}_{\tilde{C}} \cdot r(t). \end{aligned}$$

Die Standard LQR-Formulierung kann nun mit den erweiterten Systemmatrizen  $\tilde{A}$  und  $\tilde{B}$  gelöst werden. Der erweiterte Zustand  $\tilde{x}(t)$  wird zu null geregelt und damit gilt  $\frac{d}{dt} v(t) = e(t) = 0$ .

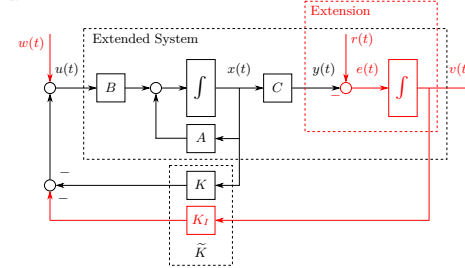


Abb. 9: Integrale Erweiterung am Systemausgang.

Die Dimension der  $Q$  Matrix muss angepasst werden:

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_I \end{bmatrix}, \quad Q_I = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_m \end{bmatrix}$$

Mit  $Q_I$  kann man einstellen, wie stark die Integratoren wirken sollen. Die Lösung des LQRI-Problems lautet:

$$\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\} \rightarrow \tilde{K} = [K, K_I] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)},$$

$$u(t) = -\tilde{K} \cdot \tilde{x}(t) = u_K + u_{K_I} = -K \cdot x(t) - K_I \cdot v(t).$$

**Bemerkung:** Der Zustand  $v(t)$  ist nicht Teil des realen Systems und muss deshalb wie in Abb. 10 dargestellt im finalen Regelsystem implementiert werden.

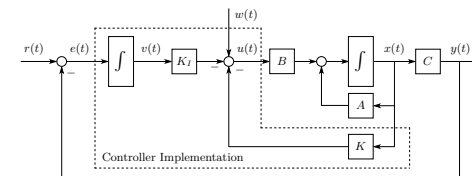


Abb. 10: Implementierung der integralen Erweiterung.

**Beispiel 3:** Das Masse-Feder-Dämpfer System soll mit einem Standard LQR-Regler in den Ursprung geregelt werden. Dabei wirke nun eine statische Störung  $w(t) = w_\infty \cdot h(t) = [0.5, 0.5]^T$ . Mit  $\tilde{Q} = I_{4 \times 4}$ ,  $R = I_{2 \times 2}$ , startend in  $x_0 = [1, 1, 0, 5]^T$ :

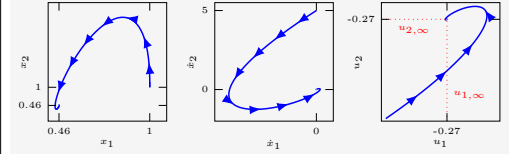


Abb. 11: Systemantwort für  $Q = I_{4 \times 4}$ ,  $R = I_{2 \times 2}$  und  $w_\infty = [0.5, 0.5]^T$

Das System kommt bei einem Zustand  $x_\infty \neq 0$  zum Stillstand. Dies liegt daran, dass die *erwartete* Systemgleichung im Gleichgewicht lautet:

$$0 = A \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty \quad (\text{erwartet})$$

Jedoch ist die *wahre* Gleichgewichtsgleichung

$$0 = A \cdot x_\infty + B \cdot (u_\infty + w_\infty) \quad (\text{wahr})$$

Der Gleichgewichtspunkt lautet somit:

$$\begin{aligned} x_\infty &= -(A - B \cdot K)^{-1} \cdot B \cdot w_\infty = [0.46, 0.46, 0, 0]^T \\ u_\infty &= -K \cdot x_\infty = [-0.27, -0.27, 0, 0]^T \end{aligned}$$

Da die unbekannte Störung das Erreichen des Ziels  $x_\infty = 0$  verhindert, wird die LQRI-Formulierung verwendet. Mit

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\tilde{Q} = I_{6 \times 6}$ ,  $R = I_{2 \times 2}$ ,  $w_\infty = [0.5, 0.5]^T$ , startend im Zustand  $x_0 = [1, 1, 0, 5, 0, 0]^T$ :

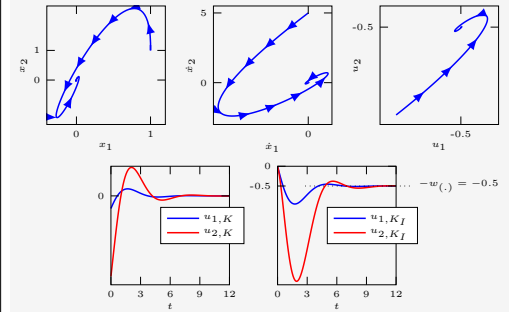


Abb. 12: Systemantwort für  $\tilde{Q} = I_{6 \times 6}$ ,  $R = I_{2 \times 2}$  und  $w_\infty = [0.5, 0.5]^T$ .

Das System regelt an den gewünschten Ursprung, obwohl eine konstante Störung  $w(t)$  vorhanden ist. Das Ziel wird erreicht, da der integrative Teil des Eingangs genau die Störung kompensiert.

## 6 Folgeregelung mit Störungsunterdrückung

Wir können nun den LQRI Ansatz mit der Vorsteuerung  $u_r(t) = \Gamma \cdot r(t)$  kombinieren, um ein besseres dynamisches Verhalten bei Referenzänderungen zu erreichen (siehe Abb. 13).

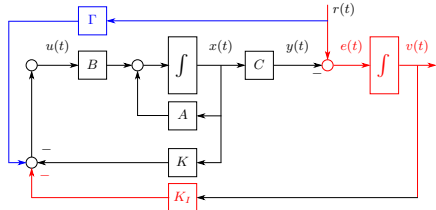


Abb. 13: Addition eines einzigen konstanten Wertes am Reglerausgang durch eine Vorsteuerung.

**Beispiel 4:** Das Masse-Feder-Dämpfer System soll mit einem LQRI mit Vorsteuerung an die Position  $r(t) = [2, 2]$  geregelt werden. Mit  $\tilde{Q} = I_{6 \times 6}$ ,  $R = I_{2 \times 2}$ ,  $w(t) = [0.25, 0.25]^\top$ ,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

startend in  $\tilde{x}_0 = [1, 1, 0, 1, 0, 0]^\top$ :

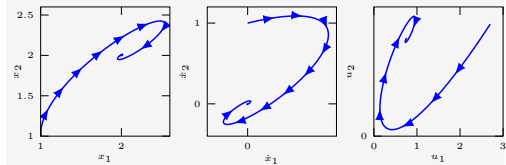


Abb. 14: Systemantwort für  $\tilde{Q} = I_{6 \times 6}$ ,  $R = I_{2 \times 2}$ ,  $r(t) = [2, 2]^\top$ ,  $w(t) = [0.25, 0.25]^\top$ .

### Bemerkungen:

- $Q_I$  könnte besser eingestellt werden, sodass das System nicht so stark überschiesst.
- Betrachte Abb. 13. Die Vorsteuerungsgrösse  $u_r(t) = \Gamma \cdot r(t)$  ist nicht zwingend notwendig um das System auf die Referenz  $r(t)$  zu regeln. Falls sie weggelassen wird, kann das Signal  $r(t)$  als eine auf  $y(t)$  wirkende Störung interpretiert werden. Dadurch würde der Integrator die Signale  $w(t)$  und  $r(t)$  kompensieren. Ohne das Vorsteuerungssignal kann das System allerdings unnötige Transienten aufzeigen, da sich der Integrator für die Referenz  $r(t)$  zuerst füllen müsste.

