



Thermodynamik II – Übung 7

Themen von Heute

- Repetition
- Allgemeine Lösung der Wärmeleitungsgleichung
 - Kartesisch
 - Zylindrisch
 - Sphärisch
- Zeichnen von Temperaturprofilen
- Biot-Zahl

- Tipps für die Serie

Wiederholung: Wärmeübertragung

- Es existieren drei fundamentale Arten, wie Wärme übertragen werden kann:
- **Leitung** (conduction) tritt in jeglicher Art von Materie auf, hauptsächlich aber in Festkörpern

$$\dot{Q}'' = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx}$$

- **Konvektion** (convection) ist Wärmetransport, der mit fließender Materie verbunden ist, also in Gasen und Flüssigkeiten auftritt

$$\dot{Q}'' = \alpha \cdot (T_s - T_\infty)$$

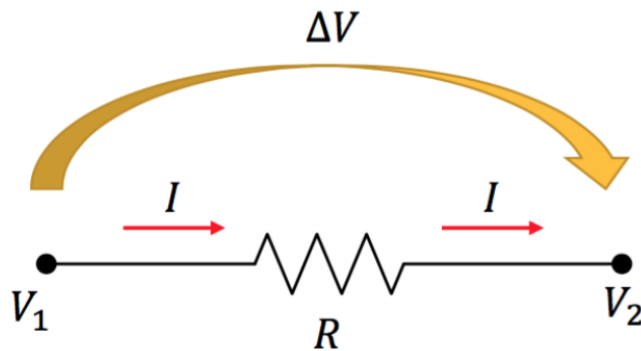
- **Strahlung** (radiation) ist Wärmetransport, der in Form von elektromagnetischer Strahlung stattfindet und ist nicht an Materie gebunden

$$\dot{Q}'' = \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

Wärmeleitwiderstände

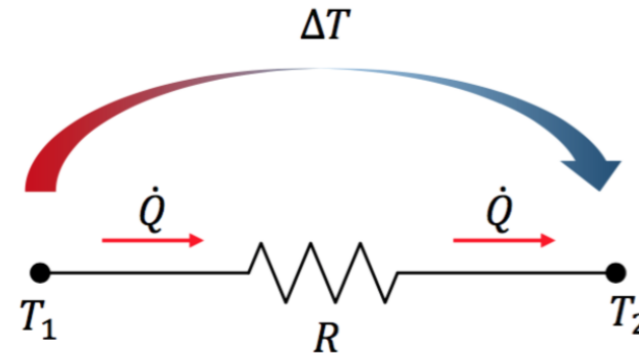
- Wärmeleitwiderstände ersparen sehr viel Rechenaufwand und können für bekannte Wärmeübertragungsprozesse verwendet werden
- Hier beschreibt \dot{Q} den Strom, ΔT die Spannung und $R = \frac{\Delta T}{\dot{Q}}$ den Widerstand

In Elektrotechnik:



$$\Delta U = R \cdot I$$

In Thermodynamik:



$$\Delta T = R \cdot \dot{Q}$$

Wärmeleitwiderstände

- Man darf Wärmewiderstände nur nutzen, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:
 - Stationäres System
 - Eindimensional
 - Keine Wärmequellen
- Mit dem Verfahren der Wärmeleitwiderstände bekommt man kein Temperaturprofil, dazu muss die Wärmeleitungsgleichung explizit berechnet werden.

Wärmeleitungsgleichung

- Energieerhaltung für ein infinitesimales Kontrollvolumen und das Fourier'sche Gesetz liefern die **Wärmeleitungsgleichung**:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot c \cdot T) = \nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla T) + \dot{Q}'''_{Quellen} \quad \text{allgemein}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot c \cdot T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q}'''_{Quellen} \quad \text{kartesisch}$$

Stationäre eindimensionale Wärmeleitung – Ebene Wand

- Die eindimensionale Wärmeleitung durch eine ebene Wand kann im kartesischen Koordinatensystem einfach gelöst werden
- Für den quellenfreien und stationären Fall vereinfacht sich diese wie folgt:

- kartesisch: $\rho c \cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cancel{\frac{\partial T}{\partial y}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cancel{\frac{\partial T}{\partial z}} \right) + \cancel{\dot{q}_{Quellen}'''}$

- Falls $\lambda = const.$ kann dieses ebenfalls aus der Klammer gezogen werden
- Die Wärmeleitungsgleichung reduziert sich also zu

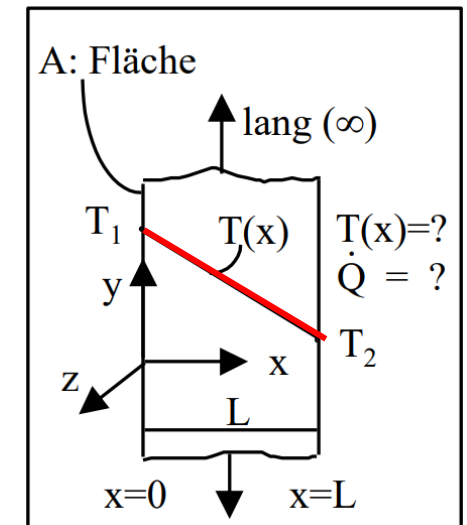
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

- Die allgemeine Lösung lautet

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

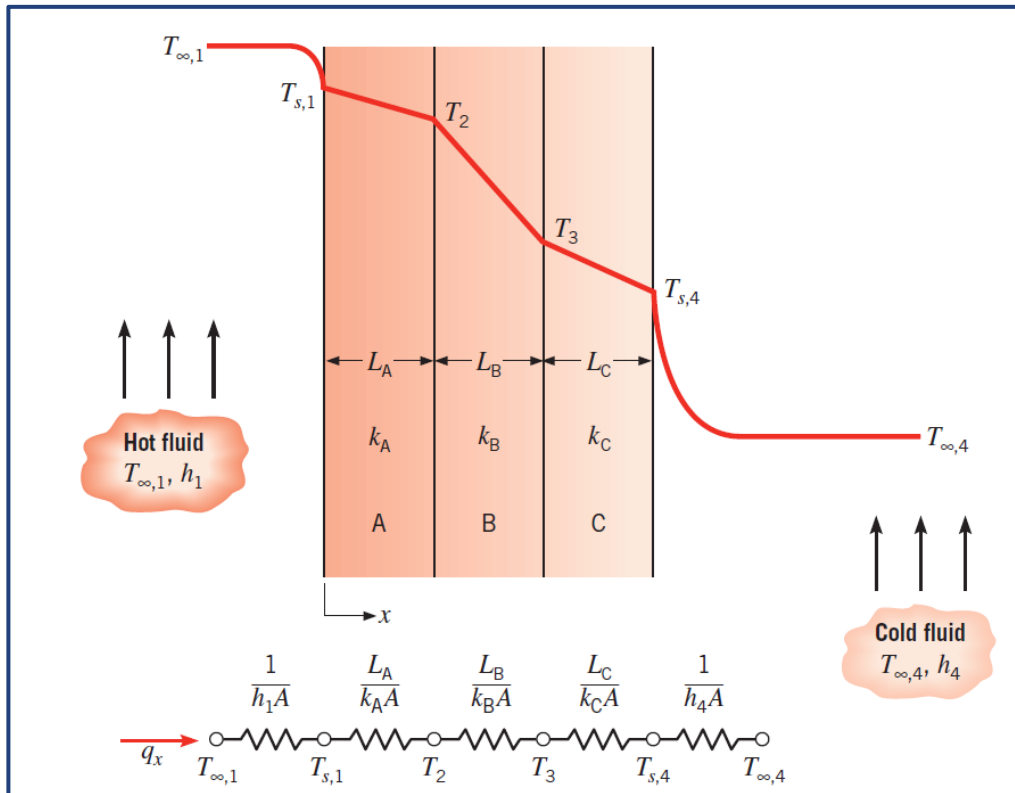
wobei C_1 und C_2 Integrationskonstanten sind

Linearer
Temperaturverlauf



Ebene Wand – Serienschaltung

- Gegeben ist eine dreilagige Wand
- Der Wärmefluss kann über das Ohm'sche Gesetz für die Thermodynamik gefunden werden



- $\Delta T = R * \dot{q}$
- Zwei konvektive und drei Leitwiderstände in Serie
- Für den Wärmefluss folgt schliesslich

$$\dot{q}_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{[(1/h_1 A) + (L_A/k_A A) + (L_B/k_B A) + (L_C/k_C A) + (1/h_4 A)]}$$

Hinweis: In der englischen Literatur und in Thermodynamik III wird der Wärmeübergangskoeffizient α als h geschrieben

Stationäre eindimensionale Wärmeleitung – Zylindrisches Rohr

- Die eindimensionale Wärmeleitung durch die Wand eines zylindrischen Rohres (keine Temperaturgradienten in tangentiale und axiale Richtung) kann im zylindrischen Koordinatensystem einfach gelöst werden
- Für den quellenfreien und stationären Fall vereinfacht sich diese wie folgt:

