

Thermodynamik I Grundlagen

Jorit Geurts jgeurts@student.ethz.ch
Version: 20. August 2021

1 Definitionen

1.1 SI-Präfixe

P	Peta-	10 ¹⁵	d	Dezi-	10 ⁻¹
T	Tera-	10 ¹²	c	Zenti-	10 ⁻²
G	Giga-	10 ⁹	m	Milli-	10 ⁻³
M	Mega-	10 ⁶	μ	Mikro-	10 ⁻⁶
k	Kilo-	10 ³	n	Nano-	10 ⁻⁹
h	Hekto-	10 ²	p	Pico-	10 ⁻¹²

1.2 Einheiten

Grösse	Symbol	Einheiten
Arbeit	W	$\underline{J} = \text{N m} = \text{m}^2 \text{ kg s}^{-2}$
Druck	p	$\underline{\text{Pa}} = \text{N m}^{-2}$
Energie	E	$\underline{J} = \text{m}^2 \text{ kg s}^{-2}$
Enthalpie	H	\underline{J}
Exergie	E_x	\underline{J}
innere Energie	U	\underline{J}
kinetische Energie	KE	\underline{J}
potentielle Energie	PE	\underline{J}
molare Enthalpie	\bar{h}	$\underline{\text{J mol}^{-1}}$ (= kJ kmol ⁻¹)
molare in. Energie	\bar{u}	$\underline{\text{J mol}^{-1}}$ (= kJ kmol ⁻¹)
spez. Enthalpie	h	$\underline{\text{J kg}^{-1}}$
spez. in. Energie	u	$\underline{\text{J kg}^{-1}}$
Entropie	S	$\underline{\text{J K}^{-1}}$
molare Entropie	\bar{s}	$\underline{\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}} = \frac{\text{kJ}}{\text{kmol K}}$
spez. Entropie	s	$\underline{\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}}$
Geschwindigkeit	w	$\underline{\text{m s}^{-1}}$
Kraft	F	$\underline{\text{N}} = \text{m kg s}^{-2}$
Leistung	P	$\underline{\frac{\text{W}}{\text{s}^3}} = \text{J s}^{-1} = \text{m}^2 \text{ kg s}^{-3}$
Masse	m	$\underline{\text{kg}}$
Molmasse	M	$\underline{\text{kg kmol}^{-1}} = \text{g mol}^{-1}$
Molzahl	n	$\underline{\text{kmol}}$
spez. Gaskonstante	R	$\underline{\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}}$
Teilchenzahl	N	-
Temperatur	T	$\underline{\text{K}}$ (273.15 K = 0°C)
Volumen	V	$\underline{\text{m}^3}$ (1 m ³ = 1000 l)
Molvolumen	\bar{v}	$\underline{\text{m}^3 \text{ kmol}^{-1}}$
spez. Volumen	v	$\underline{\text{m}^3 \text{ kg}^{-1}}$
Wärme	Q	\underline{J}
Wärmeübergangskoeffizient	α	$\frac{\underline{W}}{\underline{\text{m}^2 \text{K}}} = \frac{\text{k}}{\text{s}^3 \text{K}}$
Wärmeleitfähigkeit	λ	$\frac{\underline{W}}{\underline{\text{mK}}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^3 \text{K}}$
Temperaturleitfähigkeit	$a = \frac{\lambda}{\rho c p}$	$\frac{\underline{\text{m}^2}}{\underline{\text{s}}}$

1.3 Konstanten

Namen	Symbol	Wert
Avogadrozahl	N_A	$6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Elementarladung	e	$1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Normdruck	p_0	$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$
Normtemperatur	T_0	$298 \text{ K} \approx 25^\circ \text{C}$
Tripelpunkt Wasser	T_p	$273.16 \text{ K} = 0.01^\circ \text{C}$
Universelle Gaskonstante	\bar{R}	$8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Universelle Gaskonstante	R_i	$\frac{8.314}{M_i} \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Boltzmannkonstante	k_B	$1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$

1.4 Umrechnung wichtiger Einheiten

1.4.1 Druck

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 100\,000 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$$

$$10 \text{ bar} = 1 \text{ MPa} = 1\,000\,000 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ N/mm}^2 = 1 \text{ MPa} = 1\,000\,000 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 1.01325 \text{ bar} = 101\,325 \text{ Pa}$$

1.4.2 Volumen

$$1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$$

$$1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ L} = 0.001 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$$

1.4.3 Temperatur

$$[T]_{\circ\text{C}} = [T]_{\text{K}} + 273.15$$

$$[T]_{\text{F}} = 1.8 \cdot [T]_{\circ\text{C}} + 32$$

$$[T]_{\text{R}} = 1.8 \cdot [T]_{\circ\text{C}}$$

2 Thermodynamik I Grundlagen

2.1 Systembezeichnungen

Bezeichnung	Eigenschaft
abgeschlossen	Keine Wechselwirkung über die Systemgrenze $\dot{W} = \dot{Q} = \dot{m} = 0$
adiabat	Keine thermische Energie über die Systemgrenze $\dot{Q} = 0$
diatherm	Es fliesst thermische Energie über die Systemgrenze $\dot{Q} \neq 0$
geschlossen	$\dot{m} = 0$ Kein Massenstrom über die Systemgrenze
halb offen	Entweder ein- oder ausfliessender Massenstrom
heterogen	Physikalische Eigenschaften und chemische Zusammensetzung nicht überall gleich
homogen	Physikalische Eigenschaften und chemische Zusammensetzung überall gleich
isoliert	$\dot{Q} = 0$ Keine thermische Energie über die Systemgrenze
offen	$\dot{m} \neq 0$ Es fliesst ein Massenstrom über die Systemgrenze
stationär	$\frac{dm}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dE_x}{dt} = \frac{dS}{dt} = 0 \rightarrow \dot{m}_{in} = \dot{m}_{out}$ Indifferent bzgl. des Zeitpunktes der Betrachtung

2.2 Zustandsgrössen

intensive (von Systemgrösse unabhängig)	extensive (von Systemgrösse abhängig)
Dichte	Energie
Druck	Enthalpie
Temperatur	Entropie
chemisches Potential	Exergie
	Masse
	Stoffmenge
	Volumen

2.3 Prozessgrössen

Arbeit	Wärme
$W > 0$	$Q > 0$
Vom System geleistete Arbeit (abgeführte Arbeit)	Dem System zugeführte Wärme
$W < 0$	$Q < 0$
Am System geleistete Arbeit (zugeführte Arbeit)	Vom System abgegebene Wärme

2.4 Massenströme und Massenbilanz

Die Änderung der Masse ist die Summe aller einströmenden Massenströme minus der Summe aller ausströmenden Massenströme und heisst Massenbilanz:

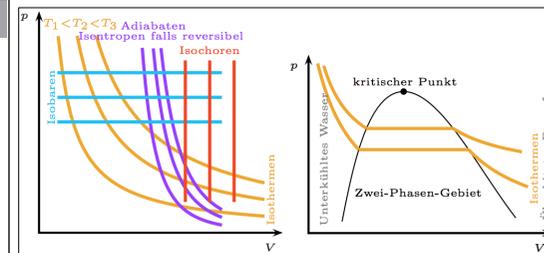
$$\frac{dm}{dt} = \dot{m} = \sum \dot{m}_{in} - \sum \dot{m}_{out}$$

$$\dot{m} = \frac{\dot{V}}{v} = \rho \cdot \dot{V} = \underbrace{A \cdot w}_{1\text{-dim.}}$$

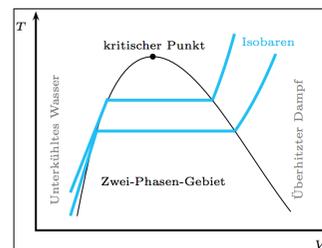
Für stationäre Prozesse gilt: $\frac{dm}{dt} = 0$

2.5 Diagramm-Skizzen

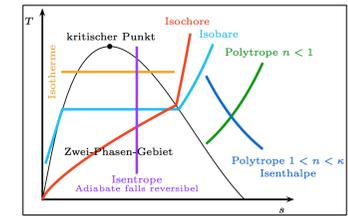
2.5.1 p-V-Diagramm



2.5.2 T-V-Diagramm mit Nassdampf-Gebiet



2.5.3 T-s Diagramm mit Nassdampf-Gebiet



3 Wärme und Arbeit

3.1 Wärme

Wärme ist über eine Systemgrenze transportierte thermische Energie.

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$$

3.1.1 Wärmeübertragungsleistung \dot{Q}

Die übertragene Wärmemenge pro Zeiteinheit nennt man Wärmeübertragungsleistung. Sie hat das Symbol \dot{Q} und als Dimension J/s. Somit gilt für die gesamte übertragene Wärme von Zustand 1 zu 2:

$$Q_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{Q} dt$$

3.1.2 Wärmefluss

Der Wärmefluss ist die Wärmeübertragungsleistung pro Flächeneinheit. Er hat das Symbol \dot{q}'' und als Dimension J/(s · m²). Für die gesamte übertragene Leistung Q gilt:

$$\dot{Q} = \int_A \dot{q}'' dA \implies Q_{12} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_A \dot{q}'' dA$$

3.2 Arbeit

Ein System leistet Arbeit an seiner Umgebung, wenn der alleinige Effekt der Wechselwirkung auf alles ausserhalb des Systems die Hebung eines Gewichtes sein könnte.

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s}$$

3.2.1 Ein- und Ausschiebearbeit

Um Massenströme in ein System oder aus einem System zu führen, muss gegen den jeweiligen Druck Arbeit verrichtet werden.

Einschiebearbeit

$$W_e = p_e \cdot \Delta V = p_e \cdot A_e \cdot \Delta s$$

Einschiebeleistung

$$\dot{W}_e = p_e \cdot A_e \cdot w_e$$

Ausschiebearbeit

$$W_a = p_a \cdot \Delta V = p_a \cdot A_a \cdot \Delta s$$

Ausschiebeleistung

$$\dot{W}_a = p_a \cdot A_a \cdot w_a$$

3.2.2 Nutzbare Arbeit

Die Arbeit, welche nicht mit den Massenströmen zusammenhängt, nennt man nutzbare Arbeit. Ihr Symbol ist W_S (S für Shaft).

4 Enthalpie

Die thermische Enthalpie ist die Summe der inneren Energie und der Arbeit, die nötig ist, um das Volumen V des Systems gegen die Wirkung des konstanten Aussendruckes aufzuspannen.

$$H = U + p dV$$

Die Standardbildungsenthalpie \bar{h}_f^0 ist die molspezifische Enthalpie [kJ/kmol], welche aufgewendet werden muss (+) bzw. gewonnen wird (-), wenn ein Molekül bei Standardbedingungen T_{ref}, p_{ref} aus den chemischen Elementen gebildet wird (TAB-A30). (Sie kann anhand der Bindungsenergien der einzelnen Elementarreaktionen abgeschätzt werden, dies liefert aber teils sehr ungenaue Resultate.) Die totale spezifische Enthalpie ist somit:

$$\bar{h}(T, p) = \underbrace{\bar{h}_f^0(T_{ref}, p_{ref})}_{\text{chem. Anteil}} + \underbrace{[\bar{h}(T, p) - \bar{h}(T_{ref}, p_{ref})]}_{\text{thermischer Anteil}}$$

$$\bar{h}(T) = \underbrace{\bar{h}_f^0(T_{ref}, p_{ref})}_{\text{chem. Anteil}} + c_p(T - T_{ref})$$

4.1 Reaktionsenthalpie

Die Reaktionsenthalpie ΔH_R gibt die Änderung der Enthalpie im Verlauf einer Reaktion bei konstantem Druck an. Es spielt dabei keine Rolle, auf welchem Weg die Reaktion stattfindet oder in welcher Form (Wärme, Arbeit) Energie während der Reaktion aufgenommen oder abgegeben wird. Die Reaktionsenthalpie ist immer die Differenz der Bindungsenthalpien der Produkte und der Edukte:

$$\Delta H_R = \sum_P n_P \cdot [\bar{h}_{f,P}^0 + \Delta \bar{h}_P(T_P)] - \sum_E n_E \cdot [\bar{h}_{f,E}^0 + \Delta \bar{h}_E(T_E)] \quad (1)$$

Wobei $\Delta \bar{h}(T) = \bar{h}(T) - \bar{h}(T_{ref})$.

- $\Delta H_R < 0$: **exotherme Reaktion**
Produkte sind energetisch tiefer: Energie wird frei
- $\Delta H_R > 0$: **endotherme Reaktion**
Produkte sind energetisch höher: Energie wird aufgenommen

Reaktion **exo- oder endotherm?**

Hängt von Bildungsenthalpie $\Delta \bar{h}_f^0$ ab.

4.2 Spezialfall

Bekannt: $c_{p,exhaust}$, $Y_i = \frac{m_i}{m_{tot}}$ (falls $\bar{h}_{exhaust}(T_1)$ massenspezifisch)

$$\begin{aligned} \bar{h}_{exhaust}(T_1) &= \sum Y_i \cdot \bar{h}_i \\ &= \sum Y_i [\bar{h}_{f,i}^0 + \bar{h}_{s,i}(T_1) - \bar{h}_{s,i}(T_{ref})] \\ &= \sum Y_i \cdot \bar{h}_{f,i}^0 + \sum Y_i \cdot c_{p,i} \cdot (T_1 - T_{ref}) \\ &= \sum Y_i \cdot \bar{h}_{f,i}^0 + c_{p,exhaust} \cdot (T_1 - T_{ref}) \end{aligned}$$

4.3 Freie Enthalpie

Die Änderung der freien Enthalpie ΔG ist das entscheidende Kriterium dafür, ob, unter welchen Bedingungen und in welchem Umfang eine Reaktion tatsächlich abläuft.

- $\Delta G < 0$: **exergone** Reaktion (läuft freiwillig ab)
- $\Delta G = 0$: **Gleichgewicht** (keine Reaktion)
- $\Delta G > 0$: **endergone** Reaktion (braucht Energiezufuhr)

Die freie Enthalpie ist definiert als

$$G = H - T \cdot S = \sum_i G_{0,i} + RT \ln \left(\frac{p_i}{p_0} \right)$$

5 Chemisches Potential

Das chemische Potential μ ist eine intensive Zustandsgrösse, welche die Möglichkeit eines Stoffes charakterisiert,

- mit anderen Stoffen zu reagieren (chemische Reaktion);
- in eine andere Zustandsform überzugehen (Phasenübergang);
- sich im Raum umzuverteilen (Diffusion).

Eine Reaktion, Umwandlung oder Umverteilung kann nur dann freiwillig stattfinden, wenn das chemische Potential im Endzustand kleiner ist als im Anfangszustand. Das chemische Potential ist definiert als:

$$\mu_i := \left. \frac{\partial G}{\partial n_i} \right|_{T,p,n_j} = \left. \frac{\partial U}{\partial n_i} \right|_{S,V,n_j} = \left. \frac{\partial H}{\partial n_i} \right|_{S,p,n_j}$$

Das chemische Potential entspricht dementsprechend dem Beitrag einer inkrementellen Änderung der Anzahl Mole der i -ten Komponente **allein** (alle anderen Komponenten behalten ihre Anzahl Mole unverändert) zur Veränderung der Freien Enthalpie bei $T, p = \text{const.}$ bzw. der inneren Energie bei $S, V = \text{const.}$ oder der Enthalpie bei $S, p = \text{const.}$

6 Partialdruck

Der Ausdruck des partiellen Druckes macht nur für Gemische einen Sinn; er entspricht dem Druck, den die einzelne Gaskomponente bei alleinigem Vorhandensein im betreffenden Volumen ausüben würde. Die Summe aller Partialdrücke ergibt den Gesamtdruck und für den Partialdruck der Komponente i gilt:

$$p_i = p_{tot} \cdot \frac{n_i}{n_{tot}} = p_{tot} \cdot X_i$$

7 Erster Hauptsatz

7.1 Energiebilanz

Für geschlossene Systeme ($\dot{m} = 0$) ohne chemische Reaktionen gilt:

$$\Delta E = Q - W \quad \text{mit} \quad \Delta E = \Delta KE + \Delta PE + \Delta U$$

Falls die kinetische und die potentielle Energie vernachlässigbar sind:

$$\Delta U = Q - W$$

7.2 Offene Systeme

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \dot{Q} - \dot{W}_S + \sum_{i=1}^n \dot{m}_{in} \left(h_{in} + \frac{w_{in}^2}{2} + g \cdot z_{in} \right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^m \dot{m}_{out} \left(h_{out} + \frac{w_{out}^2}{2} + g \cdot z_{out} \right) \end{aligned}$$

Stationär

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W} &= \sum \dot{m}_{out} \cdot \left(h_o + \frac{w_o^2}{2} + g \cdot z_o \right) \\ &\quad - \sum \dot{m}_{in} \cdot \left(h_i + \frac{w_i^2}{2} + g \cdot z_i \right) \end{aligned} \quad (2)$$

8 Ideale Gase

Beim Modell der Idealen Gase bewegen sich alle Moleküle ohne gegenseitige Kraftwirkungen und alle Stösse sind elastisch.

$$\begin{aligned} p \cdot V &= n \cdot \bar{R} \cdot T & R &= c_p - c_v = \frac{\bar{R}}{M} \quad [\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}] \\ p \cdot v &= R \cdot T & v &= \rho^{-1} \\ p \cdot V &= m \cdot R \cdot T \end{aligned}$$

8.1 Innere Energie und Enthalpie idealer Gase

Für Ideale Gase hängen die innere Energie und die Enthalpie nur von der Temperatur ab (Achtung: Gilt nicht für die freie Enthalpie!). Somit hängen auch c_v und c_p nur von der Temperatur ab und können folglich auch für nicht isochore/isobare Prozesse verwendet werden. Wird zusätzlich die Temperatur als konstant angenommen gilt:

$$\Delta u = c_v \cdot (T_2 - T_1) \quad h = u + R \cdot T$$

Falls die kinetische und potentielle Energie vernachlässigbar sind:

$$\Delta h = c_p \cdot (T_2 - T_1)$$

8.2 Totale spezifische Enthalpie

Die totale spezifische Enthalpie setzt sich wie folgt zusammen:

$$\bar{h}(T) = \underbrace{\bar{h}_f^0(T_{ref})}_{\text{chem. Ant.}} + \underbrace{[\bar{h}(T) - \bar{h}(T_{ref})]}_{\text{thermischer Anteil}}$$

Für bekannte temperaturabhängige \times gilt:

$$\bar{h}(T) = \bar{h}_f^0 + \int_{T_{ref}}^T \times(T) dT$$

8.3 Reaktionsenthalpie

Die Reaktionsenthalpie beschreibt den Energieumsatz einer chemischen Reaktion. Bei Standardbedingungen gilt:

$$\Delta H_R(T_{ref}) = \sum_P n_P \bar{h}_{f,P}^0 - \sum_E n_E \bar{h}_{f,E}^0$$

Bei anderer Temperatur $T \neq T_{ref}$ gilt:

$$\begin{aligned} \Delta H_R(T) &= \Delta H_R(T_{ref}) + \sum_P n_P [\bar{h}_P(T) - \bar{h}_P(T_{ref})] \\ &\quad - \sum_E n_E [\bar{h}_E(T) - \bar{h}_E(T_{ref})] \end{aligned}$$

8.4 Entropieänderung

Bei idealen Gasen gilt für die Entropiedifferenz zwischen zwei Zuständen:

$$s_2 - s_1 = s^0(T_2) - s^0(T_1) - R \cdot \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