## 7 Finite Horizon LQR

Das Integral der Standardformulierung geht von null bis unendlich. Die Lösung des Standardproblems ist um einiges einfacher als wenn das Problem nur über ein Zeitintervall  $t_a$  bis  $t_b$  integriert wird. In diesem Fall lautet die Kostenfunktion:

$$J(u) = x^\top(t_b) \cdot P \cdot x(t_b) + \int_{t_a}^{t_b} (x^\top \cdot Q(t) \cdot x + u^\top \cdot R(t) \cdot u) dt$$

Mit der Kostenmatrix  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P^\top \succcurlyeq 0$  (positiv semi-definit) wird eine Abweichung des finalen Zustands  $x(t_b)$  vom Ursprung bestraft.

Das System kann in diesem Fall zeitvariant sein:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad x(t_a) = x_a \quad (6)$$

Die Lösung der finite horizon Formulierung lautet:

$$u(t) = -K(t) \cdot x(t), \quad \text{wobei } K(t) = R^{-1}(t) \cdot B^\top(t) \cdot \Phi(t).$$

Die Matrix  $\Phi(t)$  ist die Lösung der Riccati Matrix-Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \Phi(t) \cdot B(t) \cdot R^{-1}(t) \cdot B^\top(t) \cdot \Phi(t) - \Phi(t) \cdot A(t) - A^\top(t) \cdot \Phi(t) - Q(t)$$

wobei  $\Phi(t)$  durch Rückwärtsintegration von  $\Phi(t_b) = P$  gefunden werden kann.

### Bemerkungen:

- Die Matrix  $K(t)$  ist zeitabhängig. Sie muss entsprechend der Zeitabhängigkeit der Matrizen  $\{A(t), B(t), Q(t), R(t)\}$  berechnet werden.
- Die Matrix  $P$  ist eine neue Tuninggrösse.
- Die Matrix  $K(t)$  ist nur für das Zeitintervall  $t \in [t_a, t_b]$  gültig. Für Zeiten  $t > t_b$  muss  $K(t)$  neu evaluiert werden.
- Asymptotische Stabilität kann nicht garantiert werden, da für  $t > t_b$  nicht optimiert wird.
- Es wird nicht erwartet, dass Sie die Gleichungen von Hand lösen können.

## 8 Finite Horizon Folgeregelung

Zusätzlich zur zeitvarianten Dynamik aus Gl. (6) wird nun der zeitvariante Ausgang eingeführt:

$$y(t) = C(t) \cdot x(t)$$

Die Kosten, die über ein Zeitintervall  $[t_a, t_b]$  integriert werden, lauten:

$$J(u) = (r(t_b) - y(t_b))^\top \cdot P \cdot (r(t_b) - y(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} ((r(t) - y(t))^\top \cdot Q(t) \cdot (r(t) - y(t)) + u(t)^\top \cdot R(t) \cdot u(t)) dt$$

Die Lösung der finite horizon Folgeregelung lautet:

$$u(t) = -K(t) \cdot x(t) + u_r(t)$$

Die Gleichungen zur Bestimmung von  $K(t)$  und  $v(t)$  sind kompliziert und werden im Theory Sheet ausgelassen. Die relevanten Punkte sind in den Bemerkungen zusammengefasst.

### Bemerkungen:

- Die Referenztrajektorie  $r(t)$  ist eine Wahl, die vor dem Lösen des Optimierungsproblems festgelegt wird.
- Die Matrix  $K(t)$  ist zeitabhängig. Sie muss entsprechend der Zeitabhängigkeit der Matrizen  $\{A(t), B(t), Q(t), R(t)\}$  berechnet werden.
- Die Matrix  $K(t)$  ist nur für das Zeitintervall  $t \in [t_a, t_b]$  gültig. Für Zeiten  $t > t_b$  muss  $K(t)$  neu evaluiert werden.
- $u_r(t)$  ist ein zeitabhängiges Vorsteuerungssignal, welches nur im Zeitintervall  $t \in [t_a, t_b]$  für eine spezifische Referenz  $r(t)$  gültig ist.

## Regelungstechnik II FS 2021

### Zustandsbeobachter

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

### 1 Zustandsbeobachter

Die linearen Zustandsregler, die im letzten Kapitel behandelt wurden, sind praktisch nicht umsetzbar, da uns nur der Systemeingang  $u(t)$  und der Systemausgang  $y(t)$  zur Verfügung stehen<sup>1</sup>. Es ist jedoch möglich, die Signale  $u(t)$  und  $y(t)$  mit einem *Beobachter* zu kombinieren, um eine *Schätzung*  $\hat{x}(t)$  des Zustandes zu erhalten. Das System kann danach mit den geschätzten Werten des Zustandes geregelt werden.

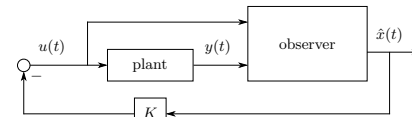


Abb. 1: Beobachter zur Regelung mit Ausgangsrückführung.

### 2 Luenberger-Beobachter

Das Ziel ist es, eine Beobachterdynamik  $\frac{d}{dt}\hat{x}(t)$  so zu konstruieren, dass der Beobachtungsfehler  $x_e(t)$  asymptotisch gegen null konvergiert:

$$x_e(t) = x(t) - \hat{x}(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_e(t) = 0 \quad (1)$$

Genau dann würde die Schätzung  $\hat{x}(t)$  im Grenzfall dem wahren Zustand  $x(t)$  entsprechen. Die folgende Beobachterdynamik erfüllt diese Anforderung unter gewissen Bedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= \hat{A} \cdot \hat{x}(t) + \hat{B} \cdot u(t) + L \cdot (y - \hat{y}(t)) \\ \hat{y} &= \hat{C} \cdot \hat{x}(t) \end{aligned}$$

Dabei ist die Beobacherverstärkung  $L$  der Freiheitsgrad. Diese Struktur eines Beobachters wird Luenberger-Beobachter genannt. Ein Blockdiagramm der Struktur ist in Abb. 2 ersichtlich.

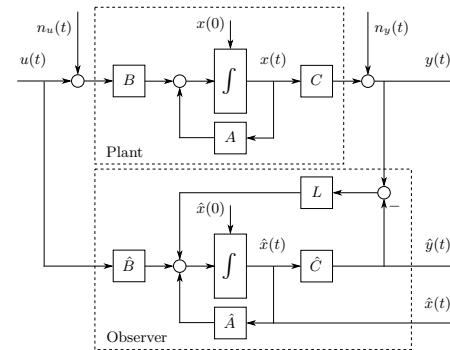


Abb. 2: Blockdiagramm des Luenberger-Beobachters.

<sup>1</sup>Es kann durchaus sein, dass alle Zustände direkt messbar sind, dann ist  $y(t) = x(t)$ .

## Zusammenfassung Vorlesung 10

### Skript Kapitel 5

Bei Fragen: hraiffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 12. Mai 2021

Unter der Annahme, dass die Systemmatrizen perfekt bestimmt wurden ( $\hat{A} = A$ ,  $\hat{B} = B$ ,  $\hat{C} = C$ ) und weder Störungen noch Rauschen vorliegen ( $n_u(t) = n_y(t) = 0$ ), kann die Dynamik des Fehlers hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_e(t) &= \frac{d}{dt}x(t) - \frac{d}{dt}\hat{x}(t) \\ &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) - (A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot u(t) + L \cdot (y(t) - \hat{y}(t))) \\ &= A \cdot (x(t) - \hat{x}(t)) - L \cdot C \cdot (x(t) - \hat{x}(t)) \\ &= (A - L \cdot C) \cdot x_e(t) \end{aligned}$$

Ein initialer Fehler  $x_e(0) = x(0) - \hat{x}(0) \neq 0$  in der Zustandsschätzung konvergiert also gegen null, falls die Matrix  $A - L \cdot C$  Hurwitz<sup>2</sup> ist. Die Beobacherverstärkung  $L$  kann verwendet werden um dies zu erreichen.

### Beobachterentwurf mit dem LQR-Schema

Das Problem, eine stabilisierende Beobacherverstärkung  $L$  zu finden, kann so formuliert werden, dass die LQR-Formulierung verwendet werden kann, um eine Lösung zu finden.

