PVK Übungen Biomechanik I

Übungsskript zum Prüfungsvorbereitungskurs

Jack Kendall

kendallj@student.ethz.ch

Übungen aus vergangenen Übungen und Prüfungen vom D-HEST, D-MAVT & D-USYS, aus Hibbeler Mechanics of Materials 8th und von Jack Kendall

ETH Zürich

10.06.19

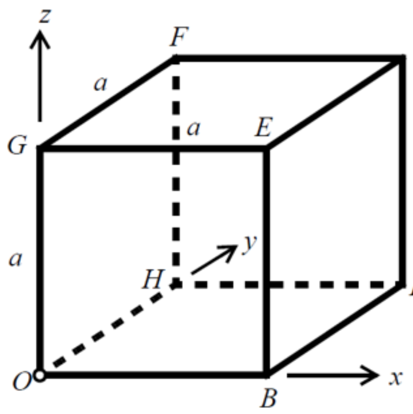
Ich kann weder Vollständigkeit noch Korrektheit des Skriptes garantieren: es ist möglich dass kleine Fehler enthalten sind. Ich bin deshalb sehr dankbar, wenn mir diese gemeldet werden, so dass ich sie korrigieren und euch die Qualität des Skriptes garantieren kann.

Inhalt

1 TAG 1

1.1 Kinematik 3D

1.1.1 Aufgabe Kurs



Der Bewegungszustand eines starren Würfels (Abbildung 1) ist durch die Geschwindigkeiten in den Ecken D, F, und G gegeben:

$$\underline{v}_D = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix}; \quad \underline{v}_F = \begin{pmatrix} v \\ -v \\ ? \end{pmatrix}; \quad \underline{v}_G = \begin{pmatrix} v \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

Stellen Sie den Bewegungszustand durch eine Kinemate in der Ecke O dar.

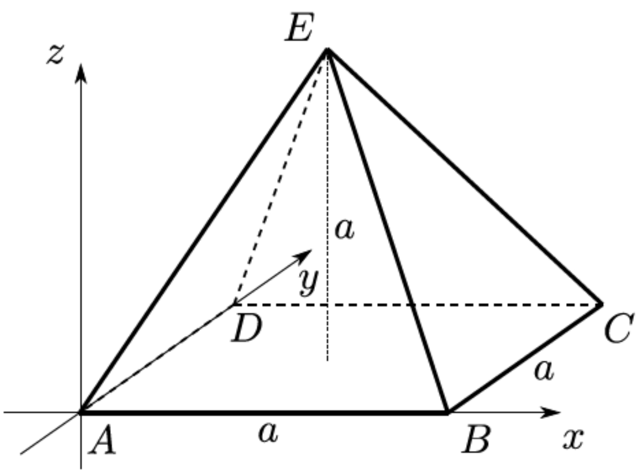
1.1.2 Aufgabe Kurs

Von der abgebildeten Pyramide (Seitenlänge $= a$, Höhe $= a$) weiss man, dass die Punkte B und D in Ruhe sind. Die Ecke C hat die Geschwindigkeit:

$$\underline{v}_C = \left(0,\ 0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}v\right)$$

beschrieben.

1. Bestimme die Rotationsachse μ der Pyramide.
2. Wie gross ist die Rotationsgeschwindigkeit $\underline{\omega}$?
3. Bestimme die Geschwindigkeit des Punktes E.



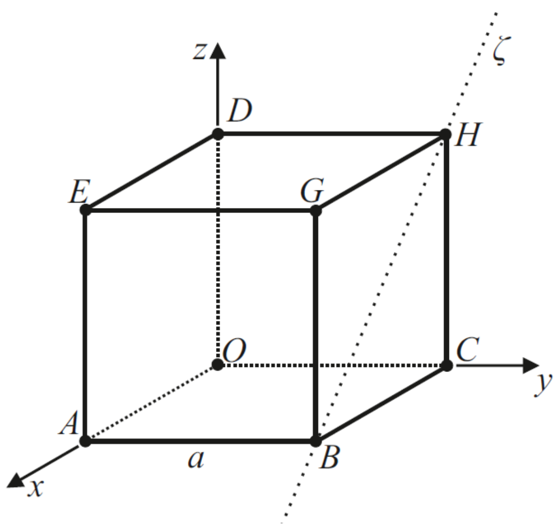
1.1.3 Aufgabe Kurs

Es ist bekannt, dass der abgebildete Würfel (Kantenlänge a) eine Rotation um die Achse ζ ausführt, welche durch die Eckpunkte B und H geht.
Die Geschwindigkeit im Punkt G ist gegeben:

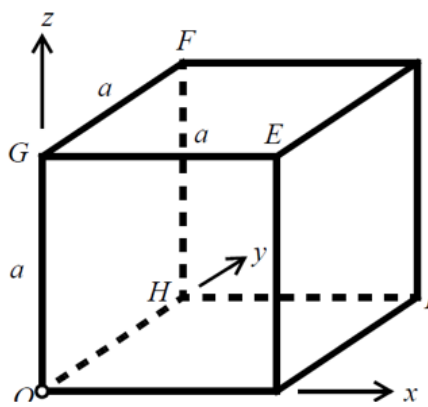
$$\underline{v}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 3v \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Kinemate in H.

b) Bestimmen Sie die grösste Schnelligkeit im Körper und geben Sie die y-Komponente der Geschwindigkeit am entsprechenden Punkt an.



1.1.4 Hausaufgabe



Ein Würfel (Abbildung 1) hat im Punkt H die Kinemate $\underline{v}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 2v \end{pmatrix}$, $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} v/a \\ v/a \\ -v/a \end{pmatrix}$

Berechnen Sie die Kinemate im Punkt C.

1.1.5 Hausaufgabe

Ein Würfel (Abbildung 1) führt eine reine Rotation aus. In der gezeichneten speziellen Lage des Würfels fallen die Kanten OB, OH und OG mit den Achsen x, y bzw. z des Koordinatensystems zusammen. In dieser Lage sind die Geschwindigkeiten der Punkte C bzw. F in kartesischen Komponenten

$$\underline{v}_C = \begin{pmatrix} -v \\ v \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{v}_F = \begin{pmatrix} ? \\ 0 \\ -v \end{pmatrix}$$

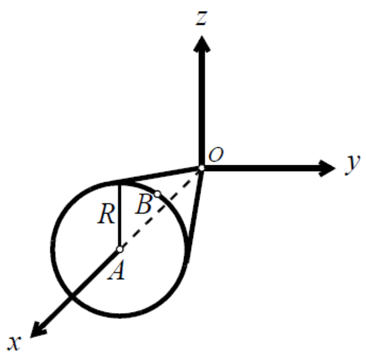
Die x-Komponente von $\underline{v}_F$ist nicht gegeben. Ermitteln Sie die Rotations-geschwindigkeit $\underline{\omega}$.

1.1.6 Hausaufgabe

Ein Kreiskegel (Radius R) mit der Grundfläche in der Ebene $x = R$ und der Spitze in $O(0, 0, 0)$ rotiert um eine Achse, welche durch die Punkte $A(R, 0, 0)$ und $B\ (R, \frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}})$ verläuft.

Die Geschwindigkeit im Ursprung O ist $\underline{v}_o = (a, -v, v)$ mit v gegeben.

a) Berechnen Sie a und die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit $\underline{\omega}$.



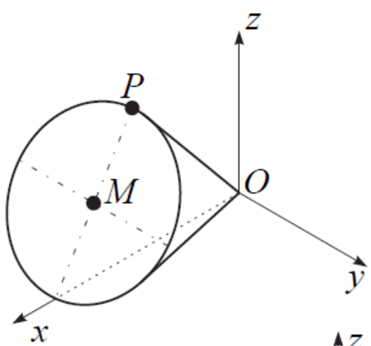
1.1.7 Hausaufgabe

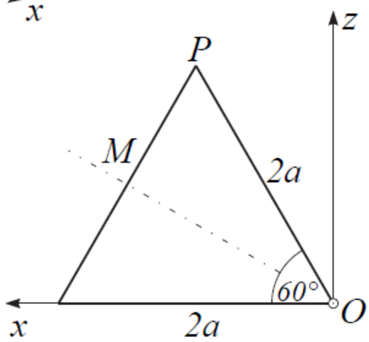
Ein starrer Kegel rollt mit der gegebenen Rotationsschnelligkeit ω auf der xy-Ebene ab, so dass seine Spitze stets im Ursprung des raumfesten kartesischem Koordinatensystems liegt. Die Abmessungen sind der Skizze zu entnehmen.

a) Was ist in der skizzierten Lage die momentane Rotationsachse?

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsvektoren $\underline{v}_P$ und $\underline{v}_M$ in den Punkten P und M in der momentanen Lage.

c) Wie lange braucht der Kegel für eine Umdrehung um die z-Achse?





1.1.8 Hausaufgabe

Ein starrer Tetraeder befindet sich momentan in der gezeichneten Lage. Die Grundfläche liegt in der $x-y$ Ebene und hat die Seitenlängen a und $\sqrt{2}a$. Die restliche Geometrie kann der Skizze entnommen werden. Vom momentanen Bewegungszustand ist die Kinemate im Punkt C gegeben als

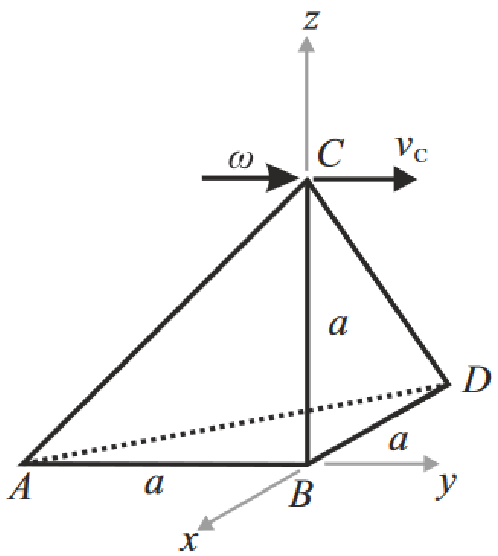
$$\underline{\omega} = \frac{v}{a}\underline{e}_y \qquad\qquad \underline{v}_C = 2v\underline{e}_y$$

a) Welchen momentanen Bewegungszustand führt der Tetraeder aus?

b) Man bestimme den Vektor $\underline{v}_B$ der Geschwindigkeit im Punkt B.

c) Welcher Punkt des Körpers hat minimale Schnelligkeit? Geben Sie die Schnelligkeit für diesen Punkt an.

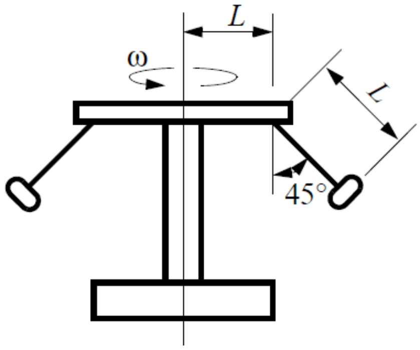
d) Welcher Punkt des Körpers hat maximale Schnelligkeit? Geben Sie die Schnelligkeit für diesen Punkt an.



1.2 Kinematik 2D

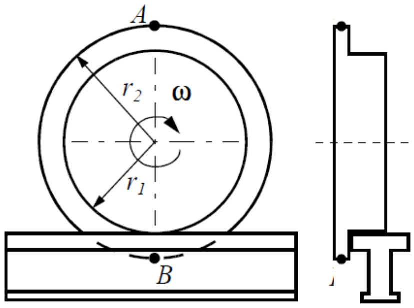
1.2.1 Aufgabe Kurs

Das im Bild dargestellte Karussell dreht mit der Rotationsgeschwindigkeit $\underline{\omega}$.
Wie gross ist die Schnelligkeit der Sessel?



1.2.2 Aufgabe Kurs

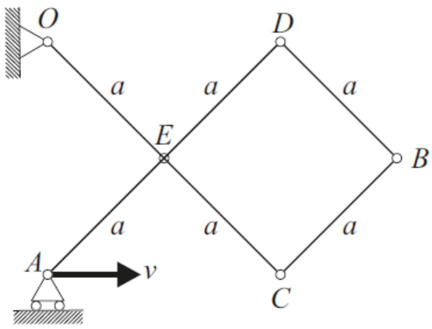
Ein Eisenbahnrad rollt mit der Rotationsschnelligkeit ω. Wie gross ist die Schnelligkeit des obersten Punktes A und des untersten Punktes B des Radkranzes?
In welcher Richtung zeigt jeweils der Geschwindigkeitsvektor in diesen beiden Punkten?



1.2.3 Aufgabe Kurs

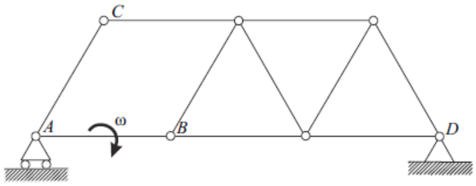
Das abgebildete System besteht aus vier starren, gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Es ist in O gelenkig gelagert und in A aufgelegt. Welches ist die Geschwindigkeit des Punktes B, wenn sich A im Augenblick mit der Schnelligkeit v nach rechts bewegt?

Hinweis: Wenden Sie den Satz vom Momentanzentrum oder den Projektionssatz für jeden Stab an.



1.2.4 Aufgabe Kurs

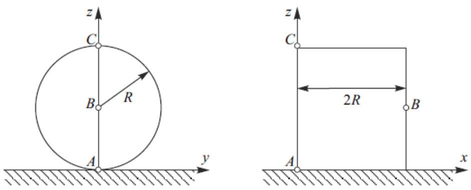
Das in der Skizze dargestellte System besteht aus mehreren starren Stäben gleicher Länge, welche reibungsfrei gelenkig miteinander verbunden sind. Der Stab AB rotiert momentan mit der Winkelschnelligkeit ω.
In welche Richtung rotiert der Stab AC? Wie gross ist seine Winkelschnelligkeit?



1.2.5 Hausaufgabe

Auf der Ebene $z = 0$ (kartesisches Koordinatensystem) gleitet ein starrer Drehzylinder (Radius R, Länge $2R$) so, dass der Zylinder stets auf seiner Mantelfläche aufliegt. Der Bewegungszustand wird durch die Geschwindigkeiten $\underline{v}_A = v\,\underline{e}_y$, $\underline{v}_B = 2v\,\underline{e}_y$, $\underline{v}_C = -v\,\underline{e}_y$ der Punkte A, B und C beschrieben.

