# Regelungstechnik II FS 2020

# Zusammenfassung Vorlesung 5

**MIMO versus SISO Systeme**

**Skript Kapitel 1**

**Autoren:** C. Küttel, **Dozent:** L. Guzzella, **Vorlesungsnummer:** 151-0591-00

Bei Fragen: hraffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 26. März 2020

## 1 Systembeschreibung

Bisher wurden ausschliesslich SISO (single-input, single-output) Systeme betrachtet, d.h. $u(t) \in \mathbb{R}$ und $y(t) \in \mathbb{R}$.
Neu werden MIMO (multiple-input, multiple-output) Systeme mit mehreren Ein- und Ausgängen betrachtet, wobei $u(t) \in \mathbb{R}^m$ und $y(t) \in \mathbb{R}^p$. Identisch zum SISO Fall kann das MIMO System im Zustandsraum dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t), \quad y(t) \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \tag{1}$$

Da $u(t)$ und $y(t)$ jetzt Vektoren sind, müssen die Matrizen $B$, $C$ und $D$ auf die Dimensionen der Eingänge und der Ausgänge angepasst werden. Das I/O (Input-Output) Verhalten des Systems in Gl. (1) wird identisch wie beim SISO Fall über die Laplace-Transformation hergeleitet:

$$\begin{aligned} & s \cdot X(s) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s) \\ \Rightarrow & X(s) = (sI_{n\times n} - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) \\ \Rightarrow & Y(s) = \underbrace{\left(C \cdot (sI_{n\times n} - A)^{-1} \cdot B + D\right)}_{P(s)} \cdot U(s), \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $sI_{n\times n}$ eine Einheitsmatrix der Dimension $n \times n$ ist.

Da $U(s) \in \mathbb{C}^m$ und $Y(s) \in \mathbb{C}^p$ wird $P(s)$ eine Matrix:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{1,1}(s) & P_{1,2}(s) & \dots & P_{1,m}(s) \\ P_{2,1}(s) & P_{2,2}(s) & \dots & P_{2,m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{p,1}(s) & P_{p,2}(s) & \dots & P_{p,m}(s) \end{bmatrix},$$

wobei jede Übertragungsfunktion $P_{i,j}(s) : u_j \to y_i$

$$P_{i,j}(s) = \frac{b_{m,i,j}s^m + \dots + b_{1,i,j}s + b_{0,i,j}}{s^n + a_{n-1,i,j}s^{n-1} + \dots + a_{1,i,j}s + a_{0,i,j}} = \frac{b_{i,j}(s)}{a_{i,j}(s)}$$

eine gebrochenrationale Funktion darstellt.
**Zur Erinnerung:** $P(s)$ beinhaltet nur steuerbare und beobachtbare Teile des Systems in Gl. (1).

**Beispiel:** Das folgende System soll geregelt werden:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{1,1}(s) & P_{1,2}(s) \\ P_{2,1}(s) & P_{2,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{s+1} & \frac{a_{12}}{s+1} \\ \frac{a_{21}}{s+1} & \frac{a_{22}}{s+1} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$U(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}, \quad Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix},$$

Dabei seien $r_1(t) = h(t)$ und $r_2(t) = 0$, wobei $h(t)$ einen Sprung darstellt. Um die Übertragungsfunktion von $R(s)$ nach $Y(s)$ zu finden wird die folgende Regelstruktur betrachtet

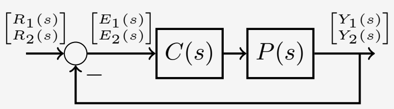


Abb. 1: Regelstruktur ohne Störung und ohne Rauschen.

Der Ausgang als Funktion des Fehlers lautet

$$Y(s) = P(s)C(s)E(s) = P(s)C(s)\left[R(s) - Y(s)\right].$$

Daraus folgt

$$Y(s) = \left[I + P(s)C(s)\right]^{-1} P(s)C(s)R(s)$$

**Vorsicht!** Die Reihenfolge der Matrixmultiplikation $P(s) \cdot C(s)$ kann nicht umgedreht werden, da diese Operation für allgemeine Matrizen nicht kommutiert.