**Recap:** Die LQR-Formulierung nutzt den Freiheitsgrad  $K$ , um zu erreichen, dass die Matrix  $A - B \cdot K$  Hurwitz ist.

$$\rightarrow \text{LQR findet } K \text{ sodass } \operatorname{Re}(\lambda_i(A - B \cdot K)) < 0$$

Wir wollen nun dasselbe mit der Matrix  $A - L \cdot C$  erreichen, wobei der Freiheitsgrad  $L$  eingestellt wird.  $L$  steht dabei jedoch "vor" dem  $C$ , und  $K$  "nach" dem  $B$ . Wir müssen zuerst folgenden Fakt der linearen Algebra verwenden:

$$\lambda_i(X) = \lambda_i(X^\top), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Somit folgt:

$$\lambda_i(A - L \cdot C) = \lambda_i((A - L \cdot C)^\top) = \lambda_i(A^\top - C^\top \cdot L^\top)$$

Das heisst, wir können zur Berechnung der Beobacherverstärkung  $L$  auch die LQR-Formulierung verwenden. Indem wir die Eigenwerte der Matrix  $A^\top - C^\top \cdot L^\top$  mit der LQR-Formulierung platzieren, wissen wir sofort, dass  $A - L \cdot C$  auch Hurwitz ist. Somit ist garantiert, dass der Fehler  $x_e(t)$  asymptotisch gegen null konvergiert, so wie gewünscht.

### Zur Erinnerung:

Die Lösung der LQR-Formulierung lautet

$$\begin{aligned} K &= R^{-1} \cdot B^\top \cdot \Phi, \quad \text{wobei für } \Phi \text{ gilt:} \\ \Phi \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^\top \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^\top \cdot \Phi - Q &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

<sup>2</sup>Eine Matrix ist Hurwitz, falls der Realteil aller ihrer Eigenwerte kleiner null ist.



Mit den Änderungen

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A^\top \\ B &\rightarrow C^\top \\ Q &= \bar{C}^\top \cdot \bar{C} \rightarrow \bar{B} \cdot \bar{B}^\top \\ R &= r \cdot I \rightarrow q \cdot I \\ K &\rightarrow L^\top \\ \Phi &\rightarrow \Psi, \end{aligned}$$

folgt die Lösung der Polplatzierung mit Freiheitsgrad  $L^\top$ :

$$\begin{aligned} L^\top &= \frac{1}{q} \cdot C \cdot \Psi \\ \Psi \cdot C^\top \cdot \frac{1}{q} \cdot C \cdot \Psi - \Psi \cdot A^\top - A \cdot \Psi - \bar{B} \cdot \bar{B}^\top &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Falls die Matrizen  $\{A, C\}$  vollständig beobachtbar und  $\{A, \bar{B}\}$  vollständig steuerbar sind, existiert eine eindeutige positiv definite Lösung  $\Psi$ .

#### Bemerkungen:

- Die Matrix  $L$  ist statisch. Sie muss für gegebene  $\{A^\top, C^\top, \bar{B} \cdot \bar{B}^\top, q \cdot I\}$  nur einmal berechnet werden.
- Die Matrizen  $\bar{B}$  und der Faktor  $q$  werden iterativ eingestellt, bis zufriedenstellende Performance erreicht wird.
- Falls Rauschen  $n_y$  am Ausgangssignal vorhanden ist, lautet die Fehlerdynamik:

$$\frac{d}{dt} x_e(t) = (A - L \cdot C) \cdot x_e(t) - L \cdot n_y(t)$$

Das heisst  $L$  kann nicht beliebig gross gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärken würde (siehe Abb. 3).

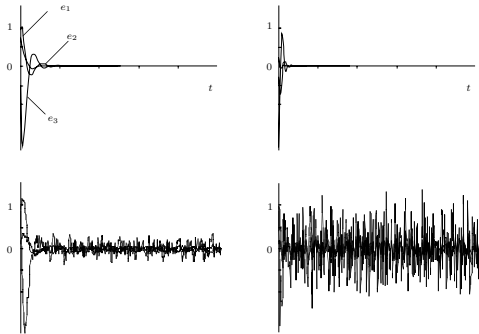


Abb. 3: Transiente der Fehlerdynamik für ein System dritter Ordnung. Links: "langsame" Fehlerdynamik, Rechts: "schnelle" Fehlerdynamik. Oben: kein Rauschen. Unten: Rauschen.

### 3 Kalman-Filter

Falls die Störungen  $n_u(t)$  und  $n_y(t)$  *Gaussian zero mean white noise* Signale sind, und die Varianz der Gaussverteilung bekannt ist, dann kann ein "optimales"  $L$  gefunden werden, welches die Varianz des Beobachtungsfehlers  $x_e(t)$  minimiert. Die Kovarianzmatrix eines zero mean white noise Signals ist:

$$E\{n(t) \cdot n^\top(t - \tau)\} = R \cdot \delta(\tau), \quad (4)$$

wobei  $E$  der Erwartungswert ist,  $\delta$  ein Diracimpuls, und  $R = R^\top \succeq 0$  eine konstante positiv semi-definite Matrix. Gl. (4) besagt, dass das Signal  $n(t)$  perfektes Rauschen ist (es korreliert nur für  $\tau = 0$  mit sich selber, sonst nicht ( $\tau \neq 0$ )).

Um den Kalman-Filter zu verwenden, müssen die Kovarianzmatrizen der Störungssignale bekannt sein:

$$\begin{aligned} E\{n_u(t) \cdot n_u^\top(t - \tau)\} &= R_u \cdot \delta(\tau), \quad R_u \succeq 0 \\ E\{n_y(t) \cdot n_y^\top(t - \tau)\} &= R_y \cdot \delta(\tau), \quad R_y \succeq 0 \end{aligned}$$

Die Matrizen  $R_u$  und  $R_y$  können durch statistische Analyse gefunden werden. Wie dies genau geschieht sprengt den Rahmen von Regelungstechnik II. Deswegen wird im Folgenden die Lösung präsentiert, ohne Beweis.

Beim Tunen des Luenberger-Beobachter können wir  $\bar{B} \cdot \bar{B}^\top$  und  $q$  einstellen. Es stellt sich heraus, dass die Änderung

$$\begin{aligned} \bar{B} \cdot \bar{B}^\top &\rightarrow B \cdot R_u \cdot B^\top \\ q \cdot I &\rightarrow R_y \end{aligned}$$

die Lösung des Kalman-Filters liefert. Das heisst, man muss beim Kalman-Filter nichts mehr tunen. Die Kovarianzen  $R_u$  und  $R_y$  liefern direkt die optimalen Tuning-Parameter, die varianzminimierend wirken. Die Lösung kann wiederum über die Riccati-Gleichung gefunden werden:

$$\begin{aligned} L_K^\top &= R_y^{-1} \cdot C \cdot P \\ P \cdot C^\top \cdot R_y^{-1} \cdot C \cdot P - P \cdot A^\top - A \cdot P - B \cdot R_u \cdot B^\top &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

wobei die positiv definite Lösung  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  garantiert existiert, wenn  $\{A, C\}$  vollständig beobachtbar ist.

#### Bemerkungen:

- Die Matrix  $L_K$  ist statisch. Sie muss für gegebene  $\{A^\top, C^\top, B \cdot R_u \cdot B^\top, R_y\}$  nur einmal berechnet werden.
- Der Kalman-Filter hat keine Tuning-Parameter mehr;  $R_u$  und  $R_y$  werden durch statistische Analyse bestimmt.