- zylindrisch: $\rho c \cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cancel{\lambda} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\cancel{\lambda} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \cancel{\dot{q}'''}_{quellen}$

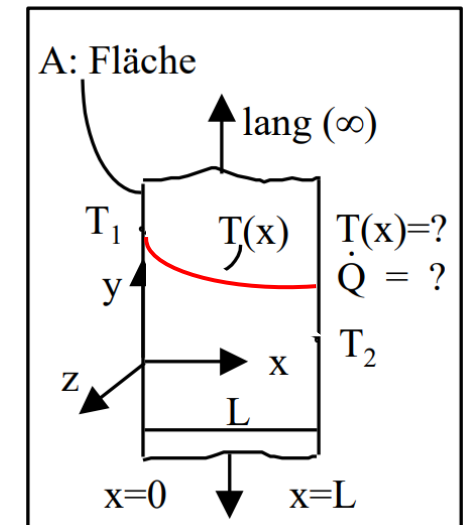
- Falls $\lambda = const.$ kann dieses ebenfalls aus der Klammer gezogen werden
- Die Wärmeleitungsgleichung reduziert sich also zu

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

- Die allgemeine Lösung lautet

$$T(r) = C_1 \ln(r) + C_2$$

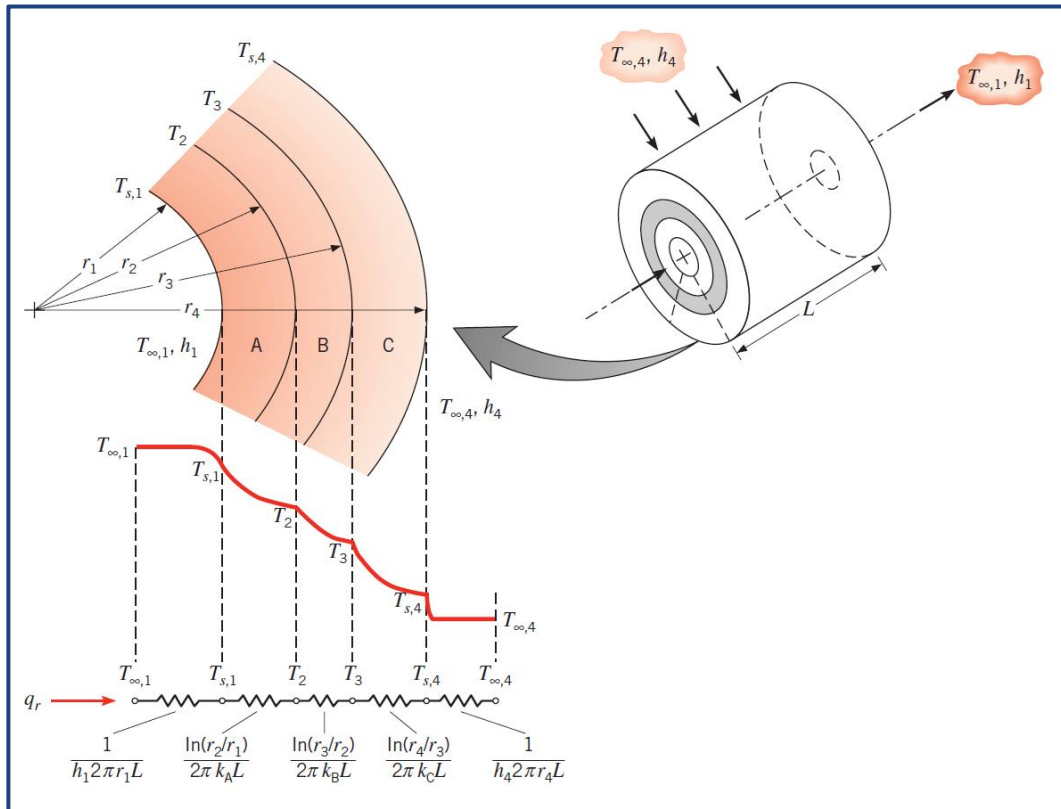
wobei C_1 und C_2 Integrationskonstanten sind



Logarithmischer
Temperaturverlauf

Zylindrisches Rohr – Serienschaltung

- Gegeben ist ein zylindrisches Rohr
- Der Wärmefluss kann über das Ohm'sche Gesetz für die Thermodynamik gefunden werden



- $\Delta T = R * \dot{q}$
- Zwei konvektive und drei Leitwiderstände in Serie
- Für den Wärmefluss folgt schliesslich

$$\dot{q}_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_A L} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_B L} + \frac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi k_C L} + \frac{1}{2\pi r_4 L h_4}}$$

Hinweis: In der englischen Literatur und in Thermodynamik III wird der Wärmeübergangskoeffizient α als h geschrieben

Stationäre eindimensionale Wärmeleitung – Kugelschale

- Die eindimensionale Wärmeleitung durch die Wand einer Kugelschale (keine Temperaturgradienten in tangentiale und axiale Richtung) kann im sphärischen Koordinatensystem einfach gelöst werden
- Für den quellenfreien und stationären Fall vereinfacht sich diese wie folgt:

- sphärisch:
$$\cancel{\rho c \frac{\partial T}{\partial t}} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \cancel{\frac{\partial}{\partial \theta}} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \cancel{\frac{\partial}{\partial \varphi}} \left(\lambda \sin \varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \cancel{\dot{q}'''}_{\text{Quellen}}$$

- Falls $\lambda = \text{const.}$ kann dieses ebenfalls aus der Klammer gezogen werden
- Die Wärmeleitungsgleichung reduziert sich also zu

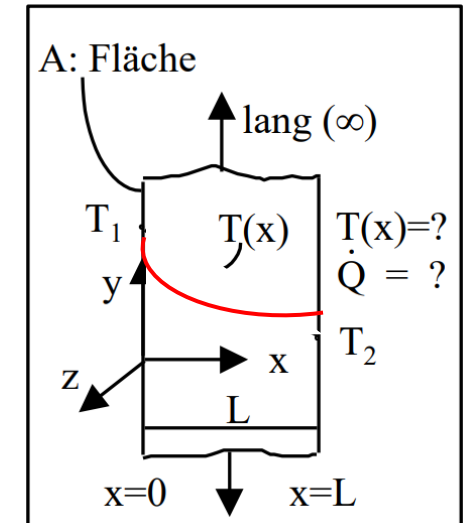
$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

- Die allgemeine Lösung lautet

$$T(r) = -C_1 * \frac{1}{r} + C_2$$

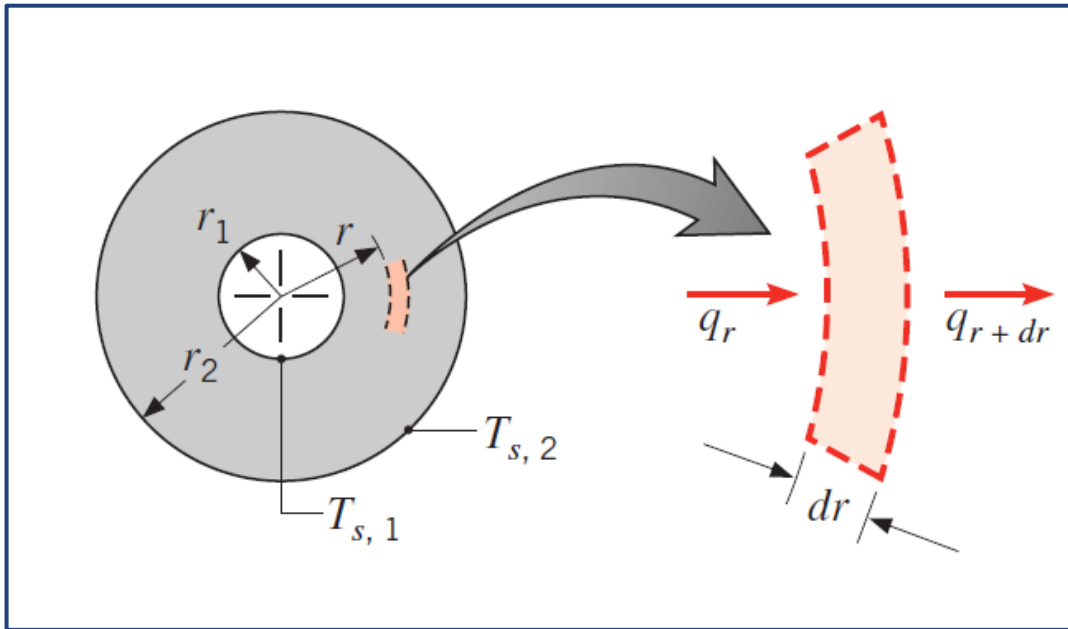
wobei C_1 und C_2 Integrationskonstanten sind

Temperaturverlauf mit $\frac{1}{r}$



Kugelschale

- Gegeben ist eine Kugelschale
- Der Wärmefluss kann über das Ohm'sche Gesetz für die Thermodynamik gefunden werden



- $\Delta T = R * \dot{q}$
- Ein Leitwiderstand
- Für den Wärmefluss folgt schliesslich

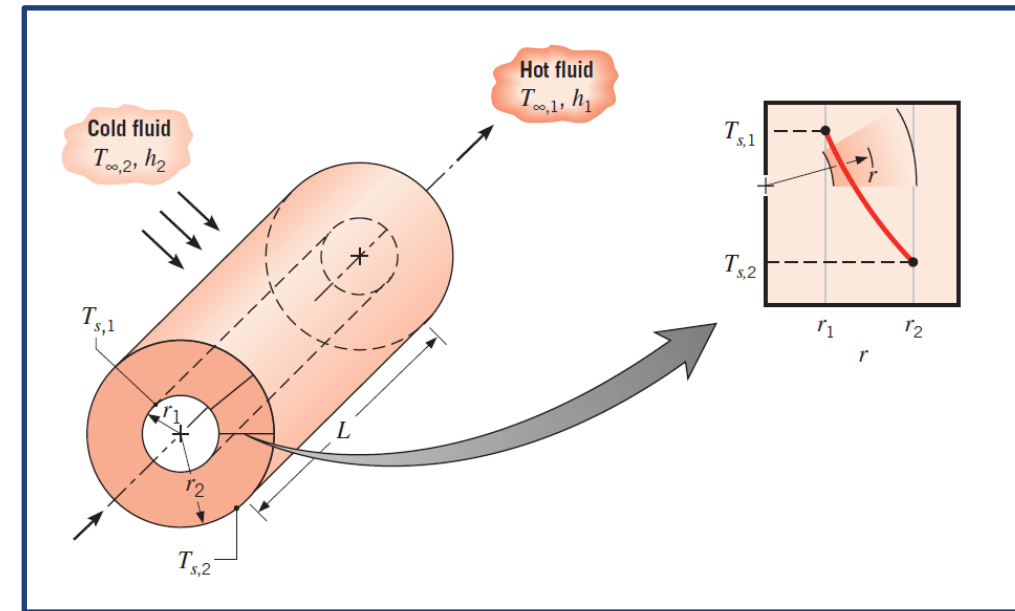
$$\dot{q}_r = \frac{4\pi k(T_{s,1} - T_{s,2})}{(1/r_1) - (1/r_2)}$$

Eindimensionale, stationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung - Zusammenfassung

	Plane Wall	Cylindrical Wall ^a	Spherical Wall ^a
Heat equation	$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$	$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$	$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$
Temperature distribution	$T_{s,1} - \Delta T \frac{x}{L}$	$T_{s,2} + \Delta T \frac{\ln(r/r_2)}{\ln(r_1/r_2)}$	$T_{s,1} - \Delta T \left[\frac{1 - (r_1/r)}{1 - (r_1/r_2)} \right]$
Heat flux (q'')	$k \frac{\Delta T}{L}$	$\frac{k \Delta T}{r \ln(r_2/r_1)}$	$\frac{k \Delta T}{r^2 [(1/r_1) - (1/r_2)]}$
Heat rate (q)	$kA \frac{\Delta T}{L}$	$\frac{2\pi Lk \Delta T}{\ln(r_2/r_1)}$	$\frac{4\pi k \Delta T}{(1/r_1) - (1/r_2)}$
Thermal resistance ($R_{t,cond}$)	$\frac{L}{kA}$	$\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi Lk}$	$\frac{(1/r_1) - (1/r_2)}{4\pi k}$

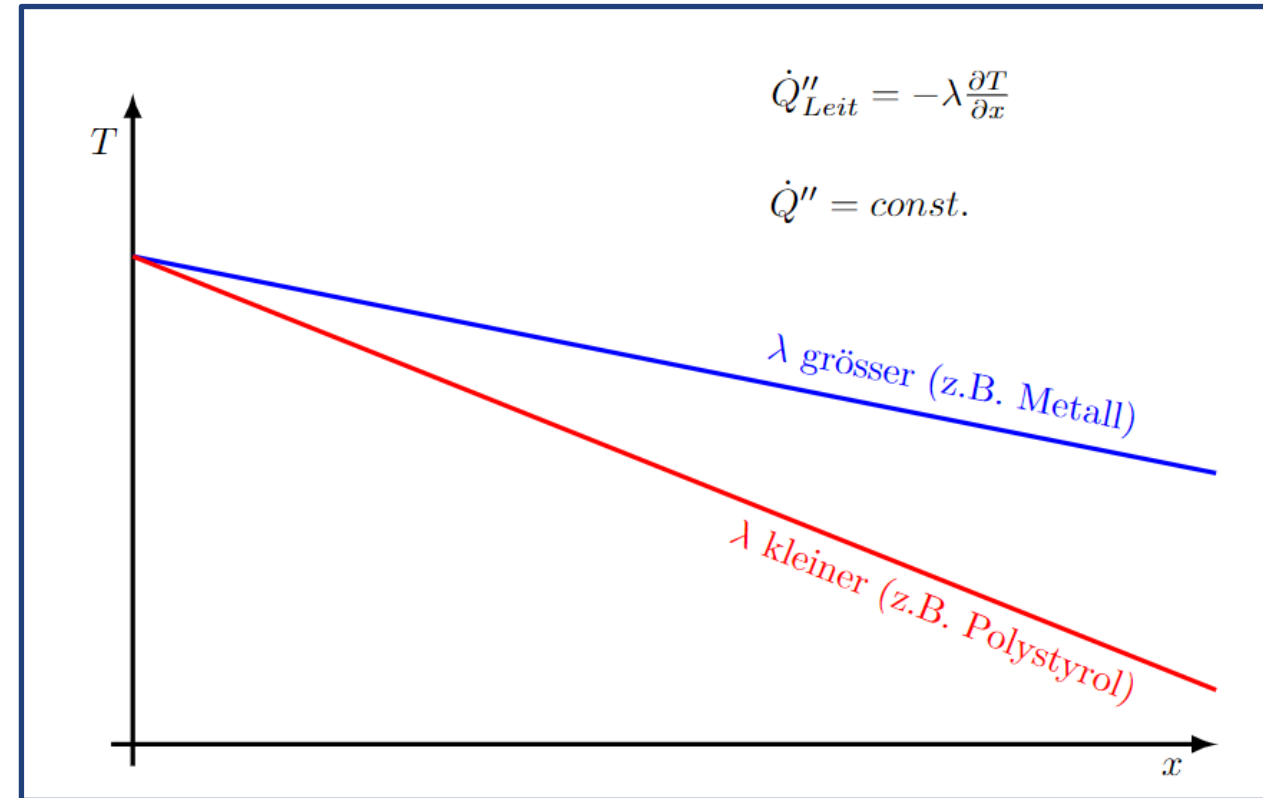
Zeichnen von Temperaturprofilen

- Die Geometrie gibt bereits Aufschluss über die Steigung und Krümmung der Kurve
 - Leitung durch
 - Ebene Wand \rightarrow linearer Verlauf
 - Zyl. Rohr \rightarrow logarithmischer Verlauf
 - Kugelschale \rightarrow Verlauf mit $\frac{1}{r}$
- Konvektion
 - Komplexe Modelle notwendig um Temperaturverlauf zu charakterisieren
 - Intuitiv einfach «exponentieller Verlauf»
 - Bereits in «kurzen» Abständen zum betrachteten Objekt nähert sich Temperaturverlauf asymptotischem Wert \rightarrow Umgebungstemperatur
- Wärmeleitfähigkeit λ gibt an, wie steil die Kurve relativ zu einer anderen verläuft



