

Regelungstechnik II FS 2020

Kaskadierte Systeme, Wurzelortskurven, Numerische Verfahren

Zusammenfassung Vorlesung 3

Kapitel 13.2, 13.3, 11.7

Autoren: C. Küttel, Dozent: L. Guzzella, Vorlesungsnummer: 151-0591-00

Bei Fragen: hrffael@ethz.ch, pduhr@ethz.ch, 5. März 2020

1 Kaskadierte Regelsysteme

Kaskadierte Regelsysteme eignen sich für SIMO (single-input, multiple-output) Systeme mit einer schnellen und einer langsamen Teildynamik. Um die volle Bandbreite der schnellen Dynamik auszunutzen werden verschiedene Regler für das schnelle und für das langsame Teilsystem ausgelegt.

In Abb. 1 ist ersichtlich, dass das schnelle Teilsystem P_f den Eingang u_s für das langsame Teilsystem P_s liefert. Das schnelle System wird geregelt, indem y_f rückgeführt wird; y_f ist oftmals proportional zu u_s , dies ist aber nicht immer der Fall.

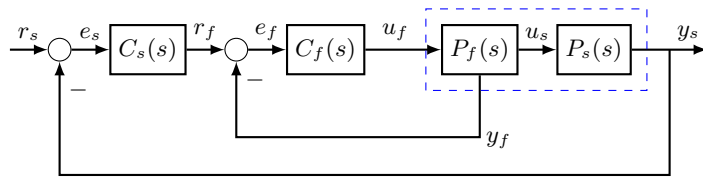


Abb. 1: Kaskadierte Regelstruktur. Der Index s ('slow') steht für langsame Teildynamiken, und f ('fast') für schnelle.

Um die Bandbreite des schnellen Teilsystems auszunutzen wird für $C_f(s)$ oftmals kein Integrator verwendet. Der langsame Regler $C_s(s)$ hingegen hat oftmals einen Integrator um einen statischen Nachlauffehler zu eliminieren.

Beispiel: Die folgende Differentialgleichung beschreibt das System in Abb. 2. Sowohl die Position y als auch die Geschwindigkeit \dot{y} können direkt gemessen werden.

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = u$$

Wir wählen $x = y$ und $v = \dot{y}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= v(t) \\ \frac{d}{dt}v(t) &= -x(t) - v(t) + u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

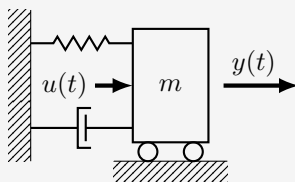


Abb. 2: Aktuiertes Feder-Dämpfer System.

Das Ziel ist, die Position zu regeln. Jedoch ist in Gl. (1) ersichtlich, dass $u(t)$ direkt auf die Geschwindigkeit wirkt und nur indirekt auf die Position. Folgende Teildynamiken können hergeleitet werden:

$$u \rightarrow v : \quad P_f(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1} \quad (2)$$

$$v \rightarrow x : \quad P_s(s) = \frac{1}{s} \quad (3)$$

$$u \rightarrow x : \quad P(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (4)$$

Zur Erinnerung:

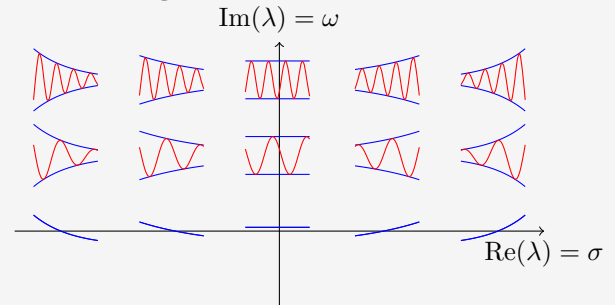


Abb. 3: Systemantwort als Funktion der Eigenwerte. Rot: Einfluss Imaginärteil, Blau: Einfluss Realteil

Pole mit grösserem negativen Realteil klingen schneller ab als Pole mit kleinerem negativem Realteil. Die Pole in Gl. (2) bis (4) sind:

$$\begin{aligned} u \rightarrow v \quad (P_f) : \quad & s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ v \rightarrow x \quad (P_s) : \quad & s = 0 \\ u \rightarrow x \quad (P) : \quad & s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Das System P_f ist definitiv schneller als das System P_s . Obwohl P die gleichen Pole wie P_f hat, wird P_f schneller sein, da das System P durch den zusätzlichen Pol bei $s = 0$ einen grösseren Phasenverlust hat.