#### Zusammenfassung:

Gl. (2), Gl. (3) und Gl. (5) sind identisch in der Form und können alle mit dem LQR-Formalismus gelöst werden. Folgende Tabelle fasst die Ähnlichkeit zusammen:

LQR	Luenberger	Kalman
$A$	$A^\top$	$A^\top$
$B$	$C^\top$	$C^\top$
$Q = \bar{C}^\top \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot \bar{B}^\top$	$B \cdot R_u \cdot B^\top$
$R$	$q \cdot I$	$R_y$
$K$	$L^\top$	$L_K^\top$
$\Phi$	$\Psi$	$P$

Tabelle 1: "Konvertierungstabelle" zwischen LQR-Regler, Luenberger-Filter und Kalman-Filter.

## Regelungstechnik II FS 2021

### LQG und LTR

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

## Zusammenfassung Vorlesung 11

### Skript Kapitel 6

Bei Fragen: hraiffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 19. Mai 2021

**Recap:** Bis jetzt wurde das LQR-Entwurfsverfahren analysiert, das den Zustand  $x(t)$  zur Regelung verwendet. Dies ist jedoch nicht praktisch, da in Realität nur die Signale  $u(t)$  und  $y(t)$  verfügbar sind. Deswegen wurde der Luenberger-Beobachter eingeführt, der basierend auf den Signalen  $u(t)$  und  $y(t)$  und den Systemmatrizen  $\{A, B, C\}$  eine Schätzung  $\hat{x}(t)$  des realen Zustandes  $x(t)$  liefert<sup>1</sup>. Nun zeigen wir, dass eine Kombination von LQR-Regler und Luenberger-Beobachter sinnvoll ist, insbesondere weil der resultierende geschlossene Regelkreis garantiert stabil ist<sup>2</sup>.

### 1 LQG-Regler

Eine Kombination aus LQR und Luenberger-Beobachter wird LQG-Regler genannt (Linear Quadratic Gaussian). Der zurückgeführte Zustandsvektor  $x(t)$  wird dabei mit der Schätzung  $\hat{x}(t)$  ersetzt:

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t) \quad (1)$$

Das Blockdiagramm eines LQG-Reglers sieht wie folgt aus:

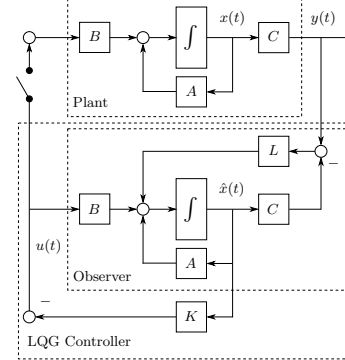


Abb. 1: Struktur eines LQG-Reglers.

#### Stabilitätseigenschaften des LQG-Reglers

Das dynamische Verhalten von System und Beobachter in Abb. 1 kann wie folgt beschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad (2)$$

$$y(t) = C \cdot x(t),$$

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) = A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot u(t) + L \cdot (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (3)$$

$$\hat{y}(t) = C \cdot \hat{x}(t)$$

Unter der Annahme dass die Systemmatrizen  $\{A, B, C\}$  bekannt sind und im Beobachter zur Verfügung stehen, ersetzen

<sup>1</sup>Wir gehen für alle Herleitungen davon aus, dass die Systemmatrizen exakt bekannt sind.

<sup>2</sup>Die Stabilitätsgarantie gilt nur, falls die lineare Systembeschreibung exakt dem realen System entspricht, was im Normalfall nicht gegeben ist. In der Praxis ist der präsentierte LQG-Regler trotzdem sehr mächtig, da er mit genügend Robustheit auch für reale Systeme stabilisierend wirken kann.

wir  $u(t)$  in Gln. (2) und (3) mit Gl. (1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= A \cdot x(t) - B \cdot K \cdot \hat{x}(t) \\ \frac{d}{dt} \hat{x}(t) &= (A - B \cdot K - L \cdot C) \cdot \hat{x}(t) + L \cdot C \cdot x(t) \end{aligned} \quad (4)$$

Nun zeigen wir, dass der geschlossene Regelkreis resultierend aus Gl. (4) asymptotisch stabil ist. Dazu definieren wir den folgenden Zustandsvektor  $\tilde{x}(t)$  und die Systemmatrix  $\tilde{A}_{cl}$ :

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -B \cdot K \\ L \cdot C & A - B \cdot K - L \cdot C \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{cl}} \cdot \tilde{x}(t)$$

Die Stabilität des geschlossenen Regelkreises wird definiert durch die Eigenwerte der Matrix  $\tilde{A}_{cl}$ . Diese sind in der gezeigten Form nicht einfach zu berechnen. Nach der folgenden Koordinatentransformation des Zustandsraumes wird die Berechnung hingegen sehr einfach<sup>3</sup>:

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & -I_{n \times n} \end{bmatrix} \cdot \tilde{x} = T^{-1} \cdot \tilde{x}$$

#### Stabilitätseigenschaften - Separation Principle

In den neuen Koordinaten  $\tilde{z}$  ergibt sich die Dynamik des geschlossenen Regelkreises in Gl. (4) wie folgt:

$$\frac{d}{dt} \tilde{z}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A - B \cdot K & B \cdot K \\ 0_{n \times n} & A - L \cdot C \end{bmatrix}}_{\text{gleiche Eigenwerte wie } \tilde{A}_{cl}} \cdot \tilde{z}(t) = T^{-1} \cdot \tilde{A}_{cl} \cdot T \cdot \tilde{z}(t)$$

Die Eigenwerte sind durch die gegebene Block-Struktur der Matrix nun direkt ablesbar.

$n$  der Eigenwerte entsprechen den Eigenwerten der Hurwitz Matrix  $A - B \cdot K$  und die anderen  $n$  Eigenwerte entsprechen den Eigenwerten der Hurwitz Matrix  $A - L \cdot C$ .

$$\lambda_i(T^{-1} \cdot \tilde{A}_{cl} \cdot T) = \lambda_i(\tilde{A}_{cl}) = \lambda_i(A - B \cdot K) \cup \lambda_i(A - L \cdot C)$$

Asymptotische Stabilität ist somit ohne explizite Berechnung der Eigenwerte  $\lambda_i$  garantiert, da beide Matrizen Hurwitz sind, wenn  $K$  und  $L$  mit dem LQR-Auslegeverfahren bestimmt wurden.

<sup>3</sup>Die Umrechnung in die neuen Zustände erfolgt über eine Ähnlichkeitsabbildung (Koordinatentransformation), welche die Eigenwerte der Matrix nicht ändert, d.h.  $\lambda_i(T^{-1} \cdot \tilde{A}_{cl} \cdot T) = \lambda_i(\tilde{A}_{cl})$ . Bei der gewählten Transformation gilt  $T^{-1} = T$ .



## 2 Erweiterungen: LQGI und Folgeregelung

Genau wie der Standard LQR-Regler, kann der Standard LQG-Regler keine Störungen unterdrücken und keinen Referenzsignalen folgen. Die im LQR-Fall eingeführten Erweiterungen zur Folgeregelung (Vorsteuersignal auf die Referenz) und Störungsunterdrückung (integrative Erweiterung am Systemausgang) können im LQG Fall genau gleich verwendet werden, womit diese Schwächen des Standard LQG-Reglers behoben werden können. Der resultierende Regler, erweitert um die Störungsunterdrückung und die Vorsteuerung zur Folgeregelung, wird LQGI-Regler genannt und ist dargestellt in Abb. 2.

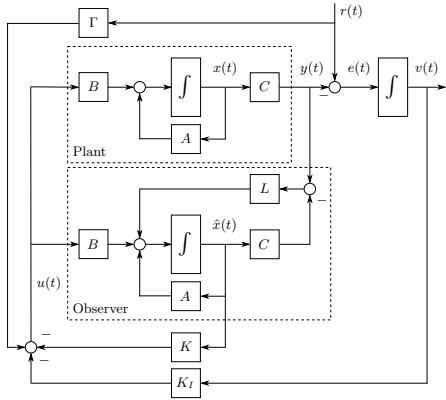


Abb. 2: LQGI-Regler zur Störungsunterdrückung, mit Vorsteuersignal auf das Referenzsignal.

### LQGI - Störungsunterdrückung

Für die Störungsunterdrückung wird wie beim LQRI-Regler das Integral des Regelfehlers  $r(t) - y(t)$  als Zustand eingeführt:

$$v(t) = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau$$

Diese Erweiterung führt zum erweiterten Zustandsvektor:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{2n+m},$$

mit Eingangssignal

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t) - K_I \cdot v(t),$$

wobei die Variablen  $K$  und  $K_I$  Teil der Lösung der bereits bekannten LQRI-Formulierung sind:

$$\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, \tilde{R}\} \rightarrow \tilde{K} = [K, K_I],$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_I \end{bmatrix}$$

### Folgeregelung

Die Vorsteuer matrix  $\Gamma$  berechnet sich als

$$\Gamma = -\left(C \cdot (A - B \cdot K)^{-1} \cdot B\right)^{-1} \quad (5)$$

Die Matrix  $\Gamma$  sowie Bedingungen für deren Existenz wurden in der Diskussion zum LQRI-Regler besprochen.

## 3 LQGI Reglerentwurf - Workflow

Der Workflow, um einen LQGI-Regler mit Vorsteuerung zu entwerfen, ist wie folgt:

1. Definiere die erweiterten Systemmatrizen  $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ , wie besprochen im Kapitel zum LQRI-Regler.
2. Entwerfe einen Regler  $\tilde{K}$  zur linearen Zustandsrückführung für das erweiterte System

$$\tilde{K} = \text{lqr}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{m}, \tilde{m})$$

und zerlege ihn wie folgt:

$$\tilde{K} = [K, K_I]$$

Starte dabei mit einfachen Gewichten ( $R = r \cdot I$ , etc.) und iteriere  $r$  und  $\gamma_i$ . Falls das nicht reicht, versuche allgemeinere Gewichte bis das gewünschte Regelverhalten resultiert.

3. Entwerfe eine Beobacherverstärkung  $L$  für das originale System  $\{A, B, C\}$  unter Verwendung des LQR-Algorithmus, so wie beschrieben im Kapitel zum Beobachter.

$$L = \text{lqr}(A', C', B^*B', Q^*eye(m, m))'$$

4. Berechne die Vorsteuer matrix  $\Gamma$  wie folgt

$$\Gamma = -\left(C \cdot (A - B \cdot K)^{-1} \cdot B\right)^{-1}$$

und füge den Vorsteuerungspfad hinzu.

Die resultierende Reglerstruktur, zerlegt in Vorsteuerung ('Feedforward Controller') und Feedbackregler, ist dargestellt in Abb. 3. Diese Struktur ist identisch zum Blockschalt diagram in Abb. 2, jedoch sind in Abb. 3 die Vorsteuerung und der Feedbackregler einfach ablesbar.

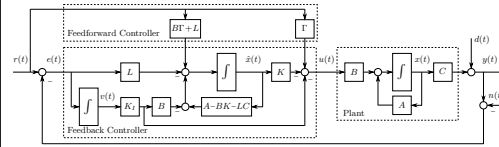


Abb. 3: Implementierung: LQGI Regler mit Vorsteuerung.

## 4 Bemerkungen zu Störungsunterdrückung und Folgeregelung

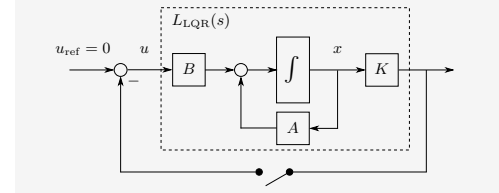
Eine Vorsteuerung (ein zusätzliches Stellsignal, welches von der Referenz  $r(t)$  abhängt und nicht vom Regelfehler  $e(t)$ , äquivalent zur Matrix  $\Gamma$ ) wurde bisher in RT1 und RT2 nicht detailliert betrachtet. Vorsteuerungen können verwendet werden, um die Performance des Regelkreises zu verbessern: er reagiert schneller auf Sollwertänderungen, da sich nicht zuerst ein Fehler aufbauen muss, bevor der Reglerausgang angepasst wird. Robustheit, Stabilität und das steady-state Verhalten (kein statischer Nachlauffehler) des Regelkreises werden durch eine stabile Vorsteuerung grundsätzlich nicht beeinflusst.

Robustheit, Stabilität und steady-state Verhalten sind generell die wichtigen Aspekte eines Regelkreises: meist ist es nicht wichtig, sehr schnell zu regeln, viel eher wünscht man

sich garantierte Stabilität in allen möglichen Situationen. Da Stabilität und Robustheit und fehlerfreies steady-state Verhalten<sup>4</sup> auch ohne Vorsteuerungssignale gegeben sind, könnte man die Vorsteuerungssignale auch weglassen. Änderungen des Referenzsignals würden das System als Störung beeinflussen und durch den Integrator kompensiert werden.

## 5 Resultierende Regelkreise

**Recap:** Der offene LQR-Regelkreis  $L_{LQR}(s)$  ist von  $u(t)$  nach  $K \cdot x(t)$  definiert. Für SISO-Systeme tritt dieser offene Regelkreis nicht ein in den Kreis mit Radius 1 um den Punkt -1 im Nyquist Diagramm.



Um die LQG-Formulierung mit der LQR-Formulierung zu vergleichen, muss  $L_{LQG}(s)$  analog zu  $L_{LQR}(s)$  definiert sein. Der Regelkreis muss also beim Systemeingang  $u$  geschnitten werden, so wie dargestellt in Abb. 1.<sup>5</sup>

Wir können die resultierenden Systemgleichungen der offenen und geschlossenen Regelkreise darstellen:

$$\text{Offener Regelkreis : } u \rightarrow -u_{LQG},$$

$$\text{Geschlossener Regelkreis : } r \rightarrow y,$$

wobei gilt:  $u_{LQG} = -[K, K_I] \cdot [\hat{x}(t), v(t)]^T$ .

Die Betrachtung des offenen Regelkreises ist wichtig für die Analyse der Robustheit. Der geschlossene Regelkreis dient der Analyse der Stabilität und des zu erwartenden transienten Verhalten des Systems. Ausgangspunkt zur Berechnung der Regelkreise sind die Gleichungen des Systems und des Beobachters, welche in den Blockdiagrammen in Abb. 1 und 2 abgelesen werden können:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot u(t) + L \cdot (y(t) - \hat{y}(t))$$

$$\frac{d}{dt}v(t) = r(t) - y(t), \quad (\text{für integrative Struktur})$$

$$y(t) = C \cdot x(t), \quad \text{mit}$$

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

<sup>4</sup>Durch die integrative Erweiterung zur Störungsunterdrückung.

<sup>5</sup>Der offene LQG-Regelkreis kann bei Bedarf auch beim Ausgang  $y$  geschnitten werden, er kann dann aber nicht direkt mit dem offenen LQR-Regelkreis verglichen werden, da dies dort nicht möglich ist.