Das System $P(s)$ wird nun für drei verschiedene Fälle der Verstärkung $P(0)$ simuliert:

$$P(0) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

**Fall 1:** $a_{11},\, a_{22} \gg a_{12},\, a_{21}$

Die Systemparameter werden beispielhaft $a_{11} = a_{22} = 1$ und $a_{12} = a_{21} = 0.1$ gewählt. Die Matrix $P(0)$ ist diagonaldominant, es folgt näherungsweise

$$P(s) \approx \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{a_{22}}{s+1} \end{bmatrix}.$$

D.h. der Eingang $u_1(t)$ wirkt nur auf $y_1(t)$ und $u_2(t)$ wirkt nur auf $y_2(t)$. Somit kann das Gesamtsystem als zwei verschiedene SISO Systeme ($r_1 \to y_1$ und $r_2 \to y_2$) betrachtet werden. Die Reglermatrix wird unter dieser Annahme diagonal:

$$C(s) = \begin{bmatrix} C_1(s) & 0 \\ 0 & C_2(s) \end{bmatrix},$$

wobei im gegebenen Beispiel für $C_1(s)$ und $C_2(s)$ zwei identische PI Regler mit $k_p = 0.1$ und $T_i = 0.1\,\mathrm{s}$ gewählt werden.

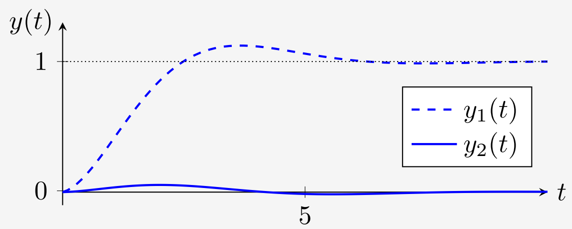


Abb. 2: Fall 1, MIMO Antwort für $r_1(t) = h(t)$ und $r_2(t) = 0$.

Obwohl $y_2(t)$ in Realität leicht vom Eingang $u_1(t)$ abhängt (an der leichten Erhöhung von $y_2(t)$ ersichtlich) lässt sich das System mit zwei separaten SISO Reglern gut regeln.

**Fall 2:** $a_{11},\, a_{22} > a_{12},\, a_{21}$

Die Diagonalelemente von $P(0)$ sind zwar immer noch grösser, jedoch nicht gross genug um das MIMO System klar in zwei SISO Systeme zu separieren. Beispielhaft werden $a_{11} = a_{22} = 1$ und $a_{12} = a_{21} = 0.8$ gewählt. Der gleiche Regler $C(s)$ wie im Fall 1 wird verwendet.

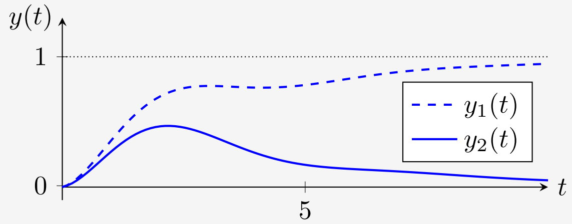


Abb. 3: Fall 2, MIMO Antwort für $r_1(t) = h(t)$ und $r_2(t) = 0$.

Die Systemantwort ist sichtlich schlechter. Das liegt daran, dass der Eingang $u_1(t)$ den Ausgang $y_2(t)$ nach oben zieht, und der Eingang $u_2(t)$ den Ausgang $y_1(t)$ nach unten zieht.

**Fall 3:** $a_{11}$, $a_{22} < a_{12}$, $a_{21}$

Falls die dominanten I/O Kanäle des Systems genau verkehrt geschätzt werden, destabilisiert sich das System mit dem Regler $C(s)$ aus Fall 1.

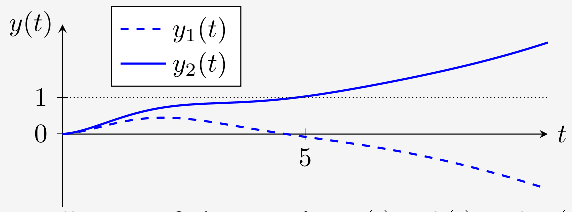


Abb. 4: Fall 3, MIMO Antwort für $r_1(t) = h(t)$ und $r_2(t) = 0$.

Man könnte $C(s)$ natürlich abändern, sodass $C_1(s)$ und $C_2(s)$ auf der Nebendiagonalen liegen, dann wäre das Verhalten äquivalent zu Fall 1.

## 2 Stabilität, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Die Analyse von MIMO Systemen ist identisch zu derjenigen von SISO Systemen.