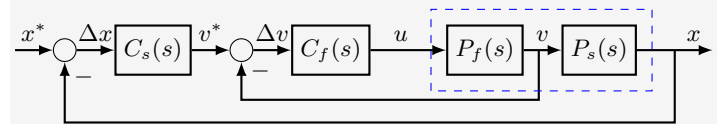


Abb. 4: Kaskadierte Regelstruktur für das Beispiel

Für den Regler C_f kann ein P-Regler verwendet werden. Für den Regler C_s kann ein PI-Regler verwendet werden. Ein detaillierter Vergleich zwischen kaskadiertem und nicht kaskadiertem Regelverhalten ist im Buch in *Example 13.2.1* auf Seiten 225ff zu finden.

2 Wurzelortskurven-Verfahren¹

Mit diesem Verfahren kann man die Pole des geschlossenen Regelkreises setzen wo man will. Es wird folgende Regelstruktur betrachtet:

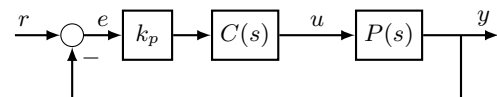


Abb. 5: Grundstruktur des Wurzelortskurven-Verfahren

Der Regler $C(s)$ heisst in diesem Kontext Kompensator. Die Verstärkung k_p wird vom Kompensator abgespalten und in der Regelstruktur separat geschrieben. Wenn man die Pole des geschlossenen Regelkreises für alle k_p zeichnet, erhält man die Wurzelortskurven.

Vorsicht! Wir gehen im Folgenden von stabilen, minimalphasigen $L(s)$ aus. Ausserdem muss gelten $k_p > 0$.

¹Englisch: *Root-Locus*

Regeln des Wurzelortskurven-Verfahrens

Der geschlossene Regelkreis hat die Übertragungsfunktion:

$$T(s) = \frac{k_p \cdot C(s) \cdot P(s)}{1 + k_p \cdot C(s) \cdot P(s)} = \frac{k_p \cdot L(s)}{1 + k_p \cdot L(s)}$$

Die Pole des geschlossenen Regelkreises sind demnach Lösungen folgender Gleichung:

$$1 + k_p \cdot L(s) = 0 \quad (5)$$

Die offene Verstärkung $L(s)$ ist eine reell-rationale Übertragungsfunktion:

$$L(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{(s - \zeta_1) \cdot (s - \zeta_2) \cdot \dots \cdot (s - \zeta_m)}{(s - \pi_1) \cdot (s - \pi_2) \cdot \dots \cdot (s - \pi_n)} \quad (6)$$

Daraus folgt:

$$1 + k_p \cdot \frac{b(s)}{a(s)} = 0 \Rightarrow a(s) + k_p \cdot b(s) = p(s, k_p)$$

Die Schar der Nullstellen von $p(s, k_p)$ repräsentieren die Wurzelortskurven. Das Polynom $p(s, k_p)$ hat Ordnung n . Das Polynom kann für Extremfälle von k_p betrachtet werden:

$k_p \rightarrow 0, p(s, k_p) \approx a(s)$ Für sehr kleine k_p approximieren die n Nullstellen von $p(s, k_p)$ die n Nullstellen von $a(s)$. Das heisst, die Pole von $T(s)$ nähern sich den Polen von $L(s)$.