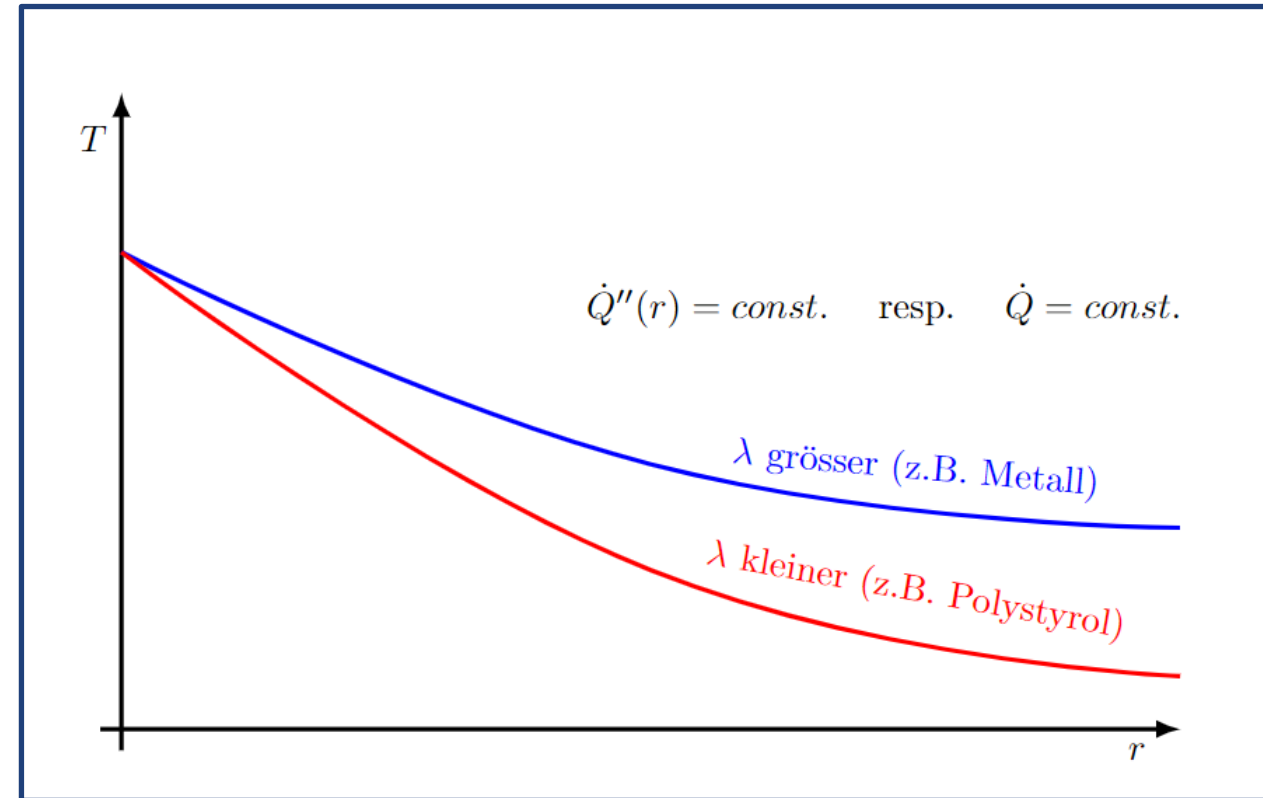
Zeichnen von Temperaturprofilen: Ebene Objekte

- Wärmeleitung
 - Linearer Verlauf, wenn keine Quellen
 - Steiler, wenn λ klein ist
- Konvektion
 - Exponentieller Verlauf
 - Grosse Krümmung bei hohen α



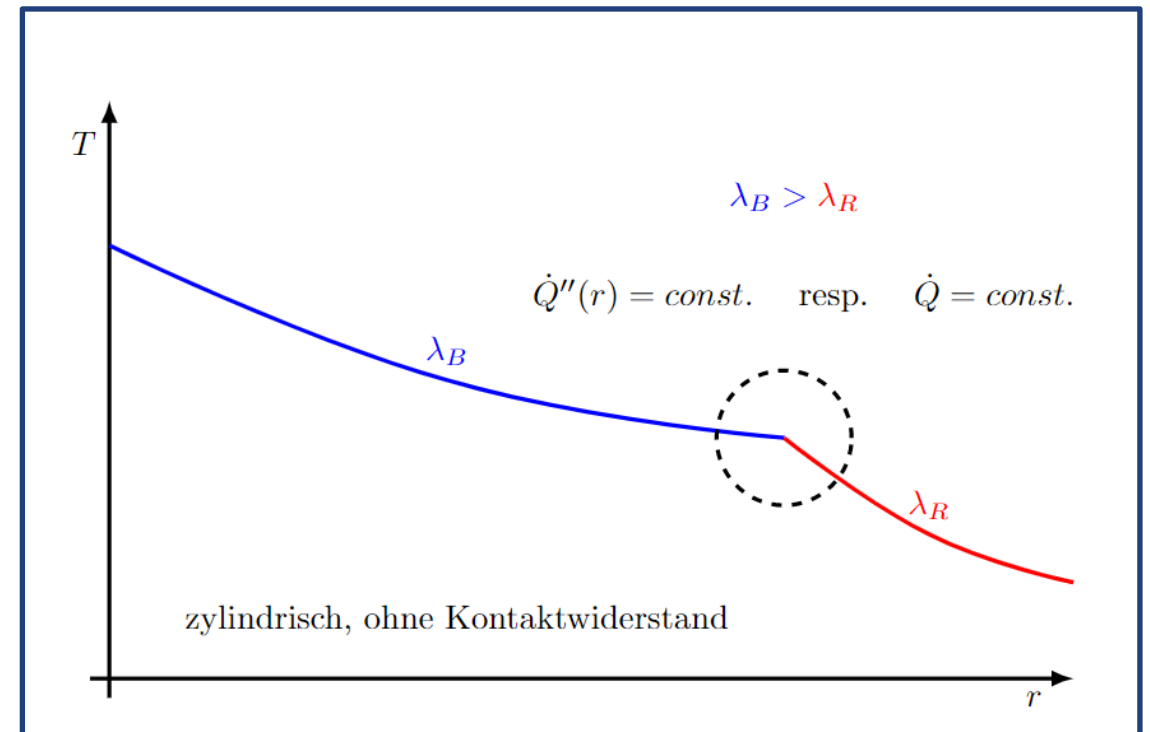
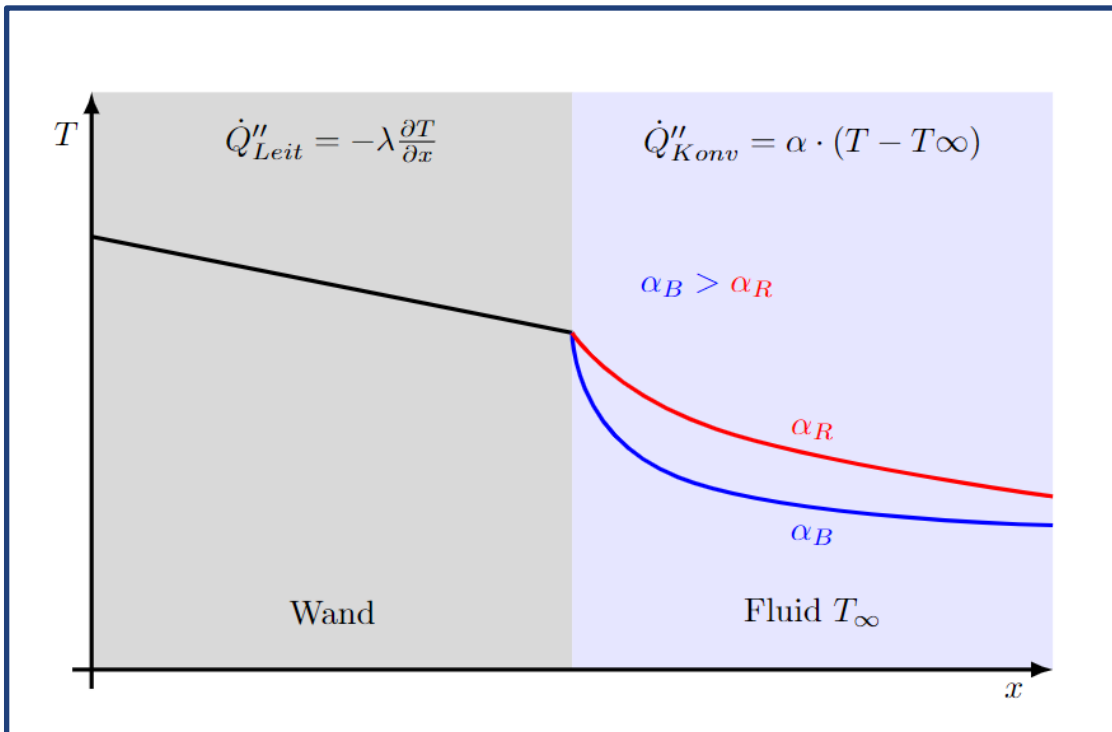
Zeichnen von Temperaturprofilen: Gewölbte Objekte

- Wärmeleitung
 - Gewölbter Verlauf
 - Steiler, wenn λ klein ist
- Konvektion
 - Exponentieller Verlauf, **steiler** als bei Wärmeleitung
 - Grosse Krümmung bei hohen α