Falls c_v/c_p als konstant angenommen werden können gilt:

$$s_2 - s_1 = c_v \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R \cdot \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right)$$

$$s_2 - s_1 = c_p \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \cdot \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

8.5 Polytrope Zustandsänderung

8.5.1 Isobar $n = 0$

$$\begin{aligned} \text{Konstanten} & \quad p = \text{const.} \rightarrow \frac{T}{V} = \text{const.} \Rightarrow \frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V_2} \\ \text{Arbeit} & \quad W_{12} = p_1(V_2 - V_1) = p_1 m(v_2 - v_1) \\ & \quad W_{12} = mR(T_2 - T_1) \\ \text{1. Hauptsatz} & \quad \Delta U_{12} = Q_{12} - W_{12} \end{aligned}$$

8.5.2 Isotherm $n = 1$

$$\begin{aligned} \text{Konstanten} & \quad T = \text{const.} \rightarrow p \cdot V = \text{const.} \Rightarrow p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \\ \text{Arbeit} & \quad W_{12} = p_1 V_1 \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = mRT \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \\ & \quad W_{12} = p_1 V_1 \cdot \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) = mRT \cdot \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \\ \text{1. Hauptsatz} & \quad \Delta U_{12} = 0 \Rightarrow Q_{12} = W_{12} \end{aligned}$$

8.5.3 Isochor $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \text{Konstanten} & \quad V = \text{const.} \rightarrow \frac{T}{p} = \text{const.} \Rightarrow \frac{T_1}{p_1} = \frac{T_2}{p_2} \\ \text{Arbeit} & \quad W_{12} = 0 \\ \text{1. Hauptsatz} & \quad \Delta U_{12} = \Delta Q_{12} = m(u_2 - u_1) = m \cdot c_v(T_2 - T_1) \end{aligned}$$

8.5.4 Isentrop $n = \kappa = c_p/c_v$

$$\begin{aligned} \text{Konstanten} & \quad S = \text{const.} \rightarrow p \cdot V^\kappa = \text{const.} \\ & \quad T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const.} \rightarrow p^{1-\kappa} \cdot T^\kappa = \text{const.} \\ \text{Arbeit} & \quad W_{12} = m \cdot (u_1 - u_2) = m \cdot c_v \cdot (T_1 - T_2) \\ & \quad W_{12} = \frac{m \cdot R}{\kappa-1} (T_1 - T_2) = \frac{p_1 V_1^\kappa}{1-\kappa} (V_2^{1-\kappa} - V_1^{1-\kappa}) \\ & \quad W_{12} = \frac{p_1 V_1}{1-\kappa} \left(\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1 \right) \\ \text{1. Hauptsatz} & \quad Q_{12} = 0 \Rightarrow \Delta U_{12} = -W_{12} \end{aligned}$$

8.5.5 Polytrop $n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{Konstanten} & \quad p \cdot V^n = \text{const.} \rightarrow T^n \cdot p^{1-n} = \text{const.} \\ & \quad T \cdot v^{n-1} = \text{const.} \\ \text{Arbeit} & \quad W_{12} = \frac{R \cdot m}{1-n} (T_2 - T_1) = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1-n} \\ & \quad W_{12} = \frac{p_1 V_1^n}{1-n} (V_2^{1-n} - V_1^{1-n}) \\ \text{1. Hauptsatz} & \quad \Delta U_{12} = Q_{12} - W_{12} \end{aligned}$$

8.6 Erster Hauptsatz (chemische Komponenten)

Für **geschlossene Systeme** mit chemischen Komponenten gilt bei idealen Gasen:

$$\bar{u} = \bar{h} - \bar{R}T = \bar{h}_f^0 + [\bar{h}(T) - \bar{h}(T_{ref})] - \bar{R}T$$

Daraus folgt für den ersten Hauptsatz:

$$\begin{aligned} Q - W &= \sum_P n (\bar{h}_P^0 + \bar{h}(T) - \bar{h}(T_{ref})) \\ &\quad - \sum_E n (\bar{h}_E^0 + \bar{h}(T) - \bar{h}(T_{ref})) \\ &\quad - R \cdot T_P \sum_P n + R \cdot T_E \sum_E n \end{aligned} \quad (3)$$

Für **offene Systeme** mit chemischen Komponenten gilt:

$$\Delta H = \Delta Q - \Delta W$$

8.7 Spezifische Gaskonstanten

Aus $R = \bar{R}/M$ mit \bar{R} als universelle Gaskonstante und den molaren Massen aus Tabelle A-1 ergeben sich folgende spezifische Gaskonstanten:

Substanz	M [g/mol]	R [J/(kg K)]
Acetylen	C ₂ H ₂	26.04
Ammoniak	NH ₃	17.04
Argon	Ar	39.94
Benzol	C ₆ H ₆	78.11
Butane	C ₄ H ₁₀	58.12
Ethan	C ₂ H ₆	30.07
Ethyl Alkohol	C ₂ H ₅ OH	46.07
Ethylen	C ₂ H ₄	28.05
Helium	He	4.003
Kohlenstoff	C	12.01
Kohlenstoffdioxid	CO ₂	44.01
Kohlenstoffmonoxid	CO	28.01
Kupfer	Cu	63.54
Luft	–	28.97
Methan	CH ₄	16.04
Methyl Alkohol	CH ₃ OH	32.05
Octane	C ₈ H ₁₈	114.2
Propan	C ₃ H ₈	44.09
Propylen	C ₃ H ₆	42.08
Refrigerant 12	CCl ₂ F ₂	120.9
Refrigerant 22	CHClF ₂	86.48
Refrigerant 134a	CF ₃ CH ₂ F	120.0
Sauerstoff	O ₂	32.00
Schwefeldioxid	SO ₂	64.06
Stickstoff	N ₂	28.01
Wasser	H ₂ O	18.02
Wasserstoff	H ₂	2.018

9 Reale Gase

Die p - v - T -Beziehung für reale Gase ist:

$$Z(T, p/v) = \frac{p \cdot v}{R \cdot T}$$

Da Z sehr kompliziert ist, wird meist mit Tabellen gearbeitet.

9.1 Polytrope Zustandsänderung

Allgemein gilt bei polytropen Zustandsänderung:

$$\Delta U_{12} = m(u_2 - u_1) = m(c_{v2}T_2 - c_{v1}T_1)$$

$$W_{12} = \int_1^2 p dv = \begin{cases} p_1 V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) & \text{für } n = 1 \\ \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1-n} & \text{für } n \neq 1 \end{cases}$$

Für spezielle Prozesse gilt:

Isobar $W_{12} = p_1(V_2 - V_1) = mp_1(v_2 - v_1)$

Isotherm $Q_{12} = T(s_2 - s_1)$

Isochor $W_{12} = 0 \implies \Delta U_{12} = Q_{12}$

Adiabat $Q_{12} = 0 \implies W_{12} = \Delta U_{12}$

9.2 Gase im Zwei-Phasen-Gebiet

Spricht man vom Zwei-Phasen-Gebiet bei Gasen meint man meist den Übergang vom flüssigen in den gasförmigen Zustand. Der Dampfgehalt ist wie folgt definiert:

$$x = \frac{m_g}{m_f + m_g} = \frac{v - v_f}{v_g - v_f} = \frac{u - u_f}{u_g - u_f} = \frac{h - h_f}{h_g - h_f} = \dots$$

Daraus folgt:

$$v = v_f + x \cdot (v_g - v_f)$$

$$u = u_f + x \cdot (u_g - u_f)$$

$$h = h_f + x \cdot (h_g - h_f) = h_f + x \cdot h_{gf}$$

$$s = s_f + x \cdot (s_g - s_f)$$

Für den Flüssigkeitsgehalt gilt:

$$x_l = \frac{v_g - v}{v_g - v_f} \quad x_l = 1 - x$$

9.3 Wärmekapazitäten

spezifische Wärmekapazität Die spezifische Wärmekapazitäten c_v, c_p beschreiben die Energie, die nötig ist, um 1 kg Masse um 1 K zu erwärmen.

Wärmekapazität inkompressibler Fluide Für inkompressible Fluide gilt $c_v = c_p$ und somit $\kappa = 1$.

Isochore Wärmekapazität c_v Es wird keine Arbeit durch Volumenänderung geleistet, somit ändert die zugeführte Wärme nur die innere Energie.

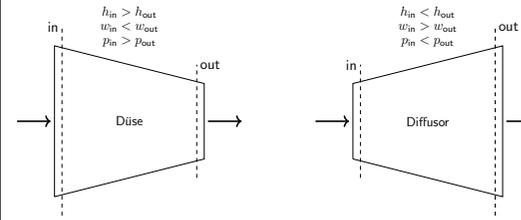
$$c_v = \left[\frac{\partial u}{\partial T} \right]_v \quad [\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}]$$

Isobare Wärmekapazität c_p Es wird Arbeit durch Volumenänderung geleistet, somit ändert die zugeführte Wärme die Enthalpie.

$$c_p = \left[\frac{\partial h}{\partial T} \right]_p \quad [\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}]$$

10 Standard-Elemente

10.1 Düsen und Diffusoren



Düsen und Diffusoren können keine Arbeit leisten. Sind sie isoliert, folgt aus dem 1. Hauptsatz:

$$h_{in} + \frac{w_{in}^2}{2} = h_{out} + \frac{w_{out}^2}{2} = \text{const.}$$

10.2 Drosselemente

In der Drossel wird ein Fluid entspannt. Beispiele sind Kompressionswärmepumpen und -kältemaschinen. Es gilt:

$$p_{out} < p_{in} \quad h_{out} = h_{in} \quad W = Q = 0$$

10.3 Wärmeübertrager

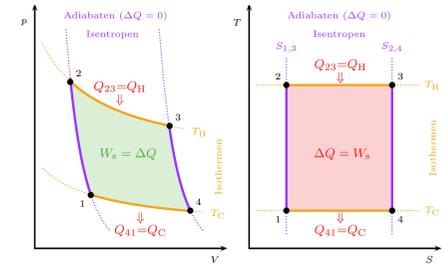
Bei Wärmeübertragern kann generell angenommen werden, dass keine Arbeit verrichtet wird $\dot{W} = 0$ und der Wärmeübertrager gut isoliert ist $\dot{Q} = 0$. Sind potentielle und kinetische Energie vernachlässigbar folgt aus dem ersten Hauptsatz:

$$\dot{m}_{in} \cdot h_{in} = \dot{m}_{out} \cdot h_{out}$$

11 Der Carnot-Kreisprozess

Der Carnot-Kreisprozess ist ein Beispiel eines idealisierten reversiblen Kreisprozesses, der zwischen zwei Temperaturniveaus T_H und T_C arbeitet. Er dient zur Definition des theoretisch maximalen thermischen Wirkungsgrades η_{th} . Für Kreisprozesse gilt:

$$\Delta U_{KP} = \Delta H_{KP} = \Delta S_{KP} = 0$$



Der Carnot-Prozess besteht aus 4 reversiblen Teilprozessen:

Prozess	Interpretation
1 \rightarrow 2	Adiabatische Kompression: Arbeit wird am System verrichtet die Temperatur steigt von T_C zu T_H . ($Q_{12} = \Delta S_{12} = 0$)
2 \rightarrow 3	Isotherme Expansion: Das System leistet die Arbeit W_{23} es muss Wärme Q_{23} hinzukommen.
3 \rightarrow 4	Adiabatische Expansion: Das System leistet die Arbeit W_{34} die Temperatur sinkt von T_H zu T_C . ($Q_{34} = \Delta S_{34} = 0$)
4 \rightarrow 1	Isotherme Kompression: Die Arbeit W_{41} wird hineinsteckt, es wird Wärme Q_{41} abgegeben.

Aus $U_1 = U_2$ und $U_3 = U_4$ folgt $W_{23} = -W_{41}$

12 Wirkungsgrade

12.1 Der thermische Wirkungsgrad

$$\eta_{th} = \frac{W_S}{Q_{in}}$$

12.2 Der isentrope Wirkungsgrad

Es gilt $s_{in} = s_{out}$, somit kann x_{out} bestimmt werden, worüber dann $h_{out,s}$ bestimmt werden kann. Für Verdichter und Pumpen gilt:

$$\eta_{V,s} = \frac{W_{isentrop}}{W_{real}} = \frac{h_{in} - h_{out,s}}{\underbrace{h_{in} - h_{out}}_{\text{falls adiabat}}}$$

Für Turbinen und Düsen gilt:

$$\eta_{T,s} = \frac{W_{real}}{W_{isentrop}} = \frac{h_{in} - h_{out}}{\underbrace{h_{in} - h_{out,s}}_{\text{falls adiabat}}}$$

12.3 Der exergetische Wirkungsgrad

$$\epsilon = \frac{\text{genutzter Exergiestrom}}{\text{zugeführter Exergiestrom}}$$

12.4 Der innere Wirkungsgrad

$$\eta_i = \frac{W_{irr}}{W_{rev}} \quad \text{wobei } W_{rev} = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

12.5 Der elektrochemische Wirkungsgrad

$$\eta_{Zelle} = \frac{\Delta G_R}{\Delta H_R} = 1 - T \frac{\Delta S_R}{\Delta H_R}$$

12.6 Der Carnot-Wirkungsgrad

$$\eta_C = \frac{W_{KP}}{Q_{in}} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

13 Zweiter Hauptsatz

Die Entropie ist ein Mass für die Irreversibilität eines Prozesses. Die Entropieänderung ist eine Zustandsfunktion, also ein thermodynamisches Potential und somit unabhängig vom Weg (Prozess). Sie ist keine Erhaltungsgrösse.

$$\Delta S = \frac{\text{einem Reservoir zugeführte Wärmemenge}}{\text{Temperatur dieses Reservoirs}} = \frac{\Delta Q}{T} = S_2 - S_1$$

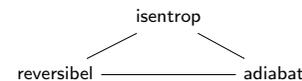
Ein Prozess wird spontan immer in der Richtung ablaufen, dass die Entropie zunimmt.

13.1 Reversibilität

Es gelten folgende Beziehungen:

$$S_1 - S_2 = \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \iff \text{reversibel} \iff S_{erz} = 0$$

Ein Prozess ist nur dann reversibel, wenn all seine Teilprozesse reversibel sind. Sind zwei Bedingungen erfüllt, so gilt auch das Dritte:



13.2 Clausius Ungleichung

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0, \text{ für reversible Prozesse: } \frac{Q_H}{T_H} \leq \frac{Q_C}{T_C}$$

Dabei ist der Entropiezuwachs nur dann gleich null, wenn es sich um einen reversiblen Kreisprozess handelt. Der Betrieb einer Maschine ist also mit Entropiezuwachs verbunden.

13.3 TdS-Gleichungen

Die TdS-Gleichungen folgen direkt aus dem 1. Hauptsatz und der Definition der Entropie:

$$T dS = dU + p dV$$

$$T dS = dH - V dp$$

Sie enthalten nur Zustandsgrössen, sind also beliebig integrierbar und gelten sowohl für reversible als auch für irreversible Prozesse.

13.4 Entropiebilanz geschlossener Systeme

Für Systeme ohne Massenfluss $\dot{m} = 0$ gilt:

$$S_{erz} = S_2 - S_1 - \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \iff$$

$$\frac{S_{erz}}{n_{fuel}} = \sum_P n_P \bar{s}_P - \sum_E n_E \bar{s}_E - \frac{1}{n_{fuel}} \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \quad (4)$$

Folglich gilt für folgende Spezialfälle:

Prozess	erzeugte Entropie
Kreisprozess	$S_{erz} = - \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i}$
adiabat	$S_{erz} = S_2 - S_1$
isentrop	$S_{erz} = - \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i}$
reversibel	$S_{erz} = 0$

13.5 Entropiebilanz offener Systeme

$$\dot{S}_{erz} = \frac{dS}{dt} - \sum_{i=1}^n \frac{\dot{Q}_i}{T_i} + \sum_{j=1}^m \dot{m}_{out} s_{out} - \sum_{k=1}^p \dot{m}_{in} s_{in}$$

Für stationäre Prozesse gilt $\frac{dm}{dt} = \frac{dS}{dt} = 0$ und somit:

$$\dot{S}_{erz} = - \sum_{i=1}^n \frac{\dot{Q}_i}{T_i} + \dot{m}(s_{out} - s_{in})$$

Werden zusätzlich chemische Reaktionen berücksichtigt gilt für stationäre, offene Systeme:

$$\frac{\dot{S}_{erz}}{\dot{n}_{fuel}} = \sum_P n_{i,out} \left[\bar{s}^\circ(T) - \bar{R} \ln \left(\frac{p_i}{p_{ref}} \right) \right] - \sum_E n_{i,in} \left[\bar{s}^\circ(T) - \bar{R} \ln \left(\frac{p_i}{p_{ref}} \right) \right] - \frac{1}{\dot{n}_{fuel}} \sum_i \frac{\dot{Q}_i}{T_i}$$

13.6 Entropie idealer Gase

Allgemein gilt:

$$s(T, p) = s^\circ(T, p_{ref}) - \bar{R} \cdot \ln \left(\frac{p}{p_{ref}} \right)$$

Für ideale Gase gilt für die Entropiedifferenz zwischen zwei Zuständen:

$$s_2 - s_1 = s^\circ(T_2) - s^\circ(T_1) - \bar{R} \cdot \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

Falls c_v/c_p als konstant angenommen werden können gilt:

$$s_2 - s_1 = c_v \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + \bar{R} \cdot \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right)$$

$$s_2 - s_1 = c_p \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \bar{R} \cdot \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

13.7 Entropieänderung inkompressibler Stoffe

Für Festkörper und Flüssigkeiten gilt $v \approx const.$ Auch Prozesse mit gasförmigen Stoffen können als inkompressibel betrachtet werden, falls sie isochor sind. Dann gilt:

$$s_2 - s_1 = c \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

14 Sonstiges

14.1 Geometrie

Oberfläche einer Kugel:

$$O = 4\pi r^2 = \pi d^2 \quad (5)$$

Volumen einer Kugel:

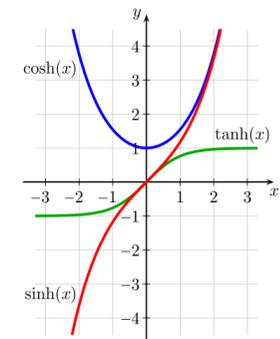
$$V = \frac{4}{3}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi \frac{d^3}{8} \quad (6)$$

14.2 Interpolation

x_1	y_1
x	y
x_2	y_2

$$y = y_1 + (x - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

14.3 Hyperbelfunktionen



Definition:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sinh(x) = \cosh(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \cosh(x) = \sinh(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \tanh(x) = 1 - \tanh(x)^2 = \frac{1}{\cosh(x)^2}$$

Es gilt:

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$$

$$\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$$

Thermodynamik II LTNT

Jorit Geurts jgeurts@student.ethz.ch
Version: 20. August 2021

1 Wärmeleitung

1.1 Wärmeübertragungsarten

1.1.1 Fourier Gesetz (empirisch)

$$\dot{q}_{leit} = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad \dot{q}_{leit} = -A \cdot \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (7)$$

$$\dot{Q} = -A\lambda \frac{dT}{dr} \rightarrow \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{A} dr = - \int_{T_{in}}^{T_{out}} \frac{\lambda}{\dot{Q}} dT \quad (8)$$

