Regelungstechnik II FS 2020

Zusammenfassung Vorlesung 8

LQR State Feedback Regelung

Skript Kapitel 4

Autoren: C. Küttel, **Dozent:** L. Guzzella, **Vorlesungsnummer:** 151-0591-00

Bei Fragen: hraffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 28. April 2020

1 Infinite Horizon LQR Formulierung

Im Vergleich zu SISO-Reglern ist das Auslegen von MIMO-Reglern komplexer. Ein Ansatz, der einen intuitiven trade-off zwischen Regelfehler und Regleraufwand erlaubt, ist die *linear quadratic regulator* (LQR) Formulierung. Die Komponenten *linear*, *quadratic* und *regulator* werden nun separat betrachtet und schlussendlich zusammengefasst.

Linear: Das System welches geregelt wird ist *linear*:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m$$

Quadratic: Definition einer *quadratischen* Kostenfunktion:

$$J(u(t)) = \int_0^\infty \Big(x(u(t))^\top \cdot Q \cdot x(u(t)) + u(t)^\top \cdot R \cdot u(t) \Big)\, \mathrm{d}t \quad (1)$$

Der optimale Eingang $u^*(t)$ minimiert die Kostenfunktion J:

$$u^*(t) = \arg\min J(u(t))$$

Die Zustände $x(t)$ und Eingänge $u(t)$ werden im Optimierungsproblem mit Q und R gewichtet, wobei

$$Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n\times n},\ Q \succcurlyeq 0, \quad \text{und} \quad R = R^\top \in \mathbb{R}^{m\times m},\ R \succ 0$$

Das Symbol $\succcurlyeq$ heisst positiv semidefinit und $\succ$ positiv definit. Die Definitheit der Matrizen Q und R ist notwendig damit das Argument des Integrals in Gl. (1) quadratisch konvex ist. Somit ist das Minimum von $J(u)$ einzigartig, falls es existiert.

Regulator: Der Regler löst das *regulator* Problem:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

Das heisst der Regler bringt den Zustandsvektor in unendlicher Zeit in seinen Ursprung.

Zusammenfassend: LQR-Formulierung

$$\min J(u),$$

unter der Berücksichtigung der Dynamik:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t),$$

wobei Q und R einstellbare Grössen sind.
Beispielhaft werden zwei Fälle betrachtet:

$\boxed{Q \uparrow \mathrel{\hat{=}} R \downarrow}$[1] Je grösser Q relativ zu R, desto teurer ist es wenn $x(t)$ nicht im Ursprung ist. Das heisst das System wird schnell an den Ursprung geregelt, um die Kosten tiefstmöglich zu halten. Dabei wird $u(t)$ jedoch betragsmässig gross sein.

$\boxed{Q \downarrow \mathrel{\hat{=}} R \uparrow}$ Je grösser R relativ zu Q, desto teurer ist es viel Energie mit den Ausgangsgrössen auszugeben. Das heisst das System wird langsam (mit betragsmässig kleinem Regelsignal $u(t)$) in den Ursprung geregelt.

[1] Eine Erhöhung der Eigenwerte von Q hat den gleichen Effekt wie eine Reduzierung derer von R. Die relative Grösse ist von Relevanz.

2 Lösung der LQR-Formulierung

Die Lösung der LQR-Formulierung ist eine lineare Zustandsrückführung und lautet

$$u^*(t) = -K \cdot x(t),\ \text{wobei } K = R^{-1} \cdot B^\top \cdot \Phi. \quad (2)$$

Dabei ist Φ die einzige positiv definite Lösung der algebraischen Riccati Gleichung:

$$\Phi \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^\top \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^\top \cdot \Phi - Q = 0 \quad (3)$$

Wählt man

$$Q = \bar{C}^\top \cdot \bar{C},\ \bar{C} \in \mathbb{R}^{p\times n},\ \text{wobei } p = \operatorname{rank}(Q),$$

dann existiert die positiv definite Matrix Φ garantiert, falls $\{A, B\}$ steuerbar und $\{A, \bar{C}\}$ beobachbar sind. Diese Bedingungen sind hinreichend, aber nicht notwendig.