## LQG-Regler (Abb. 1)

Regelgesetz:

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t)$$

Offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

Geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t)$$

## LQGI mit Folgeregelung (Abb. 2)

Regelgesetz:

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t) - K_I \cdot v(t) + \Gamma \cdot r(t)$$

Offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ LC & A - LC - BK & -BK_I \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B\Gamma \\ I \end{bmatrix} \cdot r(t)$$

Geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK & -BK_I \\ LC & A - BK - LC & -BK_I \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B\Gamma \\ B\Gamma \\ I \end{bmatrix} \cdot r(t)$$

## Berechnung der Übertragungsfunktionen

Die offenen Regelkreise haben die Form:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \tilde{A}_{ol} \cdot \tilde{x}(t) + \tilde{B}_{ol} \cdot u(t) + \tilde{B}_r \cdot r(t)$$

$$u_{LQG} = -\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & K & K_I \end{bmatrix}}_{-\tilde{K}} \cdot \tilde{x}(t).$$

Die Übertragungsfunktion der offenen Regelkreise  $L(s)$  von  $u$  nach  $-u_{LQG}$  lautet somit

$$L_{LQG}(s) = \tilde{K} \cdot (sI - \tilde{A}_{ol})^{-1} \cdot \tilde{B}_{ol}, \quad \{u \rightarrow -u_{LQG}\}$$

## 6 Wiederherstellung der Robustheit: LTR (Loop Transfer Recovery)

**Recap:** Der offene Regelkreis des LQR-Reglers ist:

$$L_{\text{LQR}}(s) = K \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B,$$

welcher hervorragende Robustheitseigenschaften aufweist:

$$\mu_{\min, \text{LQR}} = \min_{\omega} \left( \min_i \sigma_i(I + L_{\text{LQR}}(j\omega)) \right) \geq 1 \quad (6)$$

Leider kann zur minimum return difference des LQG-Reglers

$$\mu_{\min, \text{LQG}} = \min_{\omega} \left( \min_i \sigma_i(I + L_{\text{LQG}}(j\omega)) \right)$$

keine Aussage getroffen werden. Insbesondere kann  $\mu_{\min, \text{LQG}}$  arbiträr klein sein. D.h. die Robustheit muss nach dem Auslegen des Reglers zwingend analysiert werden.

### Loop-Transfer Recovery (LTR)

Es ist möglich, die Robustheit des originalen LQR-Problems mit einem LQG zu approximieren, nämlich dann, wenn der Beobachter sehr schnell eingestellt ist. Dann konvergiert der Fehler in der Zustandsschätzung  $x_e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  sehr schnell gegen null, im Grenzfall unendlich schnell. Die Wiederherstellung der Robustheit wird *loop-transfer recovery (LTR)* genannt.

**Zur Erinnerung:** Die Beobacherverstärkung  $L$  kann wie folgt gefunden werden:

$$\{A^\top, C^\top, B \cdot B^\top, q \cdot I\} \xrightarrow{\text{LQR}} L^\top,$$

wobei  $q$  ein einstellbarer Tuningparameter ist. Die Dynamik des Fehlers in der Zustandsschätzung (Gl. (7)) ist garantiert stabil, da die LQR-Entwurfsmethodik Eigenwerte mit Realteil kleiner null garantiert:

$$\frac{d}{dt} x_e(t) = (A - L(q) \cdot C) \cdot x_e(t). \quad (7)$$

Je kleiner  $q$  beim Tunen gewählt wird, desto schneller wird die Dynamik des Fehlers. Schneller heisst in diesem Fall, dass die Eigenwerte der Matrix  $(A - L(q) \cdot C)$  weiter links in der komplexen Ebene liegen und betragsmässig grösser sind. Entsprechend konvergiert der Fehler schneller zu null.

### Dynamik des Fehlers in der Zustandsschätzung

Wir analysieren nun die Fehlerdynamik für  $\lim_{q \rightarrow 0}$ .

**Bemerkung:** Die Eigenwerte einer inversen Matrix entsprechen den Inversen der Eigenwerte der Matrix:

$$\lambda_i(X^{-1}) = 1/\lambda_i(X) \quad (8)$$

Mit Gln. (7) und (8) folgt:

$$\lim_{q \rightarrow 0} x_e(t) = \lim_{q \rightarrow 0} (A - L(q) \cdot C)^{-1} \cdot \dot{x}_e(t) = 0, \quad (9)$$

da die Eigenwerte von  $(A - L(q) \cdot C)^{-1}$  asymptotisch gegen null gehen. Mit Gl. (9) und  $x_e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , folgt:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \hat{x}(t) = x(t), \quad \forall t$$

Das System verhält sich also für extrem kleine  $q$  als ob gar keine Beobachtdynamik vorhanden wäre. Oder in anderen Worten: Für  $q \rightarrow 0$  verhält sich der LQG-Regler wie ein LQR-Regler und erfüllt somit die gleichen Robustheitsgarantien (siehe Gl. (6) und Abb. 4).

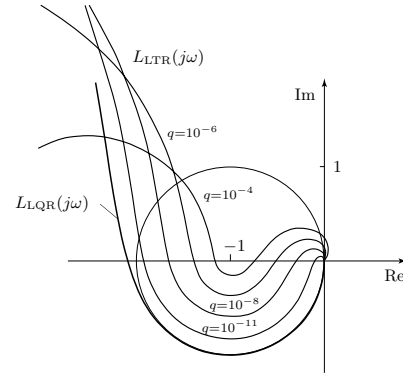


Abb. 4:  $L_{\text{LTR}}$  für verschiedene  $q$ .

### Bemerkungen:

- Der Wert von  $q$  sollte in Realität nicht beliebig klein gewählt werden, da dies zur Verstärkung von hochfrequentem Rauschen führt.
- Falls die Regelstrecke nichtminimalphasig Nullstellen hat, approximiert der LTR-Ansatz den LQR-Regler häufig so gut wie möglich. (Bei nichtminimalphasigen Systemen ist die Durchtrittsfrequenz der offenen Kreisverstärkung inhärent noch oben beschränkt, in diesem Fall ist eine perfekte Approximation der offenen LQR-Kreisverstärkung nicht möglich.)

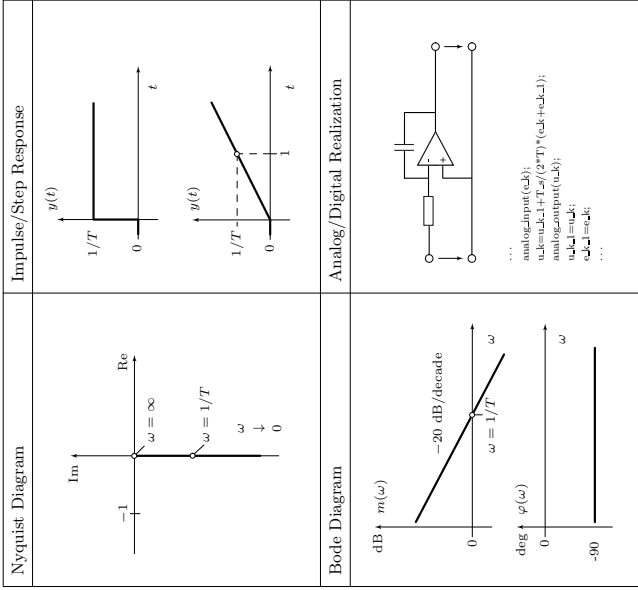
A.1 Integrator Element

Element Acronym: **I**

Transfer Function:  $\Sigma(s) = \frac{1}{T \cdot s}$

Poles/Zeros:  $\pi_1 = 0, \zeta_1 = \infty$

Internal Description:  $\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{T} \cdot u(t)$   
 $y(t) = x(t)$