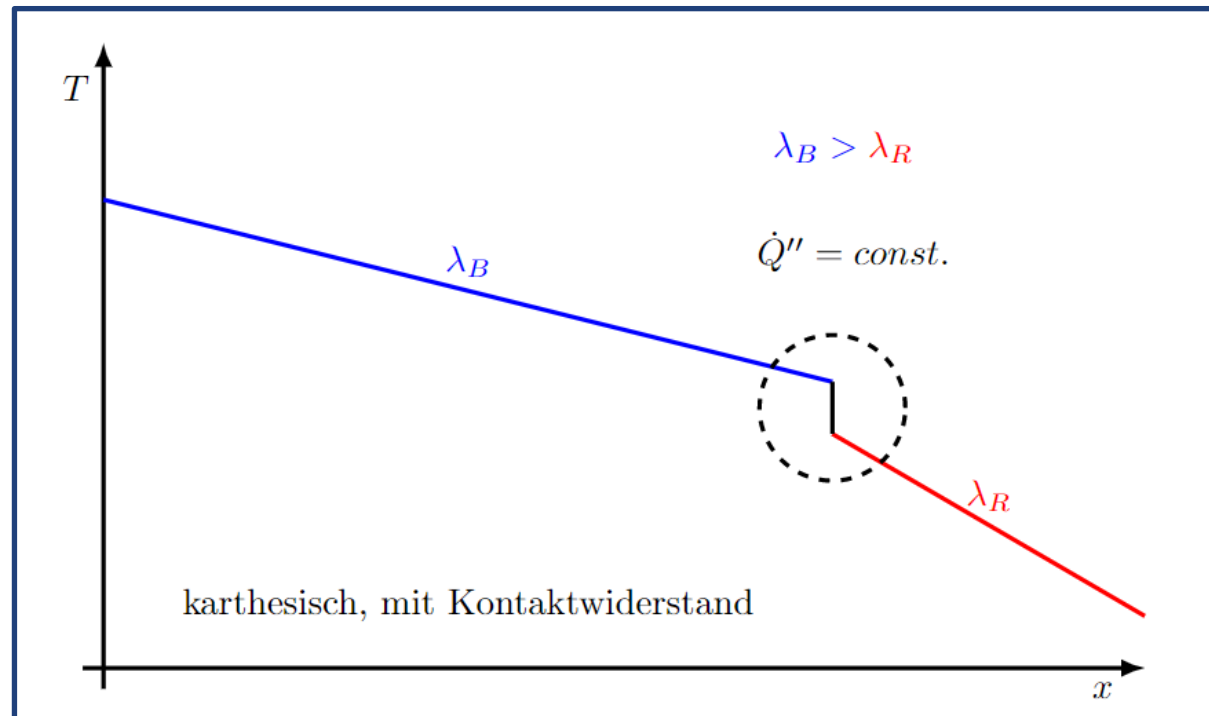
Zeichnen von Temperaturprofilen: Materialübergänge

- Steigung an Übergangsstellen allgemein unstetig, da es zu Materialwechsel kommt mit anderen Eigenschaften (Aggregatzustand, Wärmeleitfähigkeit, Strömungsart...)



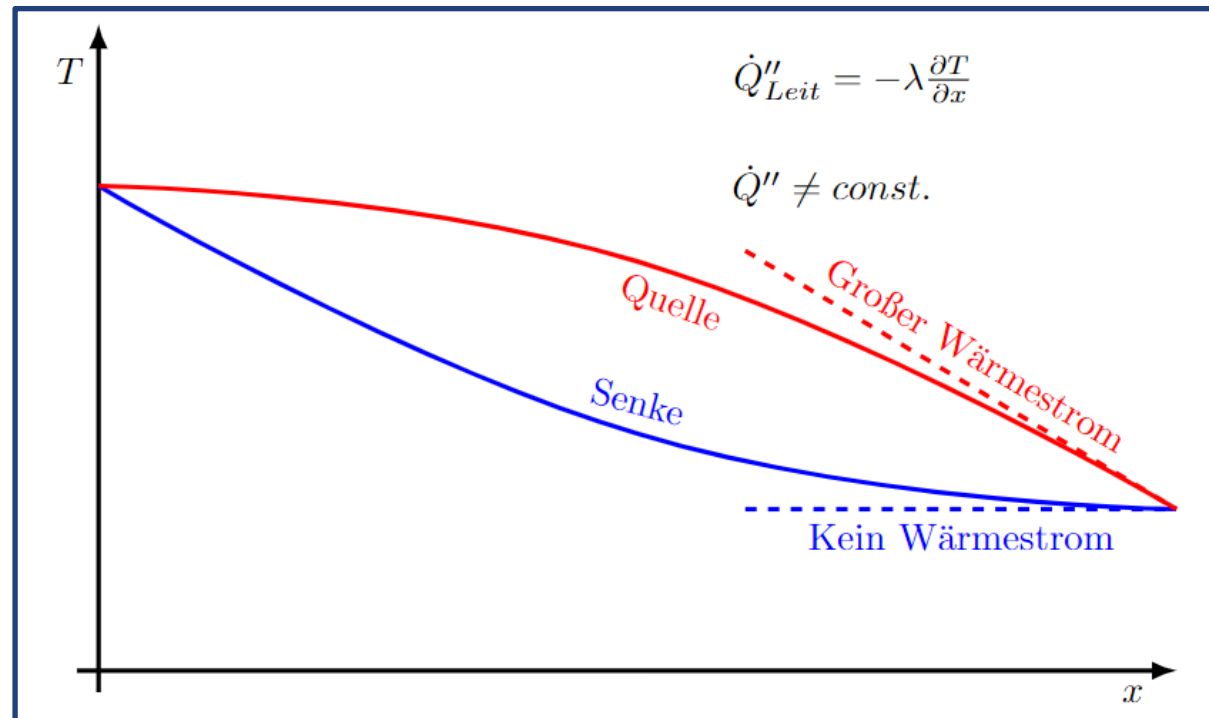
Zeichnen von Temperaturprofilen: Kontaktwiderstände

- Kontaktwiderstände sind beispielsweise Folien, die wir als unendlich dünn betrachten
- Obwohl sie keine «Dicke» besitzen, führen sie zu einem Temperatursprung \rightarrow Unstetigkeit im Temperaturprofil



Zeichnen von Temperaturprofilen: Wärmequellen/ -senken

- Wärmequellen/ -senken führen einen Störterm in die Wärmeleitungsgleichung
- Wo sich das Temperaturmaximum befindet, muss explizit berechnet werden
- Wichtig: Prinzip der Wärmeleitwiderstände kann nicht verwendet werden in quellen- bzw. senken-behafteten Segmenten
- Über die Krümmung kann allgemein eine Aussage getroffen werden:



Biot – Zahl

- Die dimensionslose Biot – Zahl ist definiert als

$$Bi = \frac{\alpha * L}{\lambda}$$

wobei α der Wärmeübergangskoeffizient, λ die Wärmeleitfähigkeit und L die charakteristische Länge

- Die Biot-Zahl stellt das Verhältnis des Wärmeleitungswiderstandes im inneren eines Körpers (bezüglich einer charakteristischen Ausdehnung L) zum äusseren konvektiven Wärmeübergangswiderstand dar.
- $Bi \gg 1$: \rightarrow Wärmeleitungswiderstand ist dominant, grösste Temperaturdifferenzen im inneren des Körpers
- $Bi \approx 1$: \rightarrow Es liegt kein dominanter Widerstand vor
- $Bi \ll 1$: \rightarrow Konvektiver Widerstand ist dominant, grösste Temperaturdifferenzen ausserhalb und homogene Temperaturverteilung innerhalb des Körpers

Serie 7 – Aufgabe 1

In einem Stahlrohr wird ein Gas bei einer Temperatur von 250°C transportiert. Das Rohr soll von aussen so beheizt werden, dass sich das Gas weder erwärmt noch abkühlt. Der Aufbau von innen nach aussen ist wie folgt:

- Stahlrohr, $D_{\text{ausser}} = 0.8 \text{ cm}$
- Elektrische Isolation, 0.2 cm dick, $\lambda = 0.45 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$
- Elektrische Heizfolie, unendlich dünn
- Steinwolle, 2 cm dick, $\lambda = 0.040 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$

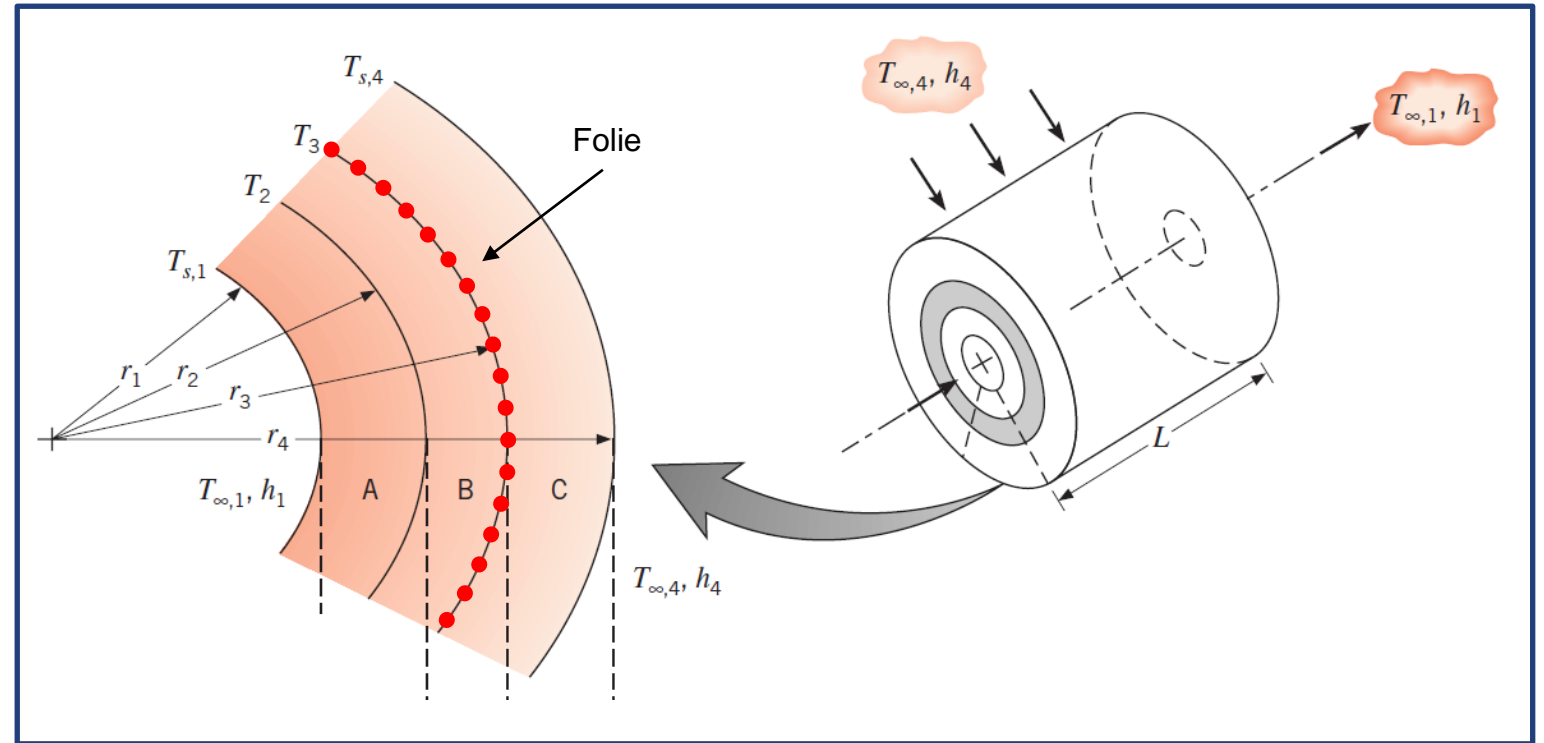
Der Wärmeübergangskoeffizient aussen beträgt $12 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ und die Umgebungstemperatur beträgt 20°C .

- a) Zeichnen Sie qualitativ die radiale Temperaturverteilung auf.
- b) Berechnen Sie die notwendige Heizleistung für ein Rohr von 3 m Länge.
- c) Berechnen Sie die Oberflächentemperatur.

Serie 7 – Aufgabe 1a) Zeichnen Sie qualitativ die radiale Temperaturverteilung auf.

Gegeben:

- $T_{\infty,1} = 250^\circ\text{C}$
- $T_{\infty,4} = 20^\circ\text{C}$
- $L = 3\text{m}$
- $r_1 = r_{\text{Stahl,innen}} = ?$
- $r_2 = r_{\text{Stahl,aussen}} = 0.4\text{cm}$
- $r_3 = r_{\text{Isolation}} = 0.6\text{cm}$
- $r_4 = r_{\text{Steinwolle}} = 2.6\text{cm}$
- $\lambda_1 = \lambda_{\text{Stahl}} = ?$
- $\lambda_2 = \lambda_{\text{Isolation}} = 0.45 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$
- $\lambda_3 = \lambda_{\text{Steinwolle}} = 0.04 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$
- $\alpha_{\text{innen}} = ?$
- $\alpha_{\text{aussen}} = 12 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$



Prinzipische Skizze

Aus Aufgabentext: Das Rohr soll von aussen so beheizt werden, dass sich das Gas *weder erwärmt noch abkühlt*.

Serie 7 – Aufgabe 1a) Zeichnen Sie qualitativ die radiale Temperaturverteilung auf.

Gegeben:

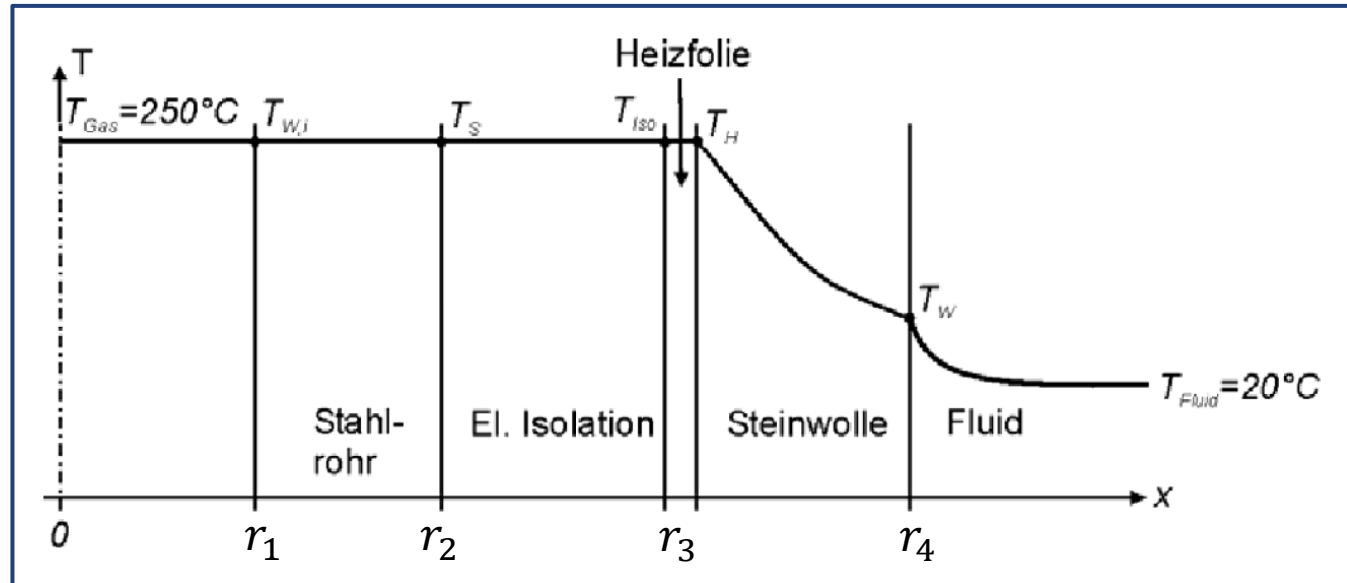
- $T_{\infty,1} = 250^\circ\text{C}$
- $T_{\infty,4} = 20^\circ\text{C}$
- $L = 3\text{m}$
- $r_1 = r_{\text{Stahl,innen}} = ?$
- $r_2 = r_{\text{Stahl,aussen}} = 0.4\text{cm}$
- $r_3 = r_{\text{Isolation}} = 0.6\text{cm}$
- $r_4 = r_{\text{Steinwolle}} = 2.6\text{cm}$

- $\lambda_1 = \lambda_{\text{Stahl}} = ?$
- $\lambda_2 = \lambda_{\text{Isolation}} = 0.45 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$
- $\lambda_3 = \lambda_{\text{Steinwolle}} = 0.04 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$

- $\alpha_{\text{innen}} = ?$
- $\alpha_{\text{aussen}} = 12 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$

Aus Aufgabentext: *Das Rohr soll von aussen so beheizt werden, dass sich das Gas weder erwärmt noch abkühlt.*

In anderen Worten: Netto darf keine Wärme aus dem Stahlrohr fließen. Wir kennen an dieser Stelle die Werte für α_{innen} und λ_1 nicht, diese sind aber auch nicht notwendig. Die Heizfolie liefert exakt so viel Energie, dass die Temperatur innerhalb des Rohres konstant ist und der konvektive als auch der Wärmeleitübergang kompensiert werden.

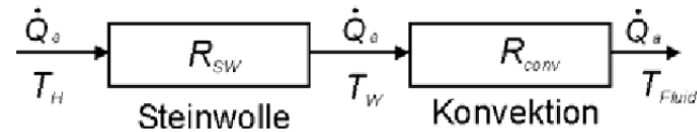


Serie 7 – Aufgabe 1b) Berechnen Sie die notwendige Heizleistung für ein Rohr von 3m Länge.

