ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Zentrum für Mechanik
IMES
Institut für Mechanische Systeme

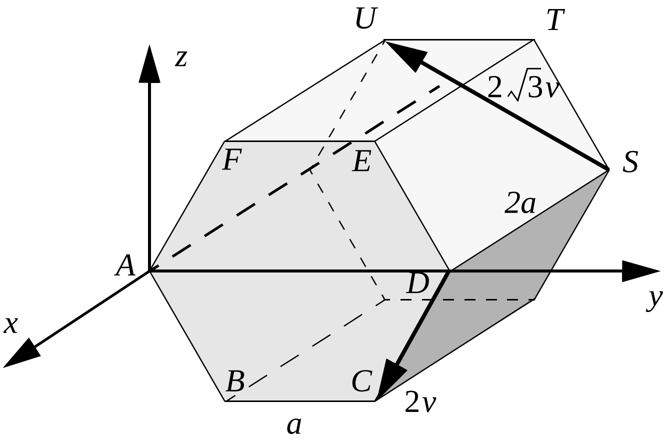
Mechanik GZ

für Geomatik- und Umweltingenieurwissenschaften

Klausur I 2. April 2008, 10^{15} - 11^{15}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Frühjahrssemester 2008**

Aufgabe 1



a) $$\mathbf{v}_S = \frac{\mathbf{SU}}{SU}2\sqrt{3}v = \begin{bmatrix}0\\-3v\\\sqrt{3}v\end{bmatrix} \quad \textcircled{1}_{1}$$

und $$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{DC}}{DC}2v = \begin{bmatrix}0\\-v\\-\sqrt{3}v\end{bmatrix} \quad \textcircled{1}_{2}$$

gesucht: $$\mathbf{v}_E = \begin{bmatrix}v_{Ex}\\v_{Ey}\\0\end{bmatrix} \quad \textcircled{1}_{3}$$

SdpG auf $\mathbf{DE}$:

$$\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{DE} = \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{DE}$$

$$\begin{bmatrix}v_{Ex}\\v_{Ey}\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-\frac{a}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-v\\-\sqrt{3}v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-\frac{a}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}a\end{bmatrix} \quad \textcircled{1}^{KR}_{4}$$

$$-v_{Ey}\frac{a}{2} = \frac{1}{2}av - \frac{3}{2}av$$

$$\Rightarrow v_{Ey} = 2v \quad \textcircled{1}^{KR}_{6}$$

SdpG auf $\mathbf{SE}$:

$$\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{SE} = \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{SE}$$

$$\begin{bmatrix}v_{Ex}\\v_{Ey}\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2a\\-\frac{a}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-3v\\\sqrt{3}v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2a\\-\frac{a}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}a\end{bmatrix} \quad \textcircled{1}^{KR}_{5}$$

$$2av_{Ex} - \frac{a}{2}v_{Ey} = \frac{3}{2}av + \frac{3}{2}av$$

$$\Rightarrow v_{Ex} = 2v \quad \textcircled{1}^{KR}_{7}$$

b) Zur Bestimmung der Kinemate wird die Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ eingeführt. Dann wird die Formel $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP}$ zwei Mal angewandt.

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{SE}$$

$$\begin{bmatrix}2v\\2v\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-3v\\\sqrt{3}v\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}2a\\-\frac{a}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}a\end{bmatrix} \quad \textcircled{1}^{KR}_{8}$$

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{DE}$$

$$\begin{bmatrix}2v\\2v\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-v\\-\sqrt{3}v\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\-\frac{a}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}a\end{bmatrix} \quad \textcircled{1}^{KR}_{9}$$

$$2v = \omega_y \frac{\sqrt{3}}{2} a + \omega_z \frac{a}{2} \qquad \text{(I)}$$

$$5v = -\omega_x \frac{\sqrt{3}}{2} a + \omega_z 2a \qquad \text{(II)}$$

$$-\sqrt{3} v = -\omega_x \frac{a}{2} - \omega_y 2a \qquad \text{(III)}$$

$$2v = \omega_y \frac{\sqrt{3}}{2} a + \omega_z \frac{a}{2} \qquad \text{(IV)}$$

$$3v = -\omega_x \frac{\sqrt{3}}{2} a \qquad \text{(V)}$$

$$\sqrt{3} v = -\omega_x \frac{a}{2} \qquad \text{(VI)}$$

aus (V) oder (VI) $\omega_x = -2\sqrt{3}\frac{v}{a}$ $\textcircled{1}_{10}$, dann mit I, III, oder IV: $\omega_y = \sqrt{3}\frac{v}{a}$ $\textcircled{1}_{11}$ und mit II: $\omega_z = \frac{v}{a}$ $\textcircled{1}_{12}$

Die Kinemate in E lautet also $\boldsymbol{v}_E = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} v$, $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{v}{a}$.

c) Die zweite Invariante bildet das Skalarprodukt $\boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{v^2}{a} = -2\sqrt{3}\frac{v^2}{a}$ $\textcircled{1}^{KR}_{13}$

Mit $I_1 \neq 0$ und $I_2 \neq 0$ handelt es sich also um eine Schraubung. $\textcircled{1}^{KR}_{14}$

Punkteverteilung:

$\textcircled{1}_{1}$ - $\boldsymbol{v}_S$ richtig.

$\textcircled{1}_{2}$ - $\boldsymbol{v}_D$ richtig.

$\textcircled{1}_{3}$ - $v_{Ez} = 0$ richtig.

$\textcircled{1}^{KR}_{4}$ - SdpG konsequent richtig bezüglich $\boldsymbol{v}_S$, $\boldsymbol{v}_D$ und $\boldsymbol{v}_E$

$\textcircled{1}^{KR}_{5}$ - SdpG konsequent richtig bezüglich $\boldsymbol{v}_S$, $\boldsymbol{v}_D$ und $\boldsymbol{v}_E$

$\textcircled{1}^{KR}_{6}$ - v_{Ex} konsequent richtig bezüglich $\boldsymbol{v}_S$ und $\boldsymbol{v}_D$

$\textcircled{1}^{KR}_{7}$ - v_{Ey} konsequent richtig bezüglich $\boldsymbol{v}_S$ und $\boldsymbol{v}_D$

$\textcircled{1}^{KR}_{8}$ - $\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{SE}$ konsequent richtig bezüglich $\boldsymbol{v}_S$ und $\boldsymbol{v}_E$

$\textcircled{1}^{KR}_{9}$ - $\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{DE}$ konsequent richtig bezüglich $\boldsymbol{v}_E$ und $\boldsymbol{v}_D$

$\textcircled{1}_{10}$ - $\omega_x = -2\sqrt{3}\frac{v}{a}$ richtig

$\textcircled{1}_{11}$ - $\omega_y = \sqrt{3}\frac{v}{a}$ richtig

$\textcircled{1}_{12}$ - $\omega_z = \frac{v}{a}$ richtig

$\textcircled{1}^{KR}_{13}$ - I_2 konsequent richtig berechnet bezüglich $\boldsymbol{\omega}$ und $\boldsymbol{v}_E$.

$\textcircled{1}^{KR}_{14}$ - Schraubung konsequent richtig bezüglich I_2 (d.h. nur gegeben, wenn 13 gegeben).

Aufgabe 2 *(14 Punkte)*

a) Dyname in O: $\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M}_O\}$, mit:

Resultierende und Moment bezüglich O:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_B + \boldsymbol{F}_C + \boldsymbol{F}_D = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P \\ kP \\ \frac{1}{2}P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}P \\ -\frac{1}{2}P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}P \\ \frac{1}{2}P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ kP \\ \frac{3}{2}P \end{bmatrix} \textcircled{1}_1$$

Das Kräftepaar $\boldsymbol{F}_C$, $\boldsymbol{F}_D$ ergibt ein Moment, das ebenso wie das Moment $\boldsymbol{M}_1$ unabhängig vom Bezugspunkt ist:

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{F}_C, \boldsymbol{F}_D} = \boldsymbol{r}_{CD} \times \boldsymbol{F}_D = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}P \\ \frac{1}{2}P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}aP \\ \frac{\sqrt{3}}{2}aP \end{bmatrix} \textcircled{1}_2$$

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r}_{OA} \times \boldsymbol{F}_C + \boldsymbol{r}_{OB} \times \boldsymbol{F}_B + \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{F}_C, \boldsymbol{F}_D} + \boldsymbol{M}_1$$

$$\boldsymbol{M}_O = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 2a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -P \\ kP \\ \frac{1}{2}P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}aP \\ \frac{\sqrt{3}}{2}aP \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}aP \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_O = \underset{\textcircled{1}_4}{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ -aP \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2akP \\ -\frac{5}{2}aP \\ akP \end{bmatrix}}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}aP \\ \frac{\sqrt{3}}{2}aP \end{bmatrix} + \underset{\textcircled{1}_3}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}aP \end{bmatrix}} = \underset{\textcircled{1}_5}{\begin{bmatrix} -2akP \\ -3aP \\ akP \end{bmatrix}}$$

b) Dyname in B: $\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M}_Q\}$, mit $\boldsymbol{R}$ wie in a) und $\boldsymbol{M}_Q = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{r}_{OQ}$, also

$$\boldsymbol{M}_Q \underset{\textcircled{1}^{KR}_6}{=} \begin{bmatrix} -2akP \\ -3aP \\ akP \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ kP \\ \frac{3}{2}P \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2akP \\ -3aP \\ akP \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2akP \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3aP \\ akP \end{bmatrix} \textcircled{1}^{KR}_7$$

c) Die Kräftegruppe soll einer Einzelkraft statisch äquivalent sein, also $I_2 = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_O = 0$:

$$\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ kP \\ \frac{3}{2}P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2akP \\ -3aP \\ akP \end{bmatrix} \textcircled{1}^{KR}_8 = -\frac{3}{2}akP^2 = 0 \quad \text{, also } k = 0. \quad \textcircled{1}^{KR}_9$$

d) Für $k = 0$ ist $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2}P \end{bmatrix}$, mit Betrag $R = \frac{3}{2}P$ ①$_{10}$, und $\boldsymbol{M}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ -3aP \\ 0 \end{bmatrix}$ ①$_{11}$. Die statisch äquivalente Einzelkraft liegt also in der *xz*-Ebene und das Moment $\boldsymbol{M}_O$ ist senkrecht dazu in der negativen *y*-Richtung.

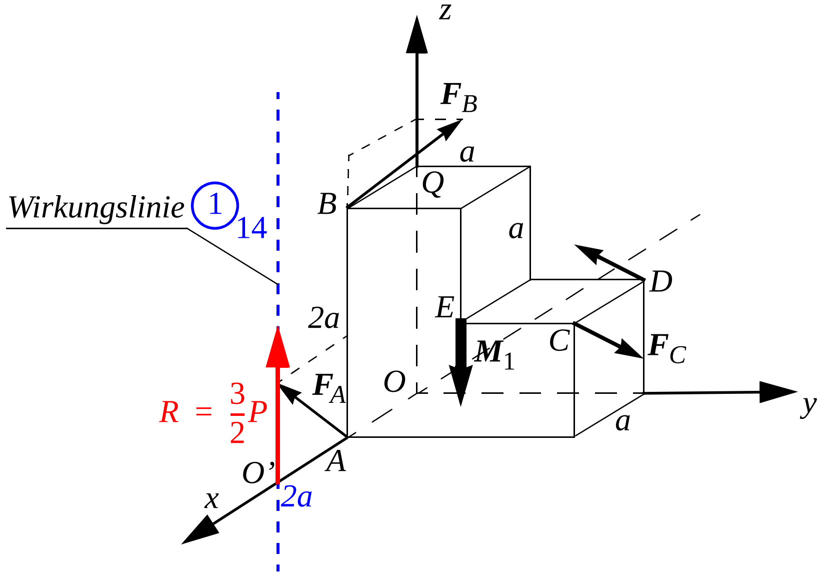
e) Die Wirkungslinie muss in der *xz*-Ebene und im Abstand *d* von *O* liegen:

$$|\boldsymbol{R}|d = |M_{Oy}| \quad ①_{12}$$

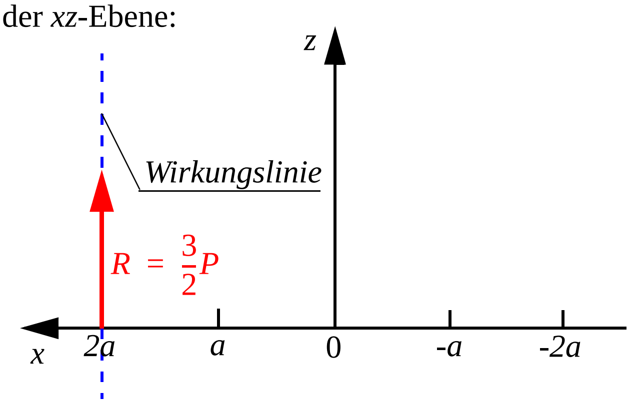
$$\frac{3}{2}Pd = 3aP$$

$$d = 2a \quad ①_{13}$$

Es handelt sich also um eine um vertikale Gerade in der *xz*-Ebene bei $x = 2a$; in der Skizze eingetragen:



Oder in der Aufsicht der *xz*-Ebene:



Systematische Lösung:

Auf der Wirkungsline der Einzelkraft durch *O'* muss das resultierende Moment verschwinden.

$$\boldsymbol{M}_{O'} = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{r}_{OO'}$$ ①$_{12}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3aP \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2}P \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}Py \\ -3aP + \frac{3}{2}Px \\ 0 \end{bmatrix}$$ ①$_{13}$

Die Gleichung der ersten Komponente bestätig, dass $y = 0$, die Gerade liegt also in der *x*-*z*-Ebene. Die Gleichung der zweiten Komponente liefert $x = 2a$, was der Geradengleichung für die oben eingezeichnete Gerade entspricht. ①$_{14}$

Punkteverteilung:

a) ①$_{1}$ - Resultierende $\boldsymbol{R}$ richtig

①$_{2}$ - Momentanteil des Kräftepaares in *C* und *D* richtig

①$_{3}$ - Momentanteil des gegebenen Kräftepaares $\boldsymbol{M}_1$ richtig verschoben

①$_{4}$ - Momentanteile der Kräfte $\boldsymbol{F}_A$ und $\boldsymbol{F}_B$ richtig

①$_{5}$ - $\boldsymbol{M}_O$ richtig

b) ①$_{6}^{KR}$ - Formel $\boldsymbol{M}_Q = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{r}_{OQ}$ (konsequent richtig bez. a))

①$_{7}^{KR}$ - $\boldsymbol{M}_Q$ konsequent richtig bezüglich a)

c) ①$_{8}^{KR}$ - $I_2 = 0$ (Werte eingesetzt)

①$_{9}^{KR}$ - $k = 0$, konsequent richtig bezüglich 8

d) ①$_{10}$ - **Betrag** der Resultierenden $\boldsymbol{R}$ richtig für $k = 0$: $R = \frac{3}{2}P$

①$_{11}$ - Moment $\boldsymbol{M}_O$ richtig für $k = 0$

e) Variante 1: ①$_{12}$ - Idee Berechnung Abstand *d*

①$_{13}$ - Abstand *d* richtig berechnet

①$_{14}$ - Wirkungslinie richtig eingezeichnet

e) Variante 2: ①$_{12}$ - Idee, dass das resultierende Moment auf der Wirkungslinie verschwindet.

①$_{13}$ - Formel und richtig berechnet

①$_{14}$ - Geradengleichung richtig aufgestellt

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Mechanische Systeme

Mechanik GZ

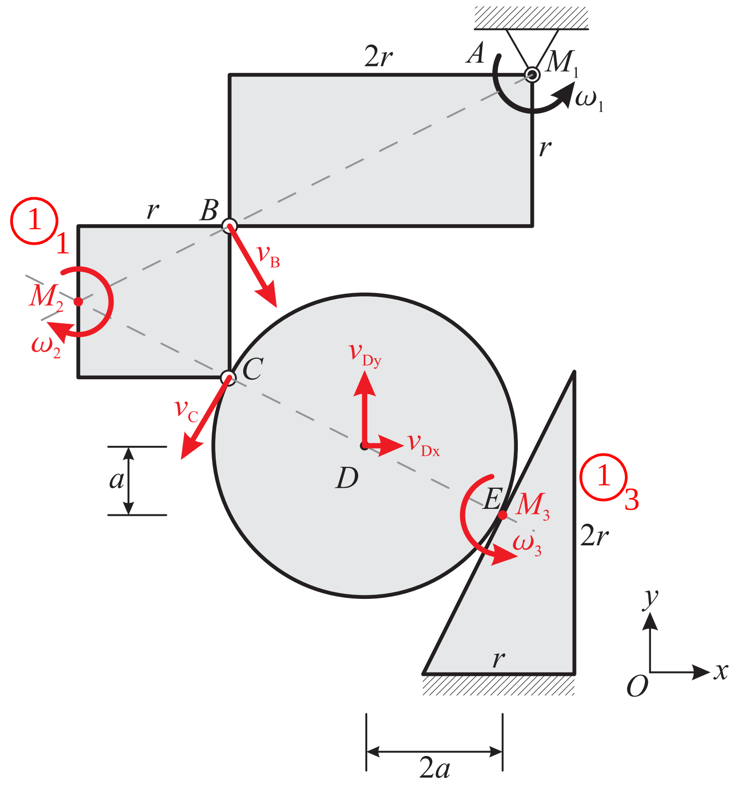
Klausur I

25. März 2009, 10^{15} - 11^{15}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Frühjahrssemester 2009**

Aufgabe 1 (*8 Punkte*)

a)



Abstände:

$$|\boldsymbol{AB}| = r\sqrt{4+1} = r\sqrt{5} \text{ und } |\boldsymbol{BM_2}| = r\sqrt{1+1/4} = r\sqrt{5}/2$$

Rotationsschnelligkeiten:

$$\omega_1 r\sqrt{5} = v_B = \omega_2 r\sqrt{5}/2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 2\omega_1 \quad \textcircled{1}_2$$

b) $\omega_2 r\sqrt{5}/2 = v_C = \omega_3 2r \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \omega_2\sqrt{5}/4 = \omega_1\sqrt{5}/2 \quad \textcircled{1}_4$

c) Schnelligkeiten in *B* und *C* + Skizze:

$$v_B = \omega_1 r\sqrt{5} \quad \textcircled{1}_5$$

$$v_C = \omega_1 r\sqrt{5} \quad \textcircled{1}_6$$

Geschwindigkeiten in *B* und *C*:

$$\boldsymbol{v}_B = \omega_1 r \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$ ①$_5$

$$\boldsymbol{v}_C = \omega_1 r \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$ ①$_6$

d) Abstand von D nach E zerlegt in die x- und y-Komponente:

$$r^2 = a^2 + (2a)^2 \quad \Rightarrow \quad a = r\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Geschwindigkeit in D zerlegt in die x- und y-Komponente:

$$v_{Dx} = -a\omega_3 = -r\frac{1}{\sqrt{5}}\omega_3 = -r\frac{1}{2}\omega_1$$ ①$_7$

$$v_{Dy} = -2a\omega_3 = -r\frac{2}{\sqrt{5}}\omega_3 = -r\omega_1$$ ①$_8$

①$_1$ Momentanzentrum M_2 richtig eingezeichnet.

①$_2$ Rotationsschnelligkeit ω_2 richtig ausgerechnet. Vorzeichen richtig bezüglich Zeichnung.

①$_3$ Momentanzentrum M_3 richtig eingezeichnet.

①$_4$ Rotationsschnelligkeit ω_3 richtig ausgerechnet. Vorzeichen richtig bezüglich Zeichnung.

①$_5$ Schnelligkeit v_B richtig ausgerechnet. Vorzeichen richtig bezüglich Zeichnung. Oder Geschwindigkeit richtig ausgerechnet.

①$_6$ Schnelligkeit v_C richtig ausgerechnet. Vorzeichen richtig bezüglich Zeichnung. Oder Geschwindigkeit richtig ausgerechnet.

①$_7$ Geschwindigkeit v_{Dx} richtig ausgerechnet.

①$_8$ Geschwindigkeit v_{Dy} richtig ausgerechnet.

Aufgabe 2 *(12 Punkte)*

a) Resultierende $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2P \\ 2P \\ 2P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2P \\ -2P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2P \\ -2P \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4P \\ 3P \\ 0 \end{bmatrix} \quad ①_{1}$$

Momente der Einzelkräfte bezüglich des Punktes P mit $\boldsymbol{M}_{iP} = \boldsymbol{r}_{Pi} \times \boldsymbol{F}_i$:

$$\boldsymbol{M}_{1P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aP \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ①_{2} \qquad \boldsymbol{M}_{2P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ -a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2P \\ 2P \\ 2P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2aP - 2bP \\ 2aP \\ -2bP \end{bmatrix} \quad ①_{3}$$

$$\boldsymbol{M}_{3P} = \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2P \\ -2P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2bP \\ -2bP \end{bmatrix} \quad ①_{4} \qquad \boldsymbol{M}_{4P} = \begin{bmatrix} -b \\ -b \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2P \\ -2P \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ①_{5}$$

Momente der Kräftegruppe bezüglich des Punktes P mit $\boldsymbol{M}_P = \sum\limits_{i=1}^{N} \boldsymbol{M}_{iP}$

$$\boldsymbol{M}_P = \begin{bmatrix} aP \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2aP - 2bP \\ 2aP \\ -2bP \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2bP \\ -2bP \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3aP - 2bP \\ 2aP - 2bP \\ -4bP \end{bmatrix} \quad ①_{6}$$

Dyname in P: $\left\{ \begin{bmatrix} -4P \\ 3P \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3aP - 2bP \\ 2aP - 2bP \\ -4bP \end{bmatrix} \right\}$

b) Die Kräftegruppe ist zu einer Einzelkraft statisch äquivalent, wenn $\boldsymbol{R} \neq 0$ und $I_2 = 0$ ist:

$$I_2 = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_P = -12aP^2 + 8bP^2 + 6aP^2 - 6bP^2 = -6aP^2 + 2bP^2 \overset{!}{=} 0 \quad ①^{\text{KR}}_{7}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{3} b \quad ①_{8}$$

c) Lösungsweg 1 - Moment in P mit $\boldsymbol{M}_S = \boldsymbol{M}_P + \boldsymbol{r}_{SP} \times \boldsymbol{R}$ nach S transformieren:

$$\boldsymbol{M}_S \underset{①^{\text{KR}}_{9}}{=} \begin{bmatrix} 3aP - 2bP \\ 2aP - 2bP \\ -4bP \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3b/2 \\ -b \\ a/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4P \\ 3P \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}aP - 2bP \\ -2bP \\ -\frac{7}{2}bP \end{bmatrix} \quad ①_{10}$$

$$\wp = \boldsymbol{v}_S \cdot \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{M}_S = \textcircled{1}^{\text{KR}}_{11} \begin{bmatrix}0\\0\\v\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-4P\\3P\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{v}{2b}\\0\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\frac{3}{2}aP-2bP\\-2bP\\-\frac{7}{2}bP\end{bmatrix} = vP\left(\frac{3a}{4b}-1\right) \quad \textcircled{1}_{12}$$

Lösungsweg 2 - Einzelmomente in S bestimmen um $\boldsymbol{M}_S$ zu bekommen:

$$\boldsymbol{M}_{1S} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2}b\\-b\\-\frac{1}{2}a\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\P\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}aP\\0\\\frac{3}{2}bP\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{M}_{2S} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2}b\\-2b\\-\frac{1}{2}a\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-2P\\2P\\2P\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}aP-4bP\\aP-3bP\\-bP\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{3S} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}b\\-b\\\frac{1}{2}a\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\2P\\-2P\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2bP-aP\\bP\\bP\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{M}_{4S} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}b\\-2b\\\frac{1}{2}a\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-2P\\-2P\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}aP\\-aP\\-5bP\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_S \; \textcircled{1}^{\text{KR}}_{9} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}aP\\0\\\frac{3}{2}bP\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}aP-4bP\\aP-3bP\\-bP\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2bP-aP\\bP\\bP\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}aP\\-aP\\-5bP\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2}aP-2bP\\-2bP\\-\frac{7}{2}bP\end{bmatrix} \quad \textcircled{1}_{10}$$

$$\wp = \boldsymbol{v}_S \cdot \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{M}_S = \textcircled{1}^{\text{KR}}_{11} \begin{bmatrix}0\\0\\v\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-4P\\3P\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{v}{2b}\\0\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\frac{3}{2}aP-2bP\\-2bP\\-\frac{7}{2}bP\end{bmatrix} = vP\left(\frac{3a}{4b}-1\right) \quad \textcircled{1}_{12}$$

Lösungsweg 3 - Geschwindigkeit in S mit $\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SP}$ nach P transformieren:

$$\boldsymbol{v}_P \; \textcircled{1}^{\text{KR}}_{9} = \begin{bmatrix}0\\0\\v\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{v}{2b}\\0\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3b/2\\-b\\a/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-\frac{va}{4b}\\\frac{v}{2}\end{bmatrix} \quad \textcircled{1}_{10}$$

$$\wp = \boldsymbol{v}_P \cdot \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{M}_P = \textcircled{1}^{\text{KR}}_{11} \begin{bmatrix}0\\-\frac{va}{4b}\\\frac{v}{2}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-4P\\3P\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{v}{2b}\\0\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3aP-2bP\\2aP-2bP\\-4bP\end{bmatrix} = vP\left(\frac{3a}{4b}-1\right) \quad \textcircled{1}_{12}$$

Lösungsweg 4 - Geschwindigkeit in S mit $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{Si}$ in den Kraftangriffspunkten bestimmen:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{v}{2b} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3b/2 \\ -b \\ -a/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{va}{4b} \\ \frac{v}{2} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{v}{2b} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3b/2 \\ -2b \\ -a/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{va}{4b} \\ 0 \end{bmatrix}$$

①$^{KR}_{9}$

①$_{10}$

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{v}{2b} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b/2 \\ -b \\ a/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{va}{4b} \\ \frac{v}{2} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{v}{2b} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b/2 \\ -2b \\ a/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{va}{4b} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\wp = \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{va}{4b} \\ \frac{v}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2P \\ 2P \\ 2P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{va}{4b} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2P \\ -2P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{va}{4b} \\ \frac{v}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2P \\ -2P \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{va}{4b} \\ 0 \end{bmatrix} = vP\left(\frac{3a}{4b} - 1\right)$$

①$^{KR}_{11}$ ①$_{12}$

①$_{1}$ Resultierende $\boldsymbol{R}$ richtig.

①$_{2}$ Moment $\boldsymbol{M}_{1P}$ richtig.

①$_{3}$ Moment $\boldsymbol{M}_{2P}$ richtig.

①$_{4}$ Moment $\boldsymbol{M}_{3P}$ richtig.

①$_{5}$ Moment $\boldsymbol{M}_{4P}$ richtig.

①$_{6}$ Moment $\boldsymbol{M}_{P}$ richtig.

①$^{KR}_{7}$ Richtige Idee ($I_2 = 0$) mit Werten konsequent richtig eingesetzt.

①$_{8}$ Ergebnis $a = \frac{1}{3}b$ richtig.

①$^{KR}_{9}$ Richtige Idee ($\boldsymbol{M}_S = \ldots$ bzw. $\boldsymbol{v}_P = \ldots$) mit Werten konsequent richtig eingesetzt.

①$_{10}$ Ergebnis $\boldsymbol{M}_S$ bzw. $\boldsymbol{v}_P$ richtig.

①$^{KR}_{11}$ Richtige Idee ($\wp = \ldots$) mit Werten konsequent richtig eingesetzt.

①$_{12}$ Ergebnis $\wp = vP\left(\frac{3a}{4b} - 1\right)$ richtig.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für
Mechanische Systeme

Mechanik GZ

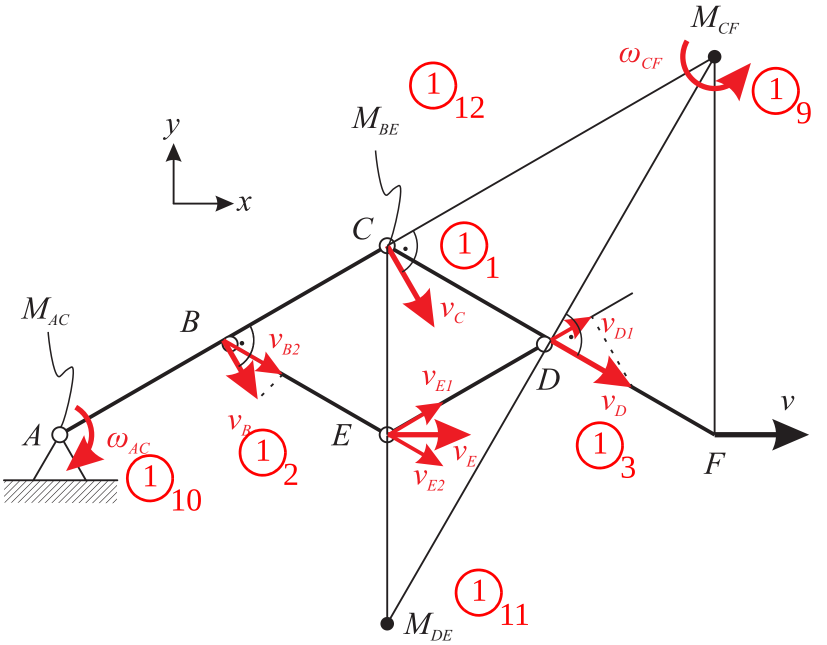
Klausur I

31. März 2010, 10^{15} - 11^{15}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Frühjahrssemester 2010**

Aufgabe 1 (12 Punkte)

a)



Mit Hilfe des SvM findet man

$$\omega_{CF} = \frac{v}{2l}, \quad v_C = \omega_{CF} 2l = v$$ ①$_4$

$$\omega_{AC} = \frac{v}{2l}, \quad v_B = \omega_{AC} l = \frac{v}{2}$$ ①$_5$

$$v_D = \omega_{CF} \frac{\sqrt{3}}{2} 2l = \frac{\sqrt{3}}{2} v$$ ①$_6$

Komponentenweise: $\boldsymbol{v}_C = \begin{bmatrix} \frac{v}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} v \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{v}_B = \begin{bmatrix} \frac{v}{4} \\ \frac{-\sqrt{3}}{4} v \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{v}_D = \begin{bmatrix} \frac{3v}{4} \\ \frac{-\sqrt{3}}{4} v \end{bmatrix}$

b) Mit Hilfe des SdpG findet man

$$v_{E1} = v_{D1} = \frac{1}{2} v_D = \frac{\sqrt{3}}{4} v \text{ und } v_{E2} = v_{B2} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_B = \frac{\sqrt{3}}{4} v$$ ①$^{KR}_{7}$

daraus $v_E = \frac{1}{2}v$. ①$_{8}$

Vektoriell geschrieben

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{Ex} \\ v_{Ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} v \text{ und } \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{Ex} \\ v_{Ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{2} v$$ ①$^{KR}_{7}$

daraus folgt: $v_{Ex} = \frac{v}{2}, v_{Ey} = 0$ ①$_{8}$

c) Die Momentanzentren sind in der Zeichnung oben eingezeichnet.

①$_{1}$ Richtung v_C

①$_{2}$ Richtung v_B

①$_{3}$ Richtung v_D

①$_{4}$ Betrag v_C

①$_{5}$ Betrag v_B

①$_{6}$ Betrag v_D

①$^{KR}_{7}$ projizierte Geschwindigkeiten oder Skalarprodukte k.r. bez. v_B und v_D

①$_{8}$ Betrag und Richtung v_E richtig

①$_{9}$ M_{CF} richtig (klar ersichtlich wo)

①$_{10}$ M_{AC} richtig (klar ersichtlich wo)

①$_{11}$ M_{DE} richtig (klar ersichtlich wo)

①$_{12}$ M_{BE} richtig (klar ersichtlich wo)

Aufgabe 2 *(12 Punkte)*

a) Die Kräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ sind

$$\boldsymbol{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{C}{\sqrt{2}}$$

Resultierende $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \frac{C}{\sqrt{2}} - F \\ F + A \\ \frac{C}{\sqrt{2}} + B + F \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}_{1}$$

Momente der Einzelkräfte bezüglich des Punktes O sind:

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -RF \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}^{KR}_{2} \quad \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_2) = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ R \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \times \begin{bmatrix} C \\ 0 \\ C \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -RB \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}_{3} \quad \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2R \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} 2RF \\ 0 \\ 2RF \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}_{4}$$

Die Dyname in O ist also

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{C}{\sqrt{2}} - F \\ F + A \\ \frac{C}{\sqrt{2}} + B + F \end{bmatrix}, \underset{\textcircled{1}_{5}}{\begin{bmatrix} -RB + RF \\ 0 \\ 2RF \end{bmatrix}} \right\}$$

b) Die Dyname in P lässt sich berechnen mit $\boldsymbol{M}_P = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{r}_{PO} \times \boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{M}_P = \begin{bmatrix} -RB + RF \\ 0 \\ 2RF \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{C}{\sqrt{2}} - F \\ F + A \\ \frac{C}{\sqrt{2}} + B + F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2RB - R\frac{C}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ RF + R\frac{C}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$\textcircled{1}^{KR}_{6}$

Daraus ergibt sich die Dyname in P: $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{C}{\sqrt{2}} - F \\ F + A \\ \frac{C}{\sqrt{2}} + B + F \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2RB - R\frac{C}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ RF + R\frac{C}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$ ①$_{7}$

Alternativer Lösungsweg, Momente einzeln berechnen:

$$M_P(\boldsymbol{F}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -RF \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad M_P(\boldsymbol{F}_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}R \\ -R \\ \frac{1}{\sqrt{2}}R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{C}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} -R\frac{C}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ R\frac{C}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

①$^{\text{KR}}_{6}$

$$M_P(\boldsymbol{F}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2R \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2RB \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad M_P(\boldsymbol{F}_4) = \begin{bmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -F \\ 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RF \\ 0 \\ RF \end{bmatrix}$$

Daraus ergibt sich die Dyname in P: $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{C}{\sqrt{2}} - F \\ F + A \\ \frac{C}{\sqrt{2}} + B + F \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2RB - R\frac{C}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ RF + R\frac{C}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$ ①$_{7}$

c) Damit die Kräftegruppe statisch äquivalent zu einem Kräftepaar ist muss gelten $\boldsymbol{R} = 0$. Daraus ergibt sich: ①$_{9}$

$C = \sqrt{2}F$ ①$_{8}$ $A = -F \quad B = -2F$ ①$_{10}$

d) Es gilt, $\wp = \boldsymbol{v}_O \cdot \boldsymbol{R} + \omega \cdot \boldsymbol{M}_O$

$$\wp = \omega \cdot \boldsymbol{M}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v}{R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3RF \\ 0 \\ 2RF \end{bmatrix} = 2Fv$$ ①$_{12}$

①$^{\text{KR}}_{11}$

①$_{1}$ Resultierende richtig

①$^{\text{KR}}_{2}$ $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_1)$ k.r. bezüglich $\boldsymbol{F}_1$

①$_{3}$ $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_3)$ richtig

①$_{4}$ $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_4)$ richtig

①$_{5}$ Summe der Momente richtig

①$^{\text{KR}}_{6}$ Verwendung der Formel und k.r. einsetzen von oben oder alle Einzelmomente richtig

①$_{7}$ Dyname richtig

①$_{8}$ C richtig

①$_{9}$ A richtig

①$_{10}$ B richtig

①$^{\text{KR}}_{11}$ k.r. einsetzen in die Formel für die Leistung

①$_{12}$ Leistung richtig

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für
Mechanische Systeme

Mechanik GZ

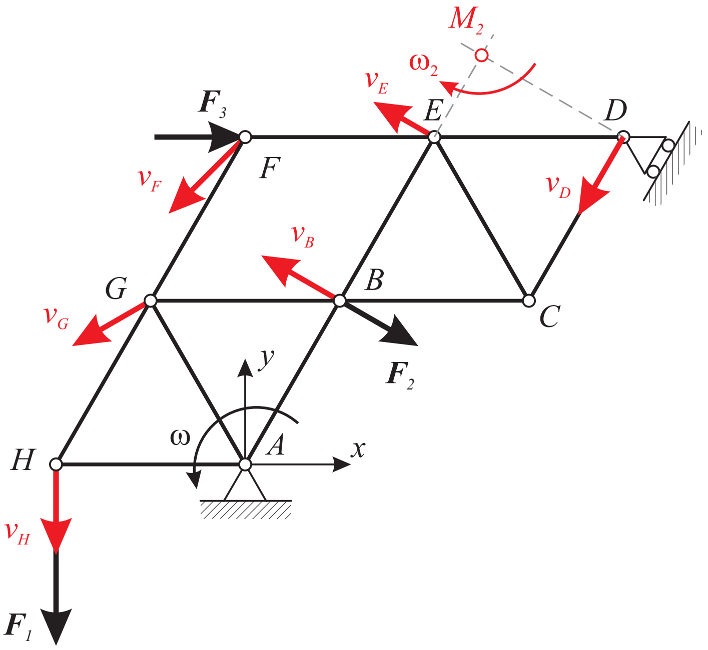
Klausur I

30. März 2011, 10^{15} - 11^{15}

Dr. Stephan Kaufmann
Musterlösung
Frühjahrssemester 2011

Aufgabe 1 (*11 Punkte*)

a) Skizze mit Bewegungszustand



①$_1$

Starre Teilsysteme sind die Körper $ABGH$, $BCDE$ und die Stäbe GF, FE. ①$_2$

b) Die Geschwindigkeiten der Punkte B und H sind trivial:

$$v_B = \omega L$$ ①$_3$

$$v_H = \omega L$$ ①$_4$

Bestimmung der Rotationsschnelligkeit ω_2:

$$v_B = \omega L = \omega_2 \overline{BM_2} = \omega_2 \frac{3}{2} L \qquad \rightarrow \omega_2 = \frac{2}{3}\omega$$ ①$_5$

Mit den Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_E = \frac{1}{3}\omega L \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ ①$^{KR}_6$ und $\boldsymbol{v}_G = \omega L \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ ①$_7$

und den Einheitsrichtungsvektoren $\boldsymbol{e}_{GF} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{e}_{FE} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ kann durch zweimalige

Anwendung des SdpG die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_F = (v_{Fx}, v_{Fy})$ berechnet werden:

SdpG: $\boldsymbol{v}_F \cdot \boldsymbol{e}_{FE} = \boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{e}_{FE} \quad \rightarrow v_{Fx} = -\frac{\sqrt{3}}{6}\omega L$

①$_{8}$

SdpG: $\boldsymbol{v}_G \cdot \boldsymbol{e}_{GF} = \boldsymbol{v}_F \cdot \boldsymbol{e}_{GF} \quad \rightarrow v_{Fy} = -\frac{5}{6}\omega L \qquad \rightarrow \boldsymbol{v}_F = \omega L \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$ ①$_{9}$

c) Die Gesamtleistung berechnet sich als Summe der Einzelleistungen:

$$\wp = \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{v}_H + \boldsymbol{F}_2 \cdot \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{F}_3 \cdot \boldsymbol{v}_F$$

$$\wp = \omega L F - \omega L F + \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/6 \\ -5/6 \end{bmatrix} \omega L = -\frac{\sqrt{3}}{6}\omega L F$$ ①$_{11}$

①$^{\text{KR}}_{10}$

①$_{1}$ Skizze mit Bewegungszustand

①$_{2}$ Alle vier Starrkörper richtig identifiziert

①$_{3}$ Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_B$ richtig berechnet. Betrag und Richtung oder vektoriell.

①$_{4}$ Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_H$ richtig berechnet. Betrag und Richtung oder vektoriell.

①$_{5}$ Rotationsschnelligkeit ω_2 richtig berechnet.

①$^{KR}_{6}$ Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_E$ konsequent richtig zu ω_2.

①$_{7}$ Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_G$ richtig berechnet. Betrag und Richtung oder vektoriell.

①$_{8}$ Zweimalige Anwendung des SdpG.

①$_{9}$ Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_F$ richtig berechnet. Betrag und Richtung oder vektoriell.

①$_{10}$ Gesamtleistung als Summe der Einzelleistungen, konsequent richtige Anwendung der Formel. Kein Formelpunkt!

①$_{11}$ Richtiges Resultat für Gesamtleistung.

Aufgabe 2 *(11 Punkte)*

a) Dyname im Punkt O:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4 = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}F, \qquad M_O = aF + 2aF - 3aF - 2aF = -2aF$$

①$_1$ ①$_2$

Dyname im Punkt E:

$\boldsymbol{R}$ ist invariant. ①$^{KR}_3$

$M_E = 2aF$ ①$_4$

b) Berechne Dyname in G: $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}F$, $M_G = 4aF$ ①$_5$

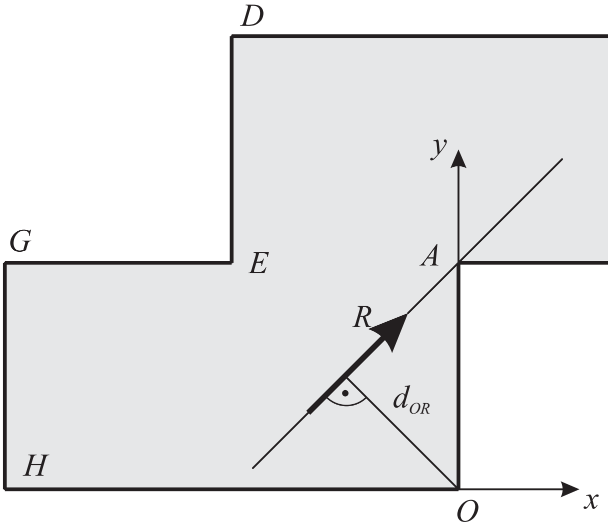
und daraus die Gesamtleistung:

$$\wp = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{M}_G\cdot\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}F\cdot\begin{bmatrix}v\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\4aF\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\v/a\end{bmatrix} = 6vF$$

①$^{KR}_6$ ①$_7$

c) Die statisch äquivalente Einzelkraft hat den Kraftvektor $\boldsymbol{R}$ ①$_8$

Wirkungslinie: - hat die Richtung von $\boldsymbol{R}$
- und einen zu bestimmenden Abstand vom Bezugspunkt, beispielsweise O ①$_9$



$|M_O| = d_{OR}|R| \qquad \rightarrow d_{OR} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ①$_{10}$

Die Wirkungslinie geht also durch die Punkte $A(0, a)$ und $C(a, 2a)$.
Einsetzen dieser Punkte in die allgemeine Geradengleichung führt auf die Gleichung der Wirkungslinie: $y = x + a$ ①$_{11}$

①$_{1}$ Resultierende richtig berechnet.

①$_{2}$ Resultierendes Moment bezüglich Punkt O richtig berechnet.

①$^{KR}_{3}$ Invarianz der Resultierenden, bzw. konsequent richtig zu Punkt 1.

①$_{4}$ Resultierendes Moment bezüglich Punkt E richtig berechnet.

①$_{5}$ Resultierendes Moment bezüglich Punkt G richtig berechnet.

①$^{KR}_{6}$ Formel zur Leistungsberechnung konsequent richtig angewendet.

①$_{7}$ Richtige Gesamtleistung.

①$_{8}$ Wissen, dass Resultierende die statisch äquivalente Einzelkraft ist.

①$_{9}$ Idee zur Bestimmung der Wirkungslinie, bzw. Skizze.

①$_{10}$ Abstand der Wirkungslinie richtig berechnet.

①$_{11}$ Wirkungslinie als Geradengleichung angegeben.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Zentrum für Mechanik
IMES
Institut für Mechanische Systeme

Technische Mechanik

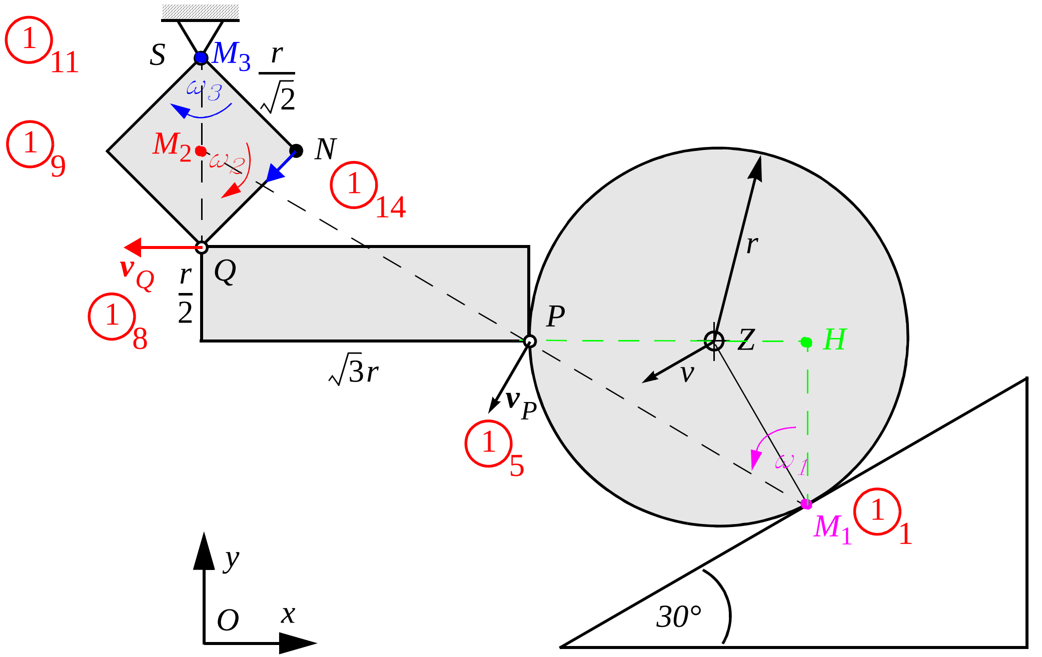
für D-ITET

Klausur I

30. Oktober 2007, 9^{15} - 10^{00}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Herbstsemester 2007**

Aufgabe 1



a) Momentanzentrum M_1 im Berührungspunkt Rad/Abrollebene gemäss Skizze ①$_1$

Rotationsschnelligkeit $\omega_1 = \frac{v}{r}$ ①$_2$

b, c und d) Geschwindigkeit in P:

Variante 1: Komponentenweise:

Abstand $\overline{M_1H} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$

Abstand $\overline{HP} = \frac{3}{2}r$ ①$_3$

$v_{Px} = -\overline{M_1H}\omega_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}r\frac{v}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}v$ ①$_4$

$v_{Py} = -\overline{HP}\omega_1 = -\frac{3}{2}r\frac{v}{r} = -\frac{3}{2}v$ ①$_5$

Variante 2: Betrag und Richtung:

Abstand $\overline{M_1P} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)^2 + \left(\frac{3r}{2}\right)^2} = \sqrt{3}r$ ①$_3$

Schnelligkeit $v_P = \overline{M_1P}\omega_1 = \sqrt{3}r\frac{v}{r} = \sqrt{3}v$ ①$_4$

Richtung: rechtwinklig auf $\overline{M_1P}$ (s. Skizze) ①$_5$

Variante 3: Vektoren:

$$\begin{bmatrix} v_{Px} \\ v_{Py} \\ v_{Pz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \overset{①_3}{\times} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}r \\ \frac{\sqrt{3}}{2}r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_1\frac{\sqrt{3}}{2}r \\ -\omega_1\frac{3}{2}r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}v \\ -\frac{3}{2}v \\ 0 \end{bmatrix}$$

①$_4$

①$_5$

Geschwindigkeit in Q:

Das Momentanzentrum M_3 muss aufgrund der Lagerung in S liegen. Die Geschwindigkeit in Q ①$_{11}$ hat also nur eine horizontale Komponente $v_{Qx} = -\omega_3 r$ (die Richtung ist ersichtlich durch die Anwendung des SdpG auf PQ). Das Momentanzentrum M_2 muss rechtwinklig zu $\mathbf{v}_P$ und zu $\mathbf{v}_Q$ ①$_9$ liegen, also im Schnittpunkt der Senkrechten. M_2 befindet sich also im Zentrum des Würfels.

Variante 1: SdpG auf PQ:

$$\mathbf{v}_P \overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}_Q \overrightarrow{PQ} \quad ①_6$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}v \\ -\frac{3}{2}v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}r \\ \frac{r}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_3 r \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}r \\ \frac{r}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{3}{4}rv = \sqrt{3}\omega_3 r$$

$$\text{gibt} \quad \omega_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{v}{r} \quad \text{und} \quad ①_{10}$$

$$\mathbf{v}_Q = \begin{bmatrix} -\omega_3 r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4}v \\ 0 \end{bmatrix} \quad ①_7 \; ①_8$$

ω_2 folgt aus dem Satz vom Momentanzentrum für M_2:

$$\omega_2 = \frac{v_{Qx}}{\overline{M_2Q}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}v}{\frac{r}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v}{r} \quad ①_{12}$$

Variante 2: Satz vom Momentanzentrum:

$$\omega_2 = \frac{v_P}{\overline{M_2P}} = \frac{v_Q}{\overline{M_2Q}} \quad ①_6$$

$$\frac{\sqrt{3}v}{2r} = \frac{\omega_2 r}{\frac{r}{2}}$$

$$①_{12} \text{gibt} \; \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v}{r} = \omega_2 \;\text{und}\; v_Q = \frac{\sqrt{3}}{4}v \quad ①_7$$

(Richtung horizontal wie eingezeichnet). ①$_8$

ω_3 folgt aus dem Satz vom Momentanzentrum für M_3:

$$\omega_3 = \frac{v_Q}{\overline{M_3Q}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}v}{r} = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{v}{r} \quad ①_{10}$$

Variante 3: Vektoren

$$\begin{bmatrix} v_{Px} \\ v_{Py} \\ v_{Pz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}v \\ -\frac{3}{2}v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_2 \end{bmatrix} ①_6 \times \begin{bmatrix} \sqrt{3}r \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_2 r \\ -\omega_2\sqrt{3}r \\ 0 \end{bmatrix}, \text{also } \omega_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v}{r} \quad ①_{12}$$

$$\begin{bmatrix} v_{Qx} \\ v_{Qy} \\ v_{Qz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{r}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\omega_2 r}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4}v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ①_7 ①_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_3 r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{also } \omega_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{v}{r} \quad ①_{10}$$

Hinweis: Die Winkelgeschwindigkeiten haben eine negative Komponente, da sie im negativen Drehsinn (Uhrzeigersinn) eingezeichnet sind.

e) Bleibt noch die Geschwindigkeit im Punkt N:

Variante 1: Komponentenweise:

$$v_{Nx} = -\frac{r}{2}\omega_3 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{v}{r}\frac{r}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{8}v$$ ①$_{13}$

$$v_{Ny} = -\frac{r}{2}\omega_3 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{v}{r}\frac{r}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{8}v$$ ①$_{14}$

Variante 2: Betrag und Richtung:

Abstand $\overline{M_3N} = \frac{r}{\sqrt{2}}$

Schnelligkeit $v_N = \overline{M_3N}\omega_3 = \frac{r}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{v}{r} = \frac{\sqrt{6}}{8}v$ ①$_{13}$

Richtung wie eingezeichnet auf der Würfelkante. ①$_{14}$

Variante 3: wieder mit Vektoren:

$$\begin{bmatrix} v_{Nx} \\ v_{Ny} \\ v_{Nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \\ -\frac{r}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_3\frac{r}{2} \\ -\omega_3\frac{r}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{8}v \\ -\frac{\sqrt{3}}{8}v \\ 0 \end{bmatrix}$$ ①$_{13}$ ①$_{14}$

Punkteverteilung:

①$_1$ - M_1 richtig eingezeichnet

①$_2$ - $\omega_1 = \frac{v}{r}$ richtig

-	*Variante 1:*	*Variante 2:*	*Variante 3:*
①$_3$	$\overline{M_1H} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$ **und** $\overline{HP} = \frac{3}{2}r$	Abstand $\overline{M_1P} = \sqrt{3}r$ richtig	Vektorprodukt
①$_4$ -	$v_{Px} = -\frac{\sqrt{3}}{2}v$	Schnelligkeit $v_P = \sqrt{3}v$	$v_{Px} = -\frac{\sqrt{3}}{2}v$
①$_5$ -	$v_{Py} = -\frac{3}{2}v$	Richtung richtig eingezeichnet	$v_{Py} = -\frac{3}{2}v$
①$_6$ -	SdpG (Idee)	SvM richtig	Vektorprodukt
①$_7$ -	$v_{Qx} = -\frac{\sqrt{3}}{4}v$	Schnelligkeit $v_Q = \frac{\sqrt{3}}{4}v$	$v_{Qx} = -\frac{\sqrt{3}}{4}v$
①$_8$ -	$v_{Qy} = 0$	Richtung richtig eingezeichnet	$v_{Qy} = 0$

①$_9$ - Momentanzentrum M_2 richtig eingezeichnet

①$_{10}$ - $\omega_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{v}{r}$ richtig berechnet

①$_{11}$ - Momentanzentrum M_3 richtig eingezeichnet

①$_{12}$ - $\omega_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v}{r}$ richtig

①$_{13}$ -	$v_{Nx} = -\frac{\sqrt{3}}{8}v$ richtig	Schnelligkeit $v_N = \frac{\sqrt{6}}{8}\frac{v}{r}$	$v_{Nx} = -\frac{\sqrt{3}}{8}v$
①$_{14}$ -	$v_{Ny} = -\frac{\sqrt{3}}{8}v$ richtig	Richtung richtig eingezeichnet	$v_{Ny} = -\frac{\sqrt{3}}{8}v$

Aufgabe 2 *(14 Punkte)*

a) Dyname in O: $\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M}_O\}$, mit:

Resultierende und Moment bezüglich O:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_B + \boldsymbol{F}_C + \boldsymbol{F}_D + \boldsymbol{F}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}P \\ \frac{\sqrt{3}}{2}P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}P \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2P \\ P \\ cP \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ \frac{P}{2} \\ P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P \\ \frac{P}{2} \\ -P \end{bmatrix} = \underset{\textcircled{1}_1}{\begin{bmatrix} -2P \\ 2P \\ cP \end{bmatrix}}$$

Das Kräftepaar $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_B$ ergibt ein Moment, das ebenso wie das Moment $\boldsymbol{M}_1$ unabhängig vom Bezugspunkt ist:

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{F}_A, \boldsymbol{F}_B} = \boldsymbol{r}_{AB} \times \boldsymbol{F}_B = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}P \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}aP \\ -\frac{1}{2}aP \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r}_{OC} \times \boldsymbol{F}_C + \boldsymbol{r}_{OD} \times \boldsymbol{F}_D + \boldsymbol{r}_{OE} \times \boldsymbol{F}_E + \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{F}_A, \boldsymbol{F}_B} + \boldsymbol{M}_1$$

$$\boldsymbol{M}_O = \begin{bmatrix} a \\ \frac{a}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2P \\ P \\ cP \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P \\ \frac{P}{2} \\ P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -P \\ \frac{P}{2} \\ -P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}aP \\ -\frac{1}{2}aP \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}+2}{2}aP \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_O = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{a}{2}cP \\ -acP \\ 2aP \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} aP \\ -aP \\ -\frac{a}{2}P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -aP \\ 0 \\ aP \end{bmatrix}}_{\textcircled{1}_4} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}aP \\ -\frac{1}{2}aP \end{bmatrix} \textcircled{1}_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}+2}{2}aP \\ 0 \end{bmatrix} \textcircled{1}_3 = \begin{bmatrix} \frac{a}{2}cP \\ -acP \\ 2aP \end{bmatrix} \textcircled{1}_5$$

b) Dyname in B: $\{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M}_B\}$, mit $\boldsymbol{R}$ wie in a) und $\boldsymbol{M}_B = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{r}_{OB}$, also $\textcircled{1}^{KR}_6$

$$\boldsymbol{M}_B = \begin{bmatrix} \frac{a}{2}cP \\ -acP \\ 2aP \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2P \\ 2P \\ cP \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2}cP \\ -acP \\ 2aP \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2aP \\ 2aP \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2aP + \frac{a}{2}cP \\ 2aP - acP \\ 2aP \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}^{KR}_7$$

c) Die Kräftegruppe soll einer Einzelkraft statisch äquivalent sein, also $I_2 = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_O = 0$: $\textcircled{1}_8$

$$\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_O = \begin{bmatrix} -2P \\ 2P \\ cP \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{a}{2}cP \\ -acP \\ 2aP \end{bmatrix} = -c - 2c + 2c = 0\text{, also } c = 0. \quad \textcircled{1}_9$$

d) Für $c = 0$ ist $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix}-2P\\ 2P\\ 0\end{bmatrix}$, mit Betrag $R = \sqrt{8}P = 2\sqrt{2}P$ ①$_{10}$, und $\boldsymbol{M}_O = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 2aP\end{bmatrix}$ ①$_{11}$. Die statisch äquivalente Einzelkraft liegt also in der *x*-*y*-Ebene und das Moment $\boldsymbol{M}_O$ ist senkrecht dazu in der *z*-Richtung.

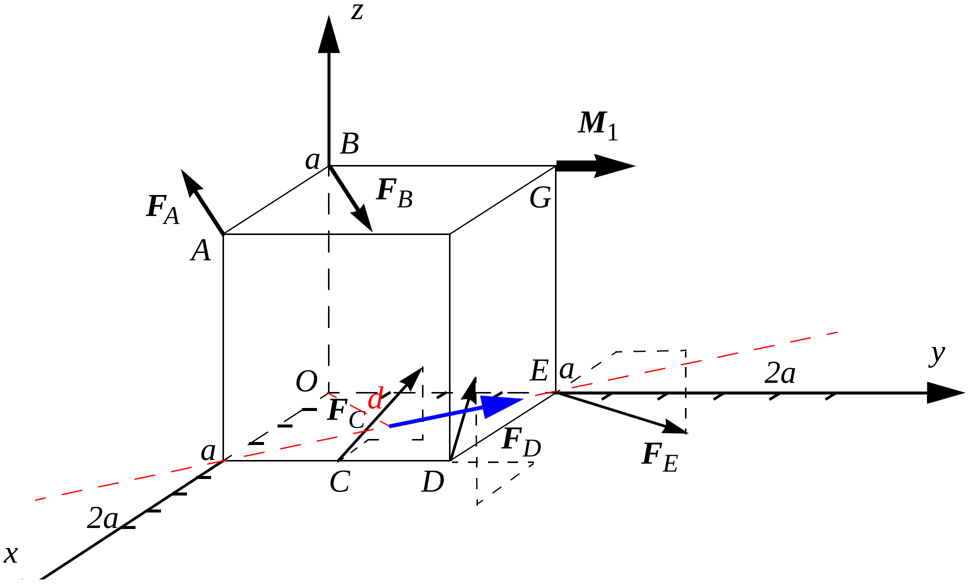
e) Die Wirkungslinie muss in der *x*-*y*-Ebene liegen und im Abstand *d* von *O* liegen: ①$_{12}$

$$|\boldsymbol{R}|d = M_{Oz}$$

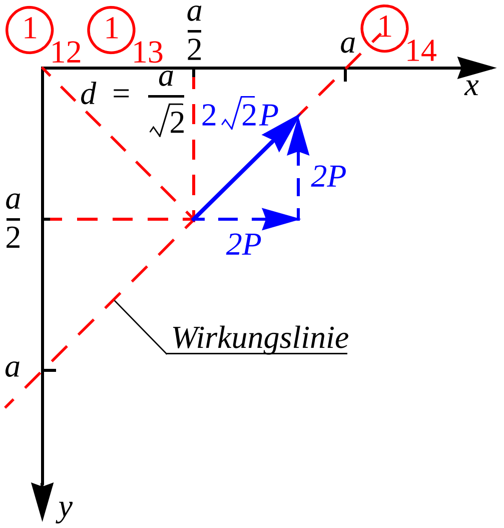
$$2\sqrt{2}Pd = 2aP$$

①$_{14}$ $$d = \frac{a}{\sqrt{2}}$$ ①$_{13}$

Es handelt sich also um eine um 45° geneigte Gerade in der *x*-*y*-Ebene mit Achsenabschnitt *a*; in der Skizze eingetragen:



Oder in der Aufsicht der *x*-*y*-Ebene:



Systematische Lösung:

Auf der Achse *OO'* der Einzelkraft muss das resultierende Moment verschwinden.

$$\boldsymbol{M}_{O'} = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{r}_{OO'} \qquad \textcircled{1}_{12}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\2aP\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2P\\2P\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2Pz\\2Pz\\2aP-2Py-2Px\end{bmatrix} \qquad \textcircled{1}_{13}$$

Die Gleichungen der ersten beiden Komponenten bestätigen dass $z = 0$, die Gerade liegt also in der *x*-*y*-Ebene. Die Gleichung der dritten Komponente liefert:

$$y = a - x \qquad \textcircled{1}_{14}$$

was der Geradengleichung für die oben eingezeichnete Gerade entspricht.

Punkteverteilung:

a) ①$_1$ - Resultierende ***R*** richtig

①$_2$ - Momentanteil des Kräftepaares in *A* und *B* richtig

①$_3$ - Momentanteil des gegebenen Kräftepaares $\boldsymbol{M}_1$ richtig verschoben

①$_4$ - Momentanteile der Kräfte $\boldsymbol{F}_C$, $\boldsymbol{F}_D$, $\boldsymbol{F}_E$ richtig

①$_5$ - $\boldsymbol{M}_O$ richtig

b) ①$^{KR}_6$ - Resultierende richtig **und** Formel $\boldsymbol{M}_B = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{r}_{OB}$ (konsequent richtig bez. a))

①$^{KR}_7$ - $\boldsymbol{M}_B$ konsequent richtig bezüglich a)

c) ①$_8$ - $I_2 = 0$

①$_9$ - $c = 0$

d) ①$_{10}$ - **Betrag** der Resultierenden ***R*** richtig für $c = 0$: $R = \sqrt{8}P = 2\sqrt{2}P$

①$_{11}$ - Moment $\boldsymbol{M}_O$ richtig für $c = 0$

e) Variante 1: ①$_{12}$ - Berechnung Abstand *d*

①$_{13}$ - Abstand *d* richtig berechnet

①$_{14}$ - Richtung 45° richtig

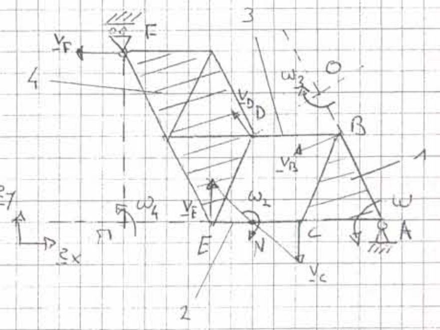
e) Variante 2: ①$_{12}$ - Idee, dass das resultierende Moment auf der Wirkungslinie verschwindet.

①$_{13}$ - Formel und richtig berechnet

①$_{14}$ - Geradengleichung richtig

Klausur I : Mechanik GZ SS 2007

A1



a) SK1: ABC, SK2: EC, SK3: BD, SK4: EDF ①$_1$

b) · SK1:

Momentanzentrum: A (oder $\underline{v}_A = 0$) } ①$_2$

Rotationsschnelligkeit: ω

$\boxed{v = \omega \cdot r}$ ①$_3$, Formel

$\underline{v}_C = (\overset{①_4}{0}, -\omega L)$ ①$_5$ $/ (v_C = \omega L)$

$\underline{v}_B = (-\omega L, -\frac{\omega L}{2})$ $/ (v_B = \frac{\sqrt{5}}{2} \omega L)$

①$_6$ ①$_7$

· SK4:

Momentanzentrum: M ①$_8$ (Nur Skizze auch gültig)

$\underline{v}_D = (-\omega_4 L, \frac{3}{2} \omega_4 L)$

SdpG: $\underline{v}_D \cdot \underline{DB} = \underline{v}_B \cdot \underline{DB}$ ①$_9$ Formel oder direkt $v_{Dx} \overset{!}{=} v_{Bx}$

$v_{Dx} \overset{!}{=} v_{Bx}$

$-\omega_4 L = -\omega L \Rightarrow \underline{\underline{\omega_4 = \omega}}$ ①$_{10}$

$(v_D = \frac{\sqrt{13}}{2} \omega L)$

$\rightarrow \underline{v}_D = (-\omega L, \frac{3}{2} \omega L)$

①$_{11}$ ①$_{12}$

①$_{13}$ ①$_{14}$ ①$_{15}$

$\underline{v}_F = (-2\omega L, 0)$ $\underline{v}_E = (0, \omega L)$ $(v_E = \omega L)$

$(v_F = 2\omega L)$ ①$_{16}$

· SK2:

Momentanzentrum: N ①$_{17}$

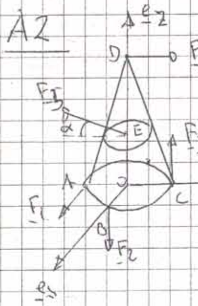
Rotationsschnelligkeit: $\omega_2 = 2\omega$ ①$_{18}$

· SK3:

Momentanzentrum: O ①$_{19}$

Rotationsschnelligkeit: $\underline{\omega_3 = 2\omega}$ ①$_{20}$

A2



a) $\underline{F}_1 = F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ①$_1$ $\underline{F}_5 = kF \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ -\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ ①$_5$ ①$_6$ $\underline{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} F$ ①$_2$

$\underline{F}_3 = F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ①$_3$ $\underline{F}_4 = F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ①$_4$

b) ①$_7$, Formel

$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 + \underline{F}_4 + \underline{F}_5 = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 - k\sin\alpha \\ 1 - k\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} F}}$ ①$_8$

①$_9$, Formel

$\underline{M}_O = \underline{r}_{OA} \times \underline{F}_1 + \underline{r}_{OB} \times \underline{F}_2 + \underline{r}_{OC} \times \underline{F}_3 + \underline{r}_{OD} \times \underline{F}_4 + \underline{r}_{OE} \times \underline{F}_5$

$\underline{M}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ rF \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ rF \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} rF \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -hF \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{h}{2} kF\cos\alpha \\ -\frac{h}{2} kF\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

①$_{10}$ ①$_{11}$ ①$_{12}$ ①$_{13}$ ①$_{14}$

$$\underline{\underline{\underline{M}_O = \begin{pmatrix} rF - hF + \frac{h}{2} kF\cos\alpha \\ rF - \frac{h}{2} Fk\sin\alpha \\ rF \end{pmatrix}}}$$

c) ①, Formel ①$_{16}$, kr ①$_{17}$

$\underline{M}_C = \underline{M}_O + \underline{r}_{CO} \times \underline{R} = \underline{M}_O + \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 - k\sin\alpha \\ 1 - k\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} rF - hF + \frac{h}{2} kF\cos\alpha \\ rF - \frac{h}{2} Fk\sin\alpha \\ rF + rF(1 - k\sin\alpha) \end{pmatrix}$

d) $\underline{R} = \underline{0}$, $\underline{M}_0 \neq \underline{0}$ ①$_{18}$

i) $1 - k\sin\alpha = 0$
$1 - k\cos\alpha = 0$ $\Big\}$ $\tan\alpha = 1$ $\underline{\underline{\alpha = 45^\circ}}$ ①$_{19}$ $\rightarrow \underline{\underline{k = \sqrt{2}}}$ ①$_{20}$

ii) Check: $\underline{M}_0$ mit $\alpha = 45^\circ$ ist ungleich Null!

- Bepunktung:

A1 ①$_1$: Die vier Sk erkannt (alle richtig markiert)
①$_2$: Momentanzentrum von Sk 1, richtig
mit ω
①$_3$: Richtige Anwendung der Formel $v = \omega \cdot r$
①$_4$, ①$_5$: v_C richtig / , oder v_C mit Richtung
①$_7$, ①$_6$: v_B richtig , "
①$_8$: Momentanzentrum Sk 4 richtig (nur in Skizze auch i. Ordnung)
①$_9$: Formel SdpG, auch implizit
①$_{10}$: ω_4 richtig
①$_{11}$, ①$_{12}$: v_D richtig, ①$_{13}$ ①$_{14}$: v_F richtig, ①$_{15}$ ①$_{16}$: v_E richtig
①$_{17}$: Momentanzentrum Sk 2, richtig (Skizze i.O.)
①$_{18}$: ω_2, richtig
①$_{19}$: Momentanzentrum Sk3, richtig (Skizze i.O.)
①$_{20}$: ω_3, richtig

A2: ①$_{1-4}$: Kraft $\underline{F}_i$ richtig (Betrag und Richtung)
①$_5$: Komponent der Kraft $\underline{F}_5$ in x-Rtg, richtig
①$_6$: " " " " " y-Rtg "

①$_7$: Formel $\underline{R} = \sum_i \underline{F}_i$
①$_8$: Resultierende $\underline{R}$, richtig
①$_9$: Formel, implizit auch gültig
①$_{10-14}$: Kompenten vom Moment $\hat{=}$ $\underline{M}_0$, alle richtig
①$_{15}$: Formel

①$_{16}$: Richtig eingesetzt, kr bzgl $\underline{R}$ ($\underline{r}_{0C}$ & $\underline{R}$)
①$_{17}$: Richtiges Moment $\underline{M}_C$
①$_{18}$: $\underline{R} = \underline{0}$ und $\underline{M}_0 \neq 0$
①$_{19}$: α, richtig
①$_{20}$: k, richtig

Klausur I : Lösung

Aufgabe 1 (12 Punkte)

a) Dyname $\{\underline{R}, \underline{M}_0\}$ ①$_1$ (oder wenn $\underline{R}$ und $\underline{M}_0$ gerechnet werden)

$$\underline{F_1} = F_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{F_2} = F_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

①$_2$ (beide)

$$\underline{F_3} = F_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

①$_3$

$$F_4 = F_4 \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

①$_4$

Resultierende $\underline{R} = \underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3} + \underline{F_4} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} F_4 \\ -F_2 - \frac{F_3}{2} - \frac{F_4}{2} \\ -F_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} F_3 \end{pmatrix}$ ①$_5$

Moment (bzg. O)

$$\underline{M_0} = \underline{r_{OP}} \times \underline{F_1} + \underline{r_{OG}} \times \underline{F_2} + \underline{r_{OB}} \times \underline{F_3} + \underline{r_{OI}} \times F_4 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} F_1 + \begin{pmatrix} \sqrt{3}a \\ -a \\ 2h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} F_2 + \begin{pmatrix} \sqrt{3}a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} F_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 2h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} F_4 =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{①_{6KR}} F_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} 2h \\ 0 \\ -\sqrt{3}a \end{pmatrix}}_{①_{7KR}} F_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ -\frac{3}{2}a \\ -\frac{\sqrt{3}e}{2} \end{pmatrix}}_{①_{8KR}} F_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} h \\ \sqrt{3}h \\ -\sqrt{3}e \end{pmatrix}}_{①_{9KR}} F_4 =$$

bzg. Kräfte (Richtige Ortvektoren)

$$= \begin{pmatrix} 2hF_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} a F_3 + hF_4 \\ -\frac{3}{2} a F_3 + \sqrt{3} h F_4 \\ -\sqrt{3} a F_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} a F_3 - \sqrt{3} a F_4 \end{pmatrix}$$ ①$_{10}$

<u>oder Moment bzg. Achsen</u>

$$\left.\begin{array}{lllll} M_x: & 0F_1 & +2hF_2 & +\frac{\sqrt{3}}{2}aF_3 & +hF_4 \\ M_y: & 0F_1 & +0F_2 & -\frac{3}{2}aF_3 & +\sqrt{3}hF_4 \\ M_z: & 0F_1 & -\sqrt{3}F_2 & -\frac{\sqrt{3}}{2}aF_3 & -\sqrt{3}aF_4 \end{array}\right\}$$ ①$_{10}$

①$_{6KR}$ ①$_{7KR}$ ①$_{8KR}$ ①$_{9KR}$

~~bzg~~. Kräfte

b) Kräftegruppe auf EinzelKraft reduzierbar $\Longleftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \text{i) } R \neq 0 \\ \text{ii) } I_2 = \underline{R} \cdot \underline{M_0} = 0 \end{array}\right\}$

①$_{11}$ formel

mit $F_1 = F_2 = F \quad F_3 = F_4 = 2F$

i) $\underline{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \\ -1+\sqrt{3} \end{pmatrix} F$ ✓

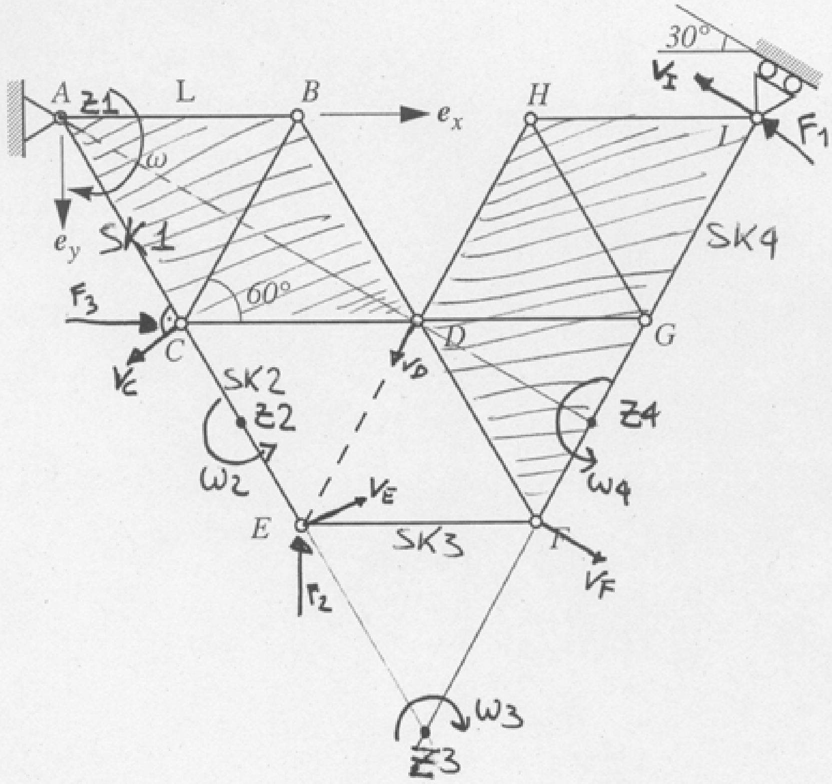
ii) $M_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}a + 4h \\ -3a + 2\sqrt{3}h \\ -4\sqrt{3}a \end{pmatrix} F$

$$\underline{I_2} = \underline{R} \cdot \underline{M_0} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \\ -1+\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}a + 4h \\ -3a + 2\sqrt{3}h \\ -4\sqrt{3}a \end{pmatrix} F^2 = \left(\cancel{3a} + 4\sqrt{3}h + \cancel{9a} - 6\sqrt{3}h + 4\sqrt{3}a - \cancel{12a}\right) F^2 \overset{!}{=} 0$$

$$(-2h + 4a)\sqrt{3}F^2 = 0 \qquad \underline{\underline{\frac{a}{h} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}}$$ ①$_{12}$

Aufgoben 2

a) Identifizieren alle SK ①$_1$



①$_2$ für Z1 ①$_3$ für Z4 ①$_4$ für Z3 ①$_5$ für Z2

b) $v_C = \omega L$ (+ Richtung gezeichnet) oder $\underline{v_C} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \omega L$ ①$_6$

$v_D = \sqrt{3}\,\omega L \overset{!}{=} \omega_4 \frac{\sqrt{3}}{2} L$ $\quad \omega_4 = 2\omega$ ①$_7$

$v_I = \frac{3}{2} L \omega_4 = 3\omega L$ (+ Richtung gezeichnet) oder $\underline{v_I} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} 3\omega L$ ①$_8$

$v_F = \frac{1}{2} L \omega_4 = \omega L$

$$\text{SdpG} \left\{ \begin{array}{ll} v_F' = v_F \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} L \omega = v_E' & (\text{bzg } EF) \\ v_C' = 0 = v_E' & (\text{bzg } CD) \end{array} \right\}$$ ①$_9$ idee

4/4

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} v_{Ex} \\ v_{Ey} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega L & \Rightarrow v_{Ex} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega L \\ \begin{pmatrix} v_{Ex} \\ v_{Ey} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 0 & \Rightarrow \frac{v_{Ex}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} v_{Ey} = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{v_E} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \omega L \quad \textcircled{1}_{10}$$

oder Variante

$\underline{v_C} \perp \underline{CE} \quad + \quad \text{SdpG (Stab CE)} \Rightarrow \underline{v_E} \perp \underline{CE}$ $\textcircled{1}_{9}$ idee

Z3 liegt in der Treffpunkt von CE ($\perp \underline{v_E}$) und GF ($\perp v_F$)

$v_E = \omega_3 L = \omega_4 \frac{L}{2} \Rightarrow v_E = \omega L$ (+ Richtung gezeichnet) $\textcircled{1}_{10}$

---

c) Leistung. mit $F_1 = F_2 = P \quad F_3 = \sqrt{3} P$

$$\mathcal{P} = \underline{F_1} \cdot \underline{v_I} + \underline{F_2} \cdot \underline{v_E} + \underline{F_3} \cdot \underline{v_C} = \quad \textcircled{1}_{11} \text{ formell}$$

$$= +F_1 \cdot 3L\omega + F_2 \cos 60\, L\omega - F_3 \cos 30\, \omega L =$$

$$= +3PL\omega + \frac{1}{2}PL\omega - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}PL\omega = \underline{\underline{2PL\omega}} \quad \textcircled{1}_{12}$$

oder Variante

$\textcircled{1}_{11}$ formell

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} P \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} 3\omega L + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \omega L + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} P \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \omega L =$$

$$= +3PL\omega + \frac{1}{2}P\omega L - \frac{3}{2}PL\omega = \underline{\underline{2PL\omega}} \quad \textcircled{1}_{12}$$

Klausur 1 - Lösung

Aufgabe 1

a) Bestimme die fehlenden Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes H!

Die Geschwindigkeiten von *D* und *E* können direkt aus der Zeichnung abgelesen werden:

$$\vec{v}_D = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ v \end{bmatrix} \text{ und } \vec{v}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix}$$

Um die fehlenden Komponenten von $\vec{v}_H$ bestimmen zu können, wenden wir den SdpG auf $\overline{HE}$ an:

$$\vec{v}_H \cdot \overrightarrow{HE} = \vec{v}_E \cdot \overrightarrow{HE}$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ a \end{bmatrix}$$

$$v_y a = va \Rightarrow v_y = v$$

Wir brauchen eine zusätzliche Gleichung! Deshalb wenden wir den SdpG auf $\overline{HD}$ an:

$$\vec{v}_H \cdot \overrightarrow{HD} = \vec{v}_D \cdot \overrightarrow{HD}$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-v_x a + va = va \Rightarrow v_x = 0$$

Zusammenfassend:

$$\vec{v}_H = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Bestimme die Kinemate im Punkt H!

Wir führen eine unbekannte Rotationsgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T$ ein:

$$\vec{v}_H = \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \overrightarrow{DH}$$

$$\begin{bmatrix}0\\v\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\v\\v\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}a\\-a\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\-v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\omega_z a\\\omega_z a\\-\omega_x a-\omega_y a\end{bmatrix} \Rightarrow \omega_z = 0$$

Wir brauchen wieder eine zusätzliche Gleichung:

$$\vec{v}_H = \vec{v}_E + \vec{\omega} \times \overrightarrow{EH}$$

$$\begin{bmatrix}0\\v\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\v\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\-a\\-a\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\v\\-v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\omega_y a\\\omega_x a\\-\omega_x a\end{bmatrix} \Rightarrow \omega_x = \frac{v}{a} \text{ und } \omega_y = 0$$

Kinemate:

$$\vec{v}_H = \begin{bmatrix}0\\v\\0\end{bmatrix} \text{ und } \vec{\omega} = \begin{bmatrix}\frac{v}{a}\\0\\0\end{bmatrix}$$

c) Handelt es sich um eine Translation, Rotation oder Schraubung?

Invarianten:

$$\vec{I}_1 = \vec{\omega} = \begin{bmatrix}\frac{v}{a}\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$I_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_E = \begin{bmatrix}\frac{v}{a}\\0\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\v\end{bmatrix} = 0$$

Diese starre Bewegung entspricht einer Rotation!

Variante

Alternativ können (a) und (b) wie folgt gelöst werden:

$$\vec{v}_E = \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \overrightarrow{DE}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_y a \\ \omega_z a - \omega_x a \\ -\omega_y a \end{bmatrix} \Rightarrow \omega_y = 0$$

Und:

$$\vec{v}_H = \vec{v}_E + \vec{\omega} \times \overrightarrow{EH}$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ -a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ -v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_z a \\ \omega_x a \\ -\omega_x a \end{bmatrix} \Rightarrow \omega_x = \frac{v}{a}$$

Daraus folgen:

$$v_y = v$$

$$\omega_z = 0$$

$$v_x = 0$$

Aufgabe 2

a) Bestimme die Invarianten der Dyname!

$$\vec{I_1} = \vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_1 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \vec{R} \cdot \overrightarrow{M_O} = 0$$

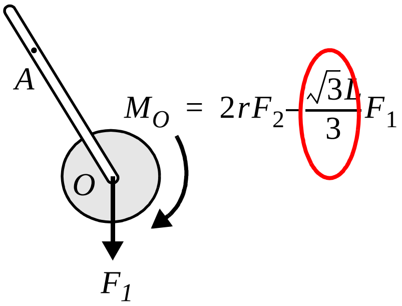
b) Die Kräftegruppe {G} ist statisch äquivalent zu einem/einer:

☐ Moment (Kräftepaar)

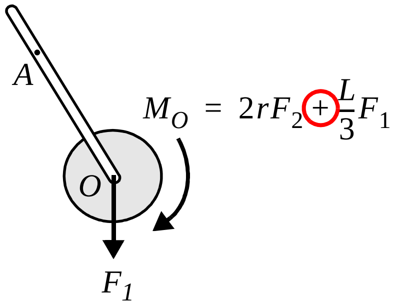
☒ Einzelkraft

☐ Schraube

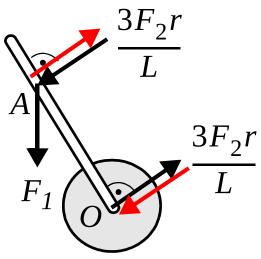
☐ Nullsystem



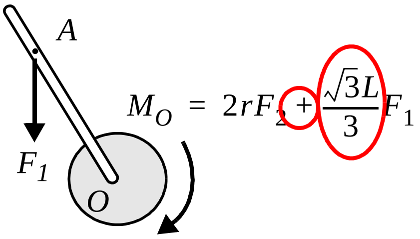
R: ☐ F: ☒



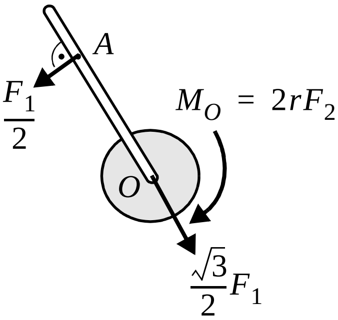
R: ☐ F: ☒



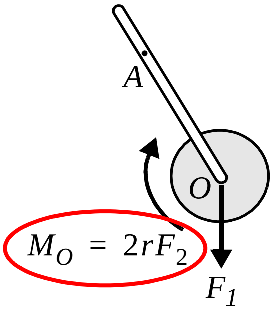
R: ☐ F: ☒



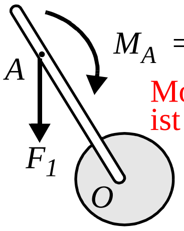
R: ☐ F: ☒



R: ☒ F: ☐

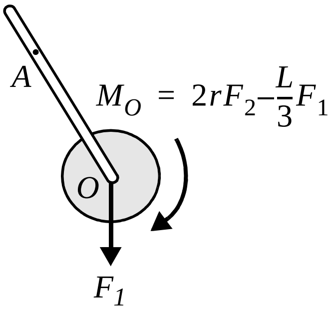


R: ☐ F: ☒

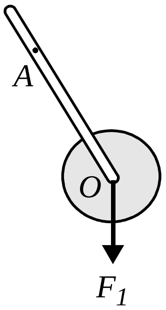


Moment eines Kräftepaars ist ortsunabhängig!

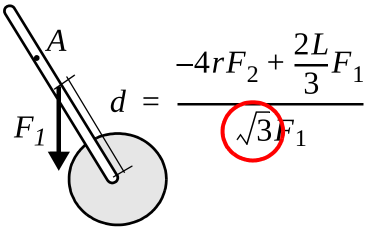
R: ☒ F: ☐



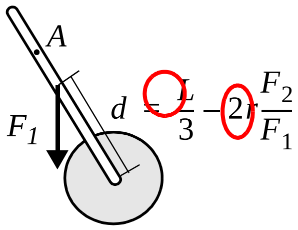
R: ☒ F: ☐



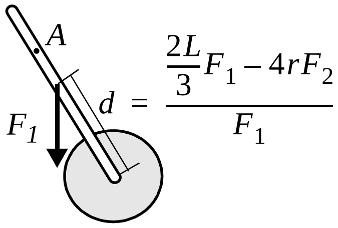
R: ☐ F: ☒



R: ☐ F: ☒



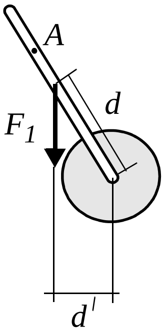
R: ☐ F: ☒



R: ☒ F: ☐

Berechnung von d:

$$|M| = |R|d' \rightarrow d' = \frac{|M|}{|R|} = \frac{\frac{L}{3}F_1 - 2rF_2}{F_1}$$



daraus folgt. $d = \dfrac{d'}{\cos 60} = 2d' = \dfrac{\frac{2L}{3}F_1 - 4rF_2}{F_1}$

Punktverteilung

Aufgabe 1

1.1 richtige $\vec{v}_D$ und $\vec{v}_E$

1.2 SdpG richtig aufgestellt für $\overline{\mathrm{HE}}$: $\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\a\\a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\v\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\a\\a\end{bmatrix}$ **[KR bzg.** $\vec{v}_E$**]**

1.3 SdpG richtig aufgestellt für $\overline{\mathrm{HD}}$: $\begin{bmatrix}v_x\\v\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-a\\a\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\v\\v\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-a\\a\\0\end{bmatrix}$ **[KR bzg.** $\vec{v}_D$ **]**

1.4 $v_x = 0$

1.5 $v_y = v$

1.6 $\begin{bmatrix}\boxed{0}\\0\\-v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{\omega_z a}\\\omega_z a\\-\omega_x a-\omega_y a\end{bmatrix}$ (aus $\vec{v}_H = \vec{v}_D + \vec{\omega}\times\overrightarrow{DH}$)

1.7 $\begin{bmatrix}0\\\boxed{0}\\-v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_z a\\\boxed{\omega_z a}\\-\omega_x a-\omega_y a\end{bmatrix}$

1.8 $\begin{bmatrix}0\\0\\\boxed{-v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_z a\\\omega_z a\\\boxed{-\omega_x a-\omega_y a}\end{bmatrix}$

1.9 $\begin{bmatrix}\boxed{0}\\v\\-v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{-\omega_y a}\\\omega_x a\\-\omega_x a\end{bmatrix}$ (aus $\vec{v}_H = \vec{v}_E + \vec{\omega}\times\overrightarrow{EH}$)

1.10 $\begin{bmatrix}0\\\boxed{v}\\-v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\omega_y a\\\boxed{\omega_x a}\\-\omega_x a\end{bmatrix}$

1.11 $\begin{bmatrix}0\\v\\\boxed{-v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\omega_y a\\\omega_x a\\\boxed{-\omega_x a}\end{bmatrix}$

1.12 $\omega_x = \frac{v}{a}$

1.13 $\omega_y = 0$

1.14 $\omega_z = 0$

1.15 $I_2 = \vec{\omega} \cdot \overrightarrow{v_E}$

1.16 Rotation

Aufgabe 2

1.1, 1.2 $\vec{I}_1 = \vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_1 \end{bmatrix}$

1.3 $I_2 = \vec{R} \cdot \overrightarrow{M_O} = 0$

1.4 ☐ Einzelkraft

1.5-1.16 siehe Musterlösung

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Zentrum für Mechanik

IMES
Institut für Mechanische Systeme

Mechanik GZ

für Geomatik- und Umweltingenieurwissenschaften

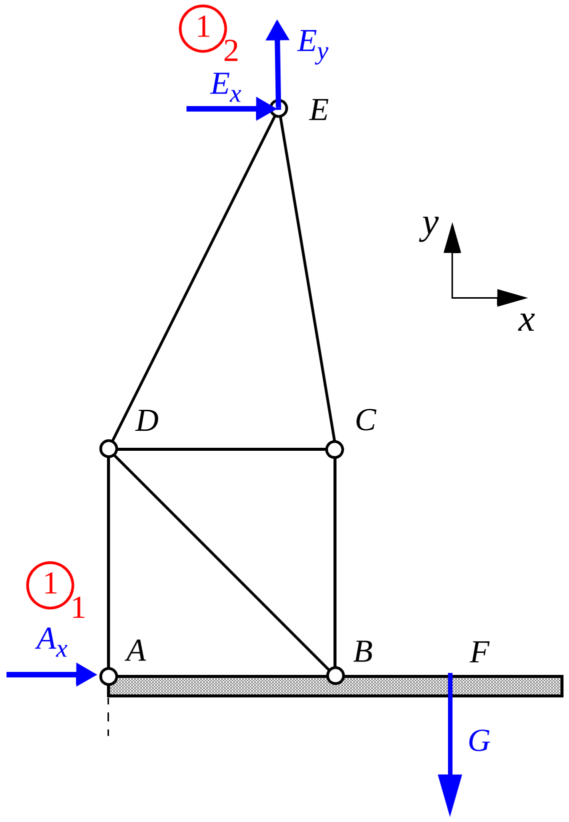
Klausur II

30. April 2008, 10^{15} - 11^{15}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Frühjahrssemester 2008**

Aufgabe 1 *(16 Punkte)*

a)

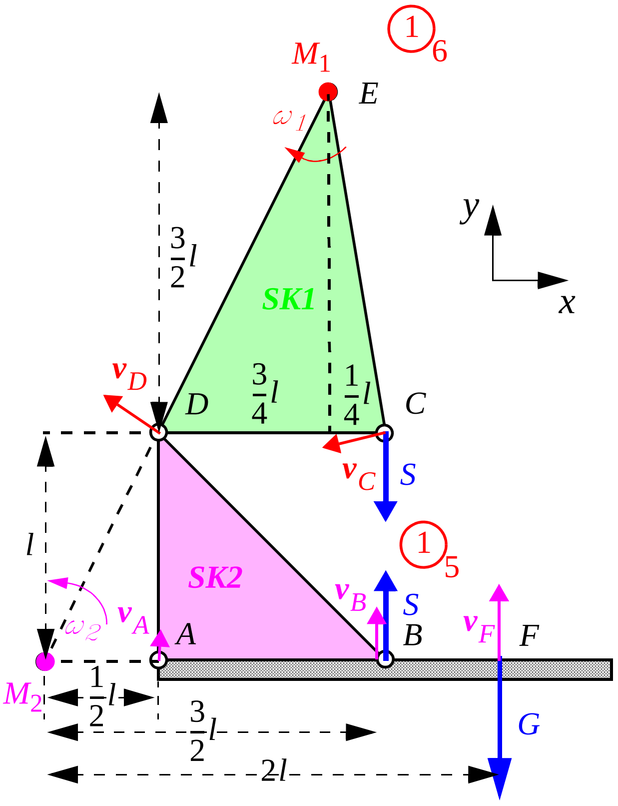


b)

$$\left.\begin{aligned} R_x:&\quad A_x + E_x = 0 \\ R_y:&\quad E_y - G = 0 \rightarrow E_y = G \\ M_E:&\quad \frac{5}{2} l A_x - \frac{3}{4} l G = 0 \end{aligned}\right] ①_3$$

$$A_x = \frac{3}{10} G \text{ und } E_x = -\frac{3}{10} G \quad ①_4$$

c)



[i] Stab entfernen, Stabkraft an beiden Knoten als Zugkraft einführen.

[ii] Bewegungszustand des entstandenen Mechanismus bestimmen: ω_1 in E eingeführt:

$$v_C = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\omega_1 l \\ -\frac{1}{4}\omega_1 l \end{bmatrix} ①_7 \quad \text{und} \quad v_D = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\omega_1 l \\ \frac{3}{4}\omega_1 l \end{bmatrix} ①_8$$

über die x-Komponente der Geschwindigkeit in D kann ω_2 berechnet werden.

$$v_{Dx} = -\frac{3}{2} l \omega_1 = -l\omega_2 \text{ , also } \omega_2 = \frac{3}{2}\omega_1 \text{.} ①_9$$

Die Position des Momentanzentrums M_2 kann graphisch bestimmt werden, oder durch Anwendung des Satzes der projizierten Geschwindigkeiten auf den Starrkörper *SK2*:

$$v_{Dy} = v_{Ay} = \frac{3}{4}l\omega_1 = \overline{M_2A}\omega_2 = \overline{M_2A}\frac{3}{2}\omega_1 \text{ und somit } \overline{M_2A} = \frac{1}{2}l.$$ ①$_{10}$

$$\boldsymbol{v}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}\omega_2 l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{9}{4}\omega_1 l \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 2l\omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3l\omega_1 \end{bmatrix}$$

①$_{11}$ ①$_{12}$

[iii] Prinzip der virtuellen Leistungen:

$$\wp = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{v}_F + \boldsymbol{S}_{BC}\cdot\boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{S}_{BC}\cdot\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}_E = 0$$ ①$_{13}$

$$\wp = \begin{bmatrix} 0 \\ -G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3l\omega_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ S_{BC} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{9}{4}\omega_1 l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -S_{BC} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\omega_1 l \\ -\frac{1}{4}\omega_1 l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_x \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{4}\omega_1 l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\wp = -3\omega_1 lG + \frac{9}{4}\omega_1 lS_{BC} + \frac{1}{4}\omega_1 lS_{BC} = 0$$ ①$_{14}$

d) [iv] nach der Stabkraft auflösen, Diskussion:

①$_{15}$ $S_{BC} = \frac{6}{5}G$ $\qquad$ $S_{BC} > 0 \Rightarrow$ Zugkraft ①$_{16}$

Punkteverteilung:

a) ①$_1$ - Reaktion $\boldsymbol{A_x}$ **und** $\boldsymbol{G}$ eingezeichnet (in einer Skizze ohne Lagerungen)

①$_2$ - Reaktionen $\boldsymbol{E_x}$ **und** $\boldsymbol{E_y}$ eingezeichnet (in einer Skizze ohne Lagerungen)

b) ①$_3^{KR}$ - 3 Gleichungen für Reaktionen und Momentbedingung konsequent richtig bezüglich Zeichnung

①$_4^{KR}$ - Reaktionen $\boldsymbol{E_x}$ **und** $\boldsymbol{A_x}$ konsequent richtig bezüglich Zeichnung

c) ①$_5$ - Stab entfernt, Stabkraft an beiden Knoten eingeführt

①$_6$ - Momentanzentrum M_1 richtig

①$_7$ - $\boldsymbol{v_C}$ richtig (beide Komponenten richtig **oder** Betrag und Richtung in der Skizze richtig eingezeichnet)

①$_8$ - $\boldsymbol{v_D}$ richtig (beide Komponenten richtig **oder** Betrag und Richtung in der Skizze richtig eingezeichnet)

①$_9$ - $\omega_2 = \frac{3}{2}\omega_1$

①$_{10}$ - Momentanzentrum M_2 richtig

①$_{11}$ - $\boldsymbol{v_B}$ richtig (beide Komponenten richtig **oder** Betrag und Richtung in der Skizze richtig eingezeichnet)

①$_{12}$ - $\boldsymbol{v_F}$ richtig (beide Komponenten richtig **oder** Betrag und Richtung in der Skizze richtig eingezeichnet)

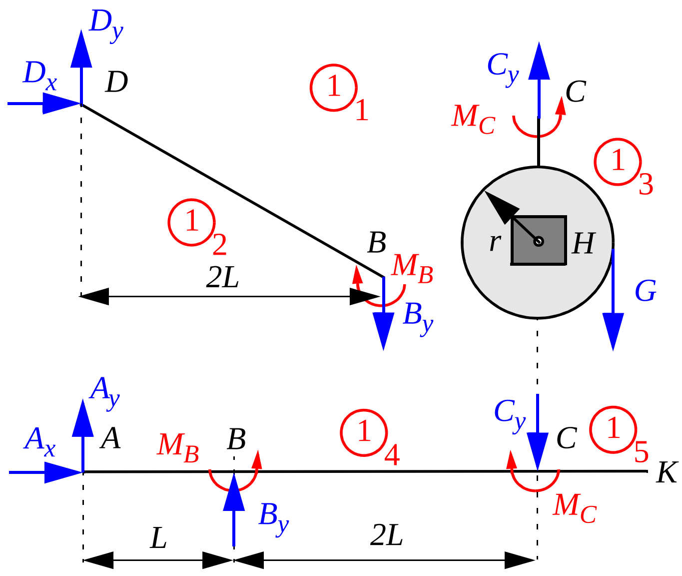
①$_{13}$ - PdvL: Summe der Leistungen gleich null gesetzt

①$_{14}$ - $\wp = -3\omega_1 lG + \frac{9}{4}\omega_1 lS_{BC} + \frac{1}{4}\omega_1 lS_{BC} = 0$ (richtige Geschwindigkeiten und Kräfte eingesetzt)

d) ①$_{15}$ - $S_{BC} = \frac{6}{5}G$ richtig (Betrag genügt)

①$_{16}$ - $S_{BC} > 0 \Rightarrow$ Zugkraft (Begründung richtig)

Aufgabe 2 *(14 Punkte)*



b) GGW Seilwinde:

[I] R_y: $C_y - G = 0$ ①$^{KR}_{6}$

[II] M_C: $M_C - \frac{1}{2}LG = 0$ ①$^{KR}_{7}$

c) GGW Stab *BD*:

[III] R_x: $D_x = 0$ ①$^{KR}_{8}$

[IV] R_y: $B_y - D_y = 0$

[V] M_D: $M_B + 2LB_y = 0$ ①$^{KR}_{9}$

GGW Kranschiene *AK*:

[VI] R_x: $A_x = 0$ ①$^{KR}_{10}$

[VII] R_y: $C_y - A_y - B_y = 0$

[VIII] M_A: $LB_y - 3LC_y - M_C + M_B = 0$ ①$^{KR}_{11}$

$$LB_y - 3LG - \frac{1}{2}LG - 2LB_y = 0$$

$B_y = -\frac{7}{2}G$ in [IV]: $D_y = -\frac{7}{2}G$, in [VII]: $A_y = \frac{9}{2}G$, in [V]: $M_B = 7LG$

①$_{12}$ ①$_{13}$ ①$_{14}$

Punkteverteilung:

a) ①$_1$ - eigene Skizze ohne Lagerungen
①$_2$ - Stab *BD* richtig freigeschnitten
①$_3$ - Seilwinde richtig freigeschnitten
①$_4$ - Kranschiene *AK* richtig freigeschnitten
①$_5$ - Prinzip actio-reactio in *B* und *C* richtig
b) ①$^{KR}_{6}$ - GGW Seilwinde konsequent richtig bezüglich Zeichnung
①$^{KR}_{7}$ - Momentenbedingung Seilwinde konsequent richtig bezüglich Zeichnung
c) ①$^{KR}_{8}$ - GGW Stab *BD* konsequent richtig bezüglich Zeichnung
①$^{KR}_{9}$ - Momentenbedingung Stab *BD* konsequent richtig bezüglich Zeichnung
①$^{KR}_{10}$ - GGW Kranschiene AK konsequent richtig bezüglich Zeichnung
①$^{KR}_{11}$ - Momentenbedingung Kranschiene konsequent richtig bezüglich Zeichnung
①$_{12}$ - $D_x = 0$ und $D_y = -\frac{7}{2}G$ -
①$_{13}$ - $A_x = 0$ und $A_y = \frac{9}{2}G$
①$_{14}$ - $B_y = -\frac{7}{2}G$ und $M_B = 7LG$

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

INSTITUT FÜR
MECHANISCHE SYSTEME

Mechanik GZ

Klausur II

29. April 2009, 10^{15} - 11^{15}

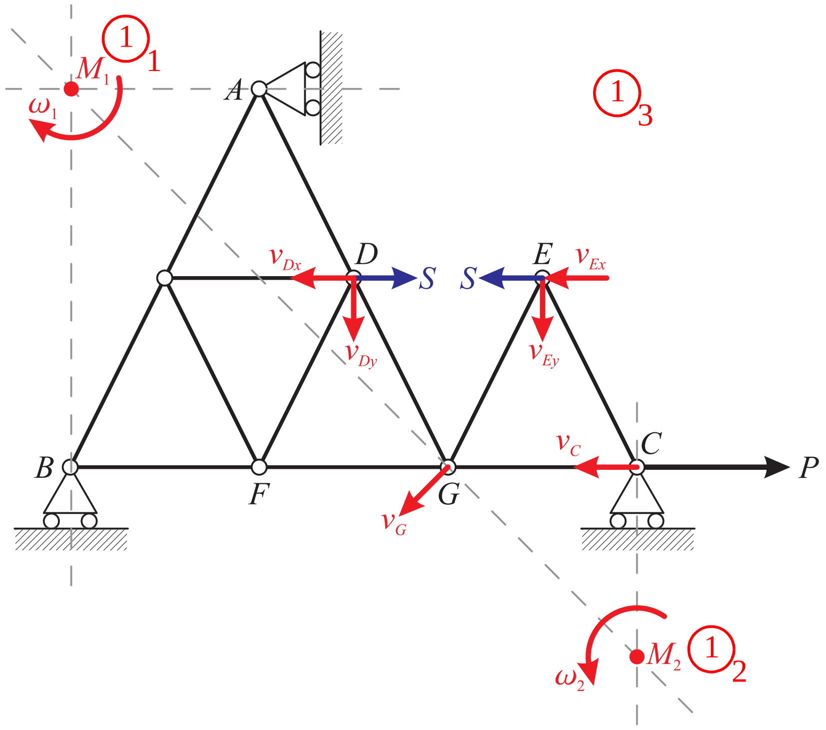
Dr. Stephan Kaufmann

Musterlösung

Frühjahrssemester 2009

Aufgabe 1 (16 Punkte)

a)



Schnelligkeiten:

$v_{Dx} = \omega_1 l$ ①$_4$

$v_{Ex} = \omega_2 2l$ ①$_5$

$v_C = \omega_2 l$ ①$_6$

Rotationsschnelligkeiten:

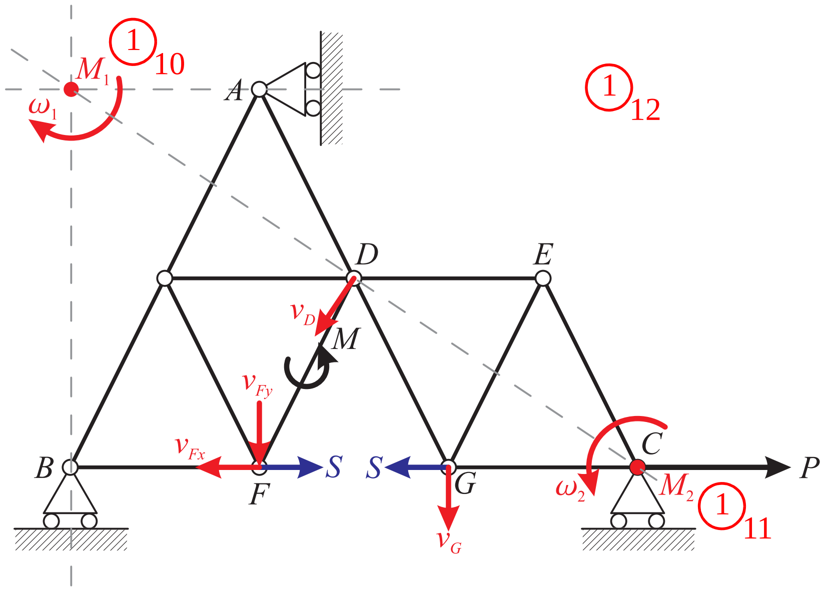
$\omega_1 l 2\sqrt{2} = v_G = \omega_2 l\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 2\omega_1$ ①$_7$

PdvL:

$\wp = -v_{Dx}S + v_{Ex}S - v_C P = -\omega_1 lS + 2\omega_1 2lS - 2\omega_1 lP = 3\omega_1 lS - 2\omega_1 lP \overset{!}{=} 0$ ①$^{KR}_8$

$S = \frac{2}{3}P \quad \Rightarrow \quad$ Zugstab ①$_9$

b)



Schnelligkeiten:

$v_{Fx} = \omega_1 2l$ ①$_{13}$

$v_G = \omega_2 l$

Rotationsschnelligkeiten:

$$\omega_1 l\frac{\sqrt{13}}{2} = v_D = \omega_2 l\frac{\sqrt{13}}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \omega_1$$

PdvL:

$$\wp = -v_{Fx}S - \omega_1 M = -\omega_1 2lS - \omega_1 M \overset{!}{=} 0$$ ①$^{KR}_{14}$

$$S = -\frac{M}{2l} \quad \Rightarrow \quad \text{Druckstab}$$ ①$^{KR}_{16}$

①$_{15}$

①$_{1}$ Momentanzentrum M_1 richtig.

①$_{2}$ Momentanzentrum M_2 richtig.

①$_{3}$ Skizze komplett richtig.

①$_{4}$ Schnelligkeit $v_{Dx} = \omega_1 l$ richtig.

①$_{5}$ Schnelligkeit $v_{Ex} = \omega_2 2l$ richtig.

①$_{6}$ Schnelligkeit $v_C = \omega_2 l$ richtig.

①$_{7}$ Rotationsschnelligkeit $\omega_2 = 2\omega_1$ richtig.

①$^{KR}_{8}$ PdvL konsequent richtig eingesetzt.

①$_{9}$ Ergebnis $S = \frac{2}{3}P$ und Zugstab richtig.

①$_{10}$ Momentanzentrum M_1 richtig.

①$_{11}$ Momentanzentrum M_2 richtig.

①$_{12}$ Skizze komplett richtig.

①$_{13}$ Schnelligkeit $v_{Fx} = \omega_1 2l$ richtig.

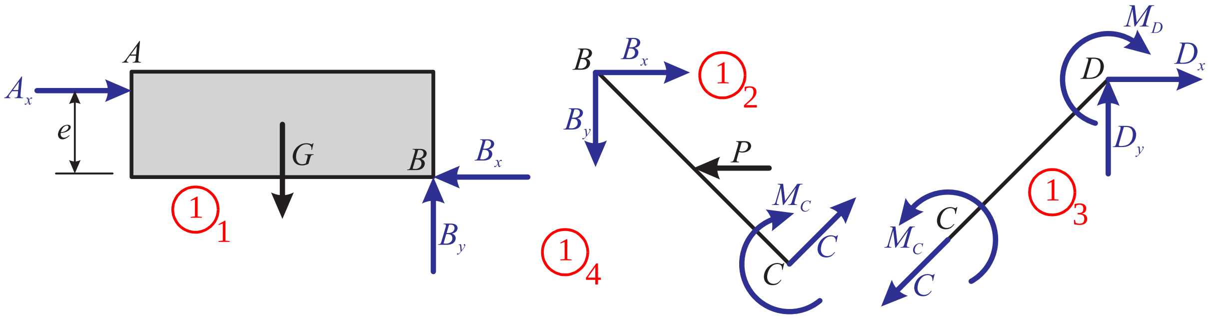
①$^{KR}_{14}$ PdvL konsequent richtig eingesetzt.

①$_{15}$ Ergebnis $S = -\frac{M}{2l}$ richtig

①$^{KR}_{16}$ Druckstab konsequent richtig bezüglich Ergebnis.

Aufgabe 2 *(16 Punkte)*

a) Freischneiden:



Platte:

KB(x): $A_x - B_x \;=\; 0$ (I)

KB(y): $B_y - G \;=\; 0$ (II) $\textcircled{1}^{KR}_{5}$

MB(B): $\frac{b}{2}G - eA_x \;=\; 0$ (III) $\textcircled{1}^{KR}_{6}$

Stab BC:

KB(x): $B_x - P + \frac{\sqrt{2}}{2}C \;=\; 0$ (IV)

$\textcircled{1}^{KR}_{7}$

KB(y): $B_y - \frac{\sqrt{2}}{2}C \;=\; 0$ (V)

MB(B): $lC - M_C - \frac{\sqrt{2}}{4}lP \;=\; 0$ (VI) $\textcircled{1}^{KR}_{8}$

Stab CD:

KB(x): $\frac{\sqrt{2}}{2}C - D_x \;=\; 0$ (VII)

$\textcircled{1}^{KR}_{9}$

KB(y): $\frac{\sqrt{2}}{2}C - D_y \;=\; 0$ (VIII)

MB(D): $M_C - M_D \;=\; 0$ (IX) $\textcircled{1}^{KR}_{10}$

aus (II): $B_y \;=\; G$ (X)

aus (V) mit (X): $C \;=\; \sqrt{2}B_y \;=\; \sqrt{2}G$ (XI)

aus (IV) mit (XI): $B_x \;=\; P - G$ (XII)

aus (I) mit (XII): $A_x \;=\; B_x \;=\; P - G$ (XIII)

aus (VII) mit (XI): $D_x \;=\; \frac{\sqrt{2}}{2}C \;=\; G$ (XIV) aus (VIII) mit (XI): $D_y = \frac{\sqrt{2}}{2}C = G$ (XV)

aus (VI) mit (XI): $M_C = lC - \frac{\sqrt{2}}{4}lP = \sqrt{2}l\left(G - \frac{1}{4}P\right)$ (XVI)

aus (IX) mit (XVI): $M_D = M_C = \sqrt{2}l\left(G - \frac{1}{4}P\right)$ (XVII)

aus (III) mit (XIII): $e = \frac{bG}{2A_x} = \frac{bG}{2(P-G)}$ (XVIII)

Lager in A: $A_x = P - G$

Bemerkung: $A_x > 0$ *gemäss Voraussetzung* $P > G$. ①$_{11}$

Lager in B: $B_x = P - G$ und $B_y = G$

Lager in C: $C = \sqrt{2}G$ und $M_C = \sqrt{2}l\left(G - \frac{1}{4}P\right)$ ①$_{12}$

Lager in D: $D_x = D_y = G$ und $M_D = \sqrt{2}l\left(G - \frac{1}{4}P\right)$ ①$_{13}$

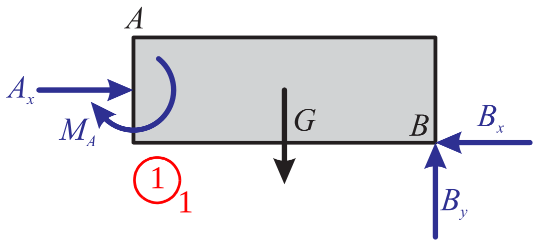
b) Platte kippt nicht für $e < a$:

Angriffspunkt der Normalkraft A_x: $e = \frac{bG}{2(P-G)}$ ①$_{14}$

daraus folgt $\frac{bG}{2(P-G)}$ ①$^{KR}_{15}$ $< a$ also muss gelten $\frac{a}{b} > \frac{G}{2(P-G)}$ ①$_{16}$

Bemerkung: $e > 0$ *gemäss Voraussetzung* $P > G$.

Alternativ kann die Platte auch folgendermassen freigeschnitten werden:



MB(B): $\frac{b}{2}G - \frac{a}{2}A_x - M_A = 0$ (III) ①$^{KR}_{6}$

aus (III) mit (XIII): $M_A = \frac{b}{2}G - \frac{a}{2}(P-G)$ ①$_{14}$

Platte kippt nicht für $M_A < \frac{a}{2}A_x$:

daraus folgt $\frac{b}{2}G - \frac{a}{2}(P-G) < \frac{a}{2}(P-G)$ ①$^{KR}_{15}$ also muss gelten $\frac{a}{b} > \frac{G}{2(P-G)}$ ①$_{16}$

Bemerkung: $M_A > 0$ *gemäss Voraussetzung* $P > G$

①$_{1}$ Platte richtig freigeschnitten.

①$_{2}$ Stab *BC* richtig freigeschnitten.

①$_{3}$ Stab *CD* richtig freigeschnitten.

①$_{4}$ Actio-Reactio richtig.

①$^{KR}_{5}$ Platte KB(*x*) und KB(*y*) konsequent richtig bezüglich Zeichnung.

①$^{KR}_{6}$ Platte MB konsequent richtig bezüglich Zeichnung.

①$^{KR}_{7}$ Stab *BC* KB(*x*) und KB(*y*) konsequent richtig bezüglich Zeichnung.

①$^{KR}_{8}$ Stab *BC* MB konsequent richtig bezüglich Zeichnung.

①$^{KR}_{9}$ Stab *CD* KB(*x*) und KB(*y*) konsequent richtig bezüglich Zeichnung.

①$^{KR}_{10}$ Stab *CD* MB konsequent richtig bezüglich Zeichnung.

①$_{11}$ Lager in *A* und *B* richtig: $A_x = P - G$; $B_x = P - G$ und $B_y = G$.

①$_{12}$ Lager in *C* richtig: $C = \sqrt{2}G$ und $M_C = \sqrt{2}l\left(G - \frac{1}{4}P\right)$.

①$_{13}$ Lager in *D* richtig: $D_x = D_y = G$ und $M_D = \sqrt{2}l\left(G - \frac{1}{4}P\right)$.

①$_{14}$ Angriffspunkt der Normalkraft A_x bzw. Lagermoment M_A richtig.

①$^{KR}_{15}$ Kippbedingung konsequent richtig eingesetzt.

①$_{16}$ Verhältnis für kein Kippen $\frac{a}{b} > \frac{G}{2(P-G)}$ richtig.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für
Mechanische Systeme

Mechanik GZ

Klausur II

5. Mai 2010, 10^{15} - 11^{15}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Frühjahrssemester 2010**

Aufgabe 1 (25 Punkte)

a) Die KB's und die MB um das Lager sind (es sind nur die benötigten aufgeführt):

Rolle 2:

KB(y): $F_1 + F_2 + F_3 = S_2$ ①$_4$

MB: $F_1 = F_3$

Rolle 1:

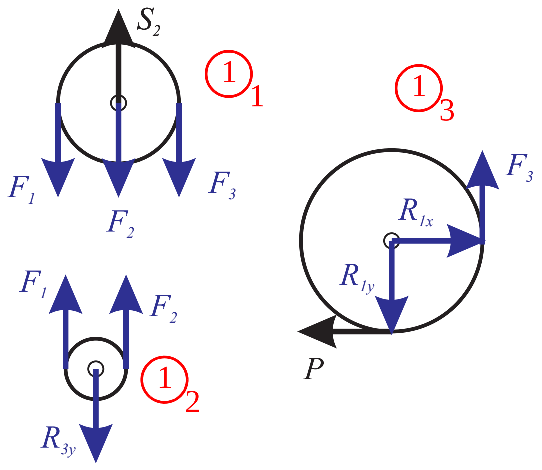
MB: $F_1 = F_2$ ①$_5$

Rolle 3:

MB: $P = F_3$

Daraus folgt: $S_2 = 3P$ ①$_6$

Alternativer Lösungsweg: PdvL (siehe Seite 7)



b)

Die Gleichgewichtsbedingungen sind (Skizze siehe nächstes Blatt):

Turm:

①$^{KR}_{10}$ KB(x): $B_x + D_x + E_x = 0$ I)

①$^{KR}_{11}$ KB(y): $B_y + C_y + D_y + E_y = 0$ II)

①$^{KR}_{12}$ MB(D,z): $-\frac{L}{4}E_y - \frac{L}{2}B_y + 4LB_x = 0$ III)

Stab:

KB(x): $-E_x + \frac{\sqrt{3}}{2}S_1 = 0$ IV) ①$^{KR}_{13}$

KB(y): $-E_y - S_2 - \frac{1}{2}S_1 = 0$ V) ①$^{KR}_{14}$

MB(E,z): $\frac{1}{2}lS_2 - \frac{1}{2}lS_1 = 0$ VI) ①$^{KR}_{15}$

Ausleger:

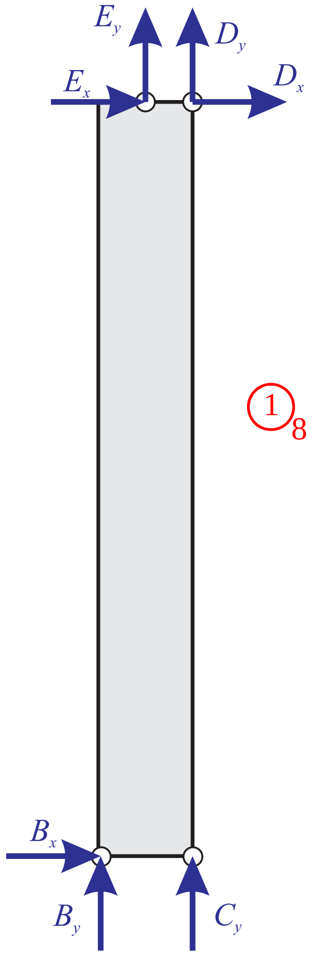
KB(x): $-D_x - \frac{\sqrt{3}}{2}S_1 = 0$ VII) ①$^{KR}_{16}$

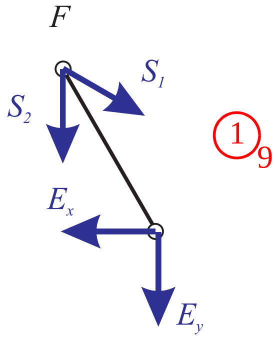
KB(y): $-D_y + \frac{1}{2}S_1 - G = 0$ VIII) ①$^{KR}_{17}$

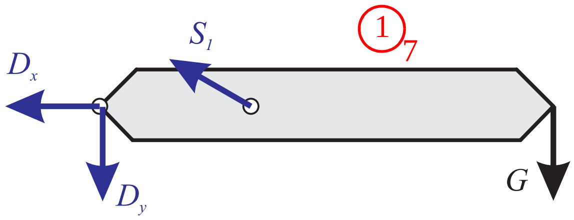
MB(D,z): $-3LG + \frac{1}{2}S_1L = 0$ IX) ①$^{KR}_{18}$

Aus IX) folgt: $S_1 = 6G$. Aus VI) und dem Resultat aus a) folgt: $P = 2G$. ①$_{19}$

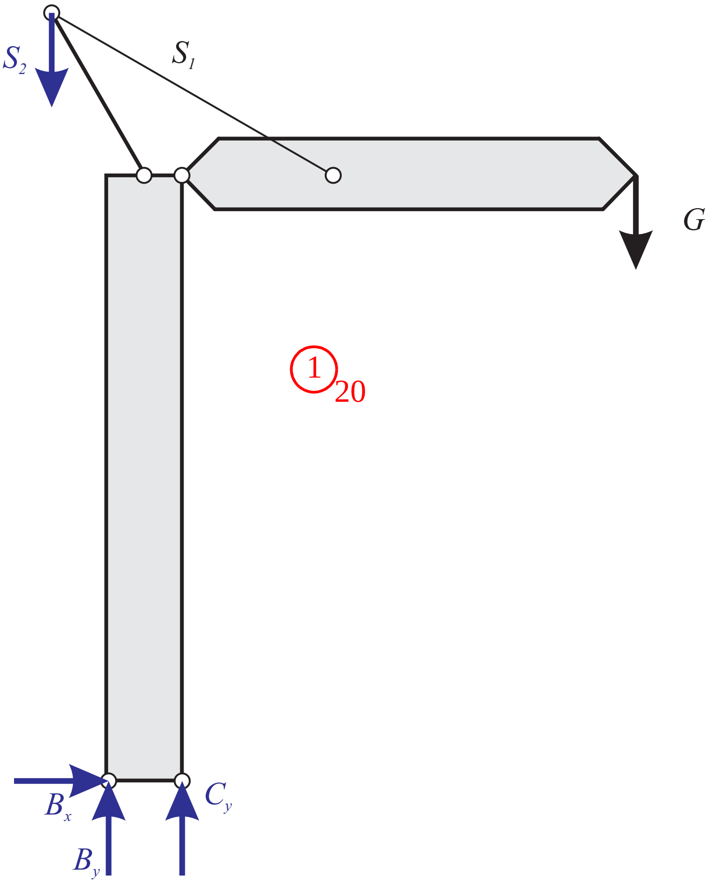
Mit dem Hinweis $S_2 = P$ würde sich $P = 6G$ ergeben.


Ey
Dy
Ex
Dx
①8
Bx
By
Cy


F
S1
S2
①9
Ex
Ey


S1
①7
Dx
Dy
G

c) Um die Lagerkräfte zu berechnen schneidet man den Kran als Gesamtsystem nochmals frei.



①$_{20}$

Die Gleichgewichtsbedingungen sind:

KB(x): $B_x \;=\; 0$

KB(y): $B_y + C_y - S_2 - G \;=\; 0$

MB(B,z): $\frac{1}{2}LC_y - \frac{7}{2}LG + \frac{3}{8}LS_2 \;=\; 0$ ③$_{21\text{-}23}$

Mit den Resultaten aus a) und b) folgt $S_2 \;=\; 6G$

Daraus: $C_y \;=\; \frac{5}{2}G$ und $B_y \;=\; \frac{9}{2}G$.

①$_{24}$ ①$_{25}$

Alternativer Lösungsweg: Auflösen der Gleichungen:

Aus IV), VII) und I) folgt: $B_x \;=\; 0$. ②$_{20\text{-}21}$

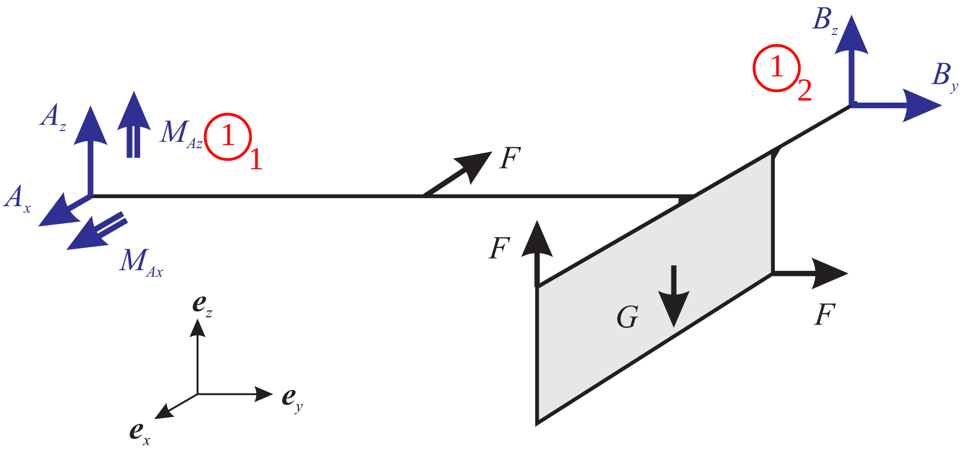
Aus V) und III) folgen dann: $B_y \;=\; \frac{9}{2}G$. ②$_{22\text{-}23}$

Aus VIII) und II) folgt: $C_y \;=\; \frac{5}{2}G$. ②$_{24\text{-}25}$

①$_{1}$	Rolle 2 richtig freigeschnitten
①$_{2}$	Rolle 3 richtig freigeschnitten
①$_{3}$	Rolle 1 richtig freigeschnitten
①$_{4}$	KB richtig
①$_{5}$	Alle drei MBs richtig
①$_{6}$	Beziehung für S_2 richtig
①$_{7}$	Ausleger richtig freigeschnitten
①$_{8}$	Turm richtig freigeschnitten
①$_{9}$	Stab richtig freigeschnitten
①$^{KR}_{10}$	KB(x) k.r. zur Zeichnung
①$^{KR}_{11}$	KB(y) k.r. zur Zeichnung
①$^{KR}_{12}$	MB k.r. zur Zeichnung
①$^{KR}_{13}$	KB(x) k.r. zur Zeichnung
①$^{KR}_{14}$	KB(y) k.r. zur Zeichnung
①$^{KR}_{15}$	MB k.r. zur Zeichnung
①$^{KR}_{16}$	KB(x) k.r. zur Zeichnung
①$^{KR}_{17}$	KB(y) k.r. zur Zeichnung
①$^{KR}_{18}$	MB k.r. zur Zeichnung
①$_{19}$	Beziehung für P richtig
①$_{20}$	Resultat für B_x richtig
③$_{21\text{-}23}$	GGB richtig. -1 pro falsche
①$_{24}$	Resultat für C_y richtig
①$_{25}$	Resultat für B_y richtig

Aufgabe 2 *(14 Punkte)*

a)



b) Die Gleichgewichtsbingungen sind:

KB(x): $A_x - F = 0$ ①$^{KR}_{3}$ MB(A,x): $M_{Ax} + 4LF + 4LB_z - 4LG + LF = 0$ ①$^{KR}_{6}$

KB(y): $F + B_y = 0$ ①$^{KR}_{4}$ MB(A,y): $-2LF + \frac{1}{2}LG + 2LB_z = 0$ ①$^{KR}_{7}$

KB(z): $A_z + F - G + B_z = 0$ ①$^{KR}_{5}$ MB(A,z): $M_{Az} + 2LF - 2LB_y - LF = 0$ ①$^{KR}_{8}$

c) Daraus ergeben sich der Reihe nach:

$A_x = F$, $B_y = -F$, ①$_9$ ①$_{10}$

$B_z = -\frac{1}{4}G + F$, $A_z = \frac{5}{4}G - 2F$ ①$_{11}$ ①$_{12}$

$M_{Ax} = -9LF + 5LG$, $M_{Az} = -3LF$ ①$_{13}$ ①$_{14}$

$①_{1}$ Lager bei *A* richtig freigeschnitten

$①_{2}$ Lager bei *B* richtig freigeschnitten

$①^{KR}_{3}$ KB(x) k.r. zur Zeichnung

$①^{KR}_{4}$ KB(y) k.r. zur Zeichnung

$①^{KR}_{5}$ KB(z) k.r. zur Zeichnung

$①^{KR}_{6}$ MB(x) k.r. zur Zeichnung

$①^{KR}_{7}$ MB(y) k.r. zur Zeichnung

$①^{KR}_{8}$ MB(z) k.r. zur Zeichnung

$①_{9}$ Lagerkraft richtig

$①_{10}$ Lagerkraft richtig

$①_{11}$ Lagerkraft richtig

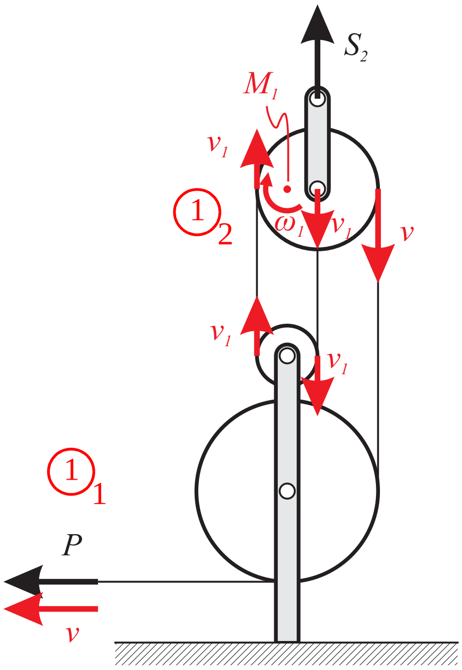
$①_{12}$ Lagerkraft richtig

(-1) wenn nicht in Funktion von *F*

$①_{13}$ Lagermoment richtig (in Funktion von *F*)

$①_{14}$ Lagermoment richtig (in Funktion von *F*)

Alternativer Lösungsweg Aufgabe 1a)



Einführung der Geschwindigkeit v beim Angriffspunkt von P.

$$\omega_1 = \frac{2v}{3R}$$ ①$^{KR}_{3}$

$$v_1 = \frac{1}{2}R\omega_1 = \frac{v}{3}$$ ①$^{KR}_{4}$

$$\wp = Pv - S_2\frac{v}{3} = 0$$ ①$^{KR}_{5}$

Daraus folgt:

$$S = 3P$$ ①$_{6}$

①$_1$ Einführen eines zulässigen Bewegungszustands

①$_2$ Momentanzentrum der Rolle 2 Richtig

①$^{KR}_3$ ω_1 k.r.

①$^{KR}_4$ Beziehung für v_1 k.r.

①$^{KR}_5$ Formel für Leistung k.r. angewendet

①$_6$ Resultat richtig

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Zentrum für Mechanik

IMES
Institut für Mechanische Systeme

Technische Mechanik

für D-ITET

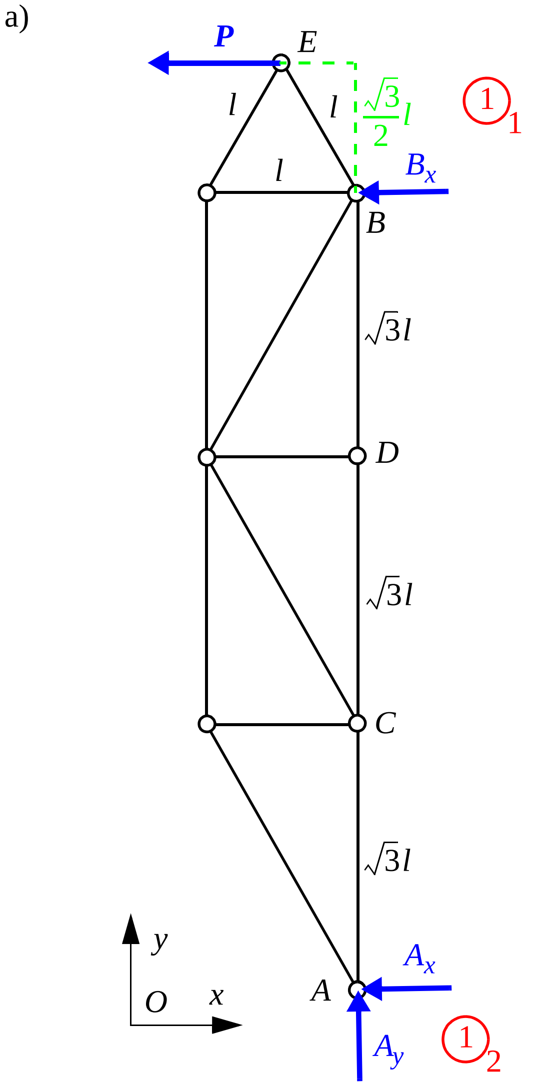
Klausur II

20. November 2007, 9^{15} - 10^{00}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Herbstsemester 2007**

Aufgabe 1 (15 Punkte)

a)



b)

$$R_x:\ A_x + B_x + P = 0$$

$$R_y:\ A_y = 0$$

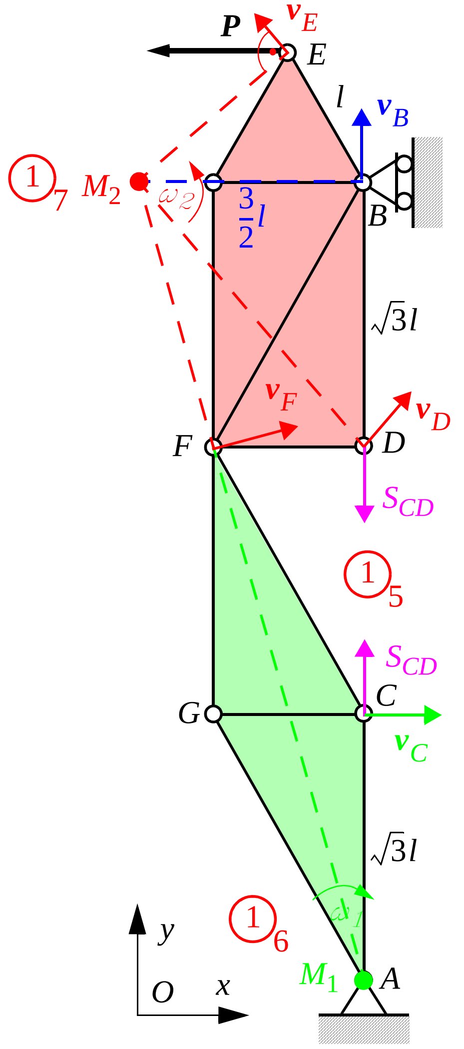
$$M_B:\ \frac{\sqrt{3}}{2}lP - 3\sqrt{3}lA_x = 0$$

①$_3$

$$A_x = \frac{P}{6} \quad \text{und } B_x = -\frac{7P}{6}$$

①$_4$

c)



[i] Stab entfernen, Stabkraft an beiden Knoten als Zugkraft einführen.
[ii] Bewegungszustand des entstandenen Mechanismus bestimmen: ω_1 in A eingeführt:

$$\mathbf{v}_F = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3}\omega_1 l \\ \omega_1 l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}\omega_2 l \\ \frac{\omega_2 l}{2} \end{bmatrix}$$ ①$_8$

, oder als Betrag:

①$_9$

$$v_F = \sqrt{13}\omega_1 l = \frac{\sqrt{13}}{2}\omega_2 l, \text{ daher } \omega_2 = 2\omega_1$$

$$\boldsymbol{v}_E = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_2 l \\ \omega_2 l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}\omega_1 l \\ 2\omega_1 l \end{bmatrix}$$ ①$_{10}$ $$\boldsymbol{v}_D = \begin{bmatrix} \sqrt{3}\omega_2 l \\ \frac{3}{2}\omega_2 l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3}\omega_1 l \\ 3\omega_1 l \end{bmatrix}$$ ①$_{11}$ $$\boldsymbol{v}_C = \begin{bmatrix} \sqrt{3}\omega_1 l \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Beträge: $v_E = \sqrt{7}\omega_1 l$, $v_D = \sqrt{21}\omega_1 l$ und $v_C = \sqrt{3}\omega_1 l$)

[iii] PdvL:

$$\wp = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{S}_{CD}\cdot\boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{S}_{CD}\cdot\boldsymbol{v}_C = 0$$ ①$_{12}$

$$\wp = \begin{bmatrix} -P \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\sqrt{3}\omega_1 l \\ 2\omega_1 l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -S_{CD} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\sqrt{3}\omega_1 l \\ 3\omega_1 l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ S_{CD} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3}\omega_1 l \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\wp = P\sqrt{3}\omega_1 l - S_{CD}3\omega_1 l = 0$$ ①$_{13}$

[iv] nach der Stabkraft auflösen, Diskussion:

①$_{14}$ $$S_{CD} = \frac{P}{\sqrt{3}}$$ $S_{CD} > 0 \Rightarrow$ Zugkraft ①$_{15}$

Punkteverteilung:

①$_{1}$ - Reaktion $\boldsymbol{B_x}$ **und** $\boldsymbol{P}$ eingezeichnet (in einer Skizze ohne Lagerungen)

①$_{2}$ - Reaktionen $\boldsymbol{A_x}$ **und** $\boldsymbol{A_y}$ eingezeichnet (in einer Skizze ohne Lagerungen)

①$_{3}$ - 3 Gleichungen für Reaktionen und Momentbedingung richtig

①$_{4}$ - Reaktionen $\boldsymbol{A_x}$**,** $\boldsymbol{A_y}$ **und** $\boldsymbol{B_x}$ richtig**.**

①$_{5}$ - Stab entfernt, Stabkraft an beiden Knoten eingeführt

①$_{6}$ - Momentanzentrum M_1 richtig

①$_{7}$ - Momentanzentrum M_2 richtig

①$_{8}$ - $\boldsymbol{v_F}$ richtig (beide Komponenten richtig **oder** Betrag und Richtung in der Skizze richtig eingezeichnet.

①$_{9}$ - $\omega_2 = 2\omega_1$ (wird Punkt 9 gegeben, so wird Punkt 8 automatisch auch gegeben, sofern $\boldsymbol{v_F}$ nicht falsch)

①$_{10}$ - $\boldsymbol{v_E}$ richtig (beide Komponenten richtig **oder** Betrag und Richtung in der Skizze richtig eingezeichnet,
oder nur v_{Ex} richtig)

①$_{11}$ - $\boldsymbol{v_D}$ richtig (beide Komponenten richtig **oder** Betrag und Richtung in der Skizze richtig eingezeichnet,
oder nur v_{Dy} richtig)

①$_{12}$ - PdvL: Summe der Leistungen gleich null gesetzt

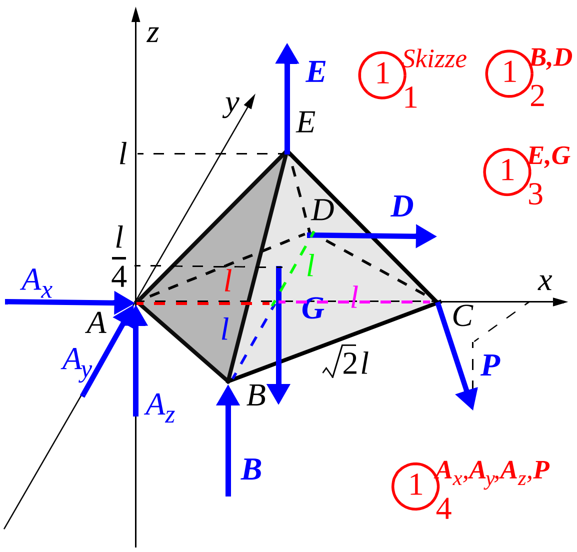
①$_{13}$ - $\wp = P\sqrt{3}\omega_1 l - S_{CD}3\omega_1 l = 0$ (richtige Geschwindigkeiten und Kräfte eingesetzt)

①$_{14}$ - $S_{CD} = \frac{P}{\sqrt{3}}$ richtig (Betrag genügt)

①$_{15}$ - $S_{CD} > 0 \Rightarrow$ Zugkraft (Begründung richtig)

Aufgabe 2 *(15 Punkte)*

a)



$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} F \\ -F \\ -F \end{bmatrix}$$

b) 6 Unbekannte und
6 (linear unabhängige) Gleichungen ①$_{5}$

daher statisch bestimmt. ①$_{6}$

c)

[I] R_x: $D + A_x + F = 0$

[II] R_y: $A_y - F = 0$ ①$^{KR}_{7}$

[III] R_z: $B + A_z + E - G - F = 0$

$$\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{r}_{AD} \times \boldsymbol{D} + \boldsymbol{r}_{AE} \times \boldsymbol{E} + \boldsymbol{r}_{AB} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{r}_{AG} \times \boldsymbol{G} + \boldsymbol{r}_{AC} \times \boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{M}_A = \begin{bmatrix} l \\ l \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ l \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l \\ -l \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ \frac{l}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F \\ -F \\ -F \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{M}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -lD \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -lE \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -lB \\ -lB \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ lG \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2lF \\ -2lF \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

[IV] M_{Ax}: $B = 0$ ①$^{KR}_{8}$

[V] M_{Ay}: $G + 2F - E - B = 0$ ①$^{KR}_{9}$

[VI] M_{Az}: $D + 2F = 0$ ①$^{KR}_{10}$

[VI] $D = -2F$ ①$_{11}$

D in [I] $A_x = F$

B und D in [V] $E = 2F + G$ ①$_{12}$

B und E in [III] $A_z = -F$ ①$_{13}$

und aus [II] $A_y = F$

d) Damit das Seil in E gespannt bleibt, muss $E > 0$, also $2F + G > 0$ und somit $F > -\frac{G}{2}$.

①$_{14}$ ①$_{15}$

Punkteverteilung:

①$^{\mathit{Skizze}}_{1}$ - eigene Skizze ohne Lagerungen

①$^{\boldsymbol{B,D}}_{2}$ - Lagerungen in B, D durch die entsprechenden Reaktionen ersetzt und in der Skizze eingezeichnet.

①$^{\boldsymbol{E,G}}_{3}$ - Lagerung in E durch die entsprechende Reaktion ersetzt und in der Skizze eingezeichnet **und *G*** auf der Wirkungslinie richtig eingezeichnet (i.e. Zentrum der Pyramide, Angriffspunkt muss nicht im Schwerpunkt liegen)

①$^{\boldsymbol{A_x,A_y,A_z,P}}_{4}$ - Lagerung in A durch die entsprechende Reaktion ersetzt **und *P*** in C richtig eingezeichnet

①$_{5}$ - Begründung 6 Unbekannte, 6 (linear unabhängige) Gleichungen

①$_{6}$ - statisch bestimmt (wird nur gegeben, sofern Punkt 5 gegeben wurde)

①$^{\mathrm{KR}}_{7}$ - Gleichgewichte in x **und** y **und** z bezüglich der Zeichnung konsequent richtig aufgestellt. Vorzeichen müssen stimmen.

①$^{\mathrm{KR}}_{8}$ - Momentenbedingung in x bezüglich der Zeichnung konsequent richtig aufgestellt. Vorzeichen müssen stimmen.

①$^{\mathrm{KR}}_{9}$ - Momentenbedingung in y bezüglich der Zeichnung konsequent richtig aufgestellt. Vorzeichen müssen stimmen.

①$^{\mathrm{KR}}_{10}$ - Momentenbedingung in z bezüglich der Zeichnung konsequent richtig aufgestellt. Vorzeichen müssen stimmen.

①$_{11}$ - $D = -2F$ richtig

①$_{12}$ - $E = 2F + G$ richtig

①$_{13}$ - $A_x = F$ **und** $A_y = F$ **und** $A_z = -F$ richtig

①$_{14}$ - Bedingung für ***E*** damit das Seil gespannt bleibt: $E > 0$

①$_{15}$ - Bedingung für F damit das Seil gespannt bleibt: $F > -\frac{G}{2}$

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Zentrum für Mechanik
IMES
Institut für Mechanische Systeme

Technische Mechanik

für D-ITET

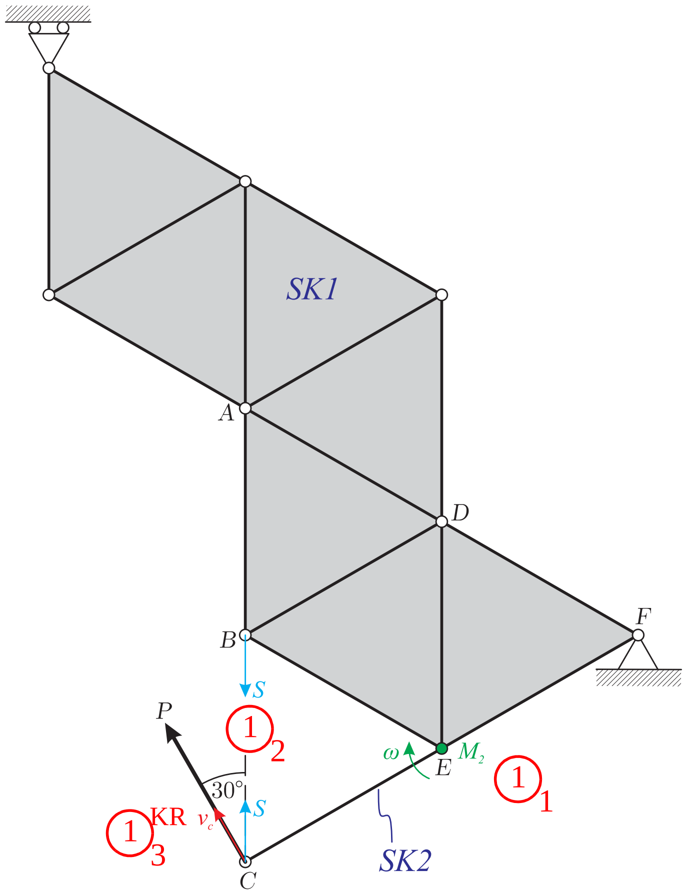
Klausur II

18. November 2008, 9^{15} - 10^{00}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Herbstsemester 2008**

Aufgabe 1

a)



$$\text{PdvL: } \wp = \sum \wp_i \overset{!}{=} 0$$

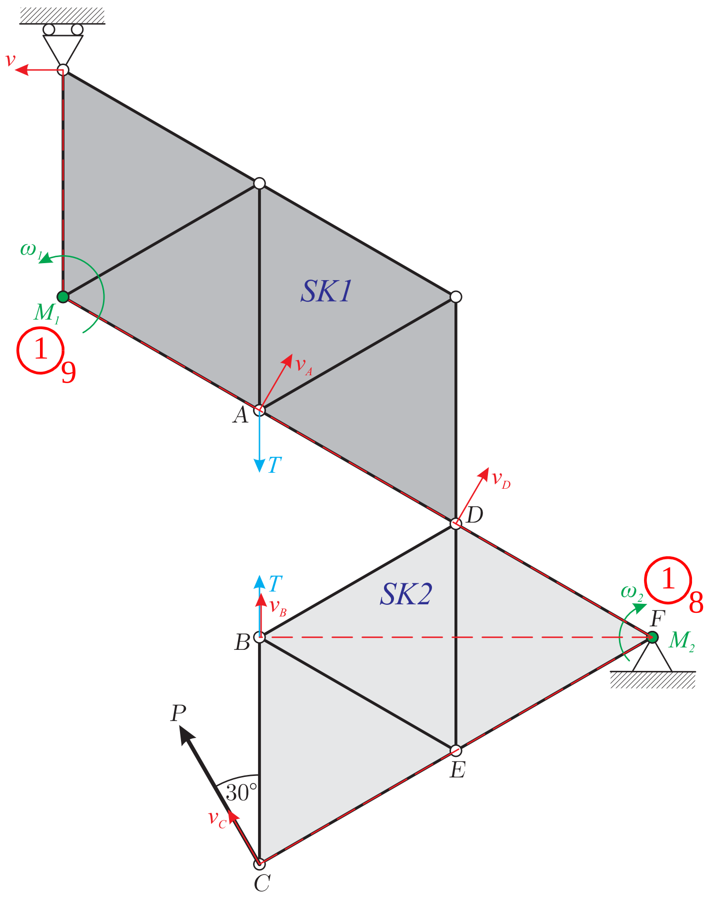
$$v_c = \omega L \quad \textcircled{1}_4$$

$$\wp = \omega L P + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega L S = 0 \quad \textcircled{1}_5^{KR}$$

$$S = -\frac{2}{\sqrt{3}}P \quad \textcircled{1}_6$$

$$\Rightarrow \text{Druckstab} \quad \textcircled{1}_7^{KR}$$

b)



PdvL: $v_C = 2\omega_2 L$ ①$_{10}$ $\quad v_B = \sqrt{3}\omega_2 L$ ①$_{11}$

$v_D = \omega_2 L = 2\omega_1 L$ ①$_{12}$ $\quad \Rightarrow 2\omega_1 = \omega_2$ ①$_{13}$

$v_A = \omega_1 L$ ①$_{14}$

$\wp = 2\omega_2 LP + \sqrt{3}\omega_2 LT - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\omega_2 LT = 0$ ①$^{KR}_{15}$

$T = -\frac{8}{3\sqrt{3}}P = -\frac{8}{9}\sqrt{3}P$ ①$_{16}$

$\Rightarrow$ Druckstab ①$^{KR}_{17}$

Punkteverteilung:

$(1)_1$: Momentanzentrum M_2 von SK2 richtig eingezeichnet mit zugehörigem ω.

$(1)_2$: Stabkräfte richtig eingezeichnet.

$(1)_3^{KR}$: Geschw. v_C k.r. eingezeichnet bezüglich M_2 und ω.

$(1)_4$: Geschw. v_C richtig.

$(1)_5$: Einzelleistungen k.r. aufsummiert bezüglich Zeichnung und ausgerechneter Geschw.

$(1)_6$: Stabkraft richtig.

$(1)_7^{KR}$: Diskussion der Stabkraft k.r.

$(1)_8$: Momentanzentrum M_2 von SK2 richtig eingezeichnet mit zugehörigem ω_2.

$(1)_9$: Momentanzentrum M_1 von SK1 richtig eingezeichnet mit zugehörigem ω_1.

$(1)_{10}$: Geschw. v_C richtig.

$(1)_{11}$: Geschw. v_B richtig.

$(1)_{12}$: Geschw. v_D richtig.

$(1)_{13}$: Beziehung zwischen ω_1 und ω_2 richtig.

$(1)_{14}$: Geschw. v_A richtig.

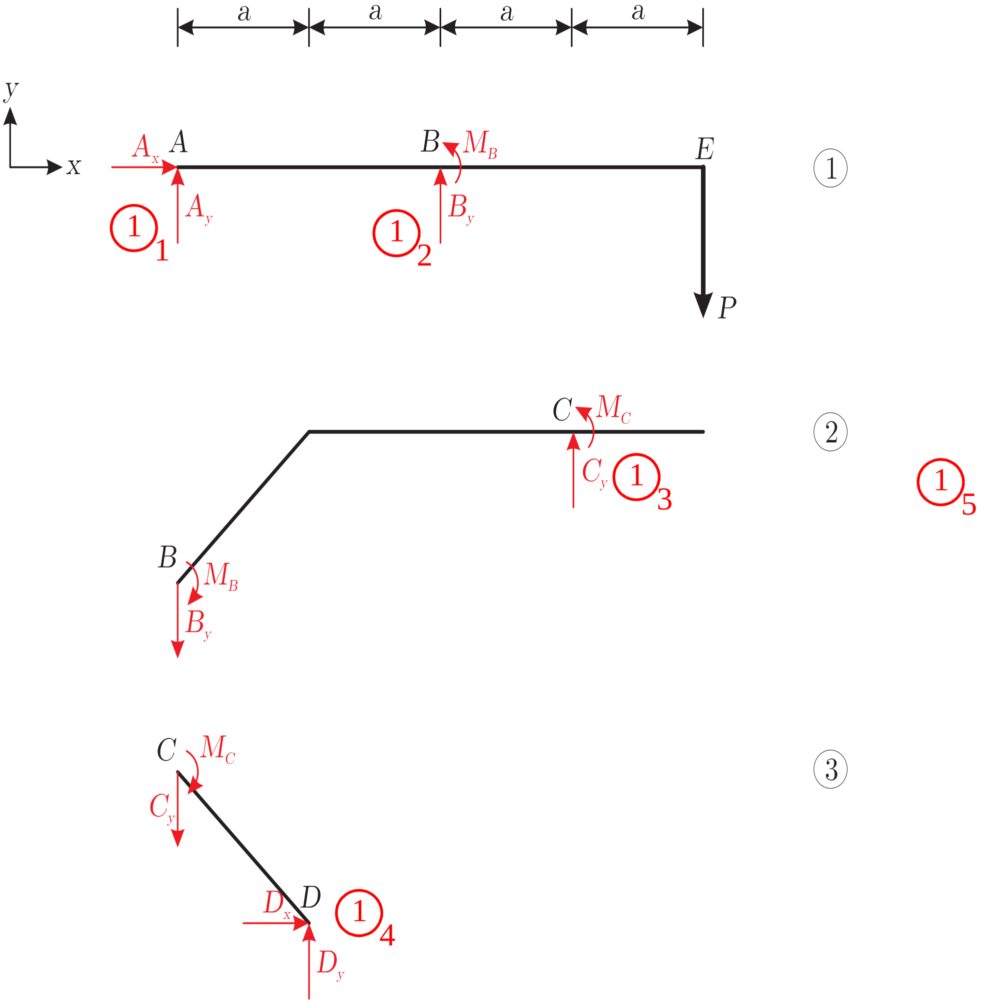
$(1)_{15}$: Einzelleistungen k.r. aufsummiert bezüglich Zeichnung und ausgerechneter Geschw.

$(1)_{16}$: Stabkraft richtig.

$(1)_{17}^{KR}$: Diskussion der Stabkraft k.r.

Aufgabe 2

a)



(1): $KB(x):\quad A_x = 0$ (I)

①$^{\mathrm{KR}}_{6}$ $KB(y):\quad A_y + B_y - P = 0$ (II)

①$^{\mathrm{KR}}_{7}$ $MB(A):\quad 2aB_y + M_B - 4aP = 0$ (III)

(2): $KB(x):\quad 0 = 0$ (IV)

①$^{\mathrm{KR}}_{8}$ $KB(y):\quad B_y - C_y = 0$ (V)

①$^{\mathrm{KR}}_{9}$ $MB(B):\quad 3aC_y + M_C - M_B = 0$ (VI)

(3): $KB(x):\quad D_x = 0$ (VII)

①$^{\mathrm{KR}}_{10}$ $KB(y):\quad D_y - C_y = 0$ (VIII)

①$^{\mathrm{KR}}_{11}$ $MB(C):\quad aD_y + aD_x - M_C = 0$ (IX)

(III) mit (V) und (IX) mit (VII) und (VIII) in (VI):

$$3aC_y + aC_y + 2aC_y - 4aP = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = \frac{2}{3}P \tag{X}$$

(X) in (IX) mit (VII) und (VIII):

$$a\frac{2}{3}P - M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{M}_C = a\frac{2}{3}P \tag{XI}$$

(X) und (XI) in (VI):

$$3a\frac{2}{3}P + a\frac{2}{3}P - M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{M}_B = a\frac{8}{3}P$$

Lagerkräfte und -momente:

	A	B	C	D
$F_x:$	$A_x = 0$ ①$_{12}$			$\mathrm{D}_x = 0$ ①$_{18}$
$F_y:$	$A_y = \frac{1}{3}P$ ①$^{\mathrm{KR}}_{13}$	$B_y = \frac{2}{3}P$ ①$^{\mathrm{KR}}_{14}$	$C_y = \frac{2}{3}P$ ①$^{\mathrm{KR}}_{16}$	$D_y = \frac{2}{3}P$ ①$^{\mathrm{KR}}_{19}$
$M:$		$\mathrm{M}_B = a\frac{8}{3}P$ ①$^{\mathrm{KR}}_{15}$	$\mathrm{M}_C = a\frac{2}{3}P$ ①$^{\mathrm{KR}}_{17}$	

b) Nein, da die Unbekannten sich eindeutig aus den Gleichungen bestimmen lassen. ①$_{20}$

c) Ja, da der Stab 2 in *x*-Richtung verschiebbar ist. ①$_{21}$

Punkteverteilung:

$(1)_1$: Lager in A richtig freigeschnitten.

$(1)_2$: Lager in B richtig freigeschnitten.

$(1)_3$: Lager in C richtig freigeschnitten.

$(1)_4$: Lager in D richtig freigeschnitten.

$(1)_5$: Actio - Reactio in B und C richtig.

$(1)_6^{KR}$: Kräftegleichgewicht in y-Richtung für Stab 1 k.r. bezüglich Zeichnung.

$(1)_7^{KR}$: Momentengleichgewicht für Stab 1 k.r. bezüglich Zeichnung.

$(1)_8^{KR}$: Kräftegleichgewicht in y-Richtung für Stab 2 k.r. bezüglich Zeichnung.

$(1)_9^{KR}$: Momentengleichgewicht für Stab 2 k.r. bezüglich Zeichnung.

$(1)_{10}^{KR}$: Kräftegleichgewicht in y-Richtung für Stab 3 k.r. bezüglich Zeichnung.

$(1)_{11}^{KR}$: Momentengleichgewicht für Stab 3 k.r. bezüglich Zeichnung.

$(1)_{12}$: Lagerkraft A_x richtig.

$(1)_{13}^{KR}$: Lagerkraft A_y betragsmässig richtig, Richtung k.r. bezüglich Zeichnung.

$(1)_{14}^{KR}$: Lagerkraft B_y betragsmässig richtig, Richtung k.r. bezüglich Zeichnung.

$(1)_{15}^{KR}$: Lagermoment M_B betragsmässig richtig, Richtung k.r. bezüglich Zeichnung.

$(1)_{16}^{KR}$: Lagerkraft C_y betragsmässig richtig, Richtung k.r. bezüglich Zeichnung.

$(1)_{17}^{KR}$: Lagermoment M_C betragsmässig richtig, Richtung k.r. bezüglich Zeichnung.

$(1)_{18}$: Lagerkraft D_x richtig.

$(1)_{19}^{KR}$: Lagerkraft D_y betragsmässig richtig, Richtung k.r. bezüglich Zeichnung.

$(1)_{20}$: Antwort richtig mit Begründung.

$(1)_{21}$: Antwort richtig mit Begründung.

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Technