

## 1 Frequenzbedingungen des geschlossenen Regelkreises

### Frequenzeigenschaften von Störungen und Rauschen

Die Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises  $S(s)$  und  $T(s)$  sind intrinsisch gekoppelt:

$$T(s) + S(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} + \frac{1}{1 + L(s)} = 1, \forall s \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Gl. (1) setzt voraus, dass bei gegebener Frequenz  $\omega$  nur entweder  $|T(j\omega)|$  oder  $|S(j\omega)|$  viel kleiner als 1 sein kann.

Die Einflüsse des Rauschens ( $N$  für Noise) und der Störung ( $D$  für Disturbance) auf den Ausgang sind wie folgt:

$$Y(s) = Y_D(s) + Y_N(s) = S(s) \cdot D(s) + T(s) \cdot N(s) \quad (2)$$

Störungen werden also mit  $S(s)$  auf den Ausgang übertragen und Rauschen mit  $T(s)$ .

Die generelle Aufgabe eines Reglers ist die gleichzeitige Unterdrückung von Rauschen und Störungen. Dies ist laut Gl. (1) nur möglich, wenn die Signale in unterschiedlichen Frequenzbändern auftreten. Glücklicherweise tritt Rauschen normalerweise bei hohen Frequenzen ( $\omega > \omega_n$ ) auf und Störungen normalerweise bei tiefen Frequenzen ( $\omega < \omega_d$ ). Daraus ergibt sich, dass  $S(j\omega)$  für tiefe Frequenzen klein, und  $T(j\omega)$  für hohe Frequenzen klein sein muss.

### Niedrige Frequenzen $\omega < \omega_d$

$$|S(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right| \ll 1 \Rightarrow |L(j\omega)| \gg 1 \quad (3)$$

### Hohe Frequenzen $\omega > \omega_n$

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| \ll 1 \Rightarrow |L(j\omega)| \ll 1 \quad (4)$$

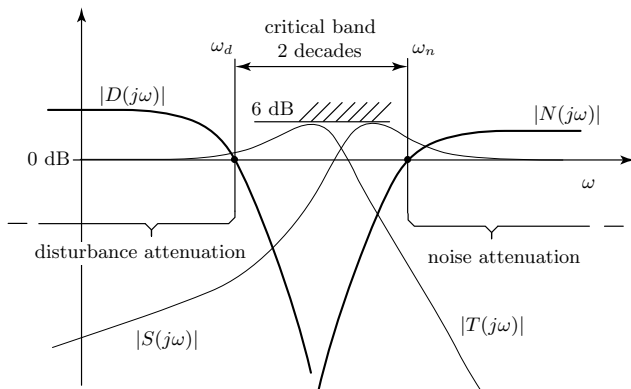


Abb. 1: Störung und Rauschen in unterschiedlichen Frequenzbändern.  $S(s)$  und  $T(s)$ , die Gl. (3) und Gl. (4) erfüllen.

### Beschränkungen der Sensitivität

Der Frequenzgang der Sensitivität  $S(j\omega)$  kann durch Einstellen des Reglers  $C(j\omega)$  lokal beeinflusst werden.

Global betrachtet, über alle  $\omega$ , muss die Sensitivität für alle stabilen geschlossenen Regelkreise (d.h. Stabilität durch das Nyquist Theorem bestimmt) folgende Gleichung erfüllen:

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \cdot \sum_{i=1}^{n_+} \pi_i^+, \quad (5)$$

wobei  $n_+$  die Anzahl der instabilen Pole  $\pi^+$  der Kreisverstärkung  $L(s)$  ist. Falls die Kreisverstärkung  $L(s)$  keine instabile Pole hat ( $n_+ = 0$ ) vereinfacht sich Gl. (5) zu:

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = 0 \quad (6)$$

Gleichungen Gl. (5) und Gl. (6) implizieren, dass eine Verringerung von  $|S(j\omega)|$  in einem Frequenzband durch eine Erhöhung in einem anderen Frequenzband kompensiert wird.

## 2 Beschränkungen der Durchtrittsfrequenz

### Definitionen Durchtrittsfrequenz und Bandbreite

Bei der **Durchtrittsfrequenz**  $\omega_c$ , schneidet das Bode Diagramm von  $L(j\omega)$  die 0 dB-Linie:  $|L(j\omega_c)| = 0 \text{ dB} = 1$ .

Zusätzlich definiert man die **Bandbreite des geschlossenen Regelkreises**  $\omega_b$ :  $|T(j\omega_b)| = -3 \text{ dB} \approx 0.7$ . Die Bandbreite ist ein Mass für die höchste Frequenz des Eingangssignals, die der geschlossene Regelkreis verfolgen kann.