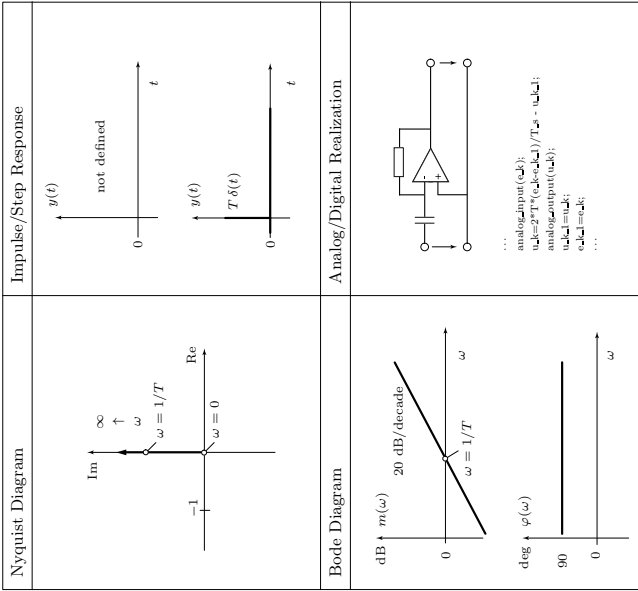
A.2 Differentiator Element

Element Acronym: **D**

Transfer Function:  $\Sigma(s) = T \cdot s$

Poles/Zeros:  $\pi_1 = \infty, \zeta_1 = 0$

Internal Description:  $y(t) = T \cdot \frac{d}{dt}u(t)$



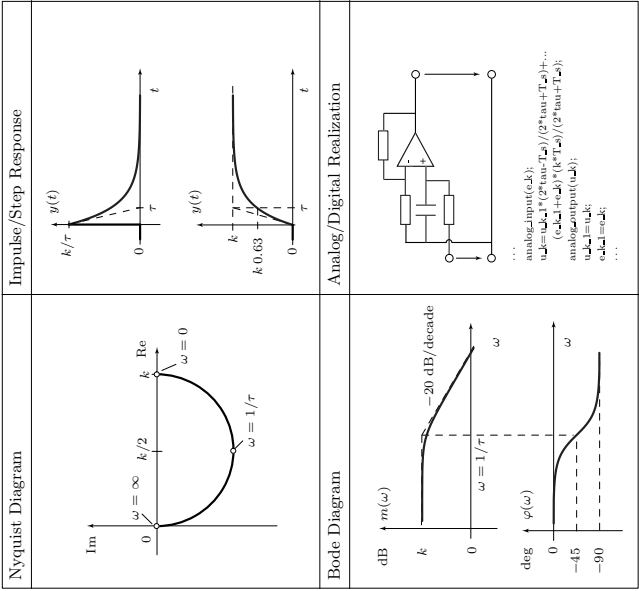
A.3 First-Order Element

Element Acronym: **LP-1**

Transfer Function:  $\Sigma(s) = \frac{k}{\tau \cdot s + 1}$

Poles/Zeros:  $\pi_1 = -\frac{1}{\tau}, \zeta_1 = \infty$

Internal Description:  $\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot x(t) + \frac{1}{\tau} \cdot u(t)$   
 $y(t) = k \cdot x(t)$



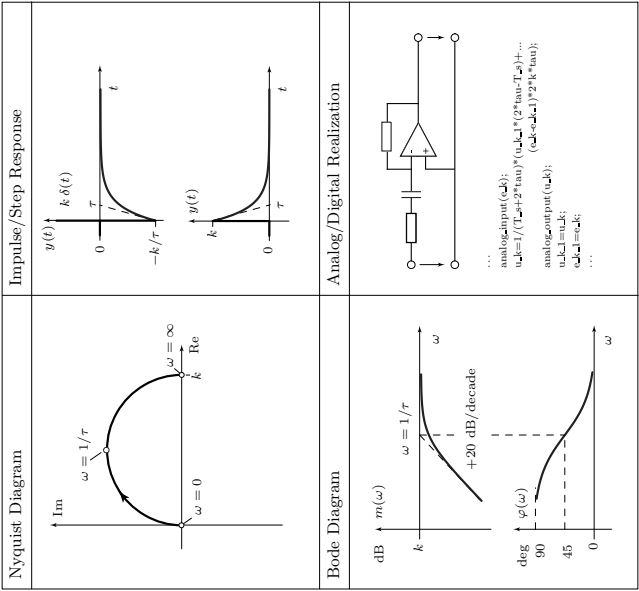
A.4 Realizable Derivative Element

Element Acronym: **HP-1**

Transfer Function:  $\Sigma(s) = k \cdot \frac{\tau \cdot s}{\tau \cdot s + 1} = k \cdot \left(1 - \frac{1}{\tau \cdot s + 1}\right)$

Poles/Zeros:  $\pi_1 = -\frac{1}{\tau}, \zeta_1 = 0$

Internal Description:  $\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot x(t) + \frac{1}{\tau} \cdot u(t)$   
 $y(t) = -k \cdot x(t) + k \cdot u(t)$



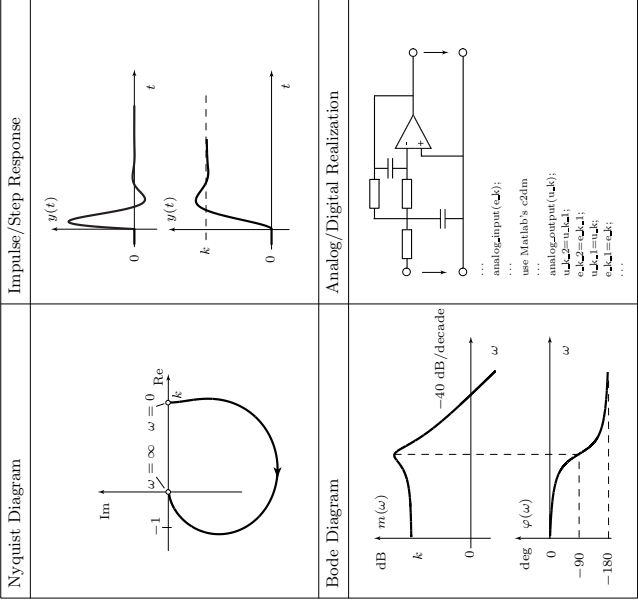
## A.5 Second-Order Element

Element Acronym: **LP-2**

Transfer Function:  $\Sigma(s) = k \cdot \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2}$

Poles/Zeros:  $\pi_{1,2} = -u_0 \cdot \delta \pm u_0 \sqrt{\delta^2 - 1}$ ,  $\zeta_{1,2} = \infty$

Internal Description:  
 $\frac{d}{dt}x_1(t) = x_2(t)$ ,  
 $\frac{d}{dt}x_2(t) = -\omega_0^2 \cdot x_1(t) - 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot x_2(t) + \omega_0^2 \cdot u(t)$   
 $y(t) = k \cdot x_1(t)$



```
...
analog_input(c,k);
...
use Matlab's c2dm
analog_output(c,k);
c_d,k_d=c_d,k;
u_d,k_d=u_d,k;
c_d,k_d=c_d,k;
...
```

## A.6 Lag Element

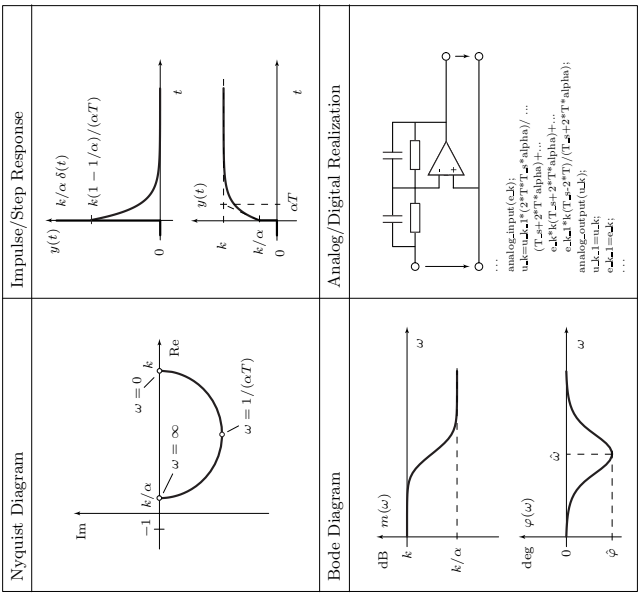
Element Acronym: **LG-1**

Transfer Function:  $\Sigma(s) = k \cdot \frac{T_s s + 1}{\alpha T s + 1} = \frac{k}{\alpha} + k \cdot \frac{1 - 1/\alpha}{\alpha T s + 1}$   $1 < \alpha$