$k_p \rightarrow \infty, p(s, k_p) \approx k_p \cdot b(s)$ Für sehr grosse k_p konvergieren m Nullstellen von $p(s, k_p)$ zu den m endlichen Nullstellen von $b(s)$. Das heisst, die Pole von $T(s)$ nähern sich den Nullstellen von $L(s)$. Jedoch hat $p(s, k_p)$ Ordnung n . Das heisst es bleiben $n - m$ Nullstellen von $p(s, k_p)$ übrig. Was mit den restlichen Nullstellen passiert, kann wie folgt interpretiert werden:

$$L(s) = \frac{\underbrace{(s - \zeta_1)(s - \zeta_2) \dots (s - \zeta_m)}_m \underbrace{(-s/\infty + 1) \dots (-s/\infty + 1)}_{n-m}}{\underbrace{(s - \pi_1)(s - \pi_2) \dots (s - \pi_m)}_m \underbrace{(s - \pi_{m+1}) \dots (s - \pi_n)}_{n-m}}$$

Zur Erinnerung: Nullstellen, die im Unendlichen platziert sind haben keinen Einfluss auf die Systemdynamik. Das heisst wir können $L(s)$ mit $n - m$ Nullstellen erweitern ohne das Systemverhalten zu ändern.

Die Hauptidee ist nun, dass sich die $n - m$ übriggebliebenen Pole von $L(s)$ den $n - m$ im Unendlichen platzierten Nullstellen asymptotisch nähern. Insbesondere starten alle Asymptoten im Punkt $\sigma_a + j \cdot 0$, wobei:

$$\sigma_a = \frac{1}{n - m} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(\pi_i) - \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(\zeta_i) \right)$$

Die Asymptoten verlassen den Punkt $\sigma_a + j \cdot 0$ unter dem Winkel δ_i , wobei:

$$\delta_i = \frac{\pi}{n - m} \cdot (2 \cdot (i - 1) + 1) [\text{rad}], \quad i = 1, \dots, n - m$$

Zugehörigkeitstest

Um zu testen ob ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ auf der Wurzelortskurve liegt, wird Gl. (5) mit Hilfe von Gl. (6) umgeformt:

$$L(z) = -1/k_p \Rightarrow \angle L(z) = -\pi \bmod 2\pi$$

$$\sum_{i=1}^m \angle(z - \zeta_i) - \sum_{i=1}^n \angle(z - \pi_i) = -\pi \pm k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{N} \quad (7)$$

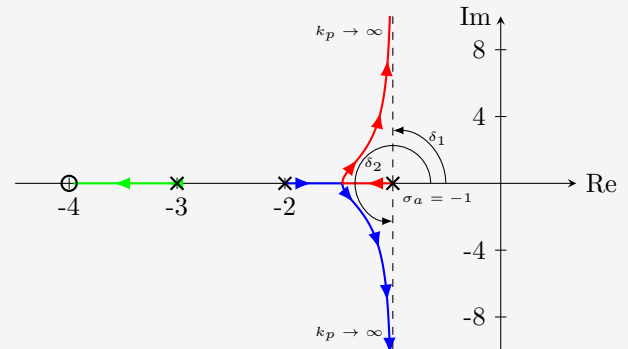
Beispiel: $L(s)$ sei:

$$L(s) = \frac{s + 4}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

Es folgt: $n = 3, m = 1, n - m = 2$. Das heisst zwei der Pole nähern sich für $k_p \rightarrow \infty$ den Asymptoten, die bei $\sigma_a + j \cdot 0$ starten, und denselben Punkt unter den Winkeln δ_i verlassen, wobei:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} \cdot (-1 - 2 - 3 - (-4)) = -1$$

$$\delta_1 = \frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot 0 + 1) = \frac{\pi}{2}, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot 1 + 1) = \frac{3\pi}{2}$$



Wir möchten nun testen ob der Punkt $z = -3.5 + j \cdot 0$ auf der Wurzelortskurve liegt. Dazu wenden wir Gl. (7) an:

$$\angle(-3.5 + 4) - \angle(-3.5 + 1) - \angle(-3.5 + 2) - \angle(-3.5 + 3) = 3\pi$$

3π hat die geforderte Form $-\pi + k \cdot 2\pi$, für $k = 2$. Der Punkt liegt also auf der Wurzelortskurve.