1.1.2 Konvektion

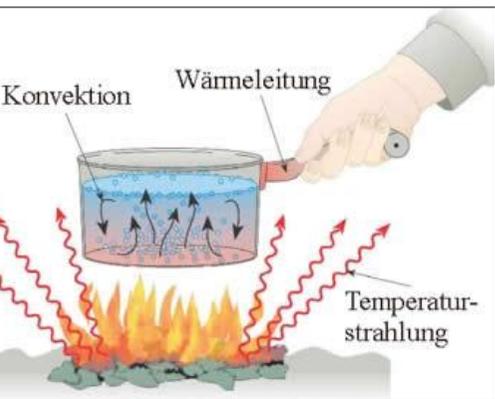
ES gibt natürliche und erzwungenen Konvektion.

$$\dot{q}_{conv} = \alpha \cdot (T_H - T_\infty) \quad \dot{q}_{conv} = A \cdot \alpha \cdot (T_H - T_\infty) \quad (9)$$

1.1.3 Strahlung

$$\dot{q}_{rad} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 \quad \dot{q}_{rad} = A \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (10)$$

ε ist ein Materialparameter. (Schwarzkörper: $\varepsilon = 1$)



1.2 Grundlegende Grössen

1.2.1 Wärmeleitfähigkeit λ

Die Wärmeleitfähigkeit beschreibt wie gut ein Medium (*Material und Temperaturabhängig*) die Wärme **leitet**. Beschreibt die Anzahl Joule die pro Sekunde durch einen Meter vom Material fließt. $[\lambda] = \left[\frac{W}{mK} \right]$

1.2.2 Wärmeübergangskoeffizient α

Der Wärmeübergangskoeffizient beschreibt wie gut ein Medium Energie durch **Konvektion** abführen kann. Ist vom jeweiligen Problem abhängig. $[\alpha] = \left[\frac{W}{m^2K} \right]$

1.2.3 Temperaturleitfähigkeit a

Beschreibt die zeitliche Veränderung der räumlichen Verteilung der Wärmeleitung durch einen Temperaturgradient.

$$a := \frac{\lambda}{\rho c} \quad [a] = \left[\frac{m^2}{s} \right] \quad (11)$$

λ : Wärmeleitfähigkeit, ρ : Dichte, c spezifische Wärmekapazität

2 Wärmeleitungsgleichung

Energieerhaltung (1.HS) \rightarrow Taylor-Entwicklung \rightarrow Fourier Gesetz \rightarrow Energie ($E = \rho \cdot c \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot T$) \rightarrow Wärmeleitungsgleichung
Wärmeleitungsgleichung:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla T) + \dot{q}_{Quellen} \quad (12)$$

2.1 Kartesisch

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_{Quellen}$$

2.2 Zylindrisch

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_{Quellen}$$

2.3 Sphärisch

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \sin(\varphi) \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \dot{q}_{Quellen}$$

2.4 Vereinfachungen

2.4.1 $\lambda = const.$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial [T]}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{\dot{q}_{Quellen}}{\lambda} \quad a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (13)$$

2.4.2 Ohne Quellen

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T \xrightarrow{\lambda=const.} \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T \quad (14)$$

2.4.3 Stationär, Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}_{Quellen}}{\lambda} = 0 \quad (15)$$

2.4.4 Stationär und ohne Quellen

$$\nabla^2 T = 0 \quad (16)$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \Delta \quad (17)$$

2.5 Vorzeichenregel

$$\pm \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_0} = \pm \dot{q}''(x_0) \quad (18)$$

\vec{n} auf entspr. Oberfl. vs x-Koord	Wärmestromricht. vs \vec{n}
- : Gleiche Richtung	- : Andere Richtung
+ : Andere Richtung	+ : Gleiche Richtung

3 Temperaturverläufe für $\lambda = const.$

Für die Temperaturverteilung muss die Wärmeleitungsgleichung integriert werden.

3.1 stationär, ohne Quellen

Temperaturverläufe	Skizzen
kartesisch: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = C_1$ $T = C_1 x + C_2$	
zylindrisch: $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r}$ $T = C_1 \ln(r) + C_2$	
sphärisch: $\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2}$ $T = -\frac{C_1}{r} + C_2$	

3.2 stationär, konstante Quellen

Temperaturverläufe	Skizzen kartesisch
kartesisch: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{1}{\lambda} \dot{q}_{Quellen}$ $\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda} \dot{q}_{Quellen} x + C_1$ $T = -\frac{1}{2\lambda} \dot{q}_{Quellen} x^2 + C_1 x + C_2$	symmetrisch:
zylindrisch: $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\lambda} \dot{q}_{Quellen} r$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{2\lambda} \dot{q}_{Quellen} r + \frac{C_1}{r}$ $T = -\frac{1}{4\lambda} \dot{q}_{Quellen} r^2 + C_1 \ln(r) + C_2$	asymmetrisch:
sphärisch: $\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\lambda} \dot{q}_{Quellen} r^2$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{3\lambda} \dot{q}_{Quellen} r + \frac{C_1}{r^2}$ $T = -\frac{1}{6\lambda} \dot{q}_{Quellen} r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2$	isoliert:

Falls Quellen nicht konstant sind, Quellterm einsetzen und mit Integrieren

3.3 Randbedingungen

Randbedingung erster Art: Temperatur ist gegeben

$$T(x=0, t) = T_0(t) \quad (19)$$

Randbedingung zweiter Art: Wärmestrom ist gegeben

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_0} = \dot{q}''(x_0)$$

$$\Rightarrow \text{isoliert: } -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x_0} = \dot{q}''(x_0) = 0$$

Randbedingung dritter Art: konvektiver Wärmeübergang

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_0} = \alpha \cdot (T_0(t) - T_\infty) = \dot{q}''(x_0) \quad (20)$$

4 Widerstandsdarstellung

Man kann die Wärmeleitung auch mit Widerständen darstellen. **Nur wenn das Problem stationär, ohne Quellen und eindimensional ist!!!**

Was	Wärmeleitung	Elektrischer Strom
Leitung	$\Delta T = \frac{L}{\lambda A} \cdot \dot{q}$	$R = U \cdot I$
Konvektion	$\Delta T = \frac{1}{\alpha A} \cdot \dot{q}$	$R = U \cdot I$
Treibende Kraft	$\Delta T = (T_2 - T_1)$	U
Medium	\dot{q}	I
Widerstand	$\frac{L}{\lambda A} \left[\frac{K}{W} \right]$	R

Gesamte Formel:

$$\dot{q} = \frac{1}{R_{tot}} \cdot \Delta T = k \cdot A \cdot \Delta T \quad (21)$$

Serie Schaltung:

$$R_{gesamt} = \sum_i R_i \quad (22)$$

Parallel:

$$R_{gesamt} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{R_i}} \quad (23)$$

4.1 Wärmeleitwiderstände

kartesisch:

$$R_{th,\lambda} := \frac{L}{A \cdot \lambda} \quad (24)$$

zylindrisch:

$$R_{th,\lambda} := \frac{\ln(r_a/r_i)}{2\pi\lambda L}, \quad R'_{th,\lambda} := \frac{\ln(r_a/r_i)}{2\pi\lambda} \quad (25)$$

sphärisch:

$$R_{th,\lambda} := \frac{(1/r_i) - (1/r_a)}{4\pi\lambda} \quad (26)$$

Konvektion

$$R_{th,\alpha} := \frac{1}{A \cdot \alpha}, \quad R'_{th,\alpha} := \frac{1}{U \cdot \alpha} \quad (27)$$

Wärmeübergangskoeffizient

$$k := \frac{1}{\sum_i R_i A_i} \quad (28)$$

Serieschaltung Wärmeübergangskoeffizienten:

$$k_{Gesamt} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{k_i}} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots} \quad (29)$$

Parallele Widerstände:

Erst R_{res} berechnen (R_i mit jeweiligem Flächenanteil)
Dann mit gesamter Fläche multiplizieren.

Gradienten Widerstand:

$$dR = \frac{dx}{\lambda(x)A} \rightarrow R = \int_L \frac{dx}{\lambda(x)A} \quad (30)$$

$$k_{res} = \frac{1}{\int_L \frac{dx}{\lambda(x)}} \quad (31)$$

5 Rippen

5.1 Allgemeine Gleichung

Energiegleichung der Rippe:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \underbrace{\dot{Q}_{\text{Leit}} + \dot{E} + \dot{q}_{\text{Quellen}} \cdot dV}_{\text{ins Kontrollvolumen hinein}} - \underbrace{\left(\dot{Q}_{\text{Leit}} + \frac{\partial \dot{Q}_{\text{Leit}}}{\partial x} dx \right) - \left(\dot{E} + \frac{\partial E}{\partial x} dx \right)}_{\text{aus dem Kontrollvolumen heraus}} - \underbrace{\dot{Q}_{\text{Konv}} - \dot{q}_{\text{Strahl}} \cdot dA}_{\text{aus dem Kontrollvolumen heraus}}$$

Mit der Annahme, dass $\rho, \lambda, c = \text{konstant}$ gilt:

$$U = \rho \cdot c \cdot T \cdot dV$$

$$\dot{E} = \dot{m} \cdot c \cdot T = \rho \cdot u \cdot S \cdot c \cdot T$$

$$\dot{Q}_{\text{Leit}} = -\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$\dot{Q}_{\text{Konv}} = \alpha \cdot dA \cdot (T - T_{\infty})$$

Allgemeine Rippengleichung:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dV}{dx} T \right) = \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial x} (S \cdot u \cdot T)$$

$$-\frac{dA}{dx} \alpha (T - T_{\infty}) + \dot{q}_{\text{Quellen}} \frac{dV}{dx} - \dot{q}_{\text{Strahl}} \frac{dA}{dx}$$

Meisten können folgende Vereinfachungen gemacht werden:

- Konstante Querschnittsfläche S
- Keine Bewegung der Rippe $u = 0$
- Stationäre Zustände $\partial(\cdot)/\partial t = 0$
- Keine Quellen $\dot{q}_{\text{Quellen}} = 0$
- Strahlung vernachlässigbar $\dot{q}_{\text{Strahl}} = 0$

Daraus ergibt sich die zu verwendende Gleichung: oft: $\frac{dA}{dx} = P$

$$0 = \lambda \cdot S \cdot \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{dA}{dx} \cdot \alpha \cdot (T - T_{\infty}) \quad (32)$$

5.2 Kompakte Rippengleichung

Meist wird $T - T_{\infty} = \theta$ ersetzt.

Kompakte Rippengleichung: $S = \text{Querschnitt}$, $P = \text{Umfang}$

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \cdot \theta = 0 \quad m^2 := \frac{\alpha \cdot P}{\lambda \cdot S}, \left[\frac{1}{m^2} \right] \quad (33)$$

Allgemeine Lösung:

$$\theta(x) = C_1 \cdot e^{m \cdot x} + C_2 \cdot e^{-m \cdot x} \quad (34)$$

Für $m \cdot L \gg 1$ kann die Rippe als **unendlich lang** approximiert werden.

5.2.1 Lösung mit Quellterm:

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \cdot \theta + \frac{\dot{Q}'''}{\lambda} = 0 \quad (35)$$

Lösung:

$$\theta(x) = C_1 \cdot e^{m \cdot x} + C_2 \cdot e^{-m \cdot x} + \frac{\dot{Q}'''}{\lambda m^2} \quad (36)$$

5.3 Randbedingungen Rippengleichung

$N = \text{Anzahl Rippen}$

5.3.1 Bekannte Fusstemperatur

Randbedingung:

$$T(0) \stackrel{!}{=} T_{\text{Fuss}} \quad \rightarrow \quad \theta(0) = T_{\text{Fuss}} - T_{\infty} = \theta_{\text{Fuss}}$$

$$\Rightarrow \theta_{\text{Fuss}} = C_1 + C_2$$

Wärmefluss:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot S \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = -\lambda \cdot S \cdot \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0}$$

Wirkungsgrad:

$$\eta_R = \frac{\dot{q}_R}{\dot{q}_{\text{max}}} = \frac{\dot{q}_F}{\alpha \cdot A \cdot \theta_F} \quad (37)$$

5.3.2 Isolierter Rippenkopf

Randbedingung:

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0 \Rightarrow C_1 \cdot m \cdot e^{m \cdot L} - C_2 \cdot m \cdot e^{-m \cdot L} = 0$$

Lösung mit bekannter Fusstemperatur: $\theta_F = T_F - T_{\infty}$

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \frac{\cosh(m \cdot (L - x))}{\cosh(m \cdot L)}$$

Wärmefluss:

$$\dot{q} = -N \cdot \lambda \cdot S \cdot \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = \underbrace{N \cdot \lambda \cdot S \cdot m \cdot \tanh(mL)}_{\frac{1}{R}} \cdot \theta_F$$

Wirkungsgrad:

$$\eta_R = \frac{\tanh(mL)}{mL} \quad (38)$$

5.3.3 Konvektion am Rippenkopf

Randbedingung:

$$-\lambda \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = \alpha \cdot (T(L) - T_{\infty})$$

$$\rightarrow \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \theta|_{x=L}$$

$$C_1 \cdot m \cdot e^{m \cdot L} - C_2 \cdot m \cdot e^{-m \cdot L} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (C_1 \cdot e^{m \cdot L} + C_2 \cdot e^{-m \cdot L})$$

Lösung mit bekannter Fusstemperatur:

$$\theta = \theta_F \cdot \frac{\cosh(m(L - x)) + \frac{\alpha}{mL} \sinh(m(L - x))}{\cosh(mL) + \frac{\alpha}{mL} \sinh(mL)} \quad (39)$$

Wärmestrom:

$$\dot{q}_F = N \cdot \lambda \cdot S \cdot m \cdot \underbrace{\frac{\sinh(mL) + \frac{\alpha}{mL} \cosh(mL)}{\cosh(mL) + \frac{\alpha}{mL} \sinh(mL)}}_{\frac{1}{R}} \cdot \theta_F \quad (40)$$

Wirkungsgrad:

$$\eta_R = \frac{1}{mL} \cdot \frac{\sinh(mL) + \frac{\alpha}{mL} \cosh(mL)}{\cosh(mL) + \frac{\alpha}{mL} \sinh(mL)} \quad (41)$$

5.3.4 Sehr lange Rippe

Lösung:

$$\theta(x) = \theta_F \cdot e^{-m \cdot x}$$

Wärmefluss:

$$\dot{q} = \underbrace{N \cdot \lambda \cdot S \cdot m \cdot \theta_F}_{\frac{1}{R}}$$

Wirkungsgrad:

$$\eta_R = \frac{1}{mL} \quad (42)$$

5.3.5 Bekannte Kopftemperatur

Randbedingung:

$$T(L) \stackrel{!}{=} T_{\text{Kopf}} \quad \rightarrow \quad \Theta(L) = T_{\text{Kopf}} - T_{\infty} = \Theta_{\text{Kopf}}$$

$$\Rightarrow C_1 \cdot e^{m \cdot L} + C_2 \cdot e^{-m \cdot L} = \Theta_{\text{Kopf}}$$

Lösung für beidseitig eingespannt:

$$\theta = \theta_F \cdot \frac{\theta_K \sinh(mx) + \theta_F \sinh(m(L - x))}{\sinh(mL)} \quad (43)$$

Wärmestrom:

$$\dot{q}_F = \lambda \cdot S \cdot m \cdot \frac{\theta_F \cosh(mL) - \theta_K}{\sinh(mL)} \quad (44)$$

Wirkungsgrad:

$$\eta_R = \frac{\cosh(mL) - \frac{\theta_K}{\theta_F}}{mL \sinh(mL)} \quad (45)$$

5.4 Rippenwirkungsgrad

Verhältnis von maximal Möglicher und tatsächlicher Wärmeübertragung:

$$\eta_R := \frac{\text{übertragene Wärmemenge}}{\text{maximal übertragbare Wärmemenge}} \quad (46)$$

Maximale Wärmeübertragung:

$$\dot{Q}_{\text{max}} = \alpha \cdot \underbrace{P \cdot L}_A \cdot \Theta_{\text{Fuss}} \quad (47)$$

5.4.1 Optimale Rippenlänge

$$L_{\text{opt}} < \frac{1}{m} = \sqrt{\frac{\lambda \cdot S}{\alpha \cdot P}} \quad (48)$$

5.5 Runde Rippen

Allgemeine Rippengleichung:

$$\lambda \cdot \frac{d}{dr} \left(S(r) \cdot \frac{dT}{dr} \right) - \frac{dA}{dr} \cdot \alpha \cdot (T - T_{\infty}) = 0 \quad (49)$$

Resultierende DGL:

$$\frac{d^2 \Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Theta}{dr} - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda \cdot d} \cdot \Theta = 0 \quad (50)$$

Lösung:

$$\Theta(r) = C_1 \cdot I_0(m \cdot r) + C_2 \cdot K_0(m \cdot r) \quad (51)$$

6 Instationäre Wärmeleitung

6.1 Raumunabhängige Wärmeleitung

Die Temperaturverteilung ist nur abhängig von der Zeit. Der Körper ist also isotherm.

Dies gilt für $Bi \ll 1$:

$$Bi = \frac{T_i - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{R_{\text{Leit}}}{R_{\text{conv}}} = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda} \quad (52)$$

1. HS ergibt: $M = \rho \cdot V$

$$\frac{d}{dt} (M \cdot c \cdot T) = -A \cdot \alpha \cdot (T - T_{\infty}) \quad (53)$$

Lösung:

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-\frac{\alpha A}{Mc} t} = e^{-t/\tau} \quad \text{mit } \tau = \frac{Mc}{\alpha A} \quad (54)$$

$$t = -\frac{Mc}{\alpha A} \ln \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right) = -\tau \ln \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right) \quad (55)$$

A ist die Gesamte Oberfläche des Körpers
 $\tau = \frac{Mc}{\alpha A}$ entspricht der Zeit bis zur Abkühlung auf $\theta_{\text{neu}} = \theta_i / e = 36.8\% \cdot \theta_i$.

Zylinder	$\tau = \frac{\rho c D h}{2\alpha(D + 2h)}$
Kugel	$\tau = \frac{\rho c D}{6\alpha}$

Mit Quelle:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{A\alpha}{Mc} (T - T_{\infty}) + \frac{\dot{Q}'''}{\rho c} \quad (56)$$

Lösung:

$$\frac{T - T_{\infty} - \frac{M\dot{Q}'''}{\rho A \alpha}}{T_i - T_{\infty} - \frac{M\dot{Q}'''}{\rho A \alpha}} = e^{-\frac{\alpha A}{Mc} t} = e^{-t/\tau} \quad (57)$$

6.2 1D instationäre Wärmeleitung

Ist $Bi \ll 1$ nicht erfüllt, handelt es sich aber um plattenförmige Objekte, kann die Wärmeleitung in 2 Dimensionen vernachlässigt werden.

6.2.1 Wärmeleitung ohne Quellen

DGL der Wärmeleitung:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (58)$$

Randbedingungen:

$$T(x, t = 0) = T_0 \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (59)$$

$$-\lambda \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=b} = \alpha \cdot (T - T_{\infty}) \quad (60)$$

Mit der Übertemperatur:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (61)$$

Randbedingungen:

$$\Theta(x, t = 0) = T_0 - T_{\infty} \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (62)$$

$$-\lambda \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=b} = \alpha \cdot \theta(x = b, t) \quad (63)$$

6.2.2 Halbuendliche Wand

Obwohl eine Wand endlich dick ist, kann sie für bestimmte Zeiten als halbuendliche Wand betrachtet werden: solange nämlich, bis die Störung die Rückseite erreicht hat. Im Folgenden gilt als Störung, dass die Temperatur am Wandende sprunghaft steigt.