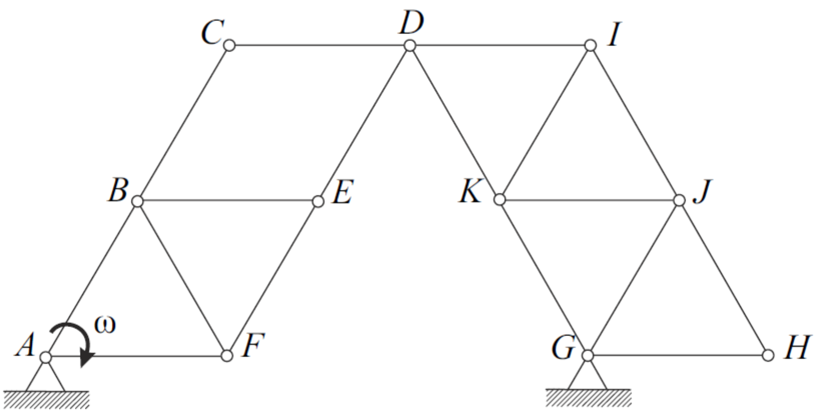
Begründen Sie, dass die Rotationsgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ keine y-Komponente haben kann und dass daher die Bewegung eine momentane Rotation ist. Welches $\underline{\omega}$ und welche momentane Rotationsachse hat der Zylinder?



1.2.6 Hausaufgabe

Am abgebildeten Fachwerk aus gleichlangen Stäben (Länge l) wird der Stab CE entfernt und dem Teil $ABEF$ in der gegebenen Lage eine Rotationsschnelligkeit ω erteilt.

Analysieren Sie in dieser Lage die Bewegung des Systems und geben Sie speziell die Geschwindigkeiten in den Ecken B, C, D und E sowie die Rotationsschnelligkeiten und die Momentanzentren der Stäbe BC, CD, DE und DI an.



1.2.7 Hausaufgabe

Das abgebildete System, bestehend aus vier starren gelenkig miteinander verbundenen Stäben (Längen: OB $= AC = 2l$, $BD = CD = l$; E Mittelpunkt der Stäbe OB und AC) ist in O gelenkig gelagert und in A aufgelegt. Der Punkt A des Stabes AC bewege sich momentan mit der Geschwindigkeit $\underline{v} = v\underline{e}_x$.

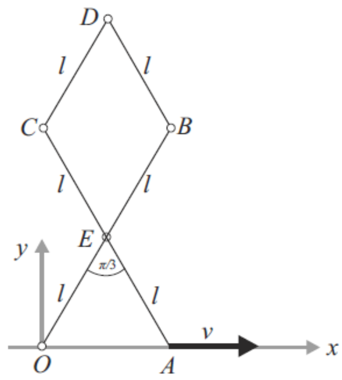
Ermitteln Sie:

a) Die Drehgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ des Stabes OB.

b) Das Momentanzentrum des Stabes AC unddie Geschwindigkeit $\underline{v}_C$ von C.

c) Das Momentanzentrum des Stabes BD.

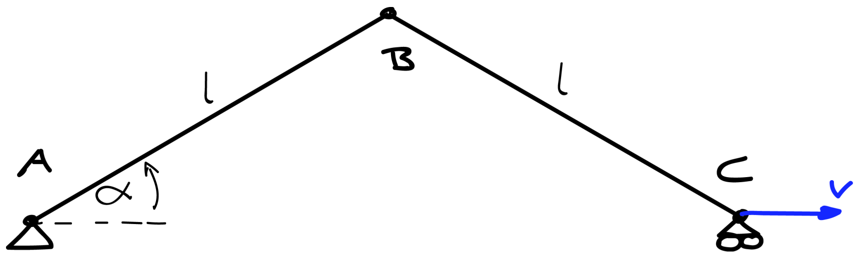
d) Die Geschwindigkeit $\underline{v}_D$ von D.



1.3 Kinematik SdpG

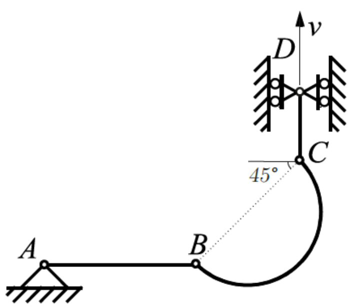
1.3.1 Aufgabe Kurs

Berechne die Schnelligkeit in B vom gegebenen Mechanismus. Punkt C bewegt sich momentan mit Geschwindigkeit $v_c = ve_x$. Die Stäbe haben Länge l und der Winkel Alpha sei $\alpha = 30$.



1.3.2 Aufgabe Kurs

Die drei starren Stäbe AB, BC und CD sind reibungsfrei gelenkig miteinander verbunden und entsprechend der Skizze gelagert. Stab BC ist ein Halbkreis mit Radius R. Die Schnelligkeit vom Punkt B beträgt $|\underline{v}_B| = v$. Vom Punkt D weiss man, dass er sich mit der Geschwindigkeit v nach oben bewegt. Alle Stäbe bleiben in der gezeichneten Ebene.
Was für eine Bewegung beschreibt der Stab BC momentan?

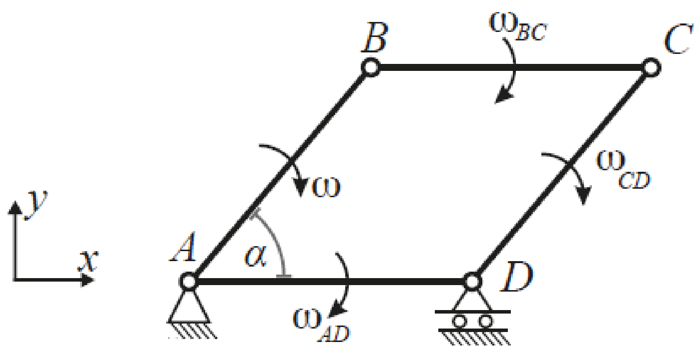


1.3.3 Hausaufgabe

Man zeige die Gültigkeit der Parallelogrammregel am folgenden Problem: Der abgebildete ebene Mechanismus besteht aus vier Stäben (Länge L) und ist in den Punkten A (Gelenk) und D (reibungsfreies, beidseitiges Auflager) gelagert. Alle Gelenke sind reibungsfrei. Der Winkel zwischen den Stäben AB und AD ist mit α angegeben.
Die Rotationsgeschwindigkeit des Stabes AB ist bekannt: $\underline{\omega}_{AB} = -\omega \underline{e}_z$.

Berechnen Sie die Rotationsschnelligkeiten ω_{BC}, ω_{CD}, ω_{AD} in Funktion von ω.

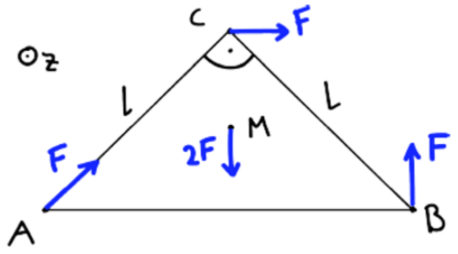
Hinweis: Die Parallelogrammregel darf **nicht** zur Berechnung von ω_{BC}, ω_{CD}, ω_{AD} verwendet werden!



2 TAG 2

2.1 Momente

2.1.1 Aufgabe Kurs



Berechne das Moment in A, B & C.

2.2 Dyname

2.2.1 Aufgabe Kurs

Ein starrer masseloser Würfel mit Kantenlänge a liegt wie abgebildet am Ursprung des Koordinatensystems. Zusätzlich zu den eingezeichneten Kräften, welche in den Punkten C, D und G angreifen, sind folgende Lasten am Würfel angebracht:

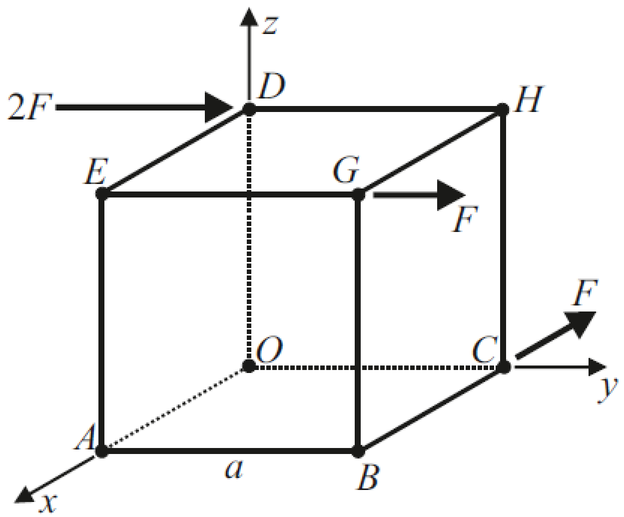
- Ein Kräftepaar, welches an den Punkten A und B angreift:

$$\underline{F}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix}; \quad \underline{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix}$$

- Eine konstante flächenverteilte Kraft mit Flächenkraftdichte $\underline{q} = \begin{pmatrix} F/a^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, die an der Fläche $ABGE$ angreift.

a) Definieren und bestimmen Sie die Dyname der Kräftegruppe in O.

b) Erklären Sie die Bedeutung von *„Statisch äquivalente Kräftegruppen"*.



2.2.2 Hausaufgabe

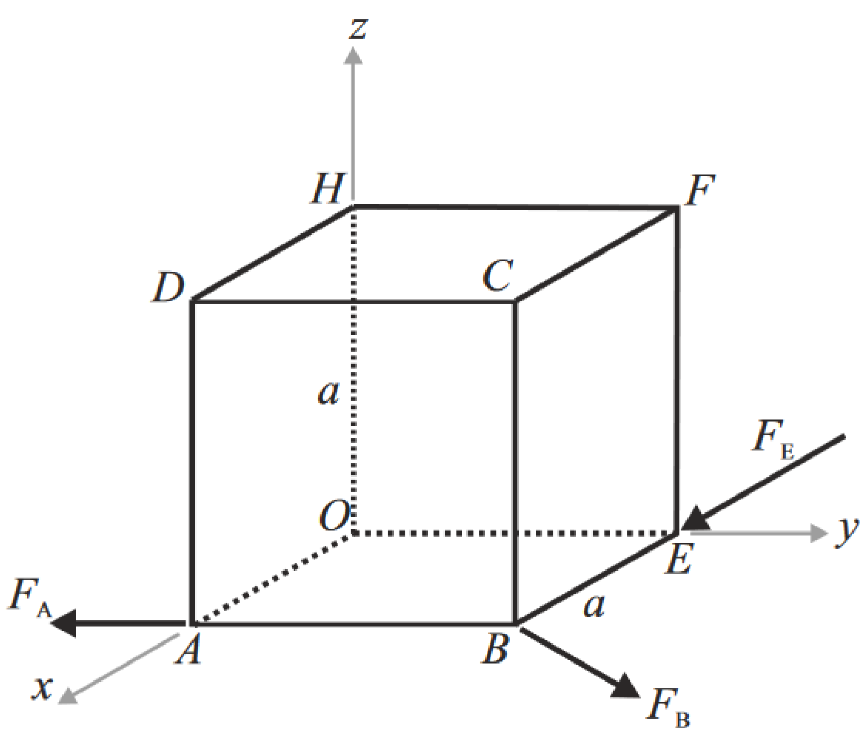
Gegeben ist ein starrer Würfel (Kantenlänge a). Auf ihn wirkt eine Kräftegruppe G, die gemäss Abbildung aus den drei Käften $\underline{F}_A$, $\underline{F}_B$, und $\underline{F}_E$ besteht. Es gilt

$$\underline{F}_A = -F\underline{e}_y \qquad \underline{F}_B = F\underline{e}_x + F\underline{e}_y \qquad \underline{F}_E = 2F\underline{e}_x$$

a) Man bestimme die Dyname der Kräftegruppe G im Punkt O.

b) Die Kräftegruppe G lässt sich statisch äquivalent auf eine Einzelkraft reduzieren. Bestimmen sie diese Kraft (Gesucht sind Vektor und Angriffspunkt).

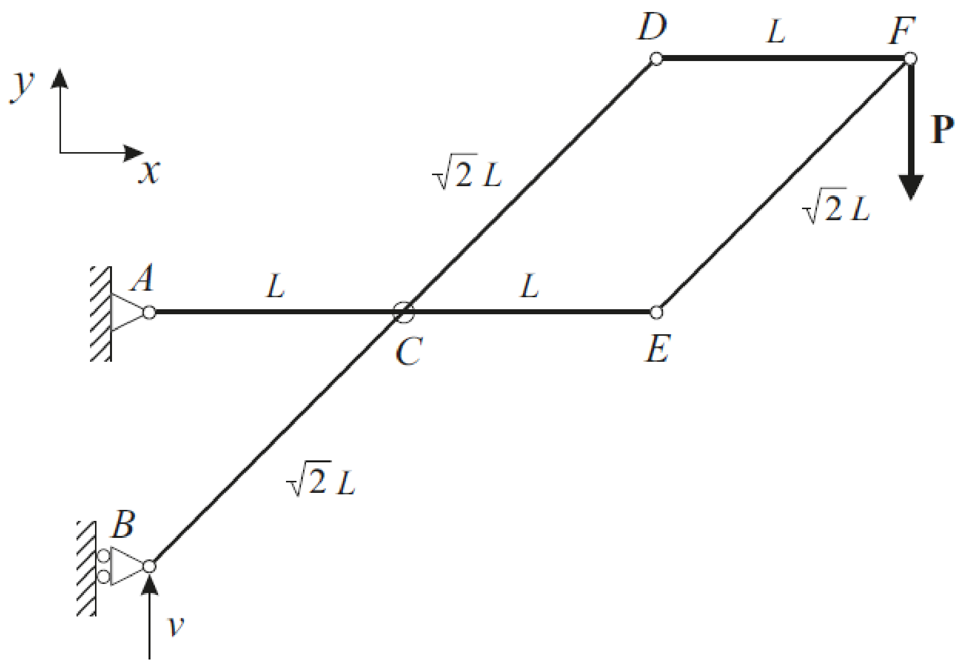
c) Was bedeutet "statisch äquivalent"?