Die Bandbreite entspricht ungefähr der Durchtrittsfrequenz.

$$\omega_b \approx \omega_c$$

### Beschränkungen der Durchtrittsfrequenz

Im Folgenden werden verschiedene Grössen eingeführt, welche die Durchtrittsfrequenz und somit die Bandbreite (oder umgekehrt) des geschlossenen Regelkreises limitieren. Die quantitativen Werte der Beschränkungen basieren auf Erfahrungswerten und sind sinnvolle Faustregeln.

### Beschränkungen durch Modellunsicherheiten $W_2$

Aus dem robusten Stabilitätskriterium folgt:

$$\begin{aligned} |L(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| &< |1 + L(j\omega)|, \forall \omega \in [0, \infty) \\ \Rightarrow \left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| &< \left| \frac{1}{W_2(j\omega)} \right| \\ \Rightarrow |T(j\omega)| &< |W_2^{-1}(j\omega)| \end{aligned} \quad (7)$$

Da die Unsicherheit  $|W_2(j\omega)|$  tendenziell mit der Frequenz zunimmt (und  $W_2^{-1}(j\omega)$  somit mit der Frequenz abnimmt), ist Gl. (7) eine obere Beschränkung der Bandbreite, und somit eine Beschränkung der Durchtrittsfrequenz von  $|L(j\omega)|$ .

Man will die Unsicherheit auf jeden Fall vermeiden. Deswegen setzt man als obere Schranke für die Durchtrittsfrequenz eine Dekade kleiner als die Unsicherheitsdurchtrittsfrequenz.

$$\omega_c \stackrel{!}{<} \frac{1}{10} \cdot \omega_2 \quad |W_2(j\omega_2)| = 1$$

## Beschränkung durch eine Totzeit $\tau$

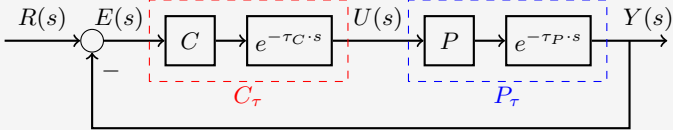


Abb. 2: Regelstruktur mit Totzeiten  $\tau_C$  und  $\tau_P$

### Totzeit im Regler:

Durch die Verarbeitung des Signals im Regler vergeht Zeit. Die vergangene Zeit wird als Totzeit  $\tau_C$  modelliert:

$$C_\tau(s) = C(s) \cdot e^{-\tau_C \cdot s}$$

### Totzeit in der Regelstrecke

Die Totzeit  $\tau_P$  der Regelstrecke ist identisch definiert wie die Totzeit des Reglers:

$$P_\tau(s) = P(s) \cdot e^{-\tau_P \cdot s}$$

Ein Beispiel einer Totzeit in der Regelstrecke ist die Kommunikation zu einem Satellit. Es vergeht Zeit  $\tau_P$  zwischen dem Senden der Eingangsgrösse  $u(t^*)$  zur Zeit  $t^*$  und der Reaktion des Satelliten  $y(t^* - \tau_P)$ .

Die Übertragungsfunktion der Kreisverstärkung mit Verzögerung im Regler und der Regelstrecke ist gegeben durch:

$$L_\tau(s) = C(s) \cdot P(s) \cdot e^{-(\tau_C + \tau_P) \cdot s} = C(s) \cdot P(s) \cdot e^{-\tau \cdot s}$$

Die Totzeit induziert eine obere Grenze für die Durchtrittsfrequenz. Um die Totzeitsfrequenz gut zu vermeiden wird als Grenze die halbe Totzeitsfrequenz gewählt.

$$\rightarrow \omega_c \stackrel{!}{<} \frac{1}{2} \cdot \omega_\tau = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tau}$$

Der Faktor von  $\frac{1}{2}$  ist ein Erfahrungswert. Falls möglich sollte man einen konservativen Vorfaktor von  $\frac{1}{5}$  wählen.

## Beschränkungen durch nicht-minimalphasige (NMP) Nullstellen $\omega_{\zeta+}$

Gegeben sei eine Regelstrecke  $P(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$  mit mindestens einer nicht-minimalphasigen Nullstelle. Um die Wirkung der Nullstellen zu veranschaulichen, wählt man einen konstanten Regler  $C(s) = k_p$ ,  $k_p \in \mathbb{R}$ .

$$S(s) = \frac{d(s)}{d(s) + k_p \cdot n(s)}, \quad T(s) = \frac{k_p \cdot n(s)}{d(s) + k_p \cdot n(s)}$$

Wenn  $k_p \rightarrow \infty$  strebt, nähern sich die Pole von  $S(s)$  und  $T(s)$ , gegeben durch  $d(s) + k_p \cdot n(s) = 0$ , an die Lösung von  $n(s) = 0$ . Da  $n(s)$  mindestens eine nicht-minimalphasige Nullstelle hat, wird das System bei  $k_p = k_{p,\text{crit}}$  instabil. Dies impliziert, dass die Bandbreite durch einen Regler  $k_p$  nicht beliebig hoch gewählt werden kann. Daraus folgt:

$$\omega_c \stackrel{!}{<} \frac{1}{2} \cdot \omega_{\zeta+} \quad (\text{konservativer mit } \frac{1}{5} \text{ als Faktor}) \quad (8)$$

wobei  $\omega_{\zeta+}$  der "langsamsten" nicht-minimalphasigen Nullstelle entspricht (kleinster positiver Realteil).