Variablentransformation: $\eta := \frac{x}{\sqrt{4 \cdot a \cdot t}}$

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} = -2 \cdot \eta \cdot \frac{dT}{d\eta} \quad (64)$$

Randbedingungen:

$$\eta \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0 \text{ oder } t \rightarrow \infty) : T(0) = T_S \quad (65)$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty \text{ oder } t \rightarrow 0) : T(\infty) = T_i \quad (66)$$

T_i die Anfangstemperatur der Platte
 T_S die Störtemperatur

Lösung:

$$\frac{T(x, t) - T_S}{T_i - T_S} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-u^2} du \equiv \text{erf}(\eta), \text{ mit } \eta = \frac{x}{\sqrt{4 \cdot a \cdot t}}$$

Wärmestrom:

$$\dot{q}_S'' = \frac{\lambda \cdot (T_S - T_i)}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot t}} \quad (67)$$

6.2.3 Diffusionslänge und Diffusionszeit

Die Stelle $\eta = 0.5$ ergibt die folgende Korrelation.

Diffusionslänge:

$$x_D = \sqrt{a \cdot t_D} \quad (68)$$

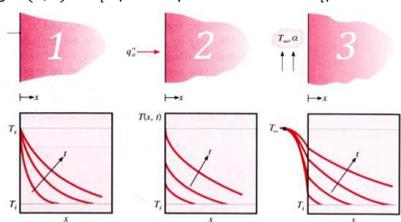
Diffusionszeit:

$$t_D = x_D^2 \cdot \frac{1}{a} = x_D^2 \cdot \frac{\rho c}{\lambda} \quad (69)$$

Beispiel:

• 3 Fälle: Anfang: $T(x, 0) = T_i$ (alle Körper haben überall T_i)

1: Wandtemperatur auf T_S erhöht und gehalten
 2: ab t_0 konstanter Wärmestrom
 3: ab t_0 konvektiver Wärmeübergang



7 Spezielle Quellterme

elektrischer Widerstand:

$$\dot{q}_{Quellen} = I^2 R_{el} = I^2 \frac{\rho_{el} \cdot L}{A} \quad (70)$$

$$\dot{q}_{Quellen}''' = \frac{\dot{q}_{Quellen}}{A \cdot L} = I^2 \frac{\rho_{el}}{A^2} \quad (71)$$

Lichtabsorption:

$$\dot{q}_{Quellen}''' = -\frac{dI(x)}{dx} = -\frac{d}{dx} (I_0 \cdot e^{-ax}) \quad (72)$$

$$\dot{q}_{Quellen}''' = a \cdot I_0 \cdot e^{-ax} \quad (73)$$

7.1 Wärmefluss Rohr

$$\dot{q}' = \dot{q}_{Quelle}''' \cdot A = \dot{q}_{Quelle}''' \cdot \pi r^2 \quad (74)$$

8 Konvektion

8.1 Wichtige Zahlen

F Fluid, K Körper

Reynoldszahl:

$$\text{Allgemein: } (\nu = \frac{\mu}{\rho}) \quad Re_L = \frac{u_\infty L_K}{\nu_F} \quad Re_D = \frac{u_\infty D_K}{\nu_F}$$

$$\text{x-Abhängig: } Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$$

$$\text{Kritische Reynoldszahl: } Re_{crit} = 10^5$$

Nusselt-Zahl:

$$\text{Allgemein: } \bar{Nu}_L = \frac{\bar{\alpha} \cdot L}{\lambda_{Fluid}}$$

$$\text{x-Abhängig: } Nu_x = \frac{\alpha \cdot x}{\lambda_{Fluid}}$$

$$\text{Prandtl-Zahl: } \text{Luft } Pr = 0.717$$

$$\text{Allgemein: } (a = \frac{\lambda}{\rho c_p}) \quad Pr = \frac{c_p \cdot \mu_F}{\lambda_F} = \frac{\nu_F}{a_F}$$

Peclet-Zahl:

$$\text{Allgemein: } Pe_L = \frac{L \cdot u}{a} = Re_L \cdot Pr_L$$

8.2 Biot-Zahl

Die Biot-Zahl gibt bei charakteristischer Länge L das Verhältnis der konvektiven Wärmeübertragung zur Wärmeleitfähigkeit wieder: (Für überströmte Platte: L = Dicke).

$$Bi = \frac{\alpha_F \cdot L_K}{\lambda_K} \left(= \frac{R_{leit}}{R_{conv}} \right) = \frac{\frac{L}{\lambda_K}}{\frac{1}{\alpha_F}} = \frac{\text{Konvektion}}{\text{Wärmeleitung}} \quad (75)$$

$$Bi = \frac{aL}{\lambda} = \frac{R_{leit}}{R_{conv}} \xrightarrow{\text{radiale Schicht } ad} \frac{d}{\lambda} = \text{Dicke}$$

• $Bi \ll 1$: $R_{conv} \gg R_{leit}$ $R_{leit} \approx 0$.

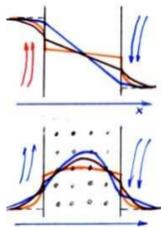
→ Verbesserung der Wärmeleitung: $\alpha \uparrow$

• $Bi \approx 1$: $R_{conv} \approx R_{leit}$.

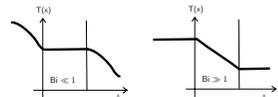
→ Verbesserung der Wärmeleitung: $\alpha \uparrow, \lambda \uparrow$

• $Bi \gg 1$: $R_{conv} \ll R_{leit}$ $R_{conv} \approx 0$.

→ Verbesserung der Wärmeleitung: $\lambda \uparrow$



- $Bi \ll 1$: ΔT gross bei Konvektion (linke Graphik)
- $Bi \approx 1$: keine Dominante Wärmeübertragung
- $Bi \gg 1$: ΔT gross bei Wärmeleitung (rechte Graphik)



$$\dot{Q} \cdot R = \Delta T,$$

8.3 Grundlagen

Wir sind an der Berechnung von α interessiert. Das α ist sehr Temperatur, Orts und Fließzustandabhängig.

Allgemeine Wärmeleitungsgleichung:

$$\dot{q}'' = \bar{\alpha} \cdot (T_0 - T_\infty) \quad (76)$$

$$\dot{q} = \bar{\alpha} \cdot A \cdot (T_0 - T_\infty) \quad (77)$$

Allgemein:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{A_0} \int_{A_0} \alpha \cdot dA_0 \quad (78)$$

ebene Platte:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x) \cdot dx \quad (79)$$

8.4 Allgemeines Vorgehen

1. Geometrie bestimmen
2. Reynoldszahl berechnen, $Re = \frac{u_\infty L}{\nu}$
3. Grenzschichtmodell bestimmen (laminar oder turbulent)
4. Nusseltzahl berechnen
5. Wärmeübergangskoeffizient: $\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{Nu_x \lambda}{x} dx$

8.5 Laminar: $Re < Re_{crit}$

8.5.1 Grenzschichtdicken:

Geschwindigkeitsgrenzschicht:

$$\delta = 4.92 \cdot x \cdot Re_x^{-1/2} \quad (80)$$

Temperaturgrenzschicht:

$$\delta_T = \delta \cdot Pr^{-1/3} \quad (81)$$

8.5.2 Nusselt-Zahl

$$Pr > 0.6 \quad Nu_x = 0.332 \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \quad (82)$$

$$Pr < 0.6 \quad Nu_x = 0.565 \cdot (Re_x \cdot Pr)^{1/2} \quad (83)$$

$$Pr_x > 100 \quad Nu_x = \frac{0.3387 \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}}{(1 + (0.0468/Pr)^{2/3})^{1/4}} \quad (84)$$

$$\bar{Nu}_{a-b} = \bar{Nu}_{0-b} - \bar{Nu}_{0-a} = \frac{\bar{\alpha}_{0-b} x_b}{\lambda} - \frac{\bar{\alpha}_{0-a} x_a}{\lambda} \quad (85)$$

8.5.3 Widerstandsbeiwert

lokal:

$$c_{f,x} = 0.664 \cdot Re_x^{-1/2} \quad (86)$$

gemittelt:

$$c_{f,L} = 1.328 \cdot Re_x^{-1/2} \quad (87)$$

8.6 Turbulent: $Re > Re_{crit}$

Widerstandsbeiwert:

$$c_{f,x} = 0.0592 \cdot Re_x^{-1/5} \quad (88)$$

Nusselt-Zahl:

$$Nu_x = 0.0296 \cdot Re_x^{4/5} \cdot Pr^{1/3} \quad (89)$$

8.7 Konvektion ebene Wand

- Fläche ist am Rand der Platte (nur laminar):
 - Nusselt-Zahl mitteln: $\bar{Nu} = 2 \cdot Nu_{x=L}$
 - $\bar{\alpha} = \frac{\bar{Nu} \cdot \lambda_{fluid}}{L}$
- Fläche ist erst im Abstand x_0 vom Plattenrand (gilt immer):
 - α lokal: $\alpha(x) = \frac{Nu_x \cdot \lambda_{fluid}}{x}$
 - Mitteln per Integral: $\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} \alpha(x) dx$

8.8 Konvektion Zylindrische Körper

1. Filmtemperatur:

$$T_{Film} = \frac{1}{2} (T_W + T_\infty) \quad (90)$$

2. Zahlen mit der Filmtemperatur berechnen:

$$Re_D = \frac{u_\infty D}{\nu(T_{Film})} \quad (91)$$

$$Pr = \frac{\nu(T_{Film})}{a_{fluid}(T_{Film})} \quad (92)$$

3. gemittelte Nusselt-Zahl:

$$\bar{Nu}_D = C \cdot Re_D^m \cdot Pr^{1/3} \quad (93)$$

Zylindrische Körper:

Re_D	C	m
0.4 - 4	0.989	0.330
4-40	0.911	0.385
40-4000	0.683	0.466
4000-40'000	0.193	0.618
40'000-400'000	0.027	0.805

Andere Geometrien:

Geometrie	Re_b	C	m
Quadrat 	$5 \cdot 10^2 - 10^5$	0.246	0.588
	$5 \cdot 10^2 - 10^5$	0.102	0.675
Sechseck 	$5 \cdot 10^2 - 1,95 \cdot 10^4$	0.160	0.638
	$1,95 \cdot 10^4 - 10^5$	0.0385	0.782
	$5 \cdot 10^3 - 10^5$	0.153	0.638
vertikale Platte 	$4 \cdot 10^2 - 1,5 \cdot 10^4$	0.228	0.731

4. Gemittelte Wärmeübergangskoeffizient:

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{Nu}_D \cdot \lambda_{fluid}}{D} \quad (94)$$

9 Problemstellungen

9.1 Wärmleitung

9.1.1 Ebene Wand, keine Quellen

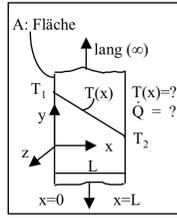
WMG: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$

Lösung: $T(x) = C_1 x + C_2$

RB1: $T(x=0) = T_1$

RB2: $T(x=L) = T_2$

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$



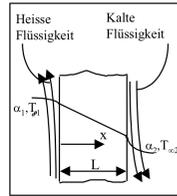
9.1.2 Ebene Wand, keine Quellen, Konvektion

WMG: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$

Lösung: $T(x) = C_1 x + C_2$

RB1: $\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha(T(0) - T_{\infty,1})$

RB2: $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = \alpha(T(L) - T_{\infty,2})$



$$T(x) = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{T_{\infty,2} - T_{\infty,1}}{2 + Bi} \cdot x + \frac{T_{\infty,1}(1 + Bi) + T_{\infty,2}}{2 + Bi}$$

9.1.3 Rohrisolation, keine Quellen

WMG: $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$

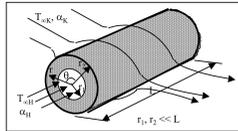
Lösung: $T(r) = C_1 \cdot \ln(r) + C_2$

Wir kennen Wandtemperaturen)

RB1: $T(r = r_1) = T_1 = T_{\infty,H}$

RB2: $T(r = r_2) = T_2 = T_{\infty,K}$

$$T(r) = \frac{T_{\infty,H} - T_{\infty,K}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) + T_{\infty,K}$$



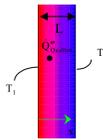
9.1.4 Ebene Wand mit konst. Wärmequellen

WMG: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{Q}'''_{Quellen}}{\lambda} = 0$

Lösung: $T(x) = -\frac{\dot{Q}'''_{Quellen}}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2$

RB1: $T(x=0) = T_1$

RB2: $T(x=L) = T_2$



$$T(x) = -\frac{\dot{Q}'''_{Quellen}}{2\lambda} \cdot x^2 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\dot{Q}'''_{Quellen} L}{2\lambda} \right) \cdot x + T_1$$

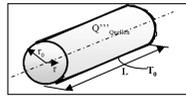
Maximum: $x_e = \frac{L}{2} + \frac{T_2 - T_1}{L} \cdot \frac{\lambda}{\dot{Q}'''_{Quellen}}$

9.1.5 Zylinder mit Wärmequellen

WMG: $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{Q}'''_{Quellen}}{\lambda} = 0$

RB1: $\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$ (Symmetrie)

RB2: $T(r = r_0) = T_0$

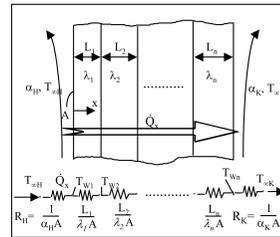


Lösung: $T(r) = -\frac{\dot{Q}'''_{Quellen}}{4\lambda} r^2 + C_1 \ln(r) + C_2$

$$T(r) = \frac{\dot{Q}'''_{Quellen} \cdot r_0^2}{4\lambda} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) + T_0$$

9.2 Widerstandsdarstellung

9.2.1 Mehrschichtige Wand



Der Wärmefluss durch die Wand ist:

$$\dot{Q}_x = \frac{1}{R_G} \cdot (T_{\infty,H} - T_{\infty,K})$$

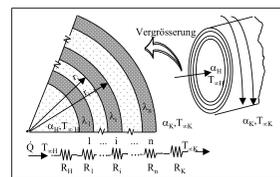
Mit dem Gesamtwiderstand R_G :

$$R_G = \frac{1}{\alpha_H A} + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\lambda_i A} + \frac{1}{\alpha_K A}$$

Der Wärmedurchgangskoeffizient für diese Wand ist dann:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_H} + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_K}} \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$$

9.2.2 Mehrschichtige Rohrisolation



Der Wärmefluss durch das Rohr ist:

$$\dot{Q}_r = \frac{1}{R_G} \cdot (T_{\infty,H} - T_{\infty,K})$$

Mit dem Gesamtwiderstand R_G :

$$R_G = \frac{1}{2\pi r_H L \alpha_H} + \sum_{i=1}^n \frac{\ln(r_{i+1}/r_i)}{2\pi L \lambda_i} + \frac{1}{2\pi r_K L \alpha_K}$$

Der Wärmedurchgangskoeffizient für eine Rohrlänge ist dann:

$$k(r_x) = \frac{1}{\frac{r_x}{r_H \alpha_H} + r_x \sum_{i=1}^n \frac{\ln(r_{i+1}/r_i)}{\lambda_i} + \frac{r_x}{r_K \alpha_K}} \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$$

Es gilt nun: $\dot{Q}_r = k(r) \cdot A(r) \cdot (T_{\infty,H} - T_{\infty,K})$

Der lineare k-Wert k_L ist definiert als:

$$\dot{Q}_r = k_L \cdot L \cdot (T_{\infty,H} - T_{\infty,K}) \Rightarrow k_L = k(r_x) \cdot 2\pi \cdot r_x$$

Somit ist k_L (Wärmeverlust pro Meter Rohr):

$$k_L = \frac{\dot{Q}_r}{L \Delta T} = \frac{2\pi}{\frac{1}{r_H \alpha_H} + \sum_{i=1}^n \frac{\ln(r_{i+1}/r_i)}{\lambda_i} + \frac{1}{r_K \alpha_K}} \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$$

9.2.3 Kritischer Rohrradius

Entgegen der Intuition resultiert mehr Isolationsmaterial nicht zwingend in besserer Isolation. Denn je dicker die Rohrwand, desto besser ist zwar die Isolation bezüglich der Wärmeleitung, aber auch der Wärmeverlust aufgrund der Konvektion nimmt zu. Werden **Wärmeleitung durch das Isolationsmaterial und Konvektion an der Aussenwand** berücksichtigt, gilt für den Wärmeleitwiderstand:

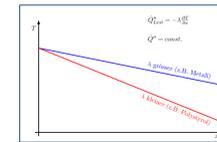
$$R_{th} = \left(\underbrace{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L \lambda}}_{\text{Leitung}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi r_2 L \alpha}}_{\text{Konvektion}} \right) \Rightarrow \frac{\partial R_{th}}{\partial r_2} \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow r_{krit} = \frac{\lambda}{\alpha}$$

9.3 Temperaturverläufe

9.3.1 Ebene Objekte

Wärmeleitung:

- Linear
- steiler für kleineres λ



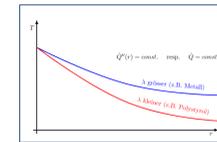
Konvektion:

- exponentieller Verlauf
- grosse Krümmung für grosse α

9.3.2 Gekrümmte Objekte

Wärmeleitung:

- Zylinder: logarithmisch
- Kugel: $\frac{1}{r}$
- Allgemein: gekrümmt
- steiler für kleineres λ

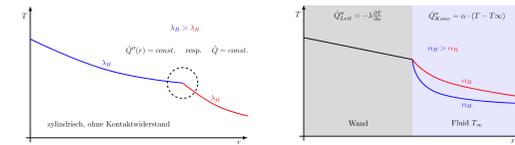


Konvektion:

- exponentieller Verlauf steiler als bei Wärmeleitung
- grosse Krümmung für grosse α

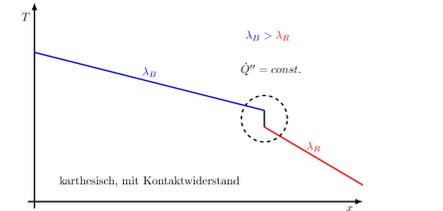
9.3.3 Materialübergänge

Steigung an Material allgemein unstetig.



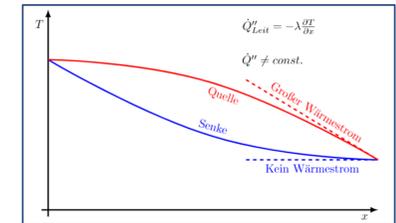
9.3.4 Kontaktwiderstände

Führen zu unstetigkeit im Temperaturprofil



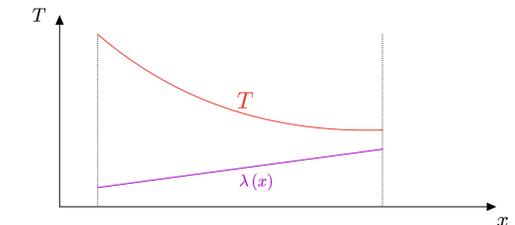
9.3.5 Wärmequellen/Wärmesenken

Temperaturverlauf ist nicht mehr linear



9.3.6 Lineare Wärmeleitfähigkeit

Der Temperaturverlauf ist nicht mehr linear, wenn die Wärmeleitfähigkeit eine Funktion des Ortes ist.