2.3 Leistung

2.3.1 Aufgabe Kurs

Gegeben ist ein ebener Mechanismus bestehend aus den massenlosen Stäben BD (Länge $2\sqrt{2}L$) und AE (Länge $2L$), welche in der Mitte reibungsfrei gelenkig miteinander verbunden sind. Die massenlosen Stäbe DF (Länge L) und EF (Länge $\sqrt{2}L$) sind ebenfalls reibungsfrei an den Knoten verbunden. Der Stab AE ist in A reibungsfrei gelenkig gelagert. Die Geschwindikeit in Punkt B ist gegeben als $\underline{v}_B = v\underline{e}_y$. In Punkt F wirkt die Kraft $\underline{\mathbf{P}} = -\mathbf{P}\underline{e}_y$.
Berechnen Sie die Leistung der Kraft $\underline{\mathbf{P}}$.



2.4 Statik

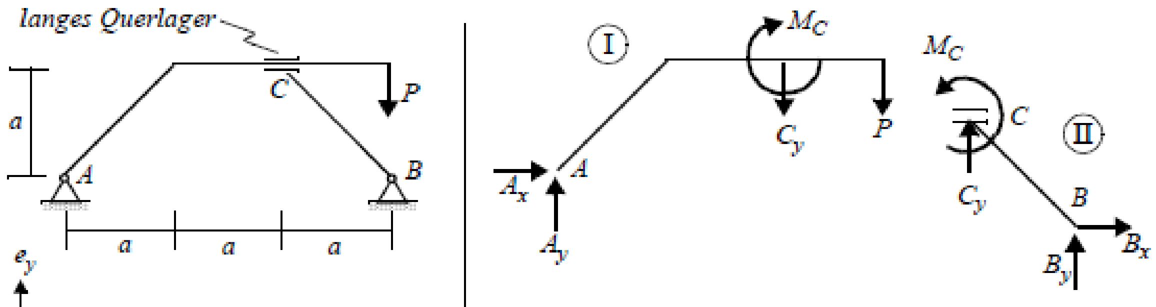
2.4.1 Aufgabe Kurs

Die folgenden sechs Systeme wurden mit den Methoden der analytischen Statik untersucht: Freischneiden, Gleichgewichtsbedingungen aufstellen. Lege fest, ob es sich um eine korrekte (R) oder falsche Lösung (F) handelt (richtige Lösung = richtiges Freischneiden und richtig aufgestellte Gleichgewichtsbedingungen)!
Mögliche Fehler sind: falsches Freischneiden, falsche Kräfte/Momente, falsche Rechnungen.

Annahmen: zweidimensional (Fälle 1 - 5), dreidimensional (Fall 6); alle starren Körper sowie alle Seile sind gewichtslos; alle Gelenke und Lager sowie alle Kontakte zwischen den Körpern sind reibungsfrei.

Bemerkung: Bei jedem Fall ergibt die korrekte Antwort +2 Punkte, die inkorrekte -2 Punkte, keine Antwort 0 Punkte. Falls nötig wird die Summe zu 0 aufgerundet!

Fall 1



I x: $A_x = 0$

y: $A_y - C_y - P = 0$

M_A: $-2aC_y - M_C - 3aP = 0$

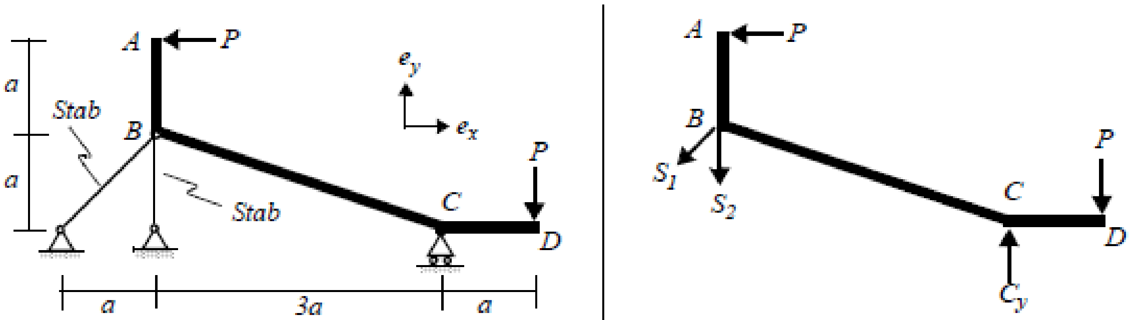
II x: $B_x = 0$

y: $C_y + B_y = 0$

M_B: $-aC_y + M_C = 0$

R: ❑ F: ❑

Fall 2



ABCD ist eine gebogene Stange

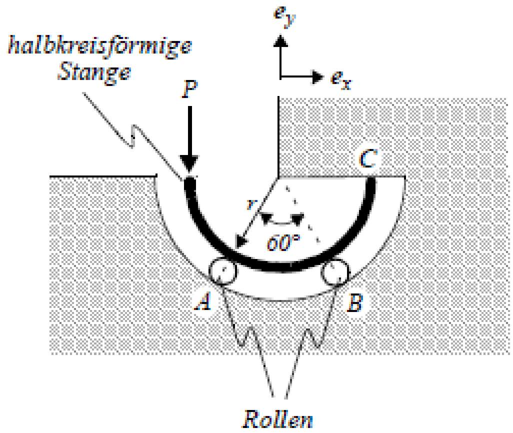
x: $-\frac{S_1}{\sqrt{2}} - P = 0$

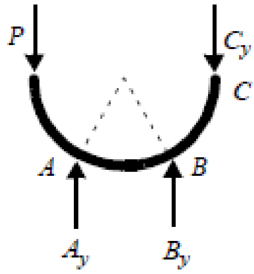
y: $-S_2 - \frac{S_1}{\sqrt{2}} + C_y - P = 0$

M_B: $aP + 3aC_y - 4aP = 0$

R: ❑ F: ❑

Fall 3



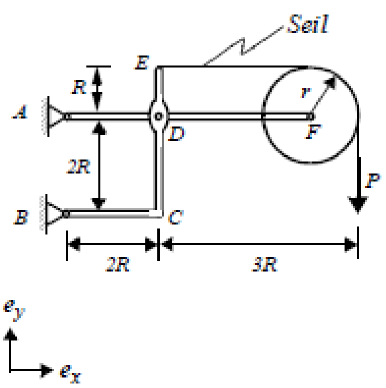


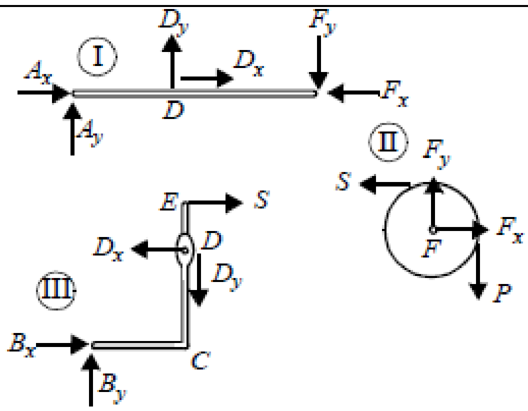
$$y:\ A_y + B_y - P - C_y = 0$$

$$M_A:\ rB_y - \frac{3}{2}rC_y + P\frac{r}{2} = 0$$

R: ❑ F: ❑

Fall 4





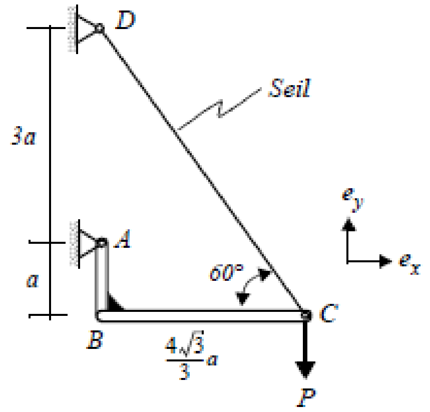
I
$$x:\ A_x + D_x - F_x = 0$$
$$y:\ A_y + D_y - F_y = 0$$
$$M_D:\ -2RA_y - 3RF_y = 0$$

II
$$x:\ F_x - S = 0$$
$$y:\ F_y - P = 0$$
$$M_F:\ Sr - Pr = 0$$

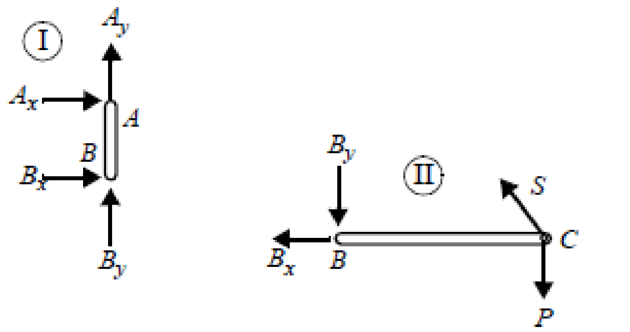
III
$$x:\ B_x - D_x + S = 0$$
$$y:\ B_y - D_y = 0$$
$$M_B:\ -2RD_y + 2RD_x - 3RS = 0$$

R: ❑ F: ❑

Fall 5



die Stäbe AB und BC sind in B zusammengeschweisst

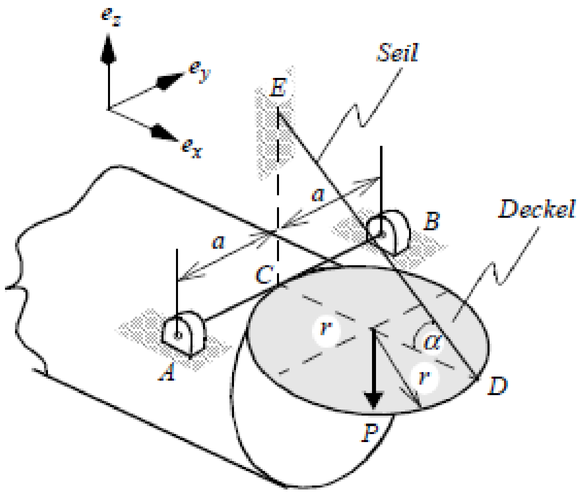


I
x: $A_x + B_x = 0$
y: $A_y + B_y = 0$
M_A: $aB_x = 0$

II
x: $-B_x - \frac{S}{2} = 0$
y: $-B_y - P + \frac{\sqrt{3}}{2}S = 0$
M_B: $-\frac{4\sqrt{3}}{3}aP + 2aS = 0$

R: ❑ F: ❑

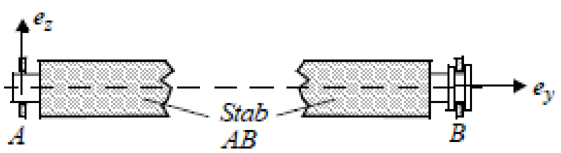
Fall 6



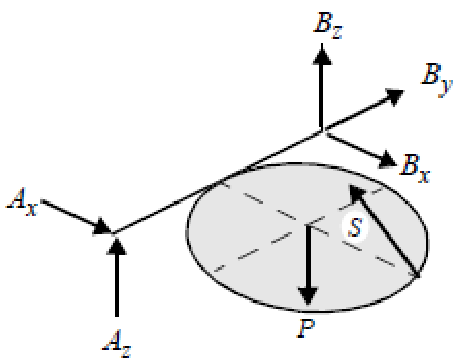
Deckel ist in C mit Stab AB verschweisst

Die Kraft P zeigt in die negative z-Richtung

Schnitt entlang *AB*:



(Kurzes Querlager) (Kurzes Querlager mit zusätzlichem Längslager)



x: $A_x + B_x - S\cos\alpha = 0$
y: $B_y = 0$
z: $A_z + B_z - P + S\sin\alpha = 0$

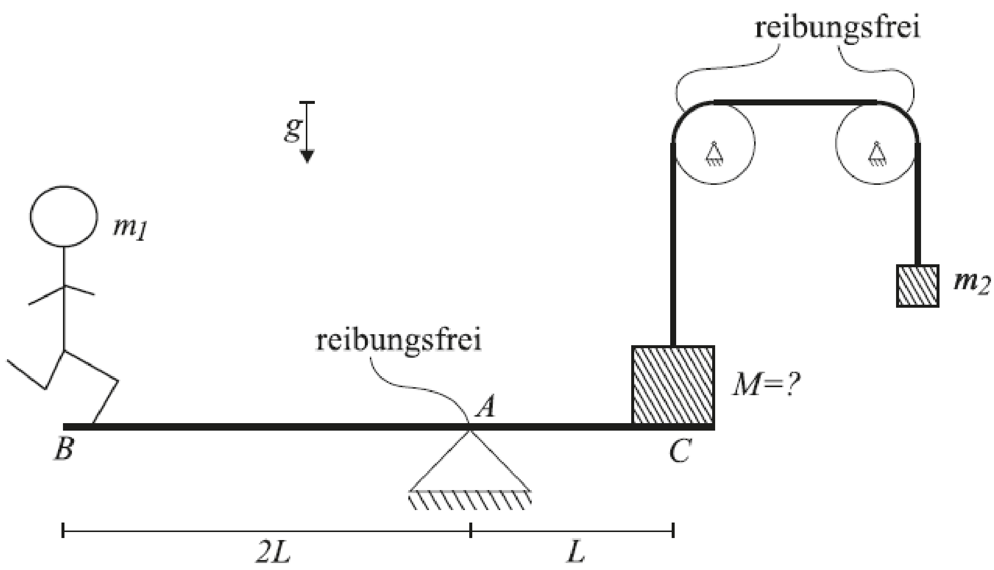
M_{Bx}: $-2aA_x + aP - aS\sin\alpha = 0$
M_{By}: $rP - 2rS\sin\alpha = 0$
M_{Bz}: $2aA_z - aS\cos\alpha = 0$

R: ❑ F: ❑

2.4.2 Hausaufgabe

Folgendes 2D-Modell einer Wippe besteht aus einem gewichtslosen Brett BAC, das im Punkt A reibungsfrei aufgelegt ist. Auf dem Punkt B steht eine Person mit Masse m_1 und im Punkt C liegt auf dem Brett ein Klotz mit unbekannter Masse M, an dem zusätzlich die Masse m_2 über ein Seil angehängt ist. Das Seil ist reibungsfrei über zwei Rollen umgelenkt.

Bestimmen Sie die Masse M, sodass die Wippe horizontal bleibt.



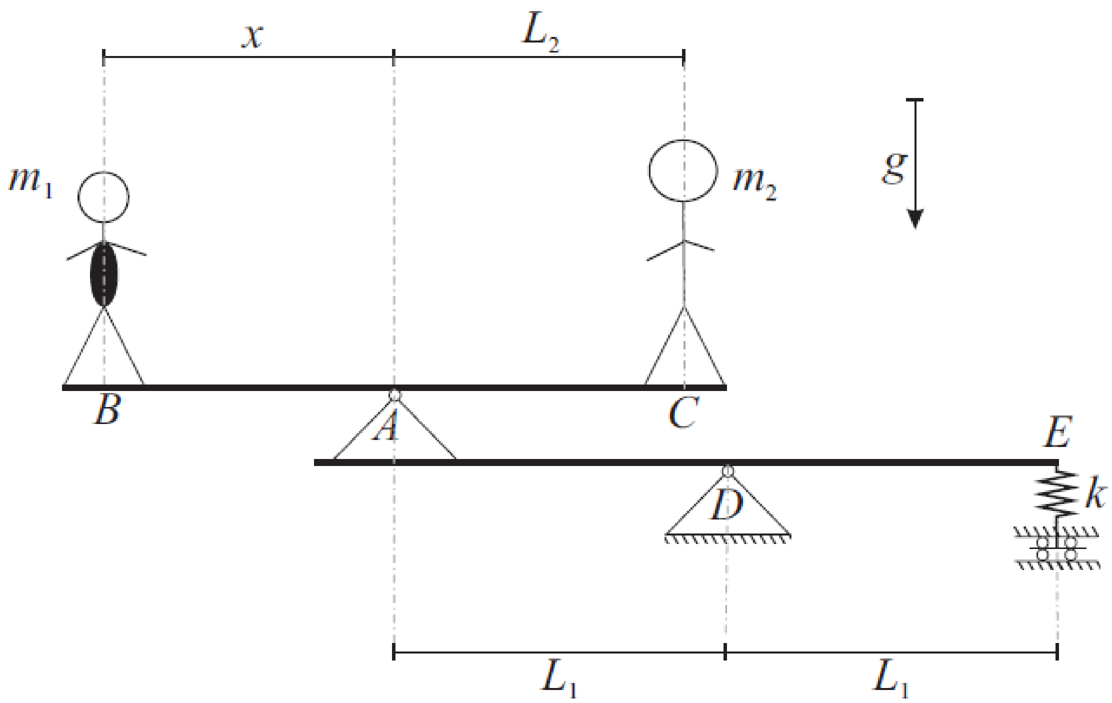
2.4.3 Hausaufgabe

Ein ebenes System aus zwei gewichtslosen Wippen sei wie in der Skizze gegeben. Die erste besteht aus einem Brett, das im Punkt D reibungsfrei gelenkig gelagert ist. Die zweite Wippe ist im Punkt A reibungsfrei gelenkig mit der ersten verbunden. Zwei Personen (Masse m_1, m_2) stehen auf der zweiten Wippe in Punkt B und C. Die erste Wippe ist in Punkt E an einer Feder mit Federkonstante k verbunden. Durch die Personen wird die Feder aus ihrer Ruhelage ausgelenkt.

a) Bestimmen Sie die Position x der ersten Person, damit die zweite Wippe BAC im Gleichgewicht ist.

b) Bestimmen Sie die Auslenkung der Feder Δx, so dass das gesamte System im Gleichgewicht ist.

Gegeben: m_1, m_2, L_1, L_2, k

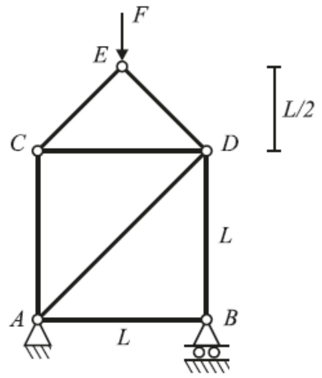


2.5 Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL)

2.5.1 Aufgabe Kurs

Das ebene Fachwerk in der Skizze besteht aus 7 reibungsfrei gelenkig miteinander verbundenen Stäben mit den Längen wie in der Skizze gegeben. Im Punkt A ist es gelenkig gelagert, im Punkt B horizontal verschiebbar gelagert, sodass es nicht abheben kann. Im Punkt E greift eine Kraft vom Betrag F wie eingezeichnet an.

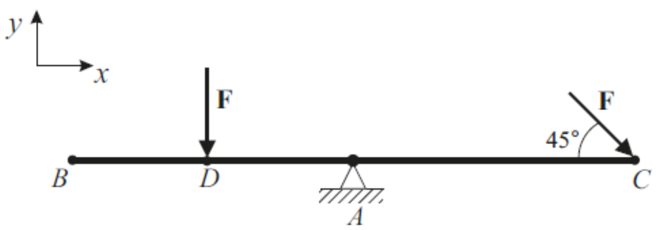
Bestimmen Sie die Stabkraft im Stab CD in Abhängigkeit der Kraft F mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Leistungen.



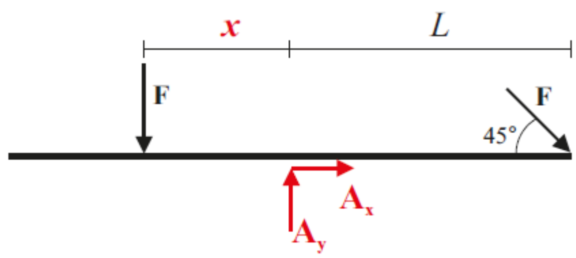
2.5.2 Aufgabe Kurs

Der Balken BC (Länge $2L$) ist in A reibungsfrei gelenkig gelagert. Im Punkt C wirkt die Kraft $F\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{e}_x - F\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{e}_y$. Im Abstand x von Punkt A (Punkt D) wirkt die Kraft $-F\underline{e}_y$. Man zeige **mit direkter Anwendung des PdVL**, dass für die Ruhelage gilt:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}L$$

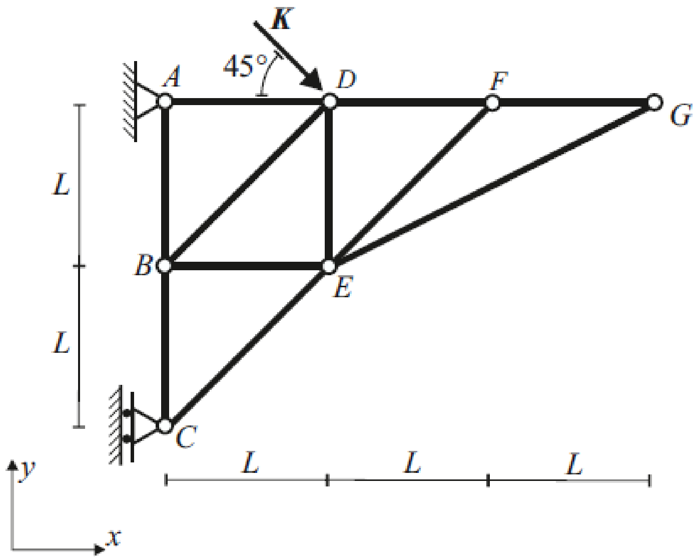


Freischnitt:

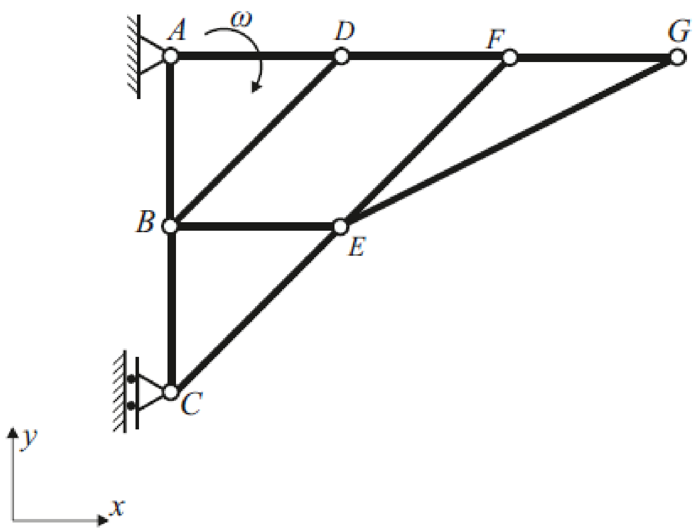


2.5.3 Aufgabe Kurs

Das abgebildete ebene ideale Fachwerk besteht aus Stäben der Länge L, $\sqrt{2}L$, $\sqrt{5}L$ und ist in den Punkten A (Gelenk) und C (Auflager) gelagert.
Das System wird durch eine Kraft mit Betrag K belastet, welche im Punkt D in der abgebildeten Richtung angreift.



Berechnen Sie die Stabkraft in Stab DE mit dem PdvL. Verwenden Sie dazu die unten angegebene Zeichnung und den vorgegebenen zulässigen virtuellen Bewegungszustand.



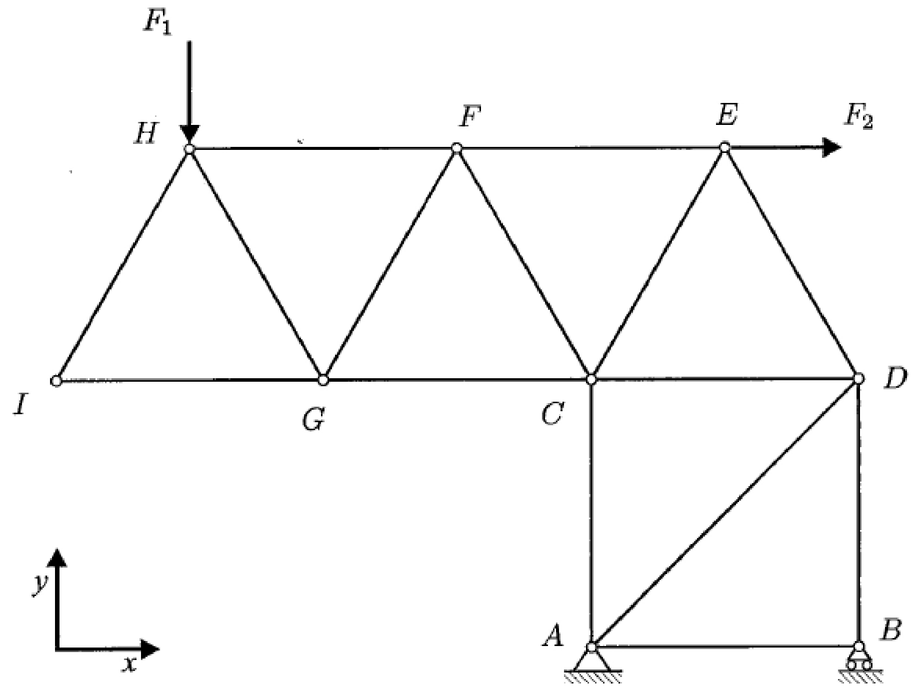
2.5.4 Hausaufgabe

Gegeben sei ein Fachwerk, so wie es auf der Skizze unten abgebildet ist. Der Stab AD hat die Länge $\sqrt{2}a$, alle übrigen Stäbe haben die Länge a. Alle Stäbe sind masselos und alle Gelenke reibungsfrei. In den Punkten H und E greifen die Kräfte F_1 und F_2 an. Die Richtungen sind gemäss Skizze gegeben. Das Fachwerk ist in A reibungsfrei gelenkig gelagert und hat im Punkt B ein reibungsfreies Auflager (einseitige Bindung!).

a) Bestimmen Sie alle Lagerreaktionen in Abhängigkeit von F_1 und F_2.

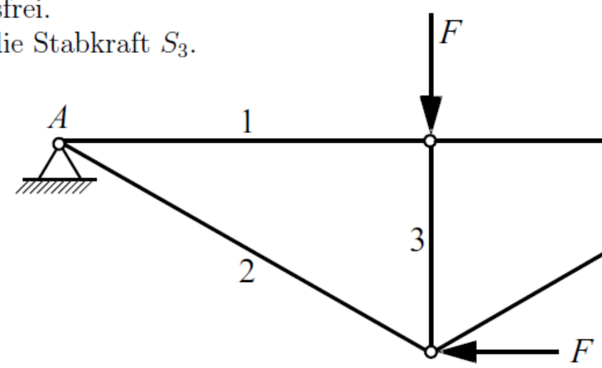
b) Finden Sie eine Einschränkung für das Verhältnis $\frac{F_1}{F_2}$, so dass sich das System in Ruhe befinden kann.

c) Setzen Sie nun $F_1 = F$ und $F_2 = \sqrt{3}F$ und bestimmen Sie dann die Stabkraft S_{DC} im Stab DC mittels PdvL.

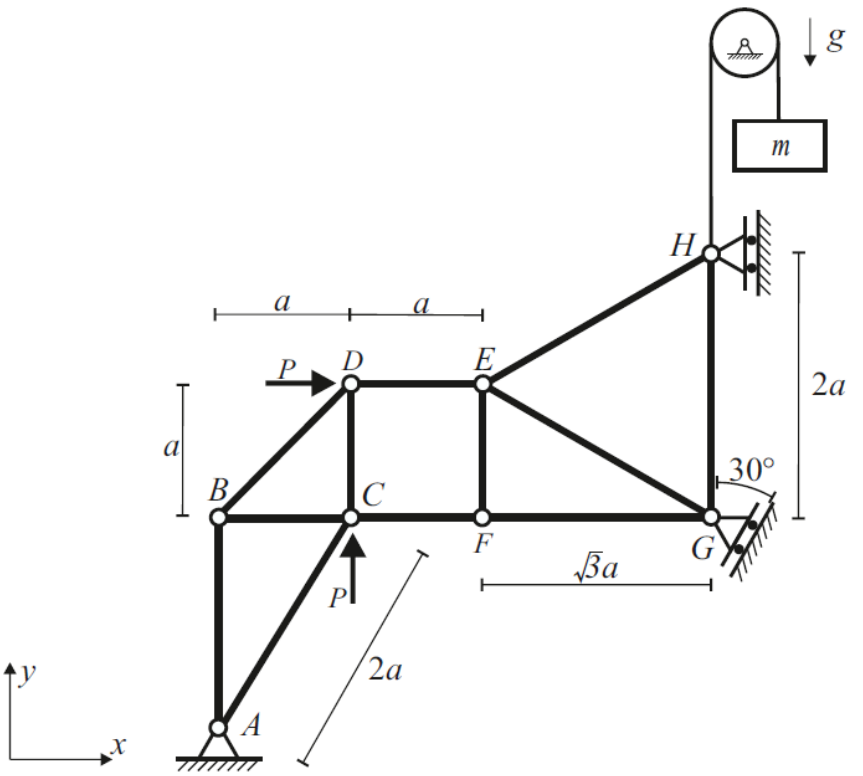


2.5.5 Hausaufgabe

Ein ebenes Fachwerk besteht aus 5 gewichtslosen Stäben. Es ist in A gelenkig gelagert und liegt in B auf. Es wird wie eingezeichnet durch zwei Kräfte mit dem Betrag F belastet. Alle Gelenke sind reibungsfrei.
Gesucht ist die Stabkraft S_3.



2.5.6 Hausaufgabe



c) Ist das Fachwerk statisch bestimmt? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Berechnen Sie die Stabkraft im Stab CF mit dem Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL).

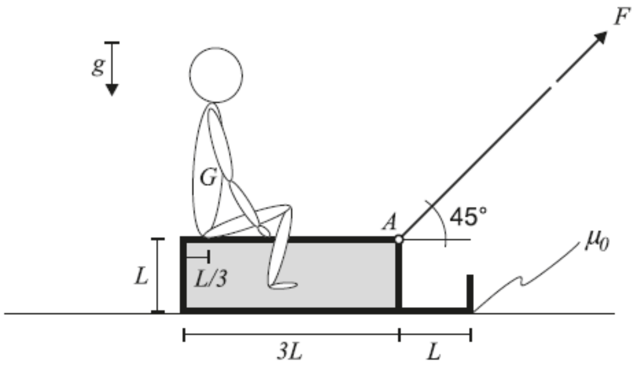
e) Berechnen Sie die Stabkraft im Stab AB mit PdvL. Benutzen sie dafür einen virtuellen Bewegungszustand mit $\underline{v}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$

2.6 Ruhe: Reibung & Standfestigkeit

2.6.1 Aufgabe Kurs

Ein Kind mit Gewichtskraft G sitzt auf einem gewichtslosen Schlitten mit den Dimensionen wie in der Skizze. Sein Vater zieht mit der Kraft F an einem Seil, das am Punkt A im Winkel von 45° am Schlitten befestigt ist. Der Kontakt zwischen Schlitten und Boden sei reibungsbehaftet mit Haftreibungszahl $\mu_0 = 1/2$. Der Schwerpunkt des Kindes, in dem die Gewichtskraft wirkt, sei bei $L/3$ wie eingezeichnet.

Für $F = \frac{\sqrt{2}}{6} G$, wird der Schlitten kippen oder gleiten? Begründen Sie Ihre Antwort.

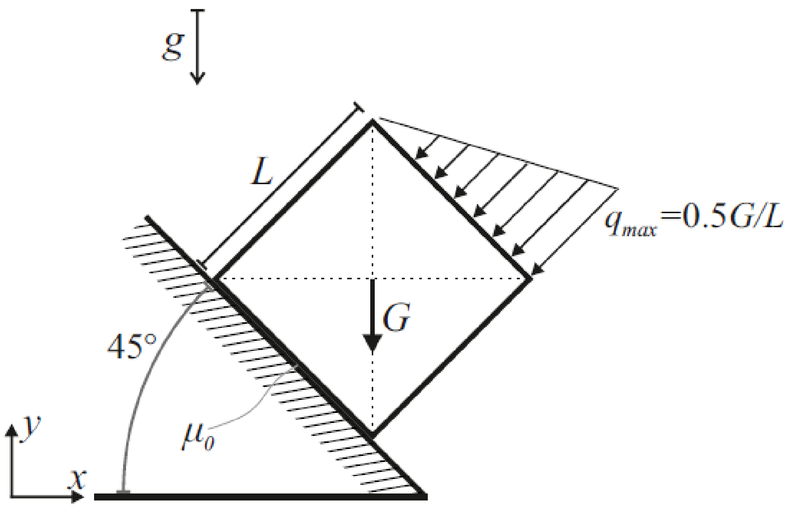


2.6.2 Aufgabe Kurs

Ein Würfel mit Kantenlänge L und Gewicht G liegt reibungsbehaftet auf einer schiefen Ebene (Winkel 45°).
Wie in der Skizze dargestellt, wirkt am Würfel eine dreiecksverteilte Linienlast mit $q_{max} = 0.5\frac{G}{L}$.

Berechnen Sie die Bedingung für den Haftreibungskoeffizient μ_0, damit der Würfel in Ruhe ist.

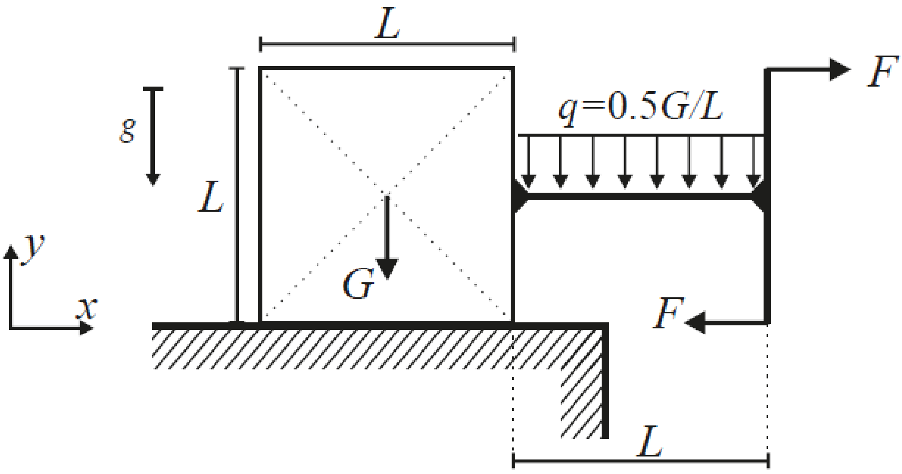
Hinweis: Die Standfestigkeit ist gegeben.



2.6.3 Hausaufgabe

Das abgebildete ebene System besteht aus einem Würfel (Gewicht G, Kantenlänge L) und zwei masselosen Stäben der Länge L, die untereinander verschweisst sind. Der Würfel liegt reibungsfrei auf dem Boden.
An den Stäben greifen, wie eingezeichnet, eine konstante linienverteilte Kraft $q = 0.5G/L$ und zwei Punktkräfte mit Betrag $F(F > 0)$ an.

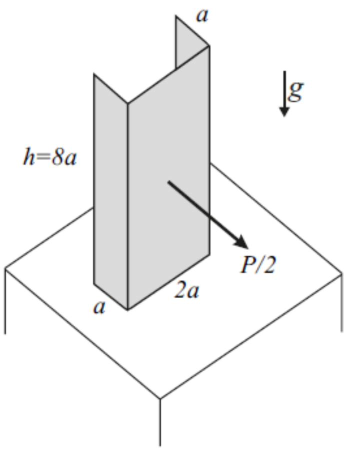
Bestimmen Sie die Bedingung für F, damit das System in Ruhe sein kann.



2.6.4 Hausaufgabe

Ein zweimal um 90° abgewinkeltes dünnes Blech mit dem gegebenen Gewicht G steht gemäss Abbildung senkrecht auf einer horizontalen rauhen Ebene mit der Haftreibungszahl $\mu_0 = 0.15$. An ihm greift im Schwerpunkt des mittleren Rechtecks eine horizontale Kraft $\frac{P}{2}\underline{e}_x$ an.

Für welche Werte von P setzt sich das Blech in Bewegung ohne zu Kippen?

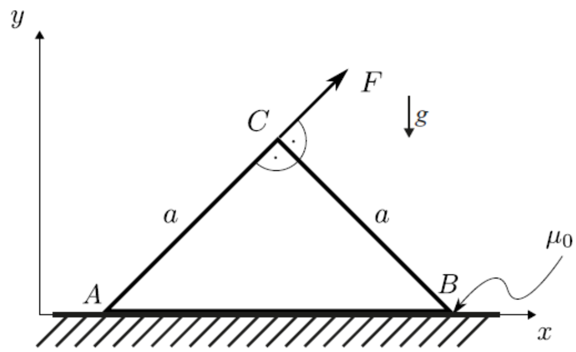


2.6.5 Hausaufgabe

Gegeben sei ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck ABC in der xy-Ebene, welches mit der Hypothenuse AB (Länge $\sqrt{2}a$) auf der x-Achse aufliegt. Das Dreieck hat das Gewicht G und im Punkt C greift eine zur Kante AC parallele Kraft mit dem Betrag $F > 0$ an. Der Haftreibungskoeffizient μ_0 zwischen Dreieck und Auflageebene sei gegeben.

a) Geben Sie die Bedingung für den Betrag der Kraft F an, damit das Dreieck nicht gleitet.

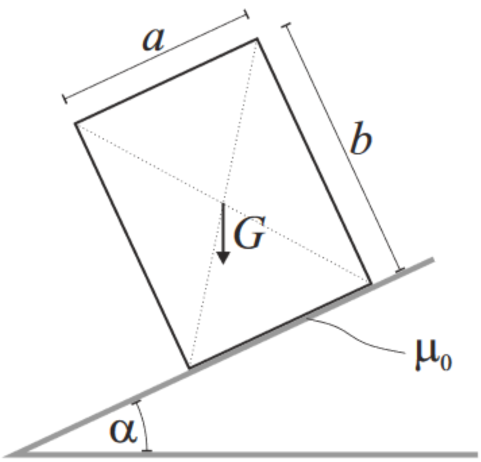
b) Berechnen Sie nun auch die Bedingung für die Kraft F, so dass das Dreieck nicht kippt.



2.6.6 Hausaufgabe

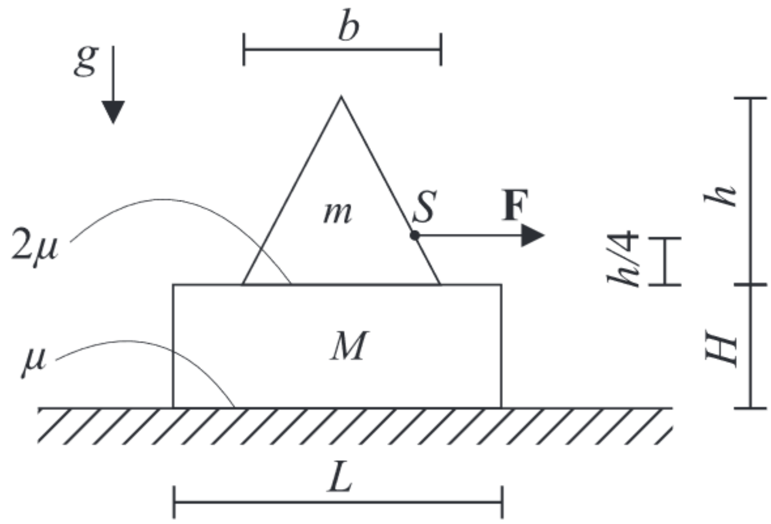
Ein homogener quaderförmiger Körper mit Seitenlängen a und b und Gewicht G liegt reibungsbehaftet (Haftreibungskoeffizient μ_0) auf einer angewinkelten Oberfläche (Winkel α).

Unter der Annahme, dass die Längen a, b, das Gewicht G und der Winkel α bekannt sind, zeigen Sie dass $\mu_0 < \frac{a}{b}$ gelten muss damit Gleiten vor Kippen eintritt.



2.6.7 Hausaufgabe

Gegeben ist ein ebenes System bestehend aus einem homogenen rechteckförmigen Körper (Masse M, Länge L, Höhe H) und einem homogenen dreieckförmigen Körper (Masse m, Basis b, Höhe h). Die Berührungspunkte zwischen Boden und dem rechtecktförmigen Körper sowie zwischen den beiden Körpern sind reibungsbehaftet. Die Haftreibungskoeffizienten zwischen den beiden Körpern (2μ, siehe Skizze) und zwischen dem rechteckförmigen Körper und dem Boden (μ, siehe Skizze) sind gegeben. Ausserdem greift die Kraft $\mathbf{F}$ am Punkt S an.
Unter der Annahme, dass beide Körper nicht kippen, bestimmen Sie die Bedingung für das Verhältnis der Massen M/m so, dass das System zuerst zwischen Boden und dem rechteckförmigen Körper gleitet.

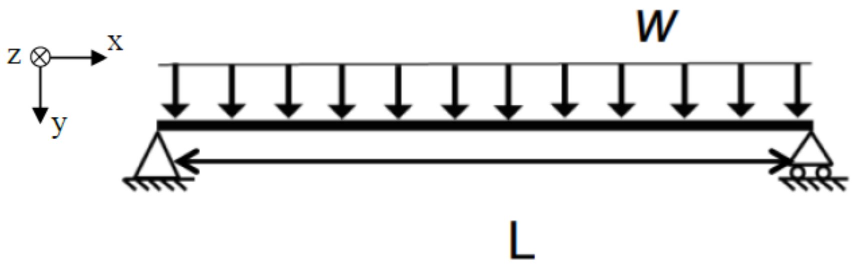


3 TAG 3

3.1 Beanspruchung

3.1.1 Aufgabe Kurs

Die untenstehende Abbildung zeigt einen Kragträger und eine linearverteilte, vertikal angreifende Kraft $w(x) = w$.



a) Berechnen Sie zuerst den Beanspruchungsverlauf der Querkraft $Q(x)$

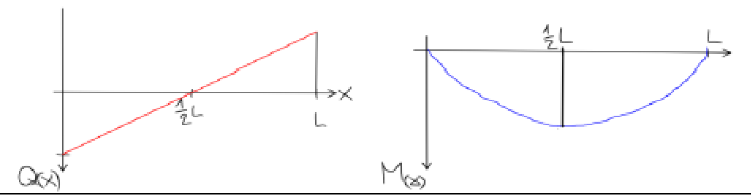
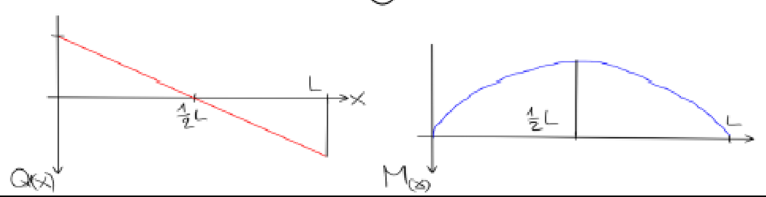
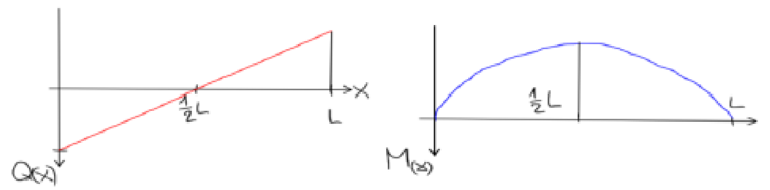
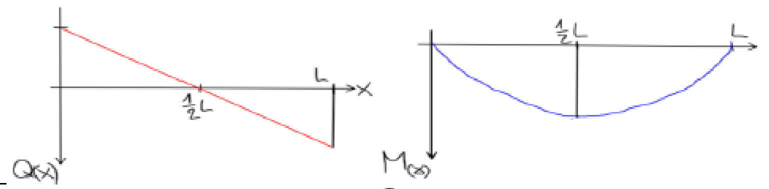
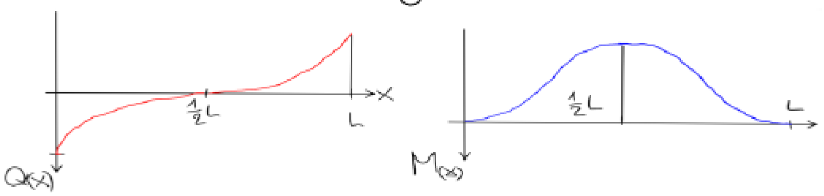
S2a. 5 mögliche Antworten	Ⓐ $Q(x) = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$	Ⓑ $Q(x) = wx$	Ⓒ $Q(x) = w(L - x)$
	Ⓓ $Q(x) = w\left(\frac{L}{2} - x\right)^2$		Ⓔ $Q(x) = w\left(x - \frac{L}{2}\right)$

b) Berechnen Sie den Beanspruchungsverlauf Biegemomentes $M_b(x)$

S2b. 5 mögliche Antworten	Ⓐ $M_b(x) = \frac{wx^2}{2}$	Ⓑ $M_b(x) = wx\left(L - \frac{x}{2}\right)$	Ⓒ $M_b(x) = \frac{wx}{2}(L - x)$
	Ⓓ $M_b(x) = \frac{wx}{2}(x - L)$		Ⓔ $M_b(x) = w\left(\frac{L}{2} - x\right)^3$

c) Zeichnen Sie anschliessend den Verlauf von $Q(x)$ und $M(x)$

<table>
<tr><td rowspan="5">S2b.

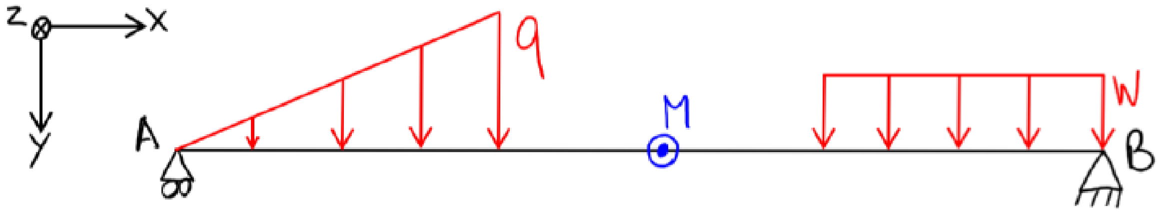
5
mögliche
Antworten</td><td>Ⓐ
</td></tr>
<tr><td>Ⓑ
</td></tr>
<tr><td>Ⓒ
</td></tr>
<tr><td>Ⓓ
</td></tr>
<tr><td>Ⓔ
</td></tr>
</table>

d) Wo erwarten Sie einen Bruch, falls P zu gross wird?

S2c. 5 mögliche Antworten	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
	$x = 0$	$x = L$	$x = \frac{L}{2}$	$x = \frac{L}{4}$	$x = \frac{3L}{4}$

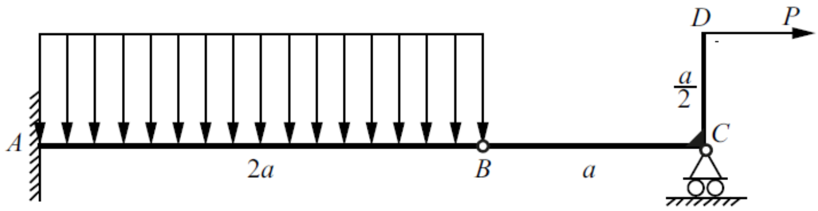
3.1.2 Aufgabe Kurs

Zeichnen Sie (falls möglich intuitiv, d.h. ohne es explizit zu berechnen) das Querkraft- und Momentendiagramm des in der Skizze dargestellten Balkenträgers der Länge L.



3.1.3 Aufgabe Kurs

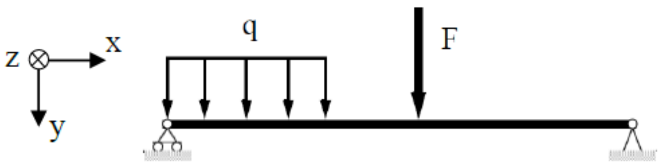
Das skizzierte System, zusammengesetzt aus zwei in B reibungsfrei gelenkig verbundenen Stäben (Längen $2a$ und a) ist in A eingespannt und in C reibungsfrei aufgelegt. In C hat der Stab BC einen fest mit ihm verbundenen Querarm CD (Länge $a/2$). Die Belastung besteht aus einer gleichmässig über AB verteilten Kraft vom Gesamtbetrag $2P$ und einer Kraft vom Betrag P in D.



Bestimmen Sie die Beanspruchung in den Stäben AB und BC sowie Ort und Betrag des grössten Biegemomentes.

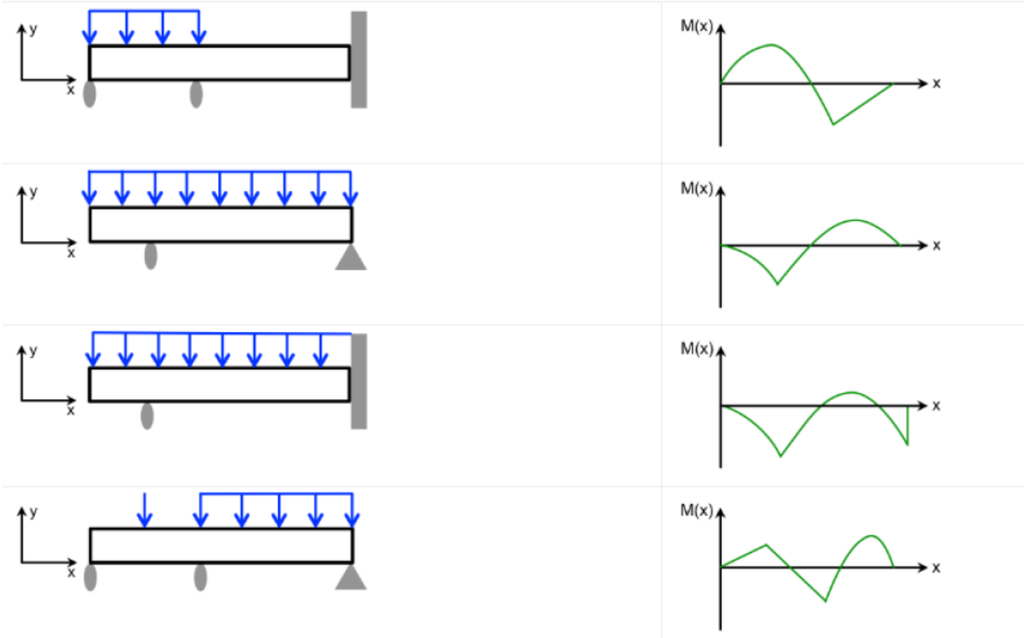
3.1.4 Hausaufgabe

Zeichnen Sie (falls möglich intuitiv, d.h. ohne es explizit zu berechnen) das Querkraft- und Momentendiagramm des in der Skizze dargestellten Balkenträgers der Länge L.



3.1.5 Hausaufgabe

Ordne die Lastfälle den Diagrammen zu.

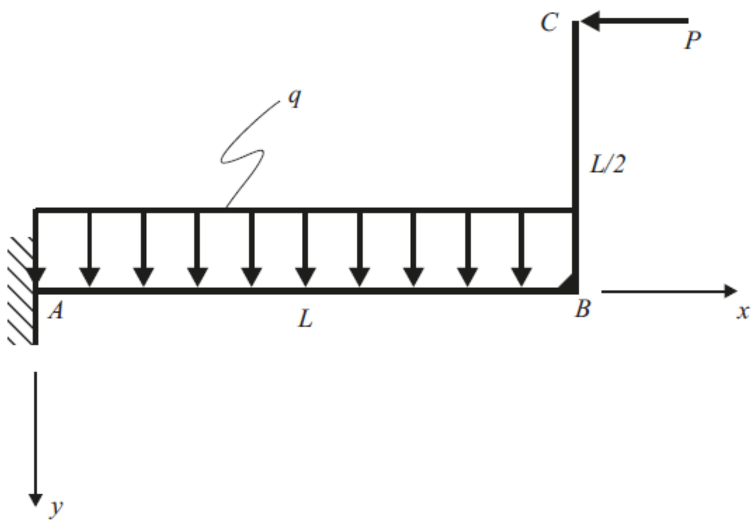


3.1.6 Hausaufgabe

Folgendes zweidimensionales Problem besteht aus zwei gewichtslosen Stabträgern AB (Länge L) und BC (Länge $L/2$). Diese sind in B rechtwinklig fest miteinander verschweisst. In A ist das System fest eingespannt. Der Stabträger AB ist durch eine linienverteilte Last q in positive y-Richtung belastet. Am Punkt C greift die Kraft P in negative x-Richtung an.

a) Ist das System statisch bestimmt oder unbestimmt? Begründen Sie Ihre Antwort.

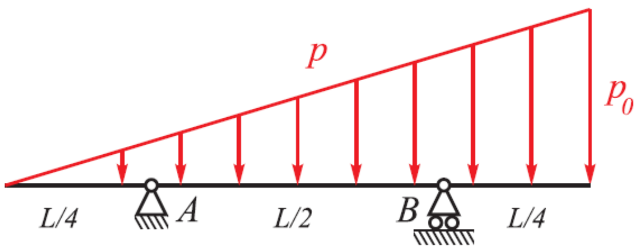
b) Bestimmen Sie die Beanspruchung in den Stabträgern AB sowie BC in Abhängigkeit von P, q.



3.1.7 Hausaufgabe

Ein Stab der Länge L ist in A gelenkig gelagert und in B aufgelegt. Er ist durch eine dreiecksverteilte Last $p = p_0\, x/L$ wie eingezeichnet belastet.

Bestimme die Beanspruchung im Stab in Funktion von x.

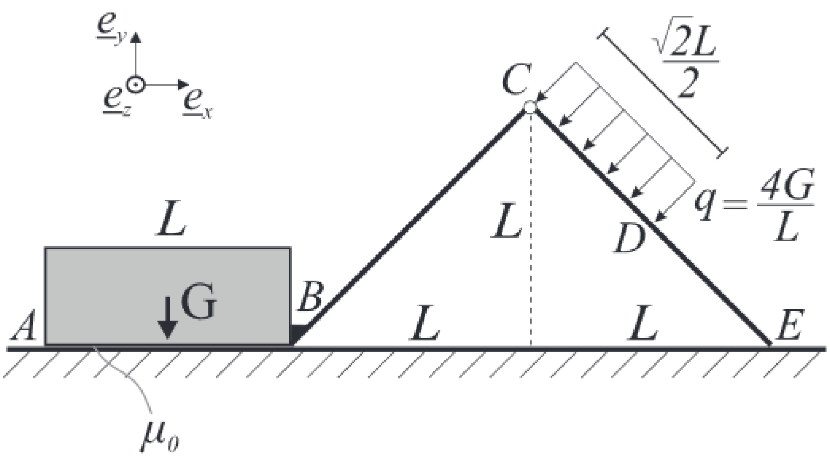


3.1.8 Hausaufgabe

Das abgebildete 2D-System besteht aus zwei masselosen Balken, BC und CDE, sowie aus einem quaderförmigen Körper mit Gewicht $\underline{G} = -G\underline{e}_y$. Der Balken BC ist in B mit dem Körper verschweisst und in C mit CDE reibungsfrei gelenkig verbunden. Der Balken CDE liegt in E reibungsfrei auf dem Boden und wird durch eine homogene linienverteilte Kraft mit Betrag $q = \frac{4G}{L}$ belastet, siehe Zeichnung. Der Körper ist auf dem Boden aufgelegt, mit einem Reibungskoeffizient μ_0. Das System befindet sich in Ruhe.

Bestimmen Sie:

a) *(5 Punkte)* Die Lagerkraft in E.
b) *(3 Punkte)* Die Reibungskraft am Körper.
c) *(3 Punkte)* Die Bedingung für μ_0, damit der Körper nicht rutschen kann.
d) *(5 Punkte)* Die Beanspruchungskomponenten im Teil CD des rechten Balkens.



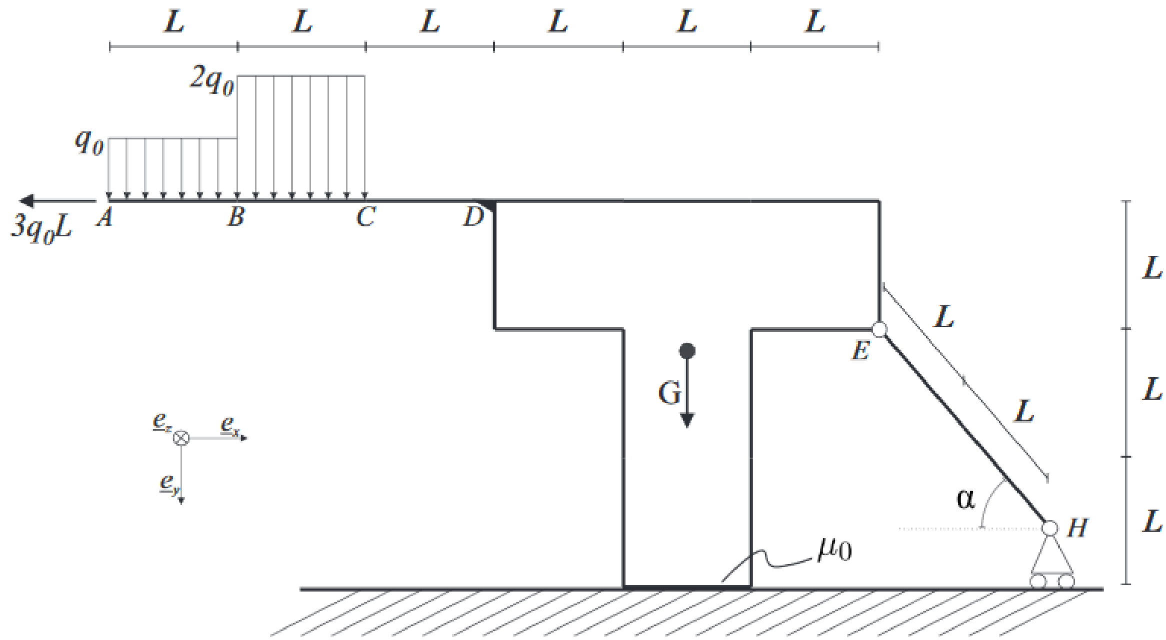
3.1.9 Hausaufgabe

Das abgebildete 2D-System besteht aus zwei masselosen Balken, $ABCD$ und EH, und einem T-förmigen Körper mit Gewicht $\underline{G} = G\underline{e}_y$. Der Balken $ABCD$ ist parallel zur x - Achse und ist in D mit dem Körper verschweisst. Der Balken EH ist im Punkt E reibungsfrei gelenkig gelagert und in H ist ein reibungsfreies Auflager. Der T-förmige Körper liegt reibungsbehaftet auf dem Boden, mit einem Reibungskoeffizient μ_0.

An den Teilen AB und BC des Balkens $ABCD$ greift jeweils eine Linienlast $\underline{q}(x) = q_0\underline{e}_y$ und $\underline{q}(x) = 2q_0\underline{e}_y$ an. Weiters wirkt in A eine Kraft $\underline{P} = -3q_0L\underline{e}_x$.

Bestimmen Sie:

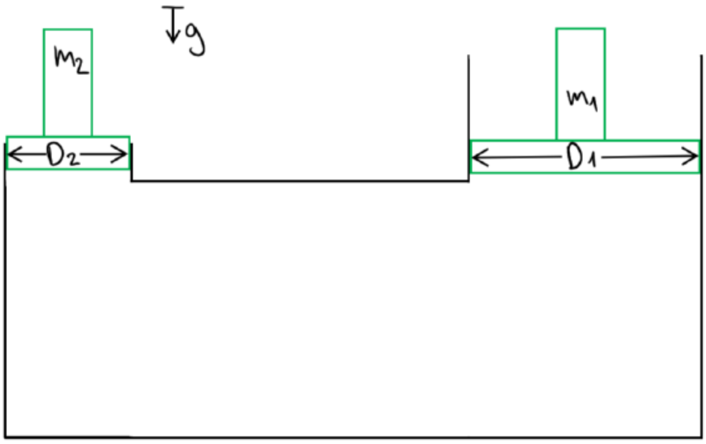
a) *(1 Punkt)* die Lägerkräfte und Momente im Punkt H.
b) *(6 Punkte)* die Kräfte zwischen Boden und T-förmigem Körper.
c) *(3 Punkte)* die Bedingungen für das Verhältnis $\frac{G}{q_0 L}$ damit der Körper nicht kippt (es gilt $q_0 > 0$ und $G > 0$).
d) *(5 Punkte)* die Beanspruchung zwischen den Punkten B und C. Wie lauten die Differentialbeziehungen für diesen Fall? Man verwende sie zur Überprüfung der berechneten Beanspruchungskomponenten.



3.2 Spannung

3.2.1 Aufgabe Kurs

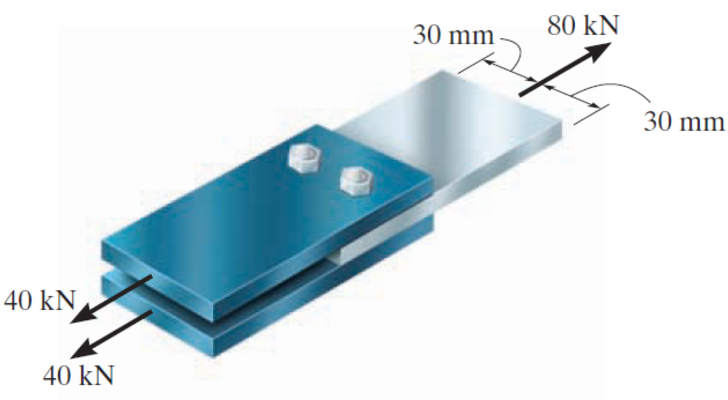
Gegeben sei ein vollständig mit Wasser gefüllten Behälter mit nur zwei Ausgängen. Die Ausgänge sind mit zwei zylindrischen Kolben geschlossen, die auf der Seite dicht mit der Wand sind, damit kein Wasser aus dem Behälter auslaufen kann. Die schweren Kolben üben durch ihr Eigengewicht Druck auf das Wasser aus. Der rechte Kolben besitzt die Masse $m_1 = 50kg$ und der Durchmesser $D_1 = \sqrt{2} \cdot 50mm$, vom linken Kolben ist hingegen nur die Masse $m_2 = 25kg$ bekannt. Wie gross muss der Durchmesser D_2 des linken Kolbens sein, damit die zwei gleichhohen Kolben im GGW bleiben?



S1. 5 mögliche Antworten	Ⓐ $D_2 = 50mm$	Ⓑ $D_2 = 25mm$	Ⓒ $D_2 = 100mm$	Ⓓ $D_2 = 75mm$	Ⓔ $D_2 = 90mm$

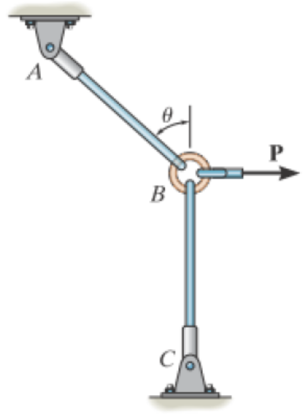
3.2.2 Hausaufgabe

The joint is fastened together using two bolts. Determine the required diameter of the bolts if the failure shear stress for the bolts is $\tau_{fail} = 350$ MPa. Use a factor of safety for shear of F.S. = 2.5.



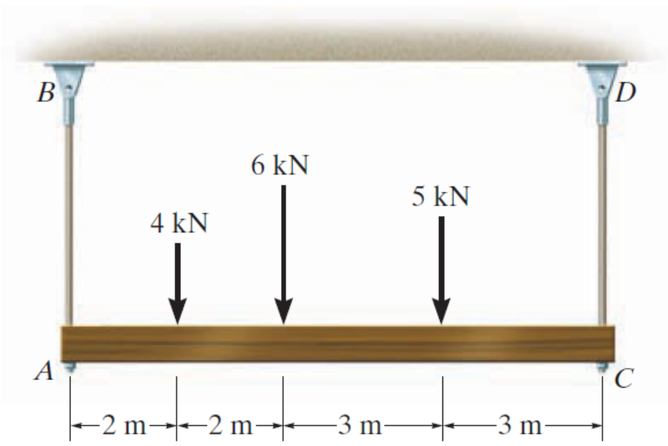
3.2.3 Hausaufgabe

Die Stäbe AB und BC haben je einen Durchmesser von 5 mm. Bestimme die Normalspannung in beiden Stäben für P = 2 kN und $\theta = 60°$.



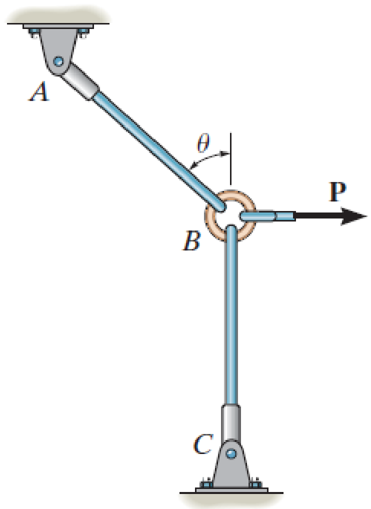
3.2.4 Hausaufgabe

•1–97. The rods AB and CD are made of steel having a failure tensile stress of $\sigma_{\text{fail}} = 510$ MPa. Using a factor of safety of F.S. = 1.75 for tension, determine their smallest diameter so that they can support the load shown. The beam is assumed to be pin connected at A and C.



3.2.5 Hausaufgabe

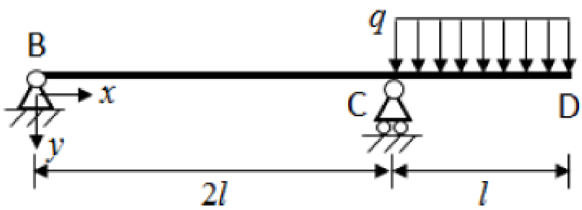
***1–56.** Rods *AB* and *BC* each have a diameter of 5 mm. Determine the angle θ of rod *BC* so that the average normal stress in rod *AB* is 1.5 times that in rod *BC*. What is the load **P** that will cause this to happen if the average normal stress in each rod is not allowed to exceed 100 MPa?

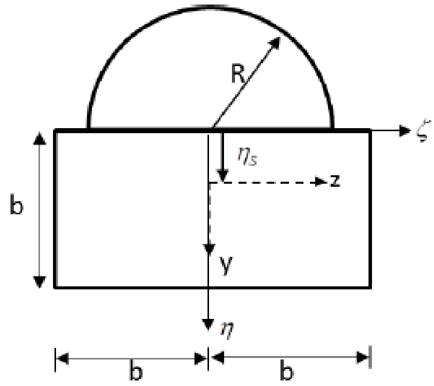


3.3 Flächenträgheitsmoment (FTM)

3.3.1 Aufgabe Kurs

Der abgebildete durchgehende Biegebalken B-C-D wird durch eine Streckenlast $q > 0$ (Kraft pro Länge) in y-Richtung im Bereich C-D belastet. Der Einfluss des Eigenwichtes soll vernachlässigt werden.

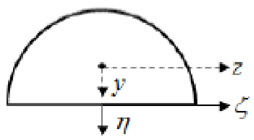




Der monolithische Querschnitt besteht aus einem rechteckigen und einem halbrunden Teil. Im dargestellten $\eta-\zeta$ –Koordinatensystem liegt der Punkt $\eta = 0$ auf der Übergangslinie zwischen den rechteckigen und halbrunden Teilen des Querschnitts. Der Ursprung des $y-z$ –Koordinatensystems liegt im Schwerpunkt mit den Koordinaten $\eta_s = \eta_s(R,b)$ und $\zeta_s = 0$.

Hilfestellung:

- Spezialfall $b = 0$ (halbrunder Querschnitt)
- Spezialfall $R = 0$ (rechteckiger Querschnitt)



$$\eta_s^{hr} = -4R/(3\pi)$$
$$A^{hr} = \pi R^2/2$$
$$I_z^{hr} = \pi R^4/8$$

$$\eta_s^{re} = b/2$$
$$A^{re} = 2b^2$$

- <u>Frage D1 (1 Punkt):</u>

  Man bestimme das Flächenträgheitsmoment I_z^{re} für den Spezialfall $R = 0$ (rechteckiger Querschnitt)

D1. 5 mögliche Antworten	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
	$I_z^{re} = b^4/8$	$I_z^{re} = b^4/12$	$I_z^{re} = b^4/6$	$I_z^{re} = b^4/4$	$I_z^{re} = b^4/2$

- <u>Frage D2 (3 Punkte):</u>

  Man bestimme die η-Koordinate des Schwerpunkts, η_s, für Querschnitte mit $R = b > 0$ als Funktion von b.

D2. 5 mögliche Antworten	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
	$\eta_s = \dfrac{2b}{3(3+\pi)}$	$\eta_s = \dfrac{2b}{3(4+\pi)}$	$\eta_s = \dfrac{b}{6(4+\pi)}$	$\eta_s = \dfrac{4b}{3(3+\pi)}$	$\eta_s = \dfrac{b}{3(4+\pi)}$

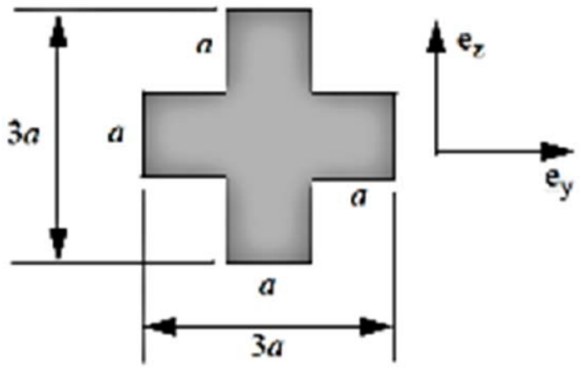
- <u>Frage D3 (3 Punkte):</u>

  Man bestimme das Flächenträgheitsmoment I_z für Querschnitte mit $R = b > 0$ als Funktion von η_s, η_s^{re}, η_s^{hr}, I_z^{re}, I_z^{hr}, A^{hr} und A^{re}.

D3. 5 mögliche Antworten	
	Ⓐ $I_z = I_z^{re} + I_z^{hr}$
	Ⓑ $I_z = I_z^{re} + I_z^{hr} + (\eta_s - \eta_s^{hr})^2 A^{hr} + (\eta_s - \eta_s^{re})^2 A^{re}$
	Ⓒ $I_z = I_z^{re} + I_z^{hr} + (\eta_s^{hr})^2 A^{hr} + (\eta_s^{re})^2 A^{re}$
	Ⓓ $I_z = I_z^{re} + I_z^{hr} + (\eta_s + \eta_s^{hr})^2 A^{hr} + (\eta_s + \eta_s^{re})^2 A^{re}$
	Ⓔ $I_z = I_z^{re} + I_z^{hr} + (\eta_s + \eta_s^{hr})^2 A^{hr} + (\eta_s - \eta_s^{re})^2 A^{re}$

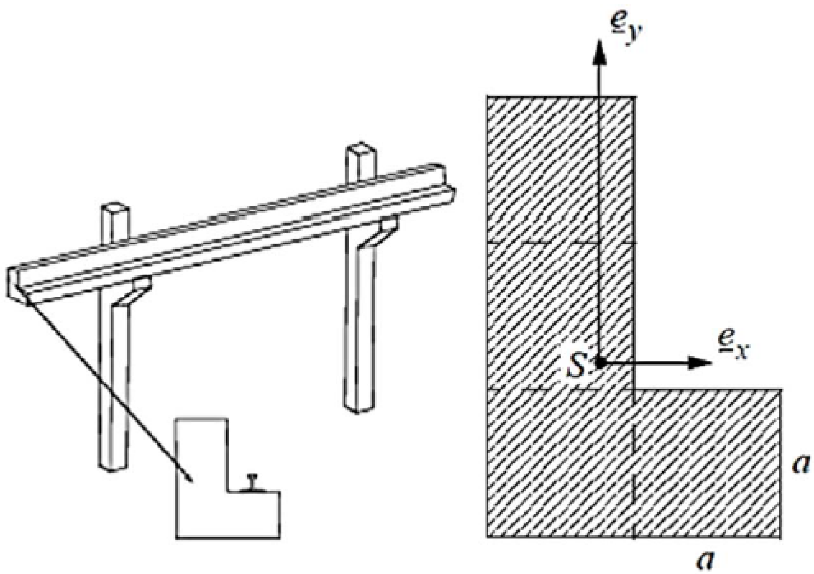
3.3.2 Hausaufgabe

Berechnen Sie die Flächenträgheitsmomente (I_y, I_z) des gezeichneten Querschnittes bezüglich des Flächenmittelpunktes.



3.3.3 Hausaufgabe

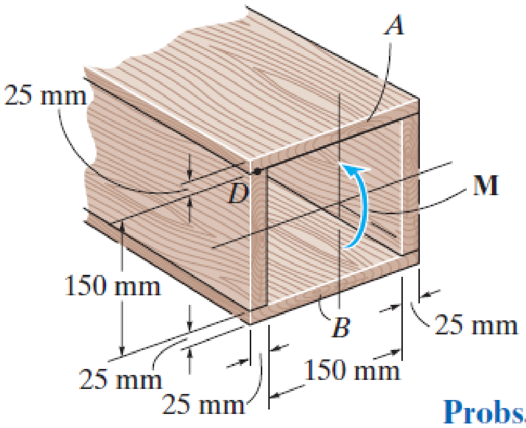
Die L-förmige Querschnittsfläche eines Kranträgers ist gemäss Figur aus vier Quadraten der Seitenlänge a zusammengesetzt. Bestimmen Sie I_x und I_y für den Schwerpunkt S.



3.4 Biegespannung

3.4.1 Aufgabe Kurs

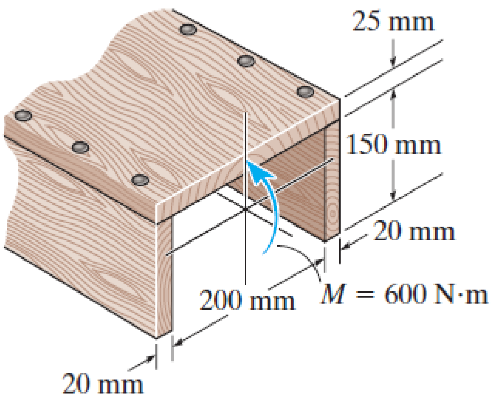
•6–53. Determine the moment **M** that should be applied to the beam in order to create a compressive stress at point D of $\sigma_D = 30$ MPa. Also sketch the stress distribution acting over the cross section and compute the maximum stress developed in the beam.



Probs. 6–52/53

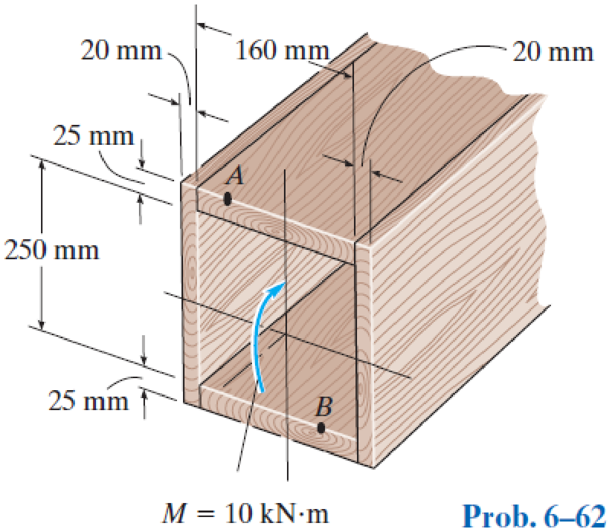
3.4.2 Hausaufgabe

6–55. The beam is made from three boards nailed together as shown. If the moment acting on the cross section is $M = 600$ N · m, determine the resultant force the bending stress produces on the top board.



3.4.3 Hausaufgabe

6–62. A box beam is constructed from four pieces of wood, glued together as shown. If the moment acting on the cross section is 10 kN · m, determine the stress at points A and B and show the results acting on volume elements located at these points.

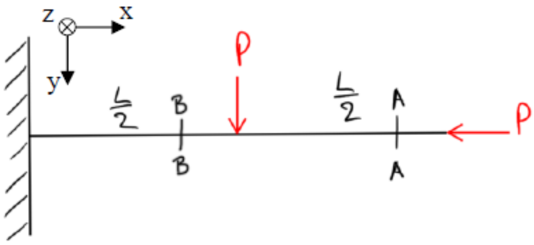


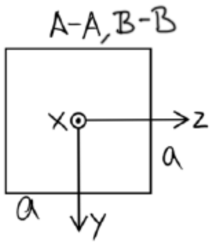
Prob. 6–62

3.5 Superposition

3.5.1 Aufgabe Kurs

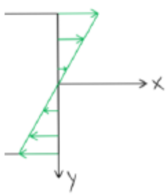
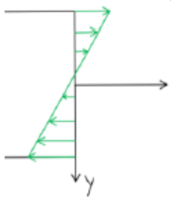
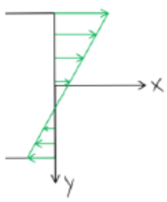
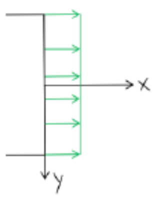
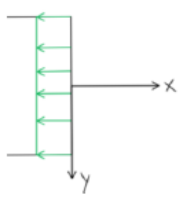
Ein Stab mit Querschnitt A-A wird folgendermasse beansprucht:





Geg: $a = 10cm, P = 10kN, L = 1m$

a) Welches der folgenden Bilder zeigt den korrekten Verlauf der Normalspannung im Querschnitt A-A? B-B?

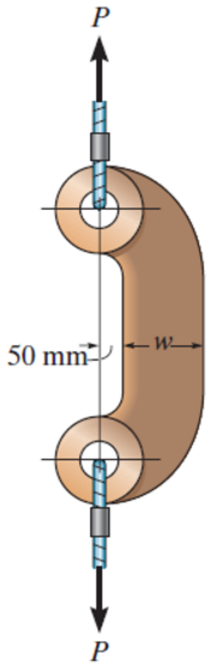
S1. 5 mögliche Antworten	A	B	C	D	E
					

b) Berechnen Sie die maximale Normalspannung im ganzen Stab.

S1. 5 mögliche Antworten	A	B	C	D	E
	$\sigma_{max} = 31MPa$	$\sigma_{max} = -31MPa$	$\sigma_{max} = -61MPa$	$\sigma_{max} = 61MPa$	$\sigma_{max} = -1MPa$

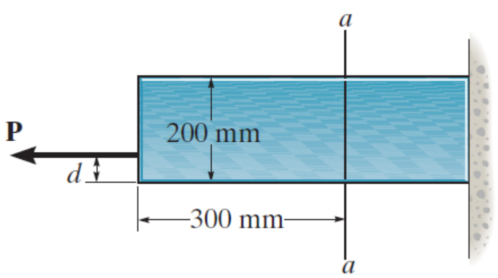
3.5.2 Hausaufgabe

8–27. The offset link has a width of $w = 200$ mm and a thickness of 40 mm. If the allowable normal stress is $\sigma_{allow} = 75$ MPa, determine the maximum load P that can be applied to the cables.



3.5.3 Hausaufgabe

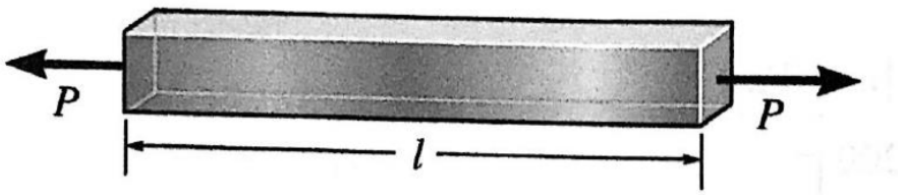
***8–32.** The horizontal force of $P = 80$ kN acts at the end of the plate. The plate has a thickness of 10 mm and **P** acts along the centerline of this thickness such that $d = 50$ mm. Plot the distribution of normal stress acting along section a–a.



3.6 Verformung

3.6.1 Aufgabe Kurs

Auf einem Balken der Länge l_0 und der Querschnittsfläche A_0 wirkt eine Axiallast P. Bestimmen Sie das Elastizitätsmodul des Material, wenn dieser sich um Δl ausdehnt. Das Material hat linear-elastisches Verhalten.

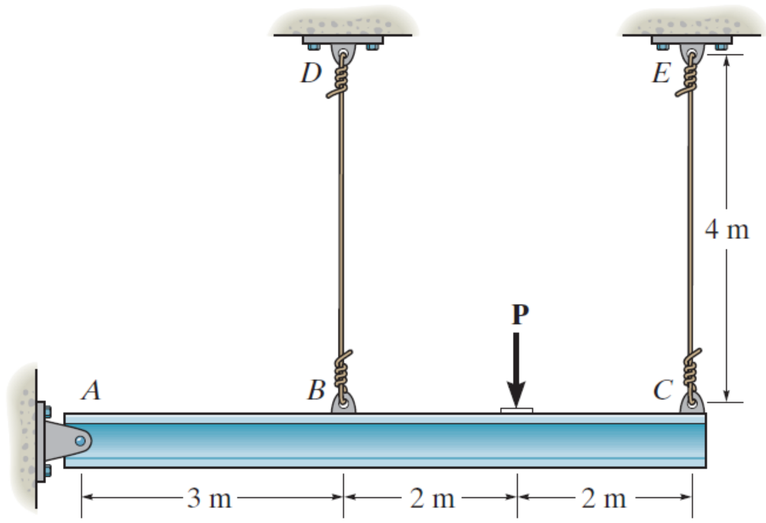


S1. 5 mögliche Antworten	Ⓐ $E = 400GPa$	Ⓑ $E = 400MPa$	Ⓒ $E = 400kPa$	Ⓓ $E = 200MPa$	Ⓔ $E = 200GPa$

Um was für ein Material handelt es sich womöglich?

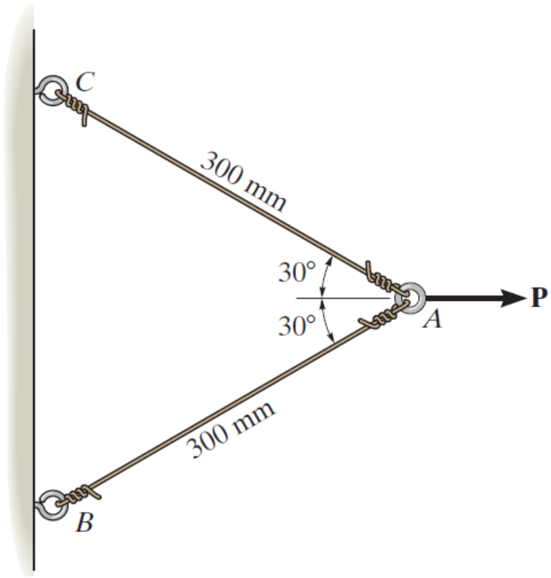
3.6.2 Aufgabe Kurs

2–3. The rigid beam is supported by a pin at A and wires BD and CE. If the load $\mathbf{P}$ on the beam causes the end C to be displaced 10 mm downward, determine the normal strain developed in wires CE and BD.



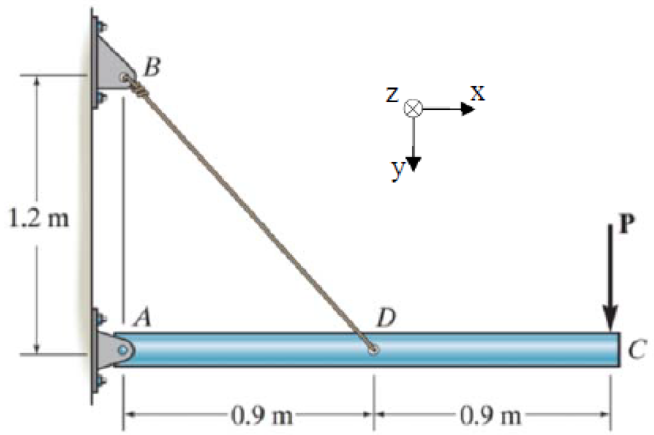
3.6.3 Aufgabe Kurs

***2–4.** The two wires are connected together at A. If the force **P** causes point A to be displaced horizontally 2 mm, determine the normal strain developed in each wire.



3.6.4 Hausaufgabe

Gegeben sei ein Stab, der durch einen Stahldraht gehalten wird. Der Stahldraht habe ein Durchmesser von 5mm und ein E-Modul von 200GPa. Eine Kraft P mit einem Betrag von 2.5kN greife am Punkt C in positiver y-Richtung an.



Wie gross ist die Verlängerung von BD?

Es wird angenommen, dass im Stab AC keine Dehnungen stattfinden, dass sich der Punkt D approximiert nur in y-Richtung bewegt und dass $\pi \approx 3$.

Zugspannungen sind positiv und Druckspannungen sind negativ definiert.

4 Glossar

compression	Druck
cross section	Querschnitt
negligible	vernachlässigbar
shear stress	Schubspannung, Scherspannung
strain	Dehnung
stress	Spannung
tensile stress	Zugspannung
tension	Zug