Gegeben:

- $T_{\infty,1} = 250^{\circ}\text{C}$
- $T_{\infty,4} = 20^{\circ}\text{C}$
- $L = 3\text{m}$
- $r_1 = r_{\text{Stahl,innen}} = ?$
- $r_2 = r_{\text{Stahl,aussen}} = 0.4\text{cm}$
- $r_3 = r_{\text{Isolation}} = 0.6\text{cm}$
- $r_4 = r_{\text{Steinwolle}} = 2.6\text{cm}$
- $\lambda_1 = \lambda_{\text{Stahl}} = ?$
- $\lambda_2 = \lambda_{\text{Isolation}} = 0.45 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$
- $\lambda_3 = \lambda_{\text{Steinwolle}} = 0.04 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$
- $\alpha_{\text{innen}} = ?$
- $\alpha_{\text{aussen}} = 12 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$

- Da es sich um eine Serienschaltung handelt, ist der Wärmestrom konstant
- Die Heizfolie gibt gleich viel Energie nach aussen wie nach innen ab
 \rightarrow In den beiden äusseren Schichten können wir mit den Wärmeleitwiderständen arbeiten:



- Die von der Heizfolie nach aussen abgegebene Wärme kann über das Ohm'sche Gesetz ermittelt werden:

$$\dot{Q}_a = \frac{\Delta T}{R_{tot}} = 108.76\text{W}$$

- $R_{tot} = R_{SW} + R_{Conv.} = \frac{1}{2\pi L} \left[\frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{\lambda_3} + \frac{1}{r_4 \alpha_{aussen}} \right] = 2.11 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{W}}$
- $\Delta T = T_{\infty,1} - T_{\infty,4} = 230^{\circ}\text{C}$

Serie 7 – Aufgabe 1c) Berechnen Sie die Oberflächentemperatur T_W .

Gegeben:

- $T_{\infty,1} = 250^\circ\text{C}$
- $T_{\infty,4} = 20^\circ\text{C}$
- $L = 3\text{m}$
- $r_1 = r_{\text{Stahl,innen}} = ?$
- $r_2 = r_{\text{Stahl,aussen}} = 0.4\text{cm}$
- $r_3 = r_{\text{Isolation}} = 0.6\text{cm}$
- $r_4 = r_{\text{Steinwolle}} = 2.6\text{cm}$

- $\lambda_1 = \lambda_{\text{Stahl}} = ?$
- $\lambda_2 = \lambda_{\text{Isolation}} = 0.45 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$
- $\lambda_3 = \lambda_{\text{Steinwolle}} = 0.04 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$

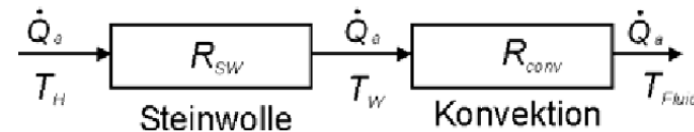
- $\alpha_{\text{innen}} = ?$
- $\alpha_{\text{aussen}} = 12 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$

- Eine einfache Energieerhaltung führt zum Ziel (es muss die gleiche Wärme durch die Widerstände fließen):

$$\dot{Q}_a = \frac{\Delta T}{R_{\text{tot}}} = \frac{\Delta T_{\text{Conv.}}}{R_{\text{Conv.}}} = \frac{T_W - T_{\infty,4}}{R_{\text{Conv.}}}$$

- Auflösen nach T_W liefert:

$$T_W = \frac{R_{\text{Conv.}}}{R_{\text{tot}}} * \Delta T + T_{\infty,4} = 38.5^\circ\text{C}$$



Serie 7 – Aufgabe 4

Für die Entsorgung von radioaktiven Abfällen werden diese in Glas eingegossen. Es entstehen Blöcke mit einer homogenen inneren Wärmequelle. Für die eindimensionale Behandlung dieses Problems betrachten wir eine Schicht von 0.4 m Dicke, beidseitig gekühlt. Die Kühlung geschieht einmal

- a) durch eine Flüssigkeit mit $\alpha = 500\text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ und
- b) mit Luft durch freie Konvektion mit $\alpha = 15\text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$.

Die Fluidtemperatur T_∞ sei in beiden Fällen 20°C . Wie gross darf die volumenspezifische Wärmebelastung in den beiden Fällen a) und b) sein, wenn die Maximaltemperatur im Inneren 400°C nicht übersteigen darf ($\lambda_{\text{glas}} = 0,81\text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$)?

- c) Diskutieren Sie das Resultat als Funktion der Biot-Zahl.

Serie 7 – Aufgabe 4a)&b)

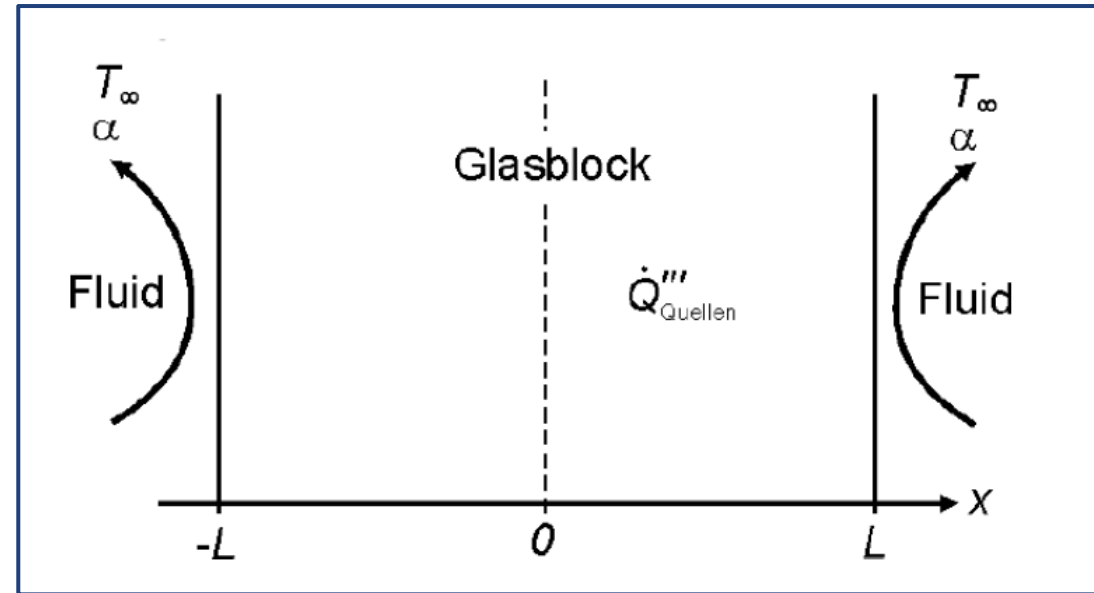
Wie gross darf die volumenspezifische Wärmebelastung in den beiden Fällen a) und b) sein, wenn die Maximaltemperatur im Inneren 400°C nicht übersteigen darf

■ *Gegeben:*

- Quellenbehafteter Glasblock
- Symmetrisches Problem
- $2L = 0.4\text{m} \rightarrow L = 0.2\text{m}$
- $T_{\max} = 400^\circ\text{C}$
- $T_\infty = 20^\circ\text{C}$
- $\lambda_{\text{Glas}} = 0.81 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$

a) $\alpha = 500 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$

b) $\alpha = 15 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$



Prinzipskizze

■ *Gesucht:*

■ $\dot{Q}'''_{\text{Quellen,crit}}$

Serie 7 – Aufgabe 4a)&b) Wie gross darf die volumenspezifische Wärmebelastung in den beiden Fällen a) und b) sein, wenn die Maximaltemperatur im Inneren 400°C nicht übersteigen darf

- Wir kennen die ausgeschriebene Form der Wärmeleitungsgleichung:

- kartesisch: $\rho c \cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cancel{\frac{\partial T}{\partial y}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cancel{\frac{\partial T}{\partial z}} \right) + \dot{q}'_{Quellen}$

- *Annahmen:*

- Stationäres System (steady state)
 - Eindimensionale Wärmeleitung
 - Glasblock, d.h. kartesisches Koordinatensystem am besten geeignet
 - Sowohl λ als auch α sind explizit gegeben und können daher als konstant betrachtet werden
 - Die Wärmequelle ist uniform in dem Glas verteilt
 - Wärmestrahlung kann vernachlässigt werden, da auftauchende Temperaturen viel zu klein sind

Serie 7 – Aufgabe 4a)&b) Wie gross darf die volumenspezifische Wärmebelastung in den beiden Fällen a) und b) sein, wenn die Maximaltemperatur im Inneren 400°C nicht übersteigen darf

- Durch Vereinfachung erhalten wir folgende Gleichung:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = - \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{\lambda}$$

- Zweimalige Integration liefert dann

$$T(x) = - \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2,$$

wobei C_1 und C_2 Integrationskonstanten sind

- Wir kennen nun das allgemeine (symmetrische) Temperaturprofil innerhalb des Glasblocks und müssen geeignete Randbedingungen finden

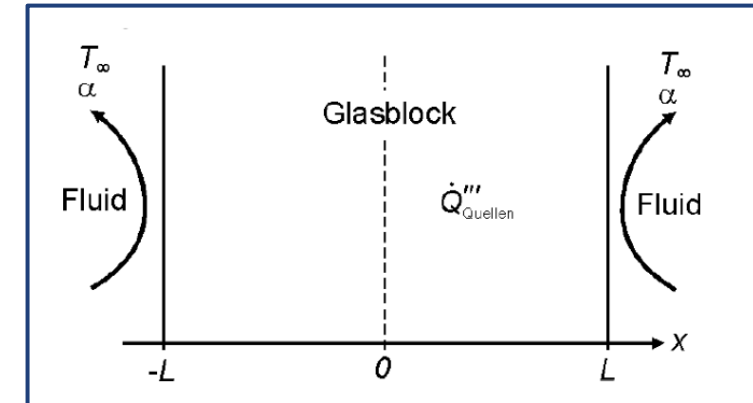
Serie 7 – Aufgabe 4a)&b) Wie gross darf die volumenspezifische Wärmebelastung in den beiden Fällen a) und b) sein, wenn die Maximaltemperatur im Inneren 400°C nicht übersteigen darf

1. Das Temperaturprofil ist Symmetrisch, da der Block von beiden Seiten gleich konvektiv gekühlt wird und die Quellen homogen im Block verteilt sind. Daraus folgt, dass das Temperaturmaximum im Zentrum des Blocks erreicht wird und somit die Steigung des Temperaturprofils an dieser Stelle verschwinden muss:

$$\frac{\partial T(x=0)}{\partial x} = 0$$

2. Das Temperaturmaximum wird im Zentrum des Blocks erreicht:

$$T(x=0) = T_{max}$$



3. Die abgegebene flächenspezifische Wärmemenge durch Leitung muss am Übergang $x = \pm L$ identisch sein mit der Konvektion:

$$\dot{Q}''_{Conv.} = \alpha(T_w - T_{\infty}) = -\lambda \frac{\partial T(x = \pm L)}{\partial x} = \dot{Q}''_{Leit}$$

$$T(x) = -\frac{\dot{Q}_{Quellen}'''}{2\lambda}x^2 + C_1x + C_2,$$

$$1. \quad \frac{\partial T(x=0)}{\partial x} = 0 \quad \mapsto C_1 = 0$$

2. $T(x = 0) = T_{\max} \quad \mapsto C_2 = T_{\max}$

- Das Temperaturprofil lautet also $T(x) = T_{\max} - \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}'''}{2\lambda} x^2$

$$3. \quad \alpha(T_w - T_\infty) = -\lambda \frac{\partial T(x=\pm L)}{\partial x}$$

- $$T_w = T(x = L) = T_{\max} - \frac{\dot{Q}_{\text{Quellen}}''' L^2}{2\lambda}$$

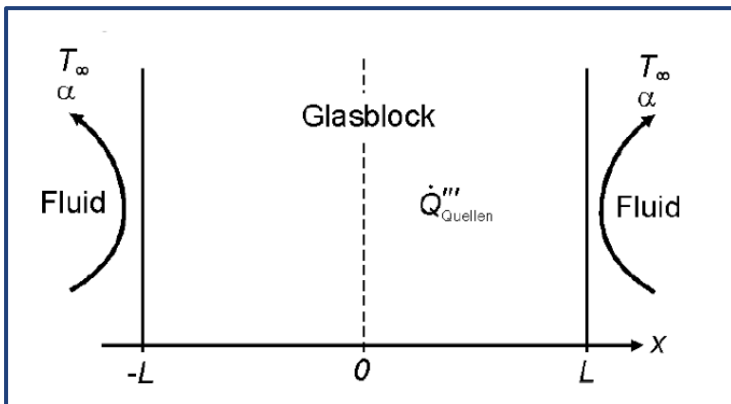
$$\frac{\partial T(x=L)}{\partial x} = - \frac{\dot{Q}_{Quellen}'''}{\lambda} L$$

$$\left. \vphantom{\frac{\dot{Q}_{Quellen}'''}{2\lambda} L^2} \right\} \alpha \left(T_{\max} - \frac{\dot{Q}_{Quellen}'''}{2\lambda} L^2 - T_{\infty} \right) = -\lambda \left(-\frac{\dot{Q}_{Quellen}'''}{\lambda} L \right)$$

Serie 7 – Aufgabe 4a)&b) Wie gross darf die volumenspezifische Wärmebelastung in den beiden Fällen a) und b) sein, wenn die Maximaltemperatur im Inneren 400°C nicht übersteigen darf

- Wir müssen nun nur noch $\alpha \left(T_{\max} - \frac{\dot{Q}'''_{\text{Quellen}} L^2}{2\lambda} - T_{\infty} \right) = -\lambda \left(-\frac{\dot{Q}'''_{\text{Quellen}}}{\lambda} L \right)$ nach $\dot{Q}'''_{\text{Quellen,crit}}$ auflösen:

$$\dot{Q}'''_{\text{Quellen,crit}} = \frac{T_{\max} - T_{\infty}}{\frac{L}{\alpha} + \frac{L^2}{2\lambda}} = \begin{cases} a) 15.14 \frac{\text{kW}}{\text{m}^3} \\ b) 9.99 \frac{\text{kW}}{\text{m}^3} \end{cases}$$



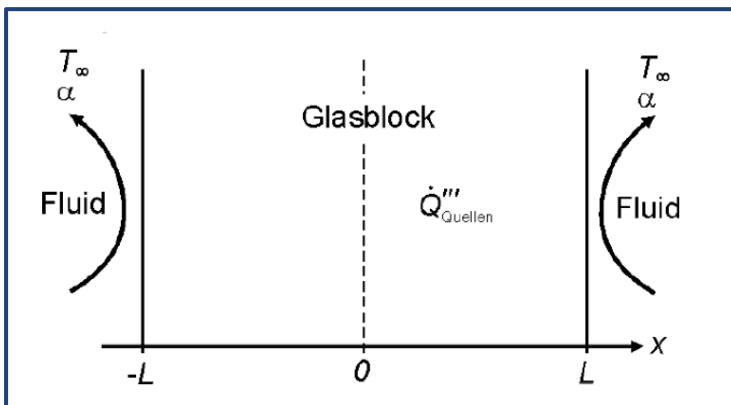
- $L = 0.2\text{m}$
- $T_{\max} = 400^\circ\text{C}$
- $T_{\infty} = 20^\circ\text{C}$
- $\lambda_{\text{Glas}} = 0.81 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$
- a. $\alpha = 500 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$
- b. $\alpha = 15 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$

Serie 7 – Aufgabe 4c) Diskutieren Sie das Resultat als Funktion der Biot-Zahl.

- Die Biot – Zahl ist wie folgt definiert:

$$Bi = \frac{\alpha * L}{\lambda}$$

- a) $Bi = 123.5 \gg 1$ \rightarrow Wärmeleitwiderstand ist erheblich grösser als Widerstand durch Konvektion. Um Leitung zu verbessern, kann radioaktives Material in eine andere Substanz eingebettet werden.
- b) $Bi = 3.7 \approx 1$ \rightarrow Es liegt kein dominanter Widerstand vor. Abtransport der Wärme sowohl durch Konvektion als auch durch Leitung beschränkt.



- $L = 0.2m$
 - $T_{max} = 400^\circ\text{C}$
 - $T_\infty = 20^\circ\text{C}$
 - $\lambda_{Glas} = 0.81 \frac{W}{mK}$
- a. $\alpha = 500 \frac{W}{m^2K}$
- b. $\alpha = 15 \frac{W}{m^2K}$

Tipps für die Serie

- Aufgabe 2
 - A) Störterm in Wärmeleitungsgleichung berücksichtigen
 - B) Achtung: aufgrund des Störterms verläuft die Temperatur nicht linear durch die Platte
 - C) Verwende Fourier'sches Gesetz für Leitung und finde einen Ausdruck für I_0
- Aufgabe 3
 - In der Siliziumscheibe herrscht eine uniform verteilte Wärmequelle
 - Wärmeleitungsgleichung muss in jedem Teil aufgestellt und gelöst werden \rightarrow 6 Integrationskonstanten müssen bestimmt werden (aufwendig)
- Aufgabe 5
 - Instationäre Wärmeleitungsgleichung, muss nicht explizit gelöst werden!
 - C) Je länger die Heizung im Betrieb ist, desto mehr nähert sich die ausgetauschte Wärme einem asymptotischem Wert an (Bsp. Autoheizung im Winter: zu Beginn ist es kalt, wenn wir die Heizung auf 25°C einstellen, wird sich die Temperatur im Auto nach einer gewissen Zeit an diese anpassen und die ausgetauschte Wärme ist dann konstant)
 - D) Verwende die spezifische innere Energie u gemäss Thermodynamik I und stelle Bilanz auf für $t = 0$ und $t = \infty$