Bemerkungen:

- Die Matrix $\bar{C}$ hat generell nichts mit der Matrix C zu tun. Falls jedoch ein Systemausgang $y = C \cdot x$ definiert wird, und $\bar{C} = C$ gewählt wird, wird die euklidische Norm des Systemausganges $||y(t)||_2$ in der Kostenfunktion berücksichtigt, da:
$$x^\top \cdot Q \cdot x = x^\top \cdot \bar{C}^\top \cdot \bar{C} \cdot x = x^\top \cdot C^\top \cdot C \cdot x = y^\top \cdot y = ||y||_2.$$
- Die Matrix K ist statisch, sie muss für gegebene $\{A, B, Q, R\}$ nur einmal berechnet werden.
- Der Begriff *infinite horizon* bezieht sich auf die Integrationsschranken in Gl. (1), die von *null* bis *unendlich* gehen.
- Die Dynamik des nach Gl. (2) geregelten Systems lautet $\dot{x} = (A - BK)x$. Die Matrix $A - BK$ ist garantiert Hurwitz (Realteil aller Eigenwerte kleiner null), d.h. der geschlossene Regelkreis ist asymptotisch stabil.
- Der open loop gain lautet $L_{\mathrm{LQR}}(s) = K \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B$ (siehe Abb. 1). Der open loop gain betrachtet den offenen Pfad vom roten zum blauen Punkt, wobei beim blauen Punkt aufgeschnitten wird.
- Normalerweise steht nicht der ganze Zustand $x(t)$ als Messung zur Verfügung. In Kapitel 5 wird der LQR Ansatz basierend auf einer Schätzung $\hat{x}(t)$ eingeführt.
- Der Regler (Gl. (2)) führt die Zustände linear zurück, man spricht von einer linearen Zustandsrückführung oder einem "linear state feedback controller".

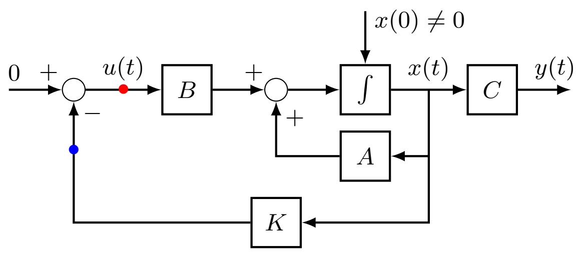
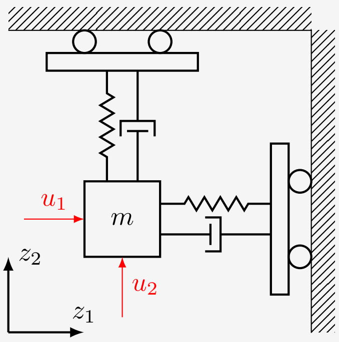


Abb. 1: Standard LQR-Struktur

Beispiel 1: Ein Klotz mit Masse $m = 1$ sei in z_1- und in z_2-Richtung mit einem Dämpfer und mit einer Feder verbunden. (Der Einfachheit halber lassen wir im Folgenden die Einheiten weg und betrachten normierte Grössen.) Die Federn seien bei $\bar{z}_1 = 1$ und $\bar{z}_2 = 1$ im Gleichgewicht. Die Federkonstante sei $k = 0.5$ und die Dämpferkonstante sei $c = 0.05$.



Mit der Definition der Zustände

$$x_1 = z_1 - \bar{z}_1$$
$$x_2 = z_2 - \bar{z}_2$$
$$x_3 = \dot{z}_1$$
$$x_4 = \dot{z}_2,$$

folgen die Zustandsgleichungen des Systems:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0 & -0.05 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.05 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Um das System mit der LQR-Formulierung an den Ursprung zu regeln, müssen die Matrizen Q und R noch eingestellt werden. Eine erste, willkürliche Wahl ist $Q = I_{4\times4}$ und $R = I_{2\times2}$. Die Matrizen A, B, Q, und R werden nun in Gl. (3) eingesetzt, und das Gleichungssystem wird nach Φ aufgelöst. Anschliessend wird K mit Gl. (2) berechnet. Eine Simulation des Systems, startend in $x_0 = [1,\ 1,\ 0,\ 5]$ liefert:

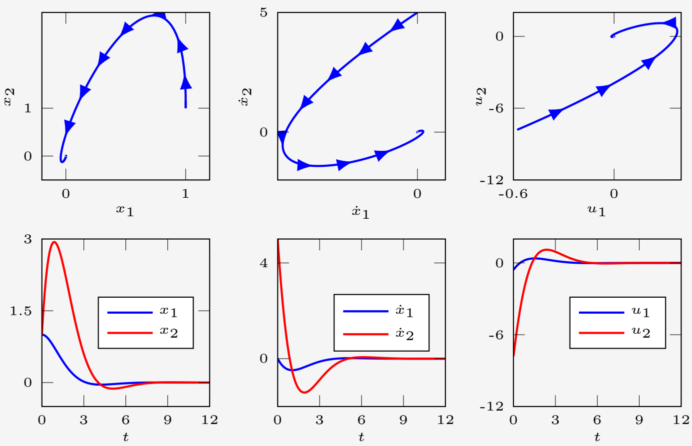


Abb. 2: Systemantwort für $Q = I_{4\times4}$ und $R = I_{2\times2}$.

Das System soll nun in x_2-Richtung etwas schneller an den Ursprung geregelt werden. Dafür kann man z.B. den Eintrag $Q(2,2)$ auf 3 erhöhen, sodass:

$$Q_{\text{neu}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dadurch, dass $Q(2,2)$ erhöht wird, macht man nicht-null Werte des zweiten Zustands x_2 teurer. Das Minimum der Kostenfunktion wird demnach in eine Richtung verschoben, die x_2 kleiner hält. K_{neu} wird berechnet und das System wird simuliert, startend in x_0:

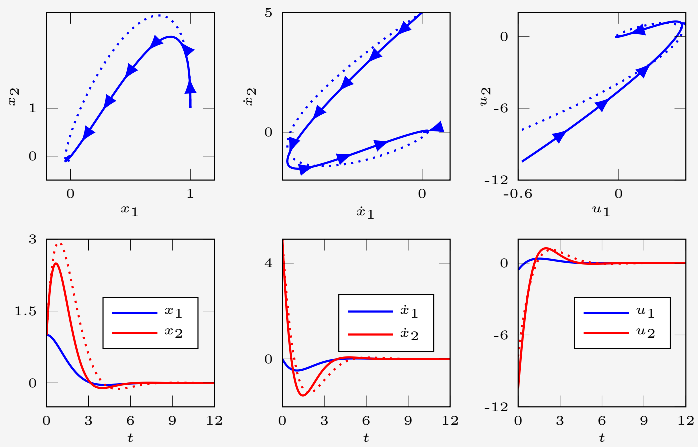


Abb. 3: Systemantwort für Q_{neu} und $R = I_{2\times2}$.

Im neuen $x_1 - x_2$ Graph sieht man, dass x_2 merklich weniger ausschlägt, wie erwartet. Um x_2 tief zu halten, wird u_2 (siehe $u_1 - u_2$ Graph) jedoch grösser.

Bemerkungen:

- Die Richtungen x_1 und x_2 sind entkoppelt. Somit wären zwei SISO-Regler auch genügend.
- Der Workflow lautet: System aufstellen $\rightarrow$ A und B extrahieren $\rightarrow$ Q und R wählen $\rightarrow$ Φ mit Gl. (3) berechnen $\rightarrow$ K mit Gl. (2) berechnen $\rightarrow$ x_0 wählen und simulieren.

3 Folgeregelung - Infinite Horizon LQR

Die LQR-Formulierung löst nur das Regulator Problem und erscheint zunächst etwas einschränkend. Man kann jedoch die Linearität des System ausnützen um einen gewünschten Zustand x_∞ anzusteuern. **Zur Erinnerung:** Ein lineares System beschreibt die Dynamik der Differenzen. Wir können den Ursprung des Systems demnach in einen neuen Punkt verschieben, mit den Definitionen $\Delta x = x - x_\infty$, und $\Delta u = u - u_\infty$. Die Dynamik des Systems in den neuen Variablen lautet:

$$\Delta\dot{x} = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta u,$$

wobei die Kostenfunktion nun lautet:

$$J(\Delta u) = \int_0^\infty \Big(\Delta x^\top(t) \cdot Q \cdot \Delta x(t) + \Delta u^\top(t) \cdot R \cdot \Delta u(t)\Big)\mathrm{d}t$$

Das neue Regulator Problem lautet somit:

$$\lim_{t\to\infty} \Delta x(t) = 0.$$

Die A und B Matrizen bleiben in dem Fall vom originalen System unverändert. Man kann sich auch vorstellen, dass man das lineare System um einen neuen Punkt $\{x_\infty, u_\infty\}$ linearisiert. Dies entspricht bei einem linearen System einer Ursprungsverschiebung. Die Lösung des Regulatorproblems der Dynamik der Differenzen lautet nun:

$$\Delta u = u - u_\infty = -K \cdot \Delta x = -K \cdot (x - x_\infty).$$

Der Eingang auf das originale System $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ lautet somit:

$$u = u_\infty - K \cdot (x - x_\infty),$$

wobei u_∞ ein statisches feedforward Signal ist, welches das System am gewünschten Punkt x_∞ hält. Im Gleichgewicht sind alle Ableitungen null:

$$0 = A \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty.$$

Bemerkungen

- Die Stellgrösse u_∞ ist statisch für eine statische Referenz x_∞.
- Die Folgeregelung mit feedforward kann keine Störungen unterdrücken.
- Die Matrizen A und B beinhalten physikalische Werte, wie z.B. Massen, Federkonstanten und Dämpferkonstanten, die nie exakt geschätzt werden können. Dadurch wird das feedforward Signal u_∞ in der Realität nie genau richtig sein.

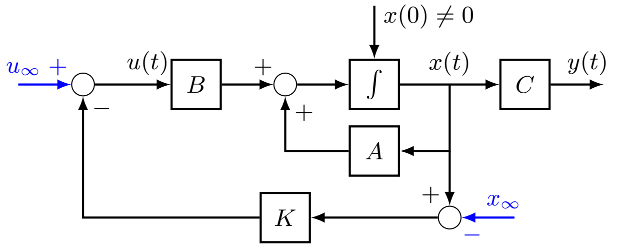


Abb. 4: LQR mit feedforward Signal u_∞. In blau die Erweiterungen gegenüber der Standardstruktur.

Beispiel 2: Das System aus dem vorherigen Beispiel soll nun zur Position $x_{1,\infty} = 2$ und $x_{2,\infty} = 2$ geregelt werden. Falls das System im Punkt $\{x_{1,\infty}, x_{2,\infty}\}$ im Gleichgewicht ist, werden die Geschwindigkeiten null sein, d.h. $x_{3,\infty} = x_{4,\infty} = 0$. Der gewünschte Zustand lautet somit $x_\infty = [2, 2, 0, 0]^\top$.

Zuerst wird das statische feedforward Signal berechnet. Intuitiv werden die Federn im Zustand $x = x_\infty$ komprimiert sein. Im Gleichgewicht wird $\{u_\infty\}$ demnach genau die Kraft der komprimierten Federn ausgleichen. Das System soll nun bei $x = x_\infty$ mit $u = u_\infty$ im Gleichgewicht sein:

$$A \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty \overset{!}{=} 0$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0 & -0.05 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,\infty} \\ u_{2,\infty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Auflösen nach u_∞ ergibt $u_{1,\infty} = u_{2,\infty} = 1$. Intuitiv: Die komprimierten Federn drücken im Gleichgewicht genau mit einer Kraft von $F_{(\cdot)} = k \cdot r_{(\cdot)} = 0.5 \cdot 2 = 1 = u_{(\cdot),\infty}$.

Das System wird simuliert, startend im Punkt $x_0 = [1, 1, 0, 5]^\top$, mit $Q = I_{4\times4}$, $R = I_{2\times2}$, $x_\infty = [2, 2, 0, 0]^\top$, $u = u_\infty - K \cdot (x - x_\infty)$:

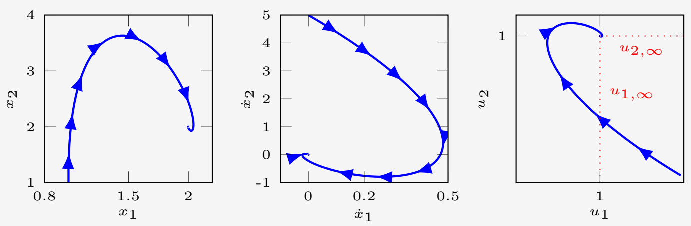


Abb. 5: Systemantwort für das Referenzproblem.

Wie erwartet regelt das System auf den Punkt $[2, 2, 0, 0]^\top$.

4 Störungsunterdrückung - LQRI

Das Standard LQR-Problem eignet sich besonders gut für Systeme ohne Modellfehler und ohne Störung $w(t)$ auf dem Eingangssignal. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man Störungen und Modellfehler unterdrücken kann. Dafür wird integratives Verhalten eingeführt. Um die Struktur aus Abb. 1 mit einem integrativen Vehalten zu erweitern wird die Ausgangsgrösse $y(t) = C \cdot x(t)$ eingeführt. Man wünscht $y(t) \overset{!}{=} 0$. Um Störungen zu unterdrücken wird das Integral des Fehlers als neuer Zustand definiert:

$$v(t) = \int_0^t e(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t (0 - y(\tau))\ \mathrm{d}\tau.$$

Der neue Gesamtzustand lautet somit:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Die Ableitung des Zustandes lautet (siehe Abb. 6):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{x}(t) &= \begin{bmatrix} A \cdot x(t) + B \cdot (u(t) + w(t)) \\ -y(t) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \cdot (u(t) + w(t)). \end{aligned}$$

In anderen Worten erfüllt das neue System $\dot{v} = y(t) = 0$ im Gleichgewicht.

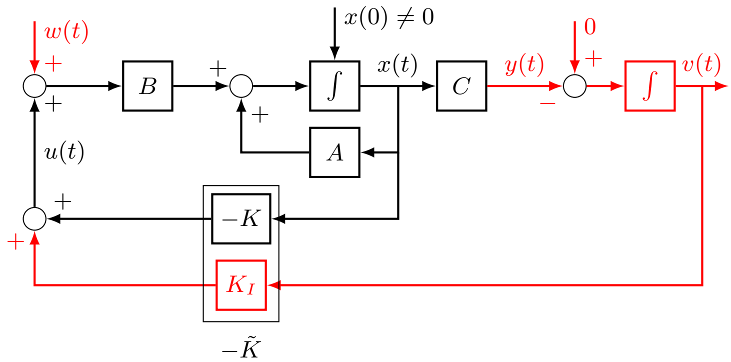


Abb. 6: LQRI-Struktur. Erweiterungen gegenüber der Standardstruktur in rot.

Die Standard LQR-Formulierung kann nun mit den Matrizen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ gelöst werden, wobei die Dimension der Q Matrix angepasst werden muss:

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_I \end{bmatrix}, \quad Q_I = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_m \end{bmatrix}$$

Mit Q_I kann man einstellen wie stark die Integratoren wirken sollen. Die Lösung des LQRI-Problems lautet:

$$\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\} \ \rightarrow\ \tilde{K} = [K,\ -K_I] \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)},$$
$$u(t) = -\tilde{K} \cdot \tilde{x}(t) = u_K + u_{K_I} = -K \cdot x(t) + K_I \cdot v(t).$$

Bemerkungen:

- Die Matrix $\tilde{K}$ ist statisch, sie muss für gegebene $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\}$ nur einmal berechnet werden.
- Mit $Q = C^\top \cdot C$ kann wiederum direkt $y(t)$ in der Kostenfunktion berücksichtigt werden.

Beispiel 3: Das Masse-Feder-Dämpfer System soll mit einem Standard LQR-Regler in den Ursprung geregelt werden. Dabei wirke nun eine statische Störung $w = [0.5, 0.5]^\top$. Mit $\tilde{Q} = I_{4\times4}$, $R = I_{2\times2}$, startend in $x_0 = [1, 1, 0, 5]^\top$:

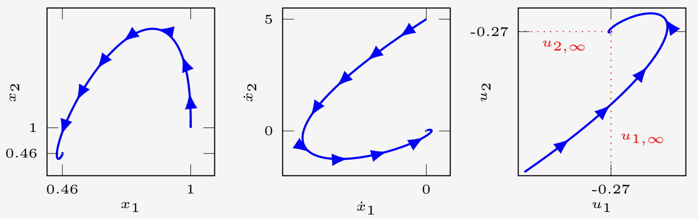


Abb. 7: Systemantwort für $Q = I_{4\times4}$, $R = I_{2\times2}$ und $w = [0.5, 0.5]^\top$

Das System kommt bei einem Zustand $x_\infty \neq 0$ zum Stillstand. Die liegt daran, dass die *erwartete* Systemgleichung im Gleichgewicht lautet:

$$0 = A \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty \quad \text{(erwartet)}$$

Jedoch ist die *wahre* Gleichgewichtsgleichung

$$0 = A \cdot x_\infty + B \cdot (u_\infty + w). \quad \text{(wahr)}$$

Der Gleichgewichtspunkt lautet somit:

$$x_\infty = -(A - B \cdot K)^{-1} \cdot B \cdot w = [0.46, 0.46, 0, 0]^\top,$$
$$u_\infty = -K \cdot x_\infty = [-0.27, -0.27, 0, 0]^\top.$$

Da die ungewollte Störung das Erreichen des Ziels $x_\infty = 0$ verhindert, wird die LQRI-Formulierung verwendet. Mit

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \; \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\tilde{Q} = I_{6\times6}$, $R = I_{2\times2}$, $w = [0.5, 0.5]^\top$, startend im Zustand $\tilde{x}_0 = [1, 1, 0, 5, 0, 0]^\top$:

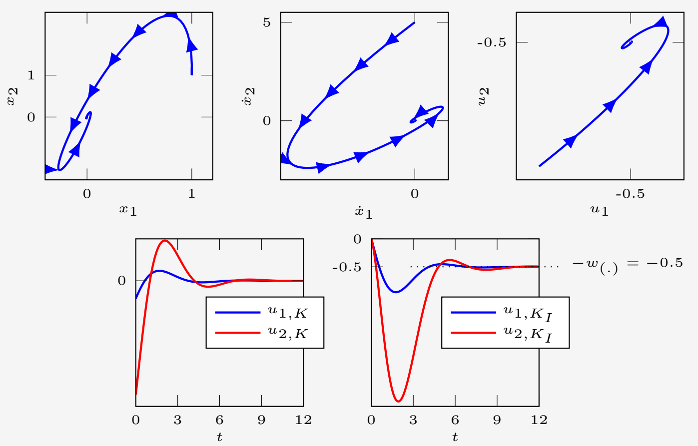


Abb. 8: Systemantwort für $\tilde{Q} = I_{6\times6}$, $R = I_{2\times2}$ und $w = [0.5, 0.5]^\top$.

Das System regelt an den gewünschten Ursprung, obwohl eine Störung w vorhanden ist. Das Ziel wird erreicht, da der integrative Teil des Eingangs genau die Störung kompensiert:

$$A \cdot x_\infty + B \cdot (u_\infty + w) = A \cdot x_\infty + B \cdot (u_{\infty,K} + \underbrace{u_{\infty,K_I} + w}_{0})$$

$$= A \cdot x_\infty + B \cdot u_{\infty,K} = A \cdot x_\infty - B \cdot K \cdot x_\infty$$

$$= (A - B \cdot K) \cdot x_\infty \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_\infty = 0$$

5 Folgeregelung mit Störungsunterdrückung

Wir können nun den LQRI Ansatz um die feedforward Signale u_∞ und x_∞ erweitern um auf eine Referenz mit Störungsunterdrückung zu regeln (siehe Abb. 9).

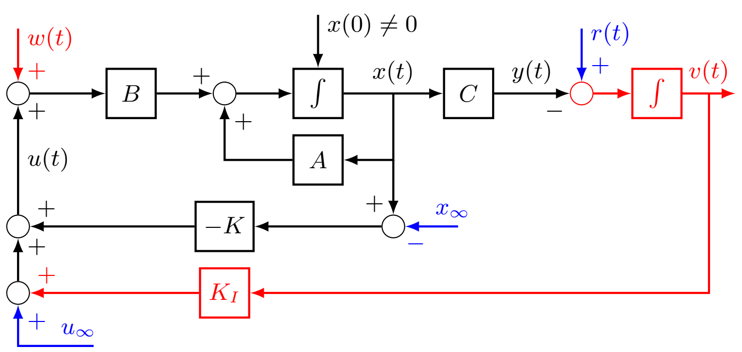


Abb. 9: LQRI-Struktur für Folgeregelung

Da nun auf eine Referenz geregelt wird, muss der Fehler im Zustand $v(t)$ neu definiert werden:

$$v(t) = \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau))\,\mathrm{d}\tau.$$

Die Ableitung des Zustands lautet nun:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A \cdot x(t) + B \cdot (u(t) + w(t)) \\ r(t) - y(t) \end{bmatrix}$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \cdot (u(t) + w(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \cdot r(t).$$

Die Lösung des Problems folgt:

$$\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, R\} \;\rightarrow\; \tilde{K} = [K, \; -K_I] \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)},$$
$$u(t) = u_\infty - K \cdot (x(t) - x_\infty) + K_I \cdot v(t).$$

Beispiel 4: Das Masse-Feder-Dämpfer System soll mit einem LQRI und feedforward an die Position $r = [2, 2]$ geregelt werden. Mit $\tilde{Q} = I_{6\times6}$, $R = I_{2\times2}$, $w = [0.25, 0.25]^\top$,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \; \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

startend in $\tilde{x}_0 = [1, 1, 0, 1, 0, 0]^\top$:

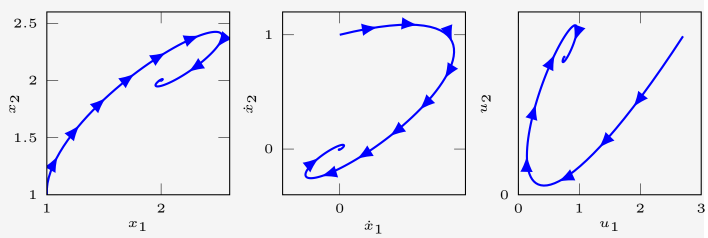


Abb. 10: Systemantwort für $\tilde{Q} = I_{6\times6}$, $R = I_{2\times2}$, $r = [2, 2]^\top$, $w = [0.25, 0.25]^\top$.

Bemerkungen:

- Q_I könnte besser eingestellt werden, sodass das System nicht so stark überschiesst.
- Betrachte Abb. 9. Die feedforward Grössen u_∞ und x_∞ sind nicht zwingend notwendig um das System auf die Referenz $r(t)$ zu regeln. Falls sie weggelassen werden,

kann das Signal $r(t)$ als eine auf $y(t)$ wirkende Störung interpretiert werden. Dadurch würde der Integrator die Signale $w(t)$ und $r(t)$ kompensieren. Ohne das feedforward Signal kann das System allerdings unnötige Transienten aufzeigen, da sich der Integrator für die Referenz $r(t)$ zuerst füllen müsste.

6 Eigenschaften von Infinite Horizon Reglern

Der resultierende geschlossene Regelkreis der infinite horizon LQR-Formulierung ist garantiert stabil und hat schöne Robustheitseigenschaften:

Stabilität:
Die Matrix $A - B \cdot K$ des geschlossenen Regelkreises ist garantiert Hurwitz (stabil).

Robustheit:
Für die Wahl $R = r \cdot I$ kann hat die die minimum return difference $\mu_{\min}$ folgende Eigenschaft:

$$\mu_{\min,\mathrm{LQR}} = \min_{\omega} \left(\min_{i} \sigma_i (I + L_{\mathrm{LQR}}(j\omega)) \right) \geq 1 \qquad (4)$$

Im SISO-Fall hat diese Eigenschaft eine schöne Interpretation: sie garantiert Gl. (4), dass der Nyquist-Plot nie in den um -1 zentrierten Kreis mit Radius 1 eintritt. Wie in Abb. 11 geometrisch ersichtlich, garantiert dies wiederum eine Verstärkungsreserve (gain margin) von $\gamma \in [0.5, \infty)$ und eine Phasenreserve (phase margin) von $\varphi \geq 60°$, was einer relativ guten Robustheit entspricht.

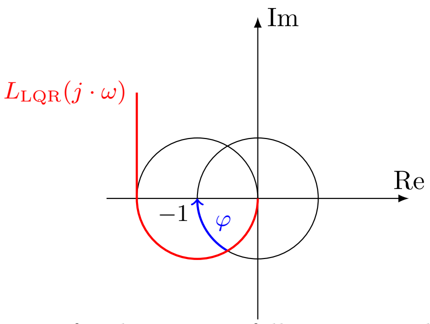


Abb. 11: L_{LQR} für den Extremfall $\gamma = 0.5$ und $\varphi = 60°$.

Modifiziert man die Riccati-Gleichung mit $\beta > 1$ wie folgt

$$\frac{1}{\beta} \cdot \Phi_\beta \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^\top \cdot \Phi_\beta - \Phi_\beta \cdot A - A^\top \cdot \Phi_\beta - Q = 0$$

so resultiert die Lösung Φ_β. Damit wird der Regelkreis noch robuster, da dann gilt:

$$\mu_{\min,\mathrm{LQR}} = \min_{\omega} \left(\min_{i} \sigma_i (\beta I + L_{\mathrm{LQR}}(j\omega)) \right) \geq \beta.$$

Das heisst der Nyquist-Plot tritt nie in dem um $-\beta$ zentrierten Kreis mit Radius β ein.

7 Finite Horizon LQR

Das Integral der Standardformulierung geht von null bis unendlich. Die Lösung des Standardproblems ist einiges einfacher als wenn das Problem nur über ein Zeitintervall t_a bis t_b integriert wird. In diesem Fall lautet die Kostenfunktion:

$$J(u) = x^\top(t_b) \cdot P \cdot x(t_b) + \int_{t_a}^{t_b} \left(x^\top \cdot Q(t) \cdot x + u^\top \cdot R(t) \cdot u \right) \mathrm{d}t.$$

Mit der Kostenmatrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n},\ P = P^\top \succcurlyeq 0$ (positiv semidefinit) wird eine Abweichung des finalen Zustands $x(t_b)$ vom Urpsrung bestraft. Das System kann in diesem Fall zeitvariant sein:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t),\ x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ x(t_a) = x_a. \quad (5)$$

Die Lösung der finite horizon Formulierung lautet:

$$u(t) = -K(t) \cdot x(t),\ \text{wobei}\ K(t) = R^{-1}(t) \cdot B^\top(t) \cdot \Phi(t).$$

Die Matrix $\Phi(t)$ ist die Lösung der differential matrix Riccati Gleichung:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(t) = \Phi(t) \cdot B(t) \cdot R^{-1}(t) \cdot B^\top(t) \cdot \Phi(t) - \Phi(t) \cdot A(t) - A^\top(t) \cdot \Phi(t) - Q(t),$$

wobei $\Phi(t)$ durch Rüchwärtsintegration von $\Phi(t_b) = P$ gefunden werden kann.

Bemerkungen:

- Die Matrix $K(t)$ ist zeitabhängig. Sie muss entsprechend der Zeitabhängigkeit der Matrizen $\{A(t), B(t), Q(t), R(t)\}$ berechnet werden.
- Die Matrix P ist eine neue Tuninggrösse.
- Die Matrix $K(t)$ ist nur für das Zeitintervall $t \in [t_a, t_b]$ gültig. Für Zeiten $t > t_b$ muss $K(t)$ neu evaluiert werden.
- asymptotische Stabilität kann nicht garantiert werden, da für $t > t_b$ nicht optimiert wird.
- Es wird nicht erwartet, dass Sie die Gleichungen von Hand lösen können.

8 Finite Horizon Folgeregelung

Zusätzlich zur zeitvarianten Dynamik aus Gl. (5) wird nun der zeitvariante Ausgang eingeführt:

$$y(t) = C(t) \cdot x(t)$$

Die Kosten die über ein Zeitintervall $[t_a, t_b]$ integriert werden, lauten:

$$J(u) = (r(t_b) - y(t_b))^\top \cdot P \cdot (r(t_b) - y(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} \left((r(t) - y(t))^\top \cdot Q(t) \cdot (r(t) - y(t)) + u(t)^\top \cdot R(t) \cdot u(t) \right) \mathrm{d}t$$

Die Lösung der finite horizon Folgeregelung lautet:

$$u(t) = -K(t) \cdot x(t) + v(t)$$

Die Gleichungen um $K(t)$ und $v(t)$ zu finden sind kompliziert und werden im Theory Sheet ausgelassen. Die relevanten Punkte sind in den Bemerkungen zusammengefasst.

Bemerkungen:

- Die Referenztrajektorie $r(t)$ ist eine Wahl, die vor dem Lösen des Optimierungsproblems festgelegt wird.
- Die Matrix $K(t)$ ist zeitabhängig. Sie muss entsprechend der Zeitabhängigkeit der Matrizen $\{A(t), B(t), Q(t), R(t)\}$ berechnet werden.
- Die Matrix $K(t)$ ist nur für das Zeitintervall $t \in [t_a, t_b]$ gültig. Für Zeiten $t > t_b$ muss $K(t)$ neu evaluiert werden.
- $v(t)$ ist ein zeitabhängiges feedforward Signal, welches nur im Zeitintervall $t \in [t_a, t_b]$ für eine spezifische Referenz $r(t)$ gültig ist.