**Stabilität nach Lyapunov**:

*asymptotisch stabil* nach Lyapunov:
Alle Eigenwerte von $A$ haben negativen Realteil, $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$.

*stabil* nach Lyapunov:
Mindestens ein Eigenwert $\lambda_k$ von $A$ hat Realteil $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$ und alle anderen Eigenwerte haben negative Realteile.

*instabil* nach Lyapunov:
Mindestens ein Eigenwert $\lambda_k$ von $A$ hat einen positiven Realteil $\mathrm{Re}(\lambda_k) > 0$.

**Steuerbarkeit**

Das System $\{A, B, C, D\}$ ist vollständig steuerbar falls die Steuerbarkeitsmatrix $\mathcal{R}_n$ vollen Rang $n$ hat.

$$\mathcal{R}_n = \left[B, AB, \dots, A^{n-1}B\right] \in \mathbb{R}^{n\times(n\cdot m)}$$

**Beobachtbarkeit**

Das System $\{A, B, C, D\}$ ist vollständig beobachtbar falls die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}_n$ vollen Rang $n$ hat.

$$\mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n\cdot p)\times n}$$

## 3 Pole und Nullstellen

Pole und Nullstellen sind im MIMO Fall etwas komplizierter.

**Definition Matrix Minoren (wichtiges Werkzeug)**
Minoren einer Matrix sind die Determinanten aller quadratischen Submatrizen. Die Submatrizen werden durch Streichen einzelner Zeilen und Spalten der Matrix gebildet.

**Polstellen von MIMO Systemen**
*Die Pole von $P(s)$ sind die Nullstellen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) der Nennerpolynome aller Minoren von $P(s)$.*

**Nullstellen von MIMO Systemen**
*Die Nullstellen von $P(s)$ sind die Nullstellen des grössten gemeinsamen Teilers (ggT) der Zähler der Minoren höchster Ordnung von $P(s)$ nach der Normalisierung, bei der alle Pole von $P(s)$ im Nenner stehen.*[1]

**Zur Erinnerung:** Nullstellen $s = \zeta_i$ sind nicht-triviale Frequenzen, bei denen für ein spezifisches Eingangssignal $u(t)$ und spezifische Anfangsbedingungen $x(0)$ gilt: $y(t) = 0\,\forall t$. D.h. die Laplace-Transformation von Gl. (1) erfüllt

$$\begin{aligned} (sI_{n\times n} - A)\cdot x - B\cdot u = 0, \\ C\cdot x + D\cdot u = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

wobei Gl. (4) nur eine nichttriviale Lösung hat, falls die folgende Matrix singulär ist:

$$\begin{bmatrix} (sI_{n\times n} - A) & -B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

**Beispiel:** Das System

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{2(s+2)}{s+1} & \frac{3}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

wird auf Polstellen und Nullstellen analysiert.

**Pole Schritt 1:** Minoren finden

$$\frac{2(s+2)}{s+1}, \frac{3}{s+1}, \frac{1}{s+1}, \frac{1}{s+2}, \frac{2s-1}{(s+1)^2}$$

**Pole Schritt 2:** Das kgV der Pole aller Minoren finden

$$p(s) = (s+1)^2 \cdot (s+2)$$

$\Rightarrow P(s)$ hat somit eine zweifache Polstelle bei $s = -1$ und eine einfache Polstelle bei $s = -2$.

**Nullstellen Schritt 1:** Minoren höchster Ordnung finden[a]

$$\frac{2s-1}{(s+1)^2}$$

**Nullstellen Schritt 2:** Minoren höchster Ordnung normalisieren, sodass alle Pole im Nenner stehen

$$\frac{(2s-1)}{(s+1)^2} \cdot \frac{(s+2)}{(s+2)}$$

**Nullstellen Schritt 3:** Übertragungs-Nullstellen sind die Nullstellen des ggT der normalisierten Minoren höchster Ordnung

$$\text{ggT: } (2s-1)(s+2)$$

$\Rightarrow P(s)$ hat somit eine einfache Nullstelle bei $s = \frac{1}{2}$ und eine einfache Nullstelle bei $s = -2$.

[a] Quadratische Matrizen haben immer einen Minor höchster Ordnung.

[1] Die Textdefinition ist eher schwer verständlich. Es empfiehlt sich das Verfahren mittels Beispielen zu verstehen.