9.3.7 Kontakttemperatur zwei Platten

Die Kontakttemperatur zweier halbenendlicher Körper lautet:

$$T_{kon} = \frac{\sqrt{\lambda_1 \rho_1 c_1} T_{1,i} + \sqrt{\lambda_2 \rho_2 c_2} T_{2,i}}{\sqrt{\lambda_1 \rho_1 c_1} + \sqrt{\lambda_2 \rho_2 c_2}} \quad (95)$$

9.3.8 Diverse Aufgaben:

• ebene Wand, keine Quellen:

gegeben: T_1, T_2, L
 Ansatz: $T = C_1 x + C_2$
 RB1: $T(x=0) = T_1 = C_2 \Rightarrow C_2 = T_1$
 RB2: $T(x=L) = T_2 = C_1 L + T_1 \Rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$
 Lösung: $T = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$

• ebene Wand, keine Quellen, auf beiden Seiten Konvektion:

gegeben: $\lambda, T_{\infty,1}, \alpha_1, T_{\infty,2}, \alpha_2, L$
 Ansatz: $T = C_1 x + C_2$
 RB1: $+\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \alpha_1 (T(0) - T_{\infty,1})$
 $+ \lambda C_1 = \alpha_1 (C_2 - T_{\infty,1}) \Rightarrow C_1 = \frac{T_{\infty,2} - T_{\infty,1}}{\frac{\lambda}{\alpha_1} + L}$

RB2: $-\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = \alpha_2 (T(L) - T_{\infty,2})$
 $-\lambda C_1 = \alpha_2 (C_1 L + C_2 - T_{\infty,2}) \Rightarrow C_2 = T_{\infty,1} + \frac{T_{\infty,2} - T_{\infty,1}}{1 + \frac{\alpha_1 L}{\alpha_2} + \frac{\lambda}{\alpha_2}}$

Lösung: $T = \frac{T_{\infty,2} - T_{\infty,1}}{\frac{\lambda}{\alpha_1} + L} x + T_{\infty,1} + \frac{T_{\infty,2} - T_{\infty,1}}{1 + \frac{\alpha_1 L}{\alpha_2} + \frac{\lambda}{\alpha_2}}$

• Rohrisolation, keine Quellen:

gegeben: r_1, T_1, r_2, T_2
 Ansatz: $T = C_1 \ln r + C_2$
 RB1: $T(r=r_1) = T_1 = C_1 \ln r_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$
 RB2: $T(r=r_2) = T_2 = C_1 \ln r_2 + C_2 \Rightarrow C_2 = T_1 - \frac{(T_2 - T_1) \ln r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$
 Lösung: $T = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1} + T_1 = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_2} + T_2$

• Ebene Wand mit konstanten Wärmequellen:

gegeben: $T_1, T_2, L, \dot{q}'''_{Quellen}$
 Ansatz: $T = -\frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2$
 RB1: $T(x=0) = T_1 = C_2 \Rightarrow C_2 = T_1$
 RB2: $T(x=L) = T_2 = -\frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{2\lambda} L^2 + C_1 L + T_1$
 $\Rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\dot{q}'''_{Quellen} L}{2\lambda}$

Lösung: $T = -\frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{2\lambda} x^2 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\dot{q}'''_{Quellen} L}{2\lambda} \right) x + T_1$
 Maximum: $\frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_{max}} = 0 \Rightarrow x_{max} = \frac{L}{2} + \frac{T_2 - T_1}{L} \frac{\lambda}{\dot{q}'''_{Quellen}}$

⚠ Immer überprüfen ob $\frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_{max}} < 0$

• Zylinder mit Wärmequellen:

gegeben: $r_0, T_0, \dot{q}'''_{Quellen}$
 Ansatz: $T = -\frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{4\lambda} r^2 + C_1 \ln r + C_2$
 RB1: $\dot{q}''(0) = 0 = \lambda \frac{dT}{dr} \Big|_{r=0} = C_1 \cdot \frac{1}{r} \Big|_{r=0} \Rightarrow C_1 = 0$
 RB2: $T(r_0) = T_0 = -\frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{4\lambda} r_0^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = T_0 + \frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{4\lambda} r_0^2$
 Lösung: $T = \frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{4\lambda} \cdot (r_0^2 - r^2) + T_0$

9.3.9 Laserabsorption

• gegeben: $\lambda_1, T_1, T_2, d, I_0, \alpha$
 • gesucht: $T(x)$
 Ansatz: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{\lambda} = -\frac{\alpha \cdot I_0 \cdot e^{-\alpha x}}{\lambda}$
 $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{I_0 \cdot e^{-\alpha x}}{\lambda} + C_1$
 $T(x) = -\frac{I_0 \cdot e^{-\alpha x}}{\lambda \cdot \alpha} + C_1 x + C_2$

RB1: $T(0) = T_1 = -\frac{I_0}{\lambda \cdot \alpha} + C_2 \Rightarrow C_2 = T_1 + \frac{I_0}{\lambda \cdot \alpha}$
 RB2: $T(d) = T_2 = -\frac{I_0 \cdot e^{-\alpha d}}{\lambda \cdot \alpha} + C_1 d + T_1 + \frac{I_0}{\lambda \cdot \alpha}$
 $\Rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1 + \frac{I_0}{\lambda \cdot \alpha} (e^{-\alpha d} - 1)}{d}$

Lösung: $T(x) = -\frac{I_0 \cdot e^{-\alpha x}}{\lambda \cdot \alpha} + \frac{T_2 - T_1 + \frac{I_0}{\lambda \cdot \alpha} (e^{-\alpha d} - 1)}{d} x + T_1 + \frac{I_0}{\lambda \cdot \alpha}$

9.3.10 Wärmeleitung mit Wärmequelle

• gegeben: $\lambda_1, \lambda_2, \alpha, T_{\infty}, L, d, \dot{q}'''_{Quellen}$
 • gesucht: $T(x)$
 Ansätze: $T_1 = -\frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{2\lambda_1} x^2 + C_1 x + C_2$
 $T_2 = C_3 x + C_4$

RB1: $\dot{q}''_1 \Big|_{x=0} = 0 = \lambda \frac{dT_1}{dx} \Big|_{x=0} = C_1 \Rightarrow C_1 = 0$

RB2: $\dot{q}''_1 \Big|_{x=L} = -\lambda_1 \left(-\frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{\lambda_1} L \right) = -\lambda_2 C_3 = \dot{q}''_2 \Big|_{x=L}$
 $\Rightarrow C_3 = -\frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{\lambda_2} L$

RB3: $T_1(L) = -\frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{2\lambda_1} L^2 + C_2 = -\frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{\lambda_2} L^2 + C_4 = T_2(L)$

RB4: $\dot{q}''_2 \Big|_{x=L+d} = -\lambda_2 \left(-\frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{\lambda_2} L \right) = \alpha (T_2(L+d) - T_{\infty}) = \dot{q}''_{conv}$
 $\frac{\dot{q}'''_{Quellen} \cdot L}{\alpha} + T_{\infty} = -\frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{\lambda_2} \cdot L(L+d) + C_4$
 $\Rightarrow C_4 = \dot{q}'''_{Quellen} \cdot L \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{L+d}{\lambda_2} \right) + T_{\infty}$

RB3: $-\frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{2\lambda_1} L^2 + C_2 = -\frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{\lambda_2} L^2 + \dot{q}'''_{Quellen} \cdot L \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{L+d}{\lambda_2} \right) + T_{\infty}$
 $\Rightarrow C_2 = \dot{q}'''_{Quellen} \cdot L \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{L}{2\lambda_1} + \frac{d}{\lambda_2} \right) + T_{\infty}$

Lösung: $T(x) = \begin{cases} T_1 = -\frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{2\lambda_1} x^2 + \dot{q}'''_{Quellen} \cdot L \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{L}{2\lambda_1} + \frac{d}{\lambda_2} \right) + T_{\infty} \\ T_2 = -\frac{\dot{q}'''_{Quellen}}{\lambda_2} x + \dot{q}'''_{Quellen} \cdot L \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{L+d}{\lambda_2} \right) + T_{\infty} \end{cases}$

9.4 Widerstandsdarstellung

9.4.1 Wärmeleitwiderstand

• gegeben: $T_{\infty,h}, \alpha_h, T_{\infty,c}, \alpha_c, \lambda_1, L_1, \lambda_2, L_2, A \cdot R_{contact}$
 • gesucht: T_1, T_2, T_3, T_4
 • Vorgehen: zuerst alle $(A \cdot R)_i$ berechnen, dann q'' und daraus $T_{1,2,3,4}$

$A \cdot R_{conv,c} = \frac{1}{\alpha_c}, A \cdot R_{leit,\lambda_2} = \frac{L_2}{\lambda_2}, A \cdot R_{leit,\lambda_1} = \frac{L_1}{\lambda_1}, A \cdot R_{conv,h} = \frac{1}{\alpha_h}$
 $q'' = \frac{\Delta T}{A \cdot R_{net}} = \frac{\Delta T}{(A \cdot R_{conv,c} + A \cdot R_{leit,\lambda_2} + A \cdot R_{contact} + A \cdot R_{leit,\lambda_1} + A \cdot R_{conv,h})}$
 $T_1 = T_{\infty,c} + q'' (A \cdot R_{conv,c}) \quad T_2 = T_1 + q'' (A \cdot R_{leit,\lambda_2})$
 $T_3 = T_2 + q'' (A \cdot R_{contact}) \quad T_4 = T_3 + q'' (A \cdot R_{leit,\lambda_1})$
 (check: $T_{\infty,h} = T_4 + q'' (A \cdot R_{conv,h})$)

• falls zylindrisch: $(L \cdot R)_i$ und q' statt $(A \cdot R)_i$ und q''

9.4.2 Ebene Wand mit Konvektion an den Oberflächen

Widerstandsdarstellung:

$$\dot{Q} = \frac{T_{1,\infty} - T_{2,\infty}}{R_{tot}} \quad (96)$$

Integriert ergibt dies:

$$T(x) = \frac{T_{2,\infty} - T_{1,\infty}}{2 + Bi} \frac{\alpha}{\lambda} x + \frac{T_{2,\infty} - T_{1,\infty}}{2 + Bi} + T_{1,\infty} \quad (97)$$

Biot Zahl:

$$Bi = \frac{\alpha L}{\lambda} \quad (98)$$

9.4.3 Wärmefluss durch Rohrisolation

Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (99)$$

Komplette Lösung:

$$T(r) = \frac{T_{H,\infty} - T_{K,\infty}}{\ln(r_1/r_2)} \ln \left(\frac{r}{r_2} \right) + T_{K,\infty} \quad (100)$$

9.4.4 Kritischer Rohrradius

Wärmefluss durch ein Rohr mit Isolation. Je dicker die Isolation, desto besser ist die Isolation, aber dafür ist die Oberfläche grösser → höhere Konvektion.

Widerstand:

$$R_{th} = \left(\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L \lambda} + \frac{1}{2\pi r_2 L \alpha} \right) \quad (101)$$

kritischer Radius:

$$\Rightarrow \frac{\partial R_{th}}{\partial r_2} \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow r_{krit} = \frac{\lambda}{\alpha} \quad (102)$$

9.5 Rippen

9.5.1 Rippen zwischen zwei Flächen eingespannt

• Vorgehen: 1.HS: $\dot{q}_L = \dot{q}_F - \dot{q}_K$
 dabei gilt: $\theta_K = 0$
 und $\theta_F = T_1 - T_{\infty}$
 $\dot{q}_F = \lambda \cdot S \cdot m \cdot \frac{\theta_F \cosh(mL)}{\sinh(mL)}$
 $\dot{q}_K = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L}$

$\dot{q}_K = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta_K \sinh(mx) + \theta_F \sinh(m(L-x))}{\sinh(mL)} \right) \Big|_{x=L}$
 $= -\lambda \cdot S \cdot \theta_F \cdot \frac{\cosh(0)}{\sinh(mL)} \cdot (-m) = \lambda \cdot S \cdot m \cdot \theta_F \cdot \frac{1}{\sinh(mL)}$
 $\dot{q}_L = \lambda \cdot S \cdot m \cdot \theta_F \cdot \frac{(\cosh(mL) - 1)}{\sinh(mL)}$

9.5.2 Korrelation 2 Gleichlanger Rippen

• Ausgangslage: 2 gleichlange, lange Rippen mit gleichem Durchmesser aber aus anderem Material
 • gegeben: $T_W, T_A, T_B, T_{\infty}, \lambda_A$
 • gesucht: λ_B
 • Vorgehen: Lösungen für lange Rippen benutzen.

$\theta_A = \theta_{F,A} e^{-m_A x_1} \Rightarrow (T_A - T_{\infty}) = (T_W - T_{\infty}) e^{-m_A x_1}$
 $\Rightarrow \ln \left(\frac{T_A - T_{\infty}}{T_W - T_{\infty}} \right) = -m_A x_1$
 $\theta_B = \theta_{F,B} e^{-m_B x_1} \Rightarrow (T_B - T_{\infty}) = (T_W - T_{\infty}) e^{-m_B x_1}$
 $\Rightarrow \ln \left(\frac{T_B - T_{\infty}}{T_W - T_{\infty}} \right) = -m_B x_1$
 $\frac{\ln \left(\frac{T_A - T_{\infty}}{T_W - T_{\infty}} \right)}{\ln \left(\frac{T_B - T_{\infty}}{T_W - T_{\infty}} \right)} = \frac{m_A}{m_B} = \sqrt{\frac{\lambda_B}{\lambda_A}} \Rightarrow \lambda_B = \lambda_A \cdot \left(\frac{\ln \left(\frac{T_A - T_{\infty}}{T_W - T_{\infty}} \right)}{\ln \left(\frac{T_B - T_{\infty}}{T_W - T_{\infty}} \right)} \right)^2$

9.6 Instationäre Wärmeleitung

9.6.1 Abkühlung zweier Kugeln

• Ausgangslage: Eine Aluminium- und eine Stahlkugel werden aus dem Ofen genommen und mit einem Luftstrom gekühlt (α, T_{∞}).
 • gegeben: $Bi \ll 1, \rho_{al}, \rho_{st}, c_{al}, c_{st}, \alpha, T_{\infty}, T_i, D$
 • gesucht: ΔT nach $t, t_{max\Delta T}$

$T_{al} = T_{\infty} + (T_i - T_{\infty}) e^{\tau_{al} t}$
 $T_{st} = T_{\infty} + (T_i - T_{\infty}) e^{\tau_{st} t}$
 $\Delta T = T_{st} - T_{al} = (T_i - T_{\infty}) \left(e^{\tau_{st} t} - e^{\tau_{al} t} \right)$
 $\frac{d\Delta T}{dt} = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{\tau_{st} t} - e^{\tau_{al} t} \right) = \tau_{st} e^{\tau_{st} t} - \tau_{al} e^{\tau_{al} t} = 0$
 $\frac{\tau_{al}}{\tau_{st}} = \frac{e^{\tau_{al} t}}{e^{\tau_{st} t}} = e^{t \left(\frac{\tau_{al}}{\tau_{st}} - 1 \right)} \Rightarrow t_{max\Delta T} = \frac{\ln \left(\frac{\tau_{al}}{\tau_{st}} \right)}{\frac{\tau_{al}}{\tau_{st}} - 1}$

9.7 Chipkühlung 1

• Ausgangslage: Kühlung eines quadratischen Chips
 • gegeben: $u_{\infty}, T_{\infty}, T_{chip}, d, \nu, Pr (> 0.6), \lambda_{fluid}$
 • gesucht: \dot{q}_{conv}
 $Re_L = \frac{u_{\infty} \cdot d}{\nu} < Re_{crit} \Rightarrow \text{laminar}$
 $Nu_x = 0.332 \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$
 $\bar{Nu} = 2 \cdot Nu_{x=L} = 0.664 \cdot Re_L^{1/2} \cdot Pr^{1/3} = 0.664 \cdot \left(\frac{u_{\infty} \cdot d}{\nu} \right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$
 $\bar{\alpha} = \frac{\bar{Nu} \cdot \lambda_{fluid}}{L} = \frac{0.664 \cdot \left(\frac{u_{\infty} \cdot d}{\nu} \right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{fluid}}{d} = 0.664 \cdot \left(\frac{u_{\infty}}{\nu \cdot d} \right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{fluid}$
 $\dot{q}_{conv} = \bar{\alpha} A (T_W - T_{\infty}) = \bar{\alpha} d^2 (T_{chip} - T_{\infty})$

9.8 Chipkühlung 2

• alles gleich wie vorher – nur der Chip ist anders positioniert

$$Re_L = \frac{u_{\infty} \cdot 2d}{\nu} < Re_{crit} \Rightarrow \text{laminar}$$

$$Nu_x = 0.332 \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$$

$$\alpha(x) = \frac{Nu_x \cdot \lambda_{fluid}}{x} = 0.332 \cdot \left(\frac{u_{\infty} x}{\nu}\right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{fluid} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 0.332 \cdot \left(\frac{u_{\infty}}{\nu}\right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{fluid} \cdot x^{-1/2}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{d} \int_d^{2d} \alpha(x) dx = \frac{1}{d} \cdot 0.332 \cdot \left(\frac{u_{\infty}}{\nu}\right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{fluid} \cdot \int_d^{2d} x^{-1/2} dx$$

$$= 2 \left[x^{1/2} \right]_d^{2d} = 2 \left[(2d)^{1/2} - d^{1/2} \right]$$

$$= 0.664 \cdot \left(\frac{u_{\infty}}{\nu}\right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{fluid} \cdot \frac{(2d)^{1/2} - d^{1/2}}{d}$$

$$\dot{q}_{conv} = \bar{\alpha} A (T_W - T_{\infty}) = \bar{\alpha} d^2 (T_{chip} - T_{\infty})$$

• andere Variante: $\bar{\alpha} = 2 \cdot \bar{\alpha}_{von 0 \text{ bis } 2d} - \bar{\alpha}_{von 0 \text{ bis } d}$

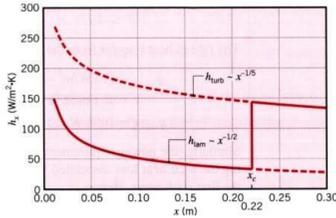
$$\bar{\alpha} = 2 \left[\frac{0.664 \left(\frac{u_{\infty} \cdot 2d}{\nu}\right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{fluid}}{2d} \right] - \left[\frac{0.664 \left(\frac{u_{\infty} \cdot d}{\nu}\right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{fluid}}{d} \right]$$

$$= (2d)^{1/2} - d^{1/2} \left[\frac{0.664 \left(\frac{u_{\infty} \cdot 2d}{\nu}\right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{fluid}}{d} \right]$$

• Diskussion: Allgemein lässt sich sagen, je weiter weg der Chip vom Rand platziert ist, desto kleiner ist die Kühlung, da $\frac{(2d)^{1/2} - d^{1/2}}{d} < \frac{1}{d^{1/2}}$.

⚠ Dies gilt nur, solange man im laminaren Bereich ist, sobald es turbulent wird, gilt eine andere Gleichung.

Eine dritte Variante wäre, den lokalen Wert $\alpha(x)$ zu nehmen, an der Stelle $x = 1.5d$, was ungenauer ist, da $\alpha(x) \propto x^{-1/2}$ ist und nicht linear, was in der Graphik erkennbar ist.



9.9 Raumisoliation

• Ausgangslage: Es soll die Isolation von 2 Zimmern verglichen werden.