Poles/Zeros:  $\pi_1 = -\frac{1}{\alpha T}$ ,  $\zeta_1 = -\frac{1}{T}$

Internal Description:  
 $\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{\alpha T} \cdot x(t) + \frac{1}{\alpha T} \cdot u(t)$   
 $y(t) = \frac{k(\alpha-1)}{\alpha} \cdot x(t) + \frac{k}{\alpha} \cdot u(t)$

Phase minimum:  $\hat{\varphi} = \arctan(1/\sqrt{\alpha}) - \arctan(\sqrt{\alpha})$  at  $\hat{\omega} = (T \cdot \sqrt{\alpha})^{-1}$



```
...
analog_input(c,k);
u_d,c_d,k_d=c_d,T*T*(2*T*T*(1-alpha)/...
(T_s+2*T*T*alpha)+...
c_d,k*(T_s+2*T)/(T_s+2*T)/(T_s+2*T*alpha);
analog_output(c,k);
u_d,k_d=u_d,k;
c_d,k_d=c_d,k;
...
```

## A.7 Lead Element

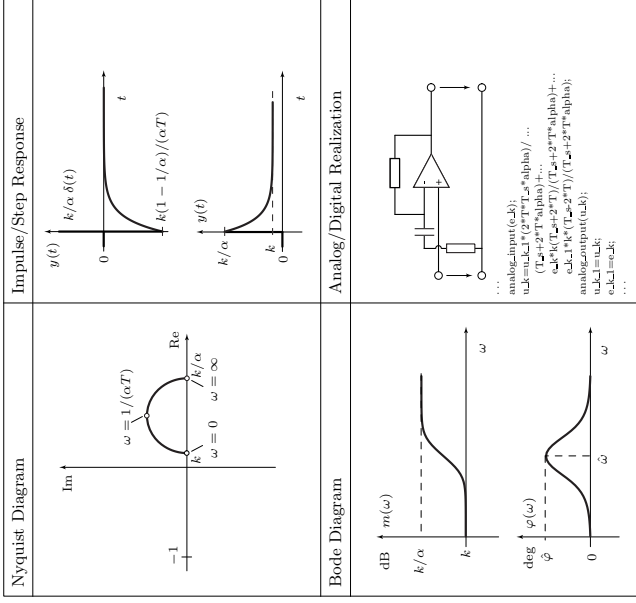
Element Acronym: **LD-1**

Transfer Function:  $\Sigma(s) = k \cdot \frac{T_s s + 1}{\alpha T_s s + 1} = \frac{k}{\alpha} + k \cdot \frac{1 - 1/\alpha}{\alpha T_s s + 1}$   $0 < \alpha < 1$

Poles/Zeros:  $\pi_1 = -\frac{1}{\alpha T}$ ,  $\zeta_1 = -\frac{1}{T}$

Internal Description:  
 $\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{\alpha T} \cdot x(t) + \frac{1}{\alpha T} \cdot u(t)$   
 $y(t) = \frac{k(\alpha-1)}{\alpha} \cdot x(t) + \frac{k}{\alpha} \cdot u(t)$

Phase maximum:  $\hat{\varphi} = \arctan(1/\sqrt{\alpha}) - \arctan(\sqrt{\alpha})$  at  $\hat{\omega} = (T \cdot \sqrt{\alpha})^{-1}$



```
...
analog_input(c,k);
u_d,c_d,k_d=c_d,T*T*(2*T*T*(1-alpha)/...
(T_s+2*T*T*alpha)+...
c_d,k*(T_s+2*T)/(T_s+2*T)/(T_s+2*T*alpha);
analog_output(c,k);
u_d,k_d=u_d,k;
c_d,k_d=c_d,k;
...
```

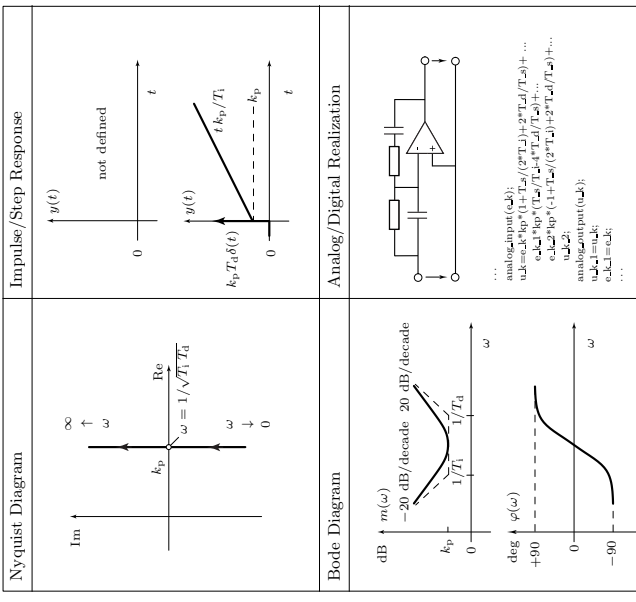
## A.8 PID Element

Element Acronym: **PID**

Transfer Function:  $\Sigma(s) = k_p \cdot \frac{T_d \cdot T_i \cdot s^2 + T_i \cdot s + 1}{T_i \cdot s} = k_p \cdot (1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s)$

Poles/Zeros:  $\pi_1 = 0$ ,  $\pi_2 = \infty$ ,  $\zeta_{1,2} = -\frac{1}{2T_d} \pm \sqrt{\frac{1}{4T_d^2} - \frac{1}{T_i^2 T_d}}$

Internal Description:  
 $\frac{d}{dt}x_1(t) = \frac{1}{T_i} \cdot u(t)$   
 $y(t) = k_p \cdot (u(t) + x_1(t) + T_d \cdot \frac{d}{dt}u(t))$



```
...
analog_input(c,k);
u_d,c_d,k_d=k_d*(1+T_d*(2*T_d*(2*T_d*(1-alpha)/...
(T_s+2*T*T*alpha)+...
c_d,k*(T_s+2*T)/(T_s+2*T)/(T_s+2*T*alpha);
analog_output(c,k);
u_d,k_d=u_d,k;
c_d,k_d=c_d,k;
...
```

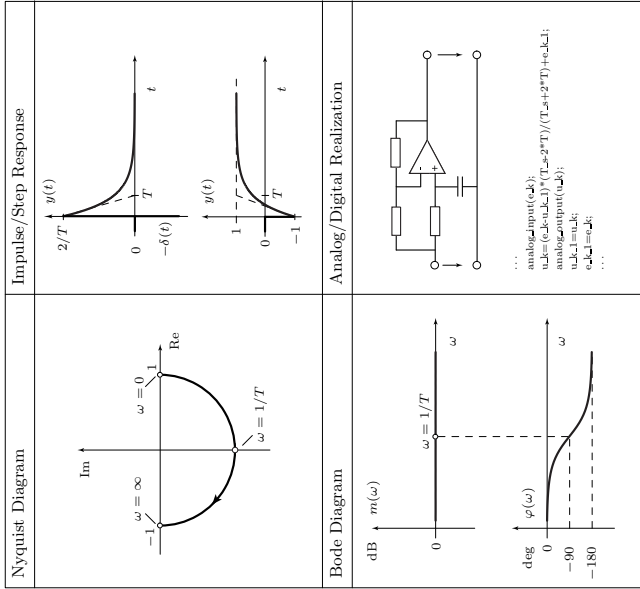
A.9 First-Order All-Pass Element

Element Acronym: AP-1

Transfer Function:  $\Sigma(s) = \frac{-Ts+1}{Ts+1} = -1 + \frac{2}{T^2s+1}$

Poles/Zeros:  $\pi_1 = -\frac{1}{T}, \zeta_1 = \frac{1}{T}$

Internal Description:  $\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{T} \cdot x(t) + \frac{1}{T} \cdot u(t)$   
 $y(t) = 2 \cdot x(t) - u(t)$



A.10 Delay Element

Element Acronym: -

Transfer Function:  $\Sigma(s) = e^{-sT}$

Poles/Zeros: not a real-rational element

Internal Description:  $y(t) = u(t - T)$