Kompensierung mit dem Wurzelortungsverfahren

Der Zugehörigkeitstest aus Gl. (7) ist besonders hilfreich, um einen Kompensator zu finden, der die Pole des geschlossenen Regelkreises an einem gewünschten Ort in der komplexen Ebene platziert. Diese Idee wird an einem Beispiel gezeigt.

Beispiel: Du möchtest einen Kompensator $C(s)$ für das System $P(s)$ auslegen, sodass die Pole von $T(s)$ bei $s_{1,2}^* = -4 \pm j \cdot 4$ rad/s liegen.

$$P(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 3)}$$

Du testest zuerst einen einfachen Kompensator $C_1(s) = 1$.

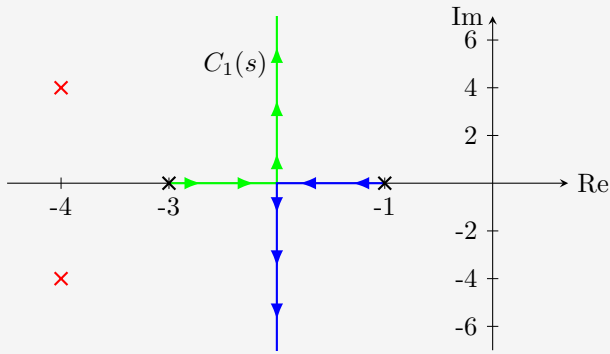


Abb. 6: Wurzelortskurve von $L = P \cdot C_1$ in blau und grün. Gewünschte Polplatzierung in rot.

Aus Abb. 6 ist ersichtlich, dass die gewünschten Pole (\times) nicht auf der Wurzelortskurve liegen. Das heisst für $C_1(s)$ gibt es kein k_p , sodass der geschlossene Regelkreis $T(s)$ die gewünschten Pole hat. Gl. (7) ist somit nicht erfüllt.

Die gewünschten Pole liegen links von den Polen des offenen Regelkreises. Um die Wurzelortskurve nach links zu biegen, platzierst du eine parametrisierte Nullstelle mit dem Kompensator $C_2(s) = s + \zeta$.

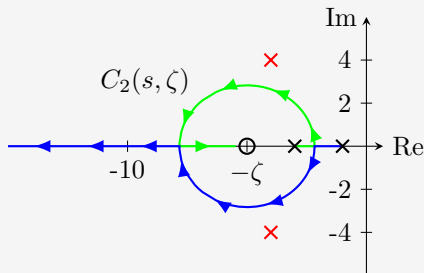


Abb. 7: Wurzelortskurve von $L = P \cdot C_2(s, \zeta)$ in blau und grün. Gewünschte Polplatzierung in rot.

Du möchtest nun ζ finden, sodass die gewünschten Pole auf der Wurzelortskurve liegen. Dafür wendest du Gl. (7) an:

$$L = \frac{(s + \zeta)}{(s + 1)(s + 3)} \Rightarrow \angle L = \angle(s + \zeta) - \angle(s + 1) - \angle(s + 3)$$

Spezifisch für $s = s_1^*$:

$$\begin{aligned} \angle(-4 + 4j + \zeta) - \angle(-4 + 4j + 1) - \angle(-4 + 4j + 3) = \\ \underbrace{\arctan\left(\frac{4}{\zeta - 4}\right)}_{\gamma} - \underbrace{\arctan\left(\frac{4}{-3}\right)}_{\alpha} - \underbrace{\arctan\left(\frac{4}{-1}\right)}_{\beta} \stackrel{!}{=} -\pi \\ \Rightarrow \gamma = -\pi + \alpha + \beta, \quad \zeta = 4 + 4/\tan(\gamma) \approx 7.25 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