• gegeben: $u_{\infty} = 10 \frac{m}{s}$
 $T_{\infty, a} = -23^{\circ}C$ $T_{\infty, i} = 20^{\circ}C$
 $\bar{\alpha}_i = 10 \frac{W}{m^2K}$ $Pr = 0.72$
 $t = 0.008m$ $h = 2.5m$
 $\nu_{air} = 11.44 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$
 $\lambda_{glas} = 0.058 \frac{W}{mK}$
 $\lambda_{air} = 22.3 \cdot 10^{-3} \frac{W}{mK}$

• gesucht: \dot{q}_A, \dot{q}_B

• $Re_{crit} = 10^5 = \frac{u_{\infty} \cdot x_{crit}}{\nu_{air}} \Rightarrow x_{crit} = 0.1m$

\Rightarrow die ganze Strömung wird als turbulent betrachtet

$$Nu_x = 0.0296 \cdot Re_x^{4/5} \cdot Pr^{1/3}$$

• Zimmer A: $\dot{q}_A = \frac{T_{\infty, i} - T_{\infty, a}}{R_{net, A}} = \frac{1}{\frac{1}{\bar{\alpha}_i} + \lambda_{glas} \frac{t}{d} + \frac{1}{\bar{\alpha}_A}}$

$$\alpha_A(x) = \frac{Nu_x \cdot \lambda_{air}}{x} = 0.0296 \cdot \left(\frac{u_{\infty}}{\nu_{air}}\right)^{4/5} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{air} \cdot x^{-0.2}$$

$$\bar{\alpha}_A = \frac{1}{4} \int_0^4 \alpha(x) dx = \frac{1}{4} \cdot 0.0296 \cdot \left(\frac{u_{\infty}}{\nu_{air}}\right)^{4/5} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{air} \cdot \int_0^4 x^{-0.2} dx$$

$$\bar{\alpha}_A = \frac{1}{4} \cdot 0.0296 \cdot \left(\frac{u_{\infty}}{\nu_{air}}\right)^{4/5} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{air} \cdot \frac{1}{0.8} \cdot [4^{0.8}] = 31.8 \frac{W}{m^2K}$$

$$\dot{q}_A = \frac{T_{\infty, i} - T_{\infty, a}}{R_{net, A}} = \frac{1}{\frac{1}{\bar{\alpha}_i} + \lambda_{glas} \frac{t}{d} + \frac{1}{\bar{\alpha}_A}} = 1596W$$

• Zimmer B: $\dot{q}_B = \frac{T_{\infty, i} - T_{\infty, a}}{R_{net, B}} = \frac{1}{\frac{1}{\bar{\alpha}_i} + \lambda_{glas} \frac{t}{d} + \frac{1}{\bar{\alpha}_B}}$

$$\alpha_B(x) = \frac{Nu_x \cdot \lambda_{air}}{x} = 0.0296 \cdot \left(\frac{u_{\infty}}{\nu_{air}}\right)^{4/5} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{air} \cdot x^{-0.2}$$

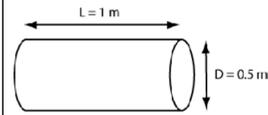
$$\bar{\alpha}_B = \frac{1}{6} \int_5^{11} \alpha(x) dx = \frac{1}{6} \cdot 0.0296 \cdot \left(\frac{u_{\infty}}{\nu_{air}}\right)^{4/5} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{air} \cdot \int_5^{11} x^{-0.2} dx$$

$$\bar{\alpha}_B = \frac{0.0296}{6} \cdot \left(\frac{u_{\infty}}{\nu_{air}}\right)^{4/5} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{air} \cdot \frac{1}{0.8} \cdot [11^{0.8} - 5^{0.8}] = 22.2 \frac{W}{m^2K}$$

$$\dot{q}_B = \frac{T_{\infty, i} - T_{\infty, a}}{R_{net, B}} = \frac{1}{\frac{1}{\bar{\alpha}_i} + \lambda_{glas} \frac{t}{d} + \frac{1}{\bar{\alpha}_B}} = 2280W$$

• Diskussion: Trotz des kleineren $\bar{\alpha}$ ist die verlorene Wärme in B viel grösser, was daraus folgt, dass die äussere Konvektion relativ wenig zur Isolation beiträgt und so die grössere Fläche des Fensters B viel stärker ins Gewicht fällt.

9.10 Ölbombe



• Ausgangslage: Ein Fass mit heissem Öl aus einem Flugzeug mit Höhe h abgeworfen, wobei die Zylinderachse quer zur Fallrichtung steht.

• Annahmen:
 - $u_{\infty} = const.$
 - T nur von t abhängig

• gegeben: $u_{\infty}, h, T_{\infty}, T_i, D, L, d_{stahlwand}, \rho_{öl}, c_{p, öl}, \rho_{st}, c_{p, st}$
 $\lambda_{air}, \rho_{air}, c_{p, air}, \mu_{air}, \alpha_s = \alpha_{stirrfäche}$

• gesucht: T wenn die Bombe am Boden auftrifft

• Vorgehen: instationäre Wärmeleitung, wobei $\bar{\alpha}_M = \alpha_{Mantelfläche}$ zuerst gefunden werden muss mit der erzwungenen Konvektion.

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-\frac{\alpha A}{Mc} t} \Rightarrow e^{-\frac{2\alpha_s S + \bar{\alpha}_M A_M}{M_{öl} c_{p, öl} + M_{st} c_{p, st}} t}$$

• Berechnen von $\bar{\alpha}_M$:

$$Re_D = \frac{u_{\infty} D}{\nu} = \frac{\rho u_{\infty} D}{\mu} \Rightarrow \text{liegt zwischen } 40'000 \text{ und } 400'000$$

$$\overline{Nu}_D = C \cdot Re_D^m \cdot Pr^{1/3} = 0.027 \cdot \left(\frac{\rho u_{\infty} D}{\mu}\right)^{0.805} \cdot \left(\frac{c_p \mu}{\lambda}\right)^{1/3}$$

$$\bar{\alpha}_M = \frac{\overline{Nu}_D \cdot \lambda_{air}}{D}$$

• Restliche benötigte Grössen berechnen:

$$S = \frac{D^2 \pi}{4} \quad A_M = D \pi L$$

$$M_{öl} = \rho_{öl} V_{öl} = \rho_{öl} \cdot \frac{D^2 \pi L}{4}$$

$$M_{st} = \rho_{st} V_{st} = \rho_{st} \cdot O_{st} \cdot d_{st} = \rho_{st} \cdot \left(\pi D \left(\frac{D}{2} + L\right)\right) \cdot d_{st}$$

$$t = \frac{h}{u_{\infty}}$$

• Schliesslich alle Grössen einsetzen und nach T auflösen

$$\Rightarrow T = T_{\infty} + (T_i - T_{\infty}) e^{-\frac{2\alpha_s S + \bar{\alpha}_M A_M}{M_{öl} c_{p, öl} + M_{st} c_{p, st}} t}$$

Thermodynamik II CAPS

Jorit Geurts jgeurts@student.ethz.ch

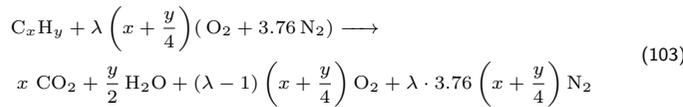
1 Verbrennungsprozesse

1.1 Definitionen

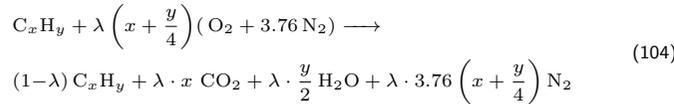
Molspezifisch	$n = \frac{m}{M}, [m] = [kg], [n] = [kmol]$ und $[M] = \left[\frac{kg}{kmol}\right]$
Ströme	$\dot{n} = \frac{\dot{m}}{M}, \dot{n} = \left[\frac{kmol}{s}\right], \dot{m} = \left[\frac{kg}{s}\right]$
Chemische Reaktion	$\sum_j \nu'_j \cdot M_j \rightarrow \sum_j \nu''_j \cdot M_j$, es kann sein dass: $ n = \nu$
Mol-/Volumenanteil	$X_i = \frac{n_i}{n_{tot}} = \frac{p_i}{p_{tot}}, \sum_i X_i = 1$
Massenanteil	$Y_i = \frac{m_i}{m_{tot}} = X_i \cdot M_i \frac{\sum_j n_j \cdot M_j}{\sum_j n_j \cdot M_j}$
Molare Konzentration	$c_i = \frac{n_i}{V_{tot}}$
Partialdruck	$p_i = p_{tot} \cdot \frac{n_i}{n_{tot}} = p_{tot} \cdot X_i$
Luftüberschussfaktor	$\lambda = \frac{(m_L/m_B)_{real}}{(m_L/m_B)_{stoch}} = \frac{(n_L/n_B)_{real}}{(n_L/n_B)_{stoch}}$

1.2 Reaktionsgleichung von C_xH_y an Luft

1.2.1 Mager: $\lambda \geq 1$

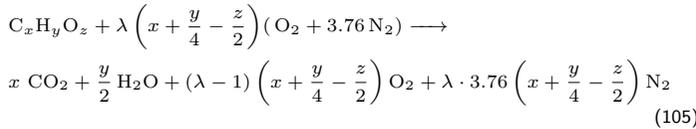


1.2.2 Fett: $\lambda < 1$

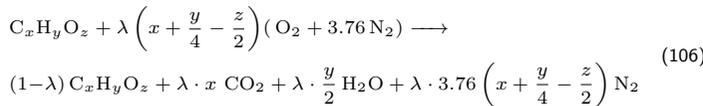


1.3 Reaktionsgleichung von $C_xH_yO_z$ an Luft

1.3.1 Mager: $\lambda \geq 1$



1.3.2 Fett: $\lambda < 1$



1.4 Heizwert und Heizleistung

Heizwert = Reaktionsenthalpie bei $T = T_R = T_P = T_{ref}$

Heizwert: Oberer = (H_2O) ist flüssig, Unterer = (H_2O) ist gasförmig

$$H_O = -\Delta H_R = -(H_{Produkte} - H_{Edukte}), \quad H_i = \sum_j n_j \bar{h}_j \quad (107)$$

Heizleistung: wenn nichts steht H_U verwenden

$$P = H_{U,O} \cdot \dot{m}_{fuel} \quad (108)$$

1.5 stöchiometrische Verbrennung Kohlenwasserstoffe

$$\left(\frac{m_L}{m_B}\right)_{stoch} = \left(x + \frac{y}{4}\right) \frac{M_{O_2} + 3.76 \cdot M_{N_2}}{x \cdot M_C + y \cdot M_H} \quad (109)$$

$$\left(\frac{n_L}{n_B}\right)_{stoch} = 3.76 \left(x + \frac{y}{4}\right)$$

1.6 Abgasrückführung

$$X_{EGR} = \frac{\dot{n}_{EGR}}{\dot{n}_{tot}} = \frac{n_{EGR}}{n_{tot}} = \frac{n_x}{1 + n_x} \quad (110)$$

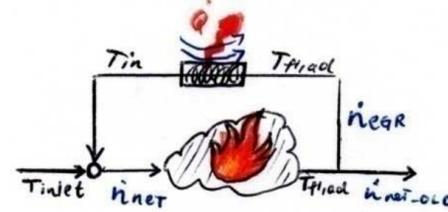
Reaktionsgleichung:



1.6.1 Verbrennungsprodukte im Abgas

$$X_{O_2} = \frac{(\lambda - 1) \left(x + \frac{y}{4}\right)}{x + \frac{y}{2} + [\lambda \cdot 3.76 + (\lambda - 1)] \left(x + \frac{y}{4}\right)}$$

$$X_{CO_2} = \frac{x}{x + \frac{y}{2} + [\lambda \cdot 3.76 + (\lambda - 1)] \left(x + \frac{y}{4}\right)}$$



Idee: Rückgeführte Abgase kühlen sich wieder auf die Einlasstemperatur ab und müssen von neuem aufgeheizt werden.
 $T_{f,ad} \downarrow$

$$X_{EGR} = \frac{\dot{n}_{EGR}}{\dot{n}_{net}} = \frac{n_{EGR}}{n_{net}} = \frac{n_x \cdot n_{net,old}(\text{as if no EGR})}{(1 + n_x) \cdot n_{net,old}} = \frac{n_x}{1 + n_x}$$

$$\bullet \lambda \geq 1: \quad C_xH_y + \lambda \left(x + \frac{y}{4}\right) (O_2 + 3.76 N_2) + n_x \left[x \cdot CO_2 + \frac{y}{2} \cdot H_2O + (\lambda - 1) \left(x + \frac{y}{4}\right) O_2 + 3.76 \cdot \lambda \left(x + \frac{y}{4}\right) N_2\right] \longrightarrow (1 + n_x) \left[x \cdot CO_2 + \frac{y}{2} \cdot H_2O + (\lambda - 1) \left(x + \frac{y}{4}\right) O_2 + 3.76 \cdot \lambda \left(x + \frac{y}{4}\right) N_2\right]$$

$$\bullet \lambda < 1: \quad C_xH_y + \lambda \left(x + \frac{y}{4}\right) (O_2 + 3.76 N_2) + n_x \left[(1 - \lambda) C_xH_y + \lambda x \cdot CO_2 + \frac{\lambda y}{2} \cdot H_2O + 3.76 \cdot \lambda \left(x + \frac{y}{4}\right) N_2\right] \longrightarrow (1 + n_x) \left[(1 - \lambda) C_xH_y + \lambda x \cdot CO_2 + \frac{\lambda y}{2} \cdot H_2O + 3.76 \cdot \lambda \left(x + \frac{y}{4}\right) N_2\right]$$

2 Enthalpie

2.1 Gesamte Enthalpie

Allgemein:

$$\bar{h}(T) = \underbrace{\bar{h}_f^0(T_{ref})}_{\text{chem. Ant.}} + \underbrace{[\bar{h}(T, p) - \bar{h}(T_{ref}, p_{ref})]}_{\text{thermischer Anteil}} \quad (112)$$

Ideale Gase:

$$\bar{h}(T) = \underbrace{\bar{h}_f^0(T_{ref})}_{\text{chem. Ant.}} + \underbrace{[\bar{h}(T) - \bar{h}(T_{ref})]}_{\text{thermischer Anteil}} \quad (113)$$

2.2 Enthalpie einer chemischen Reaktion

Molspezifisch: (ν_i = stöchiometrischer Koeffizient, $[\nu] = [-]$)

$$\bar{h} = \bar{h}_{Produkte} - \bar{h}_{Edukte} = \sum_P \nu_P \cdot \bar{h}_P - \sum_E \nu_E \cdot \bar{h}_E \quad (114)$$

Gesamt: ν_i im Verhältnis zum Brennstoff ($\nu_i = \frac{\text{Anzahl Mol vom Stoff } i}{\text{Pro Mol Brennstoff}}$)

$$\Delta H = H_P - H_E = n_{fuel} \cdot \sum_P \nu_P \cdot \bar{h}_P - n_{fuel} \cdot \sum_E \nu_E \cdot \bar{h}_E \quad (115)$$

2.3 1. Hauptsatz für offene Systeme

Allgemein: ($\dot{n}_i = \nu_i \cdot \dot{n}_{fuel}$)

$$\dot{Q} - \dot{W} = \sum_P \dot{n}_P \cdot \bar{h}_P - \sum_E \dot{n}_E \cdot \bar{h}_E \quad (116)$$

Pro Mol Brennstoff:

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{n}_{fuel}} - \frac{\dot{W}}{\dot{n}_{fuel}} = \sum_P \nu_P \cdot \bar{h}_P - \sum_E \nu_E \cdot \bar{h}_E \quad (117)$$

2.4 Reaktionsenthalpie

Reaktionsenthalpie = Differenz der Bildungsenthalpie.

Wenn $T_E = T_{ref}$:

$$\Delta H_R(T_E = T_{ref}) = n_{fuel} \cdot \sum (\nu_P - \nu_E) \cdot \bar{h}_f^0(T_{ref}) \quad (118)$$

Wenn $T_E \neq T_{ref}$:

$$\Delta H_R(T_E \neq T_{ref}) = \Delta H_R(T_{ref}) + n_{fuel} \sum_j [(\nu''_j - \nu'_j)(h_{j,T_E} - h_{j,T_{ref}})]$$

$\Delta H_R(T \neq T_{ref})$ ausnutzen

$$\Delta Q - \Delta W = \Delta H = \Delta H_R(T_{ein}) + \sum_P n_P \cdot (h(T_P) - h(T_{ein}))$$

2.5 Adiabate Flammtemperatur $T_{f,ad}$

Maximal erreichbare Temperatur, wenn weder Arbeit noch Wärme abgegeben wird.

1. HS ohne Arbeit und Wärmeabgabe: ($\dot{W}_s = \dot{Q} = 0$), ($n_i = \nu_i \cdot n_{fuel}$)

$$0 = \Delta H = \sum_P n_P \cdot [\bar{h}_{f,P}^0 + \Delta \bar{h}_P(T_{f,ad})] - \sum_E n_E \cdot [\bar{h}_{f,E}^0 + \Delta \bar{h}_E(T_E)] \quad (119)$$

Dies bedeutet die freigesetzte chemische Energie und die Thermische Energie sind gleich:

$$-\underbrace{\sum (\nu_P - \nu_E) \cdot \bar{h}_f^0(T_{ref})}_{\text{freigesetzte chemische Energie} = Q_R} = \underbrace{\sum \nu_P \cdot \Delta \bar{h}(T_{f,ad}) - \sum \nu_E \cdot \Delta \bar{h}(T_E)}_{\text{Thermische Energie} = H_{TH}}$$

Wobei $\Delta \bar{h}(T) = \bar{h}(T) - \bar{h}(T_{ref})$. Die Enthalpie bei adiabater Flammtemperatur muss im Allgemeinen durch Iteration gefunden werden.

2.5.1 Vorgehen

Erste Schätzung: 1 HS aufschreiben und auf ΔQ und ΔH_{TH} auflösen (gibt Punkte)

- Mager ($\lambda > 1$): $T_1 < 2000K$
- Stochastisch/Fett: $T_1 \approx T_E + 2000K$

1. Die chemische Energie im System berechnen: ΔQ_R

$$\Delta Q_R = -\Delta H_R = n_{fuel} \cdot \sum (\nu_E - \nu_P) \cdot \bar{h}_f^0(T_{ref}) \quad (120)$$

2. Dann thermische Energie berechnen: ΔH_{TH}

$$\Delta H_{TH} = n_{fuel} \sum \nu_P \cdot \Delta \bar{h}(T_{f,ad}) - n_{fuel} \cdot \sum \nu_E \cdot \Delta \bar{h}(T_E) \quad (121)$$

3. Jetzt vergleichen

- $\Delta H_{TH} = \Delta Q_R = -\Delta H_R$: Adiabate Flammtemperatur stimmt
- $\Delta H_{TH} < \Delta Q_R = -\Delta H_R$: Adiabate Flammtemperatur ist zu tief, eine höhere Flammtemperatur wählen
- $\Delta H_{TH} > \Delta Q_R = -\Delta H_R$: Adiabate Flammtemperatur ist zu hoch, eine tiefere Flammtemperatur wählen

4. Alternativ: $\Delta H_{E \rightarrow P} = H_P - H_E$ berechnen

- Wenn $\Delta H > 0$: adiabate Temperatur liegt tiefer
- Wenn $\Delta H < 0$: adiabate Temperatur liegt höher

2.6 Adiabate Flammtemperatur bei Dissoziation

1. Berechnen von $T_{f,ad}$ ohne Dissoziation
2. Gleichgewichtsproblem lösen bei $K_p(T_{f,ad})$ um Dissoziations-Anteile zu bestimmen
3. $T_{f,ad}$ mit Reaktion mit Dissoziation berechnen
4. Falls $|T_{f,ad,k} - T_{f,ad,k-1}| > \text{Toleranz} \rightarrow$ zurück zu Schritt 2

2.6.1 Beeinflussung der Adiabaten Flammtemperatur

- Inertgase wie N_2 vertiefen die adiabate Flammtemperatur, da sie Energie verbrauchen um aufgewärmt zu werden
- Je grösser c_p des Inertgas, desto mehr sinkt $T_{f,ad}$
- Optimales $\lambda = 0.8...0.9$

3 2. Hauptsatz und chemisches Gleichgewicht

3.1 Entropie idealer Gase

ideale Gase:

$$\bar{s}(T, p) = \bar{s}^\circ(T, p_{ref}) - \bar{R} \cdot \ln\left(\frac{p}{p_{ref}}\right) \quad (122)$$

$$s(T, p) = s^\circ(T, p_{ref}) - R \cdot \ln\left(\frac{p}{p_{ref}}\right) \quad (123)$$

Entropie Differenz:

$$s_2 - s_1 = s^\circ(T_2) - s^\circ(T_1) - \bar{R} \cdot \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \quad (124)$$

3.2 Entropiebilanz offener Systeme

instationär:

$$\dot{S}_{erz} = \frac{dS}{dt} - \sum_{i=1}^n \frac{\dot{Q}_i}{T_i} + \sum_{j=1}^m \dot{m}_{out} s_{out} - \sum_{k=1}^p \dot{m}_{in} s_{in} \quad (125)$$

stationär:

$$\dot{S}_{erz} = - \sum_{i=1}^n \frac{\dot{Q}_i}{T_i} + \dot{m}(s_{out} - s_{in}) \quad (126)$$

Mit chemischen Reaktionen: ($p_i = X_i \cdot p_{tot} \stackrel{offt}{=} p_{ref}$)

$$\frac{\dot{S}_{erz}}{\dot{n}_{fuel}} = \sum_P \nu_{i,out} \left[\bar{s}^\circ(T) - \bar{R} \ln\left(\frac{p_i}{p_{ref}}\right) \right] - \sum_E \nu_{i,in} \left[\bar{s}^\circ(T) - \bar{R} \ln\left(\frac{p_i}{p_{ref}}\right) \right] - \frac{1}{\dot{n}_{fuel}} \sum_i \frac{\dot{Q}_i}{T_i} \quad (127)$$

Wenn $\dot{Q} = 0$ und $p = p_{ref}$:

$$\frac{\dot{S}_{erz}}{\dot{n}_{fuel}} = \sum_P \nu_{i,out} [\bar{s}^\circ(T)] - \sum_E \nu_{i,in} [\bar{s}^\circ(T)] + \bar{R} \ln\left(\frac{\prod_E (X_E)^{\nu_E}}{\prod_P (X_P)^{\nu_P}}\right) \quad (128)$$

3.2.1 Entropie geschlossener Systeme

Allgemein:

$$\frac{S_{erz}}{n_{fuel}} = \sum_P \nu_P \cdot \bar{s}_P - \sum_E \nu_E \cdot \bar{s}_E - \frac{1}{n_{fuel}} \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \quad (129)$$

Mit chemischen Reaktionen:

$$\frac{S_{erz}}{n_{fuel}} = \sum_P \nu_{i,out} \left[\bar{s}^\circ(T) - \bar{R} \ln\left(\frac{p_i}{p_{ref}}\right) \right] - \sum_E \nu_{i,in} \left[\bar{s}^\circ(T) - \bar{R} \ln\left(\frac{p_i}{p_{ref}}\right) \right] - \frac{1}{n_{fuel}} \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \quad (130)$$

3.3 Freie Enthalpie und Chemisches Potential

3.3.1 Freie Enthalpie

Freie Enthalpie:

$$G(T, p) = \sum_i n_i \left[g_{f,i}^\circ(T) + RT \ln\left(\frac{p_i}{p_0}\right) \right], \quad g_{f,i}^\circ \text{ ist Tabelliert!} \quad (131)$$

Freie-Enthalpie-Differenz berechnen

$$\Delta G(T) = \sum_P n_P g_P(T) - \sum_E n_E g_E(T)$$

Wobei $g_i(T)$ folgendermassen definiert ist:

$$g_i(T) = h_{i,f}^\circ + h_i(T) - h_i(T_{ref}) - T \cdot \left[s_i^\circ + R \ln\left(\frac{p_i}{p_0}\right) \right]$$

3.3.2 Chemisches Potential

Das chemische Potential eines Stoffes gibt an wie fest sich innere Energie ändert, wenn sich die Teilchenzahl dieses Stoffes verändert!

Inneren Energie einer chemischen Reaktion:

$$dU = TdS - pdV + \underbrace{\sum_i \mu_i \cdot dn_i}_{\text{Molveränderung}} \quad (132)$$

Enthalpie einer chemischen Reaktion: $dH = dU + Vdp + pdS$

$$dH = TdS + Vdp + \sum_i \mu_i \cdot dn_i \quad (133)$$

Freie Enthalpie einer chemischen Reaktion: $dG = dH - SdT - TdS$

$$dG = -S \cdot dT + V \cdot dp + \sum_i \mu_i \cdot dn_i \quad (134)$$

Man erhält nun das chemische Potential μ_i durch ableiten nach der Energien nach der Stoffmenge n_i .

Chemisches Potential: (Alle Indizes ausser $j = i$)

$$\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T,p,n_j} = \left(\frac{\partial H}{\partial n_i} \right)_{T,p,n_j} = \left(\frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{T,p,n_j} \quad (135)$$

Für das chemische Potential gibt es keine explizite Formel!

Aber:

Ein Gleichgewicht einer Reaktion führt zur Minimierung der freien Enthalpie bzw. den chemischen Potentialen bzw. zur Maximierung der Entropie

Somit: (für $U = V = const. \implies dU = dV = 0$ und $T \cdot dS = 0$)

$$\sum_i \mu_i \cdot dn_i = 0 = dG \quad (136)$$

3.4 Chemisches Gleichgewicht

Da gelten muss $dG = 0$, erhalten wir den folgenden Term:

$$\sum_i g_{f,i}^\circ(T) \cdot dn_i + R \cdot T \cdot \sum_i dn_i \cdot \ln\left(\frac{p_i}{p_0}\right) + R \cdot T \cdot \sum_i n_i \cdot \ln\left(\frac{dp_i}{p_i}\right) = 0$$

$$\implies R \cdot T \cdot \sum_j \ln\left[\left(\frac{p_j}{p_0}\right)^{dn_j}\right] = - \sum_i g_{f,i}^\circ(T) \cdot dn_i \quad (137)$$

3.4.1 Gleichgewicht einer chemischen Reaktion

$$\ln\left(\prod_i \left[\frac{p_i}{p_0}\right]^{\nu_i'' - \nu_i'}\right) = \ln\left(\prod_i \left[\frac{p_i}{p_0}\right]^{\nu_i, P - \nu_i, E}\right) = - \frac{\Delta g_{f,i}^\circ}{R \cdot T} = \ln(K_P(T))$$

$\ln(K_P(T))$ ist Tabelliert! Achtung ist in \log_{10} angegeben!!!

Freie Enthalpie: (kann auch molspezifisch gemacht werden $\Delta g^\circ = \Delta \bar{h} - T \cdot \Delta \bar{s}^\circ$)

$$\Delta g^\circ = \left[\sum_P h_P - \sum_E h_E \right] - T \cdot \left[\sum_P s_P^\circ - \sum_E s_E^\circ \right] \quad (138)$$

mit $h = h_f^\circ + h(T) - h(T_{ref})$

Reaktionsgleichung:

$$\nu_A \cdot A + \nu_B \cdot B \rightleftharpoons \nu_C \cdot C + \nu_D \cdot D \quad (139)$$

3.5 Anwendung der Gleichgewichtsbedingung

$X_{i,R}$: X von der Reaktionsgleichung

$X_{i,G}$: X von der Gleichgewichtsreaktion

Wenn nur ein Reaktion (Gleichgewichtsreaktion = normale Reaktion): $X_{i,R} = X_{i,G}$.

n_{tot} ist die totale Anzahl Mol von der Produkt Seite

K_P als Funktion von $p_{i,R}$ und $\nu_{i,G}$: von der Gleichgewichtsreaktion

$$K_P(T) = \prod_i \left[\frac{p_{i,R}}{p_0} \right]^{\nu_{i,G}'' - \nu_{i,G}'} \quad (140)$$

K_P als Funktion von $X_{i,R}$ und $\nu_{i,G}$:

$$K_P(T) = \frac{\prod_i X_{i,R}^{\nu_{i,G}''}}{\prod_i X_{i,R}^{\nu_{i,G}'}} \left(\frac{p_{total}}{p_{ref}} \right)^{\sum_i \nu_{i,G}'' - \sum_i \nu_{i,G}'}$$

$$= \frac{\prod_i X_{i,R}^{\nu_{i,P}}}{\prod_i X_{i,R}^{\nu_{i,E}}} \left(\frac{p_{total}}{p_{ref}} \right)^{\sum_i \nu_{i,P} - \sum_i \nu_{i,E}} \quad (141)$$

K_P als Funktion von $n_{i,R}$ und $\nu_{i,G}$:

$$K_P(T) = \frac{\prod_i n_{i,R}^{\nu_{i,G}''}}{\prod_i n_{i,R}^{\nu_{i,G}'}} \left(\frac{p_{total}}{p_{ref} \cdot n_{total}} \right)^{\sum_i \nu_{i,G}'' - \sum_i \nu_{i,G}'}$$

$$= \frac{\prod_i n_{i,R}^{\nu_{i,P}}}{\prod_i n_{i,R}^{\nu_{i,E}}} \left(\frac{p_{total}}{p_{ref} \cdot n_{total}} \right)^{\sum_i \nu_{i,P} - \sum_i \nu_{i,E}} \quad (142)$$

K_P als Funktion von $\nu_{i,R}$ und $\nu_{i,G}$:

$$K_P(T) = \frac{\prod_i \nu_{i,R}^{\nu_{i,G}''}}{\prod_i \nu_{i,R}^{\nu_{i,G}'}} \left(\frac{p_{total}}{p_{ref} \cdot \nu_{total}} \right)^{\sum_i \nu_{i,G}'' - \sum_i \nu_{i,G}'} \quad (143)$$

Gleichgewichtskonstante für Konzentrationen c:

$$K_C(T) = \frac{\prod_i c_{i,R}^{\nu_{i,G}''}}{\prod_i c_{i,R}^{\nu_{i,G}'}} = \prod_i (c_{i,R})^{\nu_{i,G}'' - \nu_{i,G}'} \quad (144)$$

Gleichgewichtskonstante für Konzentrationen n:

$$K_C(T) = \frac{\prod_i n_{i,R}^{\nu_{i,G}''}}{\prod_i n_{i,R}^{\nu_{i,G}'}} = \prod_i (n_{i,R})^{\nu_{i,G}'' - \nu_{i,G}'} \quad (145)$$

K_C und K_P umrechnen: $K_P = K_C \prod_i \left(\frac{RT}{p_{ref}} \right)^{\nu_{i,G}'' - \nu_{i,G}'}$

3.5.1 Dominante Richtung

- $K \gg 1$: mehr Produkte im GGW vorhanden
- $k = 1$: es liegt keine dominante Richtung vor
- $K \ll 1$: mehr Edukte im GGW vorhanden

Für $K \uparrow$: Equilibrium verschiebt sich auf Produktseite (mehr Produkte)

Für $K \downarrow$: Equilibrium verschiebt sich auf Eduktseite (mehr Edukte)

- Gleichgewichtskonstante ist **keine** Funktion des Druckes!
- Inerte Gase sowie Änderungen des Partialdruckes verändern die Gleichgewichtskonstante nicht.
- Reaktion in entgegengesetzter Richtung $K_R = \frac{1}{K_V}$ oder für log: $\log_{10}(K_R) = -\log_{10}(K_V)$

Wenn $K_c > 1$, dann geht die Reaktion bevorzugt in Richtung Produktseite.

3.6 Dissoziation

Bei zu hohen Temperaturen, können bei Verbrennungen einzelne Moleküle dissoziiert werden. Sprich sie teilen sich in einzelnen Bestandteile auf.

Beispiel:



Mit der massgebenen Gleichgewichtsreaktion:



3.6.1 Vorgehen bei Dissoziation

1. Reaktionsgleichung aufstellen:



2. Dissoziationsgleichung aufstellen:



3. Reaktionsgleichung und Dissoziationsgleichung zusammenführen:



Hier ist x der Anteil von Dissoziiertem CO_2

4. ν_{tot} der Produkte aufstellen:

$$\nu_{tot} = (1-x) + x + 0.5x + 1.88 = 2.88 + 0.5x \quad (149)$$

5. K_P der Dissoziation in der Tabelle nachschauen und x nach folgender Formel berechnen:

$$K_P = \frac{\prod \nu_{p,R}^{\nu_{p,d}} \left[\frac{p_{tot}}{p_{ref} \cdot \nu_{tot,R}} \right]^{\sum \nu_{p,d} - \sum \nu_{E,d}}}{\prod \nu_{p,R}^{\nu_{E,d}}} \quad (150)$$

Für das Beispiel:

$$K_P = \frac{x^1 \cdot (0.5x)^{0.5}}{(1-x)^1} \left[\frac{p_{tot}}{p_{ref} \cdot (2.88 + 0.5x)} \right]^{1+0.5-1} \quad (151)$$

3.7 Prinzip von le Chatelier

Übt man auf ein chemisches System im Gleichgewicht einen Zwang aus, so reagiert es so, dass die Wirkung des Zwangs minimal wird.

Zwang	↑	↓
Temperatur	endotherme Reaktion wird bevorzugt	exotherme Reaktion wird bevorzugt
Druck	Gleichgewicht auf Seite mit weniger Teilchen	Gleichgewicht auf Seite mit mehr Teilchen
Konzentration	verstärkter Verbrauch dieses Stoffes	erhöhte Produktion dieses Stoffes

Wenn auf beiden Seiten gleichviel Mol, dann ist K_c keine Funktion vom Druck

3.7.1 Umgekehrt Reaktion / Gleichgerichtete Reaktion

Wenn umgekehrte Reaktion gefragt, Vorzeichen beim Tabellenwert ändern!!!

Gleichgerichtete Reaktion:

$$K_{Vorwärts} = K_{Rückwärts} = 1, \rightarrow \ln(K) = 0 \quad (152)$$

3.8 Van't Hoff Gleichung

Temperaturabhängigkeit der Gleichgewichtskonstante und der Zusammenhang mit endothermität und Exothermität einer Reaktion.

Die Hauptaussagen der Van't Hoff Gleichung:

1. Bei **endothermen** Reaktionen **nimmt** $K_P(T)$ bei **steigender** Temperatur **zu**
2. Bei **exothermen** Reaktionen **nimmt** $K_P(T)$ bei **steigender** Temperatur **ab**.

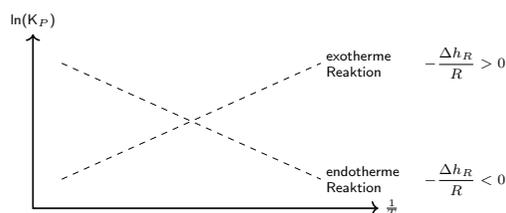
Van't Hoff Gleichung: ΔH_R von der Gleichgewichtsreaktion

$$d(\ln(K_P)) = -\frac{\Delta h_R}{R} d\left(\frac{1}{T}\right) \quad (153)$$

Die neue Temperatur ergibt sich nach folgender Gleichung: ($p = const.$)

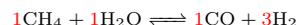
$$\ln(K(T_2)) = \ln(K(T_1)) + \frac{\Delta H_R(T_{ref})}{R} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1 \cdot T_2} \quad (154)$$

$$\ln(K(T_2)) = \ln(K(T_1)) - \frac{\Delta H_R(T_{ref})}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) \quad (155)$$



3.9 Gleichgewichtszustand

Gleichgewichtsreaktion



Gleichgewichtszustand



3.10 Gleichgewichtskonstante der Reaktion

p_0 sei der Referenzdruck (auch p_{ref})

$$K_p = \prod_i \left[\frac{p_i}{p_0} \right]^{\nu_{p,i} - \nu_{E,i}}$$

mit $p_i = p_{tot} \cdot \frac{n_i}{n_{tot}}$ folgt für obiges Beispiel

$$K_p = \prod_i \left[\frac{p_{tot} n_i}{p_0 n_{tot}} \right]^{\nu_{p,i} - \nu_{E,i}} = \left(\frac{p_{tot}}{p_0} \right)^{1+3-1-1} \cdot \left(\frac{1}{c+d+e+f} \right)^{1+3-1-1} \cdot \frac{e^1 \cdot f^3}{c^1 \cdot d^1}$$

4 Exergie reaktiver Systeme

Die Exergie ist ein Mass für denjenigen Teil der im System enthaltenen Energie, der maximal (mittels reversiblen Prozessen) in nutzbare Arbeit umgewandelt werden kann. Die Exergie muss somit in Bezug zu einer Umgebung definiert werden. Exergie eines Systems:

$$E_x = U - U_0 + p_0(V - V_0) - T_0(S - S_0) + KE + PE \quad (156)$$

4.1 Exergieänderung

Die Exergie ist eine Zustandsgröße:

$$E_{x,2} - E_{x,1} = (U_2 - U_1) + p_0(V_2 - V_1) - T_0(S_2 - S_1) + (KE_2 - KE_1) + (PE_2 - PE_1)$$

4.2 Guoy-Stodola-Theorem

Für geschlossene und offene Systeme gilt:

$$\begin{aligned} \text{Verlustrarbeit:} & \quad E_{x,verl} = W_{verl} = W_{rev} - W = T_0 \cdot S_{erz} \\ \text{Verlustleistung:} & \quad \dot{E}_{x,verl} = \dot{W}_{verl} = \dot{W}_{rev} - \dot{W} = T_0 \cdot \dot{S}_{erz} \end{aligned}$$

4.3 Exergiebilanz geschlossener Systeme

Kinetische und potentielle Energie sind pure Exergie, jedoch meist vernachlässigbar. Falls nicht, werden sie auf der rechten Seite hinzuaddiert.

$$E_{x,2} - E_{x,1} = \int_1^2 \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) \delta Q - [W - p_0(V_2 - V_1)] - T_0 S_{erz}$$

$$\frac{dE_x}{dt} = \dot{E}_x = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(1 - \frac{T_0}{T_i}\right) \dot{Q}_i}_{E_{x,Q}} - \underbrace{\left[\dot{W} - p_0 \frac{dV}{dt}\right]}_{E_{x,W}} - \underbrace{T_0 \dot{S}_{erz}}_{E_{x,verl}}$$

Dabei ist T_0 die Umgebungstemperatur und T_i die Grenztemperatur beim jeweiligen Wärmefluss.