## Beschränkungen durch instabile Pole $\pi^+$

### I: Instabile Pole $\pi^+$ ohne Modellierungsunsicherheit

Die Wirkung von instabilen Polen wird anhand eines einfachen Beispiels gezeigt. Gegeben sei eine Regelstrecke  $P(s) = \frac{1}{s - \pi^+}$ ,  $\pi^+ \in \mathbb{R}_+$  welche mit einem konstanten Regler  $C(s) = k_p$ ,  $k_p \in \mathbb{R}$  stabilisiert werden soll.

Aus  $n_c = \frac{n_0}{2} + n_+$  mit  $n_0 = 0$  und  $n_+ = 1$  folgt das eine Umkreisung von  $(-1 + j0)$  in  $\odot$  notwendig ist um das System zu stabilisieren. Dies kann durch einen Regler  $k_p > |\pi^+|$  erreicht werden.

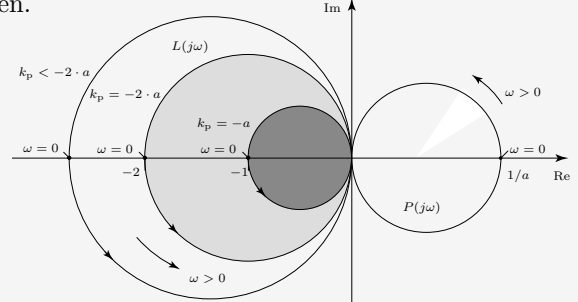


Abb. 3: Nyquistdiagramm der Regelstrecke  $P(j\omega)$  und Kreisverstärkung  $L(j\omega)$

Daraus folgt eine untere Schranke für die Durchtrittsfrequenz:

$$\omega_c > 2 \cdot \omega_{\pi+} \quad (\text{konservativer mit 5 als Faktor}) \quad (9)$$

wobei  $\omega_{\pi+}$  der "schnellste" instabile Pol von  $L(s)$  ist (Pol mit dem grössten positiven Realteil).

### II: Instabile Pole $\pi^+$ mit Modellierungsunsicherheit

Zusätzlich zu Gl. (9) müssen wir folgende Bedingung für alle instabilen Pole  $\pi_i^+$  prüfen:

$$|W_2(\pi_i^+)| < 1 \quad \forall i \quad (10)$$

## 3 Zusammenfassung der Beschränkungen

Alle oben beschriebenen Einschränkungen können als eine Reihe von Bedingungen an die Durchtrittsfrequenz zusammengefasst werden. Da es mehrere untere Schranken und obere Schranken für die Durchtrittsfrequenz gibt, muss man das engstmögliche Frequenzband nehmen, sodass alle Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

$$\max \left\{ 10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \omega_{\pi+} \right\} < \omega_c < \min \left\{ \frac{1}{10} \cdot \omega_n, \frac{1}{10} \cdot \omega_2, \frac{1}{2} \cdot \omega_\tau, \frac{1}{2} \cdot \omega_{\zeta+} \right\}$$

$\uparrow$  konservativer mit 5                       $\uparrow$  konservativer mit  $\frac{1}{5}$

### Wichtig:

1. Es handelt sich bei den besprochenen Beschränkungen nicht um Design-Spezifikationen an den Regler, sondern um eine Überprüfung, ob das Regelproblem überhaupt sinnvoll gelöst werden kann. Wenn es kein gültiges Frequenzband für  $\omega_c$  gibt, existiert kein Regler, der das Problem sinnvoll löst.
2. Falls  $D(j\omega)$  oder  $N(j\omega)$  mit 20 dB/dek abfallen oder ansteigen, garantiert der Sicherheitsfaktor 10 eine Verstärkung der Signale nicht grösser als 10% ( $\leftrightarrow$  Unterdrückung um 90%).
3. Bei instabilen Polen oder NMP Nullstellen geht es nicht um die Unterdrückung von Signalen, sondern um die Garantie von Stabilität. Diese wird nominell auch mit einem kleineren Sicherheitsabstand von Faktor von 2 oder 5 erreicht.