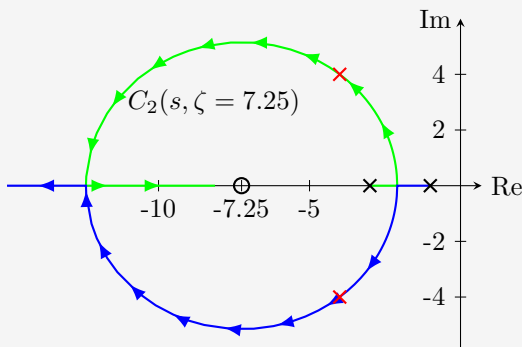


Abb. 8: Wurzelortskurve von $L = P \cdot C_2(s, \zeta)$ in blau und grün. Gewünschte Polplatzierung in rot.

Die gewünschten Pole liegen auf den Wurzelortskurven von $L(s) = P(s) \cdot C_2(s, \zeta = 7.25)$. Demnach ist es möglich ein k_p zu finden, sodass $T(s)$ die gewünschten Pole hat.

3 Numerische Verfahren

Mit numerischen Verfahren kann man für eine fixe Regelstruktur (z.B. PI) ein Optimierungsproblem lösen, um die Parameter k_p und T_i zu erhalten. Das Optimierungsproblem involviert eine Kostenfunktion $J(k_p, T_i)$, die durch die Wahl der optimalen Parameter k_p und T_i minimiert werden soll.

Beispiel: Du möchtest einen PI-Regler auslegen, der auf eine Sprungantwort kumulativ einen kleinen Fehler erzeugt, der den maximalen Überschuss möglichst reduziert, und der möglichst robust ist.

Ein Mass für den kumulativen Fehler ist die Summe aller quadrierten Fehler:

$$g_1 = \int_0^\infty e^2(t) dt$$

Der maximale Überschuss ist wie folgt definiert:

$$g_2 = \max_{t \in [0, \infty)} (y(t) - 1)$$

Die Robustheit kann mit der minimum return difference μ_{\min} ausgedrückt werden:

$$\mu_{\min} = \min_{\omega \in [0, \infty)} |1 + L(j\omega)|$$

Ein μ_{\min} von 1 resultiert in einem sehr robusten Regler:

$$g_3 = 1 - \min_{\omega \in [0, \infty)} |1 + L(j\omega)|$$

Du definierst deine Kostenfunktion:

$$J(k_p, T_i) = \kappa_1 \cdot g_1 + \kappa_2 \cdot g_2 + \kappa_3 \cdot g_3$$

Das resultierende Optimierungsproblem kann z.B. mit der Funktion `fminsearch` in Matlab gelöst werden und lautet:

$$\min_{k_p, T_i} J(k_p, T_i)$$

Die Tuning-Parameter $\kappa_{(\cdot)}$ sind ein Mass für die Wichtigkeit einer Grösse $g_{(\cdot)}$ in der Kostenfunktion J . Je grösser z.B. κ_3 (bei fixierten $\kappa_{1,2}$) gewählt wird, desto robuster wird der Regler (desto eher wird g_3 eingehalten). Jedoch werden die Ziele g_1 und g_2 dadurch relativ zu g_3 weniger gewichtet. Das heisst die Parameter $\kappa_{(\cdot)}$ erlauben einen *Trade-off* zwischen verschiedenen Zielen zu definieren. Dabei ist nur die relative Grösse der $\kappa_{(\cdot)}$ zu einander von Relevanz. So ist z.B. das minimum der Kostenfunktion für $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 1$ an derselben Stelle wie für $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 100$.

Eine weitere Möglichkeit die Parameter $\kappa_{(\cdot)}$ zu interpretieren ist wie folgt: Je grösser ein κ_i ist, desto *teurer* ist es das Ziel g_i nicht zu erfüllen. Das heisst um $J(k_p, T_i)$ zu minimieren ist es für die Optimierung viel lukrativer g_i möglichst gut zu erfüllen. Da die restlichen Ziele relativ zu g_i viel billiger sind, können diese leicht vernachlässigt werden, da dies die Gesamtkosten $J(k_p, T_i)$ nicht gross ändert.