4.3.1 Exergiebilanz geschlossener, stationärer Prozesse

Bei stationären Prozessen gilt $\dot{E}_x = 0$, also

$$0 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{T_0}{T_i}\right) \dot{Q}_i - \left[\dot{W} - p_0 \frac{dV}{dt}\right] - T_0 \dot{S}_{erz}$$

4.3.2 Exergiebilanz geschlossener, reversibler Prozesse

Bei reversiblen Prozessen gilt $\dot{S}_{erz} = 0$, also

$$\dot{E}_x = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{T_0}{T_i}\right) \dot{Q}_i - \left[\dot{W} - p_0 \frac{dV}{dt}\right]$$

4.4 Exergiebilanz offener Systeme

Für offene Systeme gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dE_x}{dt} &= \sum_{i=1}^l \dot{m}_{i,in} e_{x,i,in} - \sum_{i=1}^k \dot{m}_{i,out} e_{x,i,out} \\ &\quad - \dot{W}_{nutz} + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{T_0}{T_i}\right) \dot{Q}_i - \underbrace{T_0 \dot{S}_{erz}}_{= 0 \text{ falls reversibel}} \end{aligned}$$

Dabei ist T_0 die Umgebungstemperatur und T_i die Temperatur beim jeweiligen Wärmefluss \dot{Q}_i . Für die spezifischen Strömungsexergien e_x gilt:

$$e_{x,in/out} = (h - h_0) - T_0(s - s_0) + \frac{w^2}{2} + g \cdot z \quad (157)$$

4.5 Exergetischer Wirkungsgrad

Der exergetische Wirkungsgrad ist wie folgt definiert:

$$\varepsilon = \frac{\text{genutzter Exergiestrom}}{\text{zugeführter Exergiestrom}} = 1 - \frac{E_{x, \text{Verlust}}}{E_{in}}$$

4.6 Exergie chemischer Systeme

Allgemein:

$$E_x = U - U_0 + p_0(V - V_0) - T_0(S - S_0) + KE + PE + E_x^{\text{chemisch}} \quad (158)$$

Mit der Enthalpie:

$$E_x = (H - H_0) - T_0(S - S_0) + KE + PE + E_x^{\text{chemisch}} \quad (159)$$

Chemische Exergiebilanz: ($n_P = n_{\text{Brennstoff}} \cdot \nu_P$)

$$\begin{aligned} \Delta E_{x,R} &= \sum_E n_E \cdot \bar{e}_{x,E} - \sum_P n_P \cdot \bar{e}_{x,P} = \sum_E n_E \cdot \bar{g}_E - \sum_P n_P \cdot \bar{g}_P \\ &= \Delta H_R - T_0 \left(\sum_P n_{P,i} \cdot \bar{s}_i(T_P) - \sum_E n_{E,i} \cdot \bar{s}_i(T_E) \right) \\ &= \underbrace{\sum_i (n_{P,i} - n_{E,i}) \cdot \bar{h}_{f,i}^0 - T_0 \sum_i (n_{P,i} - n_{E,i}) \bar{s}_i(T_0)}_{\text{gilt nur bei } T_E = T_P = T_0 = 298K} \end{aligned} \quad (160)$$

Für ideale Gase gilt:

$$\Delta x_{,R} = \underbrace{\sum_E n_E \cdot \bar{g}_E(T_0, p_0) - \sum_P n_P \cdot \bar{g}_P(T_0, p_0)}_{:= -\Delta G} + \bar{R} \cdot T_0 \cdot \ln \left(\frac{\prod_E (X_E)^{n_E}}{\prod_P (X_P)^{n_P}} \right)$$

Mit: $\bar{g} = \underbrace{\bar{g}_f^0}_{A-30} + \bar{g}(T_0, p_0) - \bar{g}(T_{ref}, p : ref)$

Die zu gewinnende Arbeit bei $T = 298K$:

$$W = - \underbrace{\sum_i (n_{P,i} - n_{E,i}) \cdot \bar{h}_{f,i}^0 + T_0 \sum_i (n_{P,i} - n_{E,i}) \bar{s}_i}_{\text{reversible Wärme}} - \underbrace{T_0 \Delta S_{erz}}_{\text{irrev. Wärme}} \quad (161)$$

4.6.1 Exergie einer idealen Brennstoffzelle

Die Exergie einer idealen Brennstoffzelle erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned} W_{rev} &= -\Delta E_{x,R} = -\Delta G_{R,0} = -\Delta H_{R,0} + \Delta S_{R,0} T_0 \\ &= - \sum_i (n_{P,i} - n_{E,i}) \cdot \bar{h}_{f,i}^0 + T_0 \sum_i (n_{P,i} - n_{E,i}) \bar{s}_i(T_0) \end{aligned} \quad (162)$$

4.7 Brennstoffexergie

Die chemische Exergie eines Kraftstoffes ist die theoretisch maximale Arbeit die aus einer Verbrennungskammer genutzt werden kann, wenn der Kraftstoff mit T_{ref} , p_{ref} eintritt und dort vollständig mit den Umgebungsstoffen umgesetzt wird.

$$\begin{aligned} E_{x,B} &= n [h - h_0 - T_0(s - s_0)] + RT_0 \sum_i \nu_i \ln \left(\frac{X_i}{X_e} \right) \\ &= \Delta H - T_0 \Delta S + RT_0 \ln \left[\prod_i \left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{\nu_E - \nu_P} \right] \\ &= -\Delta G + RT_0 \ln \left[\prod_i \left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{\nu_E - \nu_P} \right] \end{aligned}$$

Dabei läuft der Index i über alle übrigen an der Reaktion teilnehmenden Stoffe.

5 Brennstoffzellen

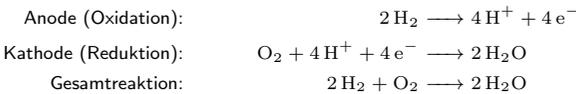
Brennstoffzellen wandeln chemische Energie größtenteils direkt in elektrische Energie um. Die nutzbare Energie bei dieser Umwandlung im reversiblen Prozess entspricht der Änderung der freien Enthalpie der Reaktion und somit bei isobarer und isothermer Reaktion:

$$\Delta G_R = \Delta H_R - T \Delta S_R$$

Der erste Hauptsatz für das offene System *Brennstoffzelle* lautet:

$$\dot{Q} + P_{Zelle} = \dot{n}_{fuel} \cdot \Delta H_R(T)$$

5.1 Beispiel: Oxidation von Wasserstoff



5.2 Stromerzeugung

$$I = \dot{n}_{fuel} \cdot N_e \cdot e \cdot N_A = \dot{n}_{fuel} \cdot N_e \cdot F \quad \text{mit } F = 96485.3 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{mol}} \left(= \frac{\text{C}}{\text{mol}} \right)$$

$$I = N_e \cdot F \cdot \dot{n}_{fuel}^* \cdot \eta_I, \quad \dot{n}_{fuel} = \eta_I \cdot \dot{n}_{fuel}^* \quad \text{und } e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

N_e = Anzahl freigewordener Elektronen **pro Molekül Brennstoff**.
 \dot{n}_{fuel}^* zugeführter Molstrom, \dot{n}_{fuel} tatsächlich umgesetzter Molstrom
 η_I ist der **Umsetzungswirkungsgrad**.

5.3 Zellspannung

5.3.1 Kalorische Spannung

Die kalorische Spannung bezieht sich auf die Änderung der Reaktionsenthalpie ΔH_R und ist definiert als: (Wobei für $-\Delta H_R(T)$ meist der **untere Heizwert** eingesetzt wird.)

$$U_H(T) := \frac{-\Delta H_R(T)}{N_e \cdot F}$$

5.3.2 Reversible Spannung

Die reversible Spannung bezieht sich auf die Änderung der freien Reaktionsenthalpie ΔG_R und ist definiert als:

$$U_{rev} := \frac{-\Delta G_R(T, p)}{N_e \cdot F} = \frac{-P_{Zelle}^{rev}}{I}$$

Dabei ist P_{Zelle}^{rev} die maximale reversible Leistung der Brennstoffzelle:

$$P_{Zelle}^{rev} = -U \cdot I = \dot{n}_{fuel} \cdot (-\Delta G_R) = \dot{n}_{fuel} \cdot (-\Delta H_R + T \Delta S_R)$$

5.4 Leistung

Mit der Konvention, dass die abgegebene Leistung eines Systems (gleich wie die abgegebene Wärme) negativ ist, gilt: ($U(I)$ = Betriebsspannung)

$$P_{Zelle} = -U(I) \cdot I$$

5.4.1 Maximale Leistung

Für den molaren Massenstrom, welcher maximale Leistung abgibt, gilt:

$$\frac{\partial |P_{Zelle}|}{\partial \dot{n}_{fuel}} = 0 \rightarrow \dot{n}_{fuel, \max} \rightarrow P_{Zelle, \max}$$

Bei maximalen Strömen müssen auch die entsprechenden molaren Flüsse \dot{n}_{fuel} für ein Leistungsmaximum in Betracht gezogen werden.

Achtung!!! evt. ist der die maximale Leistung bei einem tieferen Strom/Spannung.

$$\frac{dP_Z}{dI} = 0, \quad \text{dann auflösen nach } I, \text{ wenn: } I < I_{berechnet}, I \text{ nehmen}$$

5.5 Wärmestrom

Der gesamte abgeführte Wärmestrom folgt aus dem ersten Hauptsatz:

$$\dot{Q} = -[U_H - U(I)] \cdot I = \dot{Q}_{rev} + \dot{Q}_{irrev}$$

5.5.1 Reversibel nutzbarer Wärmestrom

Der Wärmestrom der reversibel nutzbar ist lässt sich wie folgt berechnen:

$$\dot{Q}_{rev} = -[U_H - U_{rev}] \cdot I = \dot{Q} - \dot{Q}_{irrev}$$

5.5.2 Irreversibler Wärmestrom

Für den irreversiblen Wärmestrom, welcher verloren geht, gilt:

$$\dot{Q}_{irrev} = -[U_{rev} - U(I)] \cdot I = \dot{Q} - \dot{Q}_{rev}$$

5.6 Wirkungsgrade

5.6.1 Elektrochemischer Wirkungsgrad

Ist eine Kennzahl, kein Qualitätsgrad!

Der bestmögliche Umwandlungswirkungsgrad einer Brennstoffzelle entspricht dem Quotient aus maximal erhaltlicher, reversibler Arbeit und der Reaktionsenthalpie:

$$\eta_{Zelle} = \frac{\Delta G_R}{\Delta H_R} = 1 - T \frac{\Delta S_R}{\Delta H_R}$$

Die Entropiebilanz einer Reaktion kann **positiv oder negativ** sein. Im ersteren Fall kann $\eta_{Zelle} > 1$ sein, im letzteren Fall muss $\eta_{Zelle} < 1$ sein.

5.6.2 Energetischer Wirkungsgrad

Für den energetischen Wirkungsgrad einer Brennstoffzelle gilt:

$$\eta_{Zelle} = \frac{\dot{n}_{fuel}}{\dot{n}_{fuel}^*} \frac{U(I)}{U_H(T)} = \frac{\dot{n}_{fuel}}{\dot{n}_{fuel}^*} \frac{|P_{Zelle}|}{|P_{Zelle}| + |\dot{Q}|}$$

Wobei \dot{n}_{fuel}^* der zugeführte molare Massenstrom, \dot{n}_{fuel} der tatsächlich umgesetzte molare Massenstrom und \dot{Q} der gesamte abgeführte Wärmestrom ist. Für die Oxidations Menge muss man η_I wieder einsetzen. z.B.

$$n_{\text{O}_2} = a \cdot n_{fuel} \cdot \eta_I$$

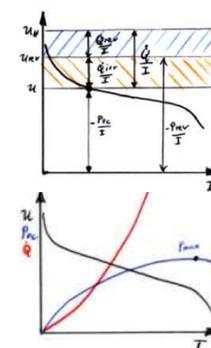
5.7 Zellstapel

Bei einer Serieschaltung von N Brennstoffzellen ist die Spannung wie auch die Leistung additiv:

$$U_{\text{Stapel}} = N \cdot U_{\text{Zelle}}$$

$$P_{\text{Stapel}} = N \cdot P_{\text{Zelle}}$$

5.7.1 U-I Diagramm



← Der orange Bereich steht für den irreversiblen Wärmeverlust, der blaue für den reversiblen. Gäbe es keine Irreversibilitäten, so wäre die Leistung höher, nämlich bis \dot{P}_{rev} . Trotzdem könnte der blaue Teil nicht direkt genutzt werden; doch würde diese Wärme, wegen ihrer hohen Temperatur, wieder von der Umgebung aufgenommen werden, weshalb ihr Verlust reversibel ist.

← Um die maximale Leistung zu erreichen, muss man grosse Wärmeverluste in Kauf nehmen.

5.8 Verschiedene Zelltypen

- AFC Alkaline Fuel Cell**
 @ 60-80°C / KOH-Lösung

$$H_2 + 0.5O_2 \rightarrow H_2O \Rightarrow \begin{cases} A :: H_2 + 2OH^- \rightarrow 2H_2O + 2e^- \\ K :: 0.5O_2 + H_2O + 2e^- \rightarrow 2OH^- \end{cases}$$
 v.a. in der Raumfahrt, wegen tiefer Betriebstemperatur, Akkus...
- PEMFC Proton Exchange Membrane Fuel Cell**
 @ 80-90°C / Kunststoffmembran

$$H_2 + 0.5O_2 \rightarrow H_2O \Rightarrow \begin{cases} A :: H_2 \rightarrow 2H^+ + 2e^- \\ K :: 0.5O_2 + 2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2O \end{cases}$$
 v.a. in der Autoindustrie, wegen tiefer Betriebstemperatur, Akkus...
- PAFC Phosphoric Acid Fuel Cell**
 @ 160-220°C / konzentrierte Phosphorsäure

$$H_2 + 0.5O_2 \rightarrow H_2O \Rightarrow \begin{cases} A :: H_2 \rightarrow 2H^+ + 2e^- \\ K :: 0.5O_2 + 2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2O \end{cases}$$
 Autoindustrie (grosse Fahrzeuge), Kraftwerke, WKK, BHKW
- MCFC Molten Carbonate Fuel Cell**
 @ 600-650°C / Kalium- und Lithiumcarbonat

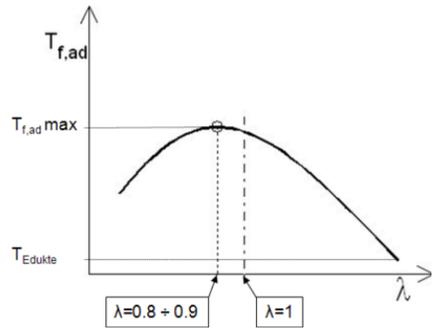
$$H_2 + 0.5O_2 \rightarrow H_2O \Rightarrow \begin{cases} A :: H_2 + CO_3^{2-} \rightarrow H_2O + CO_2 + 2e^- \\ K :: 0.5O_2 + CO_2 + 2e^- \rightarrow CO_3^{2-} \end{cases}$$
 Hochtemperaturwendungen: Kraftwerke, WKK, BHKW
- SOFC Solid Oxid Fuel Cell**
 @ 950-1000°C / Zirkonoxid

$$H_2 + 0.5O_2 \rightarrow H_2O \Rightarrow \begin{cases} A :: H_2 + O^{2-} \rightarrow H_2O + 2e^- \\ K :: 0.5O_2 + 2e^- \rightarrow O^{2-} \end{cases}$$
 Hochtemperaturwendungen: Kraftwerke, WKK, BHKW

6 Sonstiges

6.0.1 Auswirkung von Luftverhältnis λ

- $\lambda > 1$ Bei brennstoffmageren Gemischen nimmt die adiabate Flammtemperatur bei steigendem Luftüberschuss sehr schnell ab, weil bei höherem λ , bei gleicher Brennstoffenergie, viel mehr Luft aufgeheizt werden muss.
- $\lambda < 1$ Bei brennstoffreichen Gemischen gibt es bei zunehmendem Luftmangel zwei Effekte mit entgegengesetzter Wirkung, nämlich:
 - Einerseits nimmt bei abnehmendem λ die aufzuheizende Luftmenge ab
 - Andererseits kann die Oxidation des Brennstoffes wegen der ungenügenden O₂-Menge nicht vollständig erfolgen, weswegen die freigesetzte Reaktionswärme kleiner wird.



Bei Druckerhöhung gibt es einen "Buck" beim Maximal-Wert

6.1 Massenerhaltung

Die Kontinuitätsgleichung in kartesischen Koordinaten lautet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

Im zweidimensionalen Fall gilt für stationäre, inkompressible Strömungen und Medien:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

6.2 Impulserhaltung

Betrachtet man ein reibungsbehaftetes Newton'sches Medium welches inkompressibel ist und eine konstante dynamische Viskosität hat, gelten die Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \rho f_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \rho f_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \rho f_z$$

Im zweidimensionalen Fall gilt für stationäre Situationen:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \rho f_x$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \rho f_y$$

6.3 Energieerhaltung

Für inkompressible, stationäre Fluide gilt im zweidimensionalen Fall in kartesischen Koordinaten:

$$\rho \cdot c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \cdot \Phi + \dot{q}'_{quellen}$$

$$\Phi = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

6.4 Laminare Grenzschicht an ebener Wand

Betrachtet wird das Problem der laminaren Grenzschicht an einer ebenen Wand. Die Grenzschichten werden wie folgt definiert:

$$u(y = \delta) = 0.99 \cdot u_\infty \quad T(y = \delta_T) = 0.99 \cdot T_\infty$$

6.5 Mittlerer Wärmeübergangskoeffizient

- Reynolds-Zahl berechnen** $Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$
- $\bar{\alpha}$ berechnen
 - if \overline{Nu}_L gegeben: $i \bar{\alpha} = \frac{\overline{Nu}_L \lambda}{L}$
 - if Nu_x gegeben: $i \text{ if } Re < Re_{krit} \text{ (laminar)}$
 $Nu_x \propto Re_x^{\frac{1}{2}} \propto x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \overline{Nu}_L = 2 \cdot Nu_x|_{x=L}$
 $ii \text{ if } Re > Re_{krit} \text{ (turbulent)}$
 $Nu_x \propto Re_x^{\frac{4}{5}} \propto x^{\frac{4}{5}} \rightarrow \overline{Nu}_L = \frac{5}{4} \cdot Nu_x|_{x=L}$
 - iii unabhängig von der Reynolds-Zahl gilt immer:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{Nu_x \lambda}{x} dx$$

6.6 Infinitesimale Energieerhaltung

Das Prinzip der Energieerhaltung heisst: Die zeitliche Änderung der inneren Energie im Kontrollvolumen ergibt sich aus der Differenz zwischen zu- und wegfließendem Energiestrom und aus der innerhalb des Kontrollvolumens aufgrund von Quellen produzierten Wärme. Somit gilt:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \sum_i \dot{Q}_i - \sum_j \dot{Q}_j + \dot{q}'_{quellen} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Dabei sind $i = x, y, z$ und $j = x + dx, y + dy, z + dz$. Für die Energie gilt:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \rho \cdot c \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Energie pro Kilogramm Luft:

$$\frac{\Delta E}{kg_{Luft}} = \frac{\Delta H}{M_B \cdot \left(\frac{m}{m} \right)_{stoch}} \quad (163)$$

Approximation der Exergie

Der Unterschied zwischen oberem Heizwert ($-\Delta H$) und reversibler Arbeit $-\Delta G_{R,0}$ betrifft den $T_0 \Delta S_{R,0}$ - und den Partialdruck-Term. Beide spielen aber in der Regel (bei $T = T_0 = 298 \text{ K}$ und $p = p_0 = 1 \text{ atm}$) eine untergeordnete Rolle. Somit gilt in erster Approximation:

$$E_{x,B} \approx H_o = -\Delta H$$

6.6.1 Bindungsenergie

$$h_f^0 = \sum E_{invest} - \sum E_{reward} \quad (164)$$

E ist dabei die Bindungsenergie

z.B. H₂O:

$$h_{f,H_2O}^0 = E_{b,H-H} + 0.5 E_{b,O=O} - 2 E_{b,O-H} \quad (165)$$

Dieser Wert kann von Tabellenwerten abweichen, da die Bindungsenergien nur Mittelwerte sind und nicht exakte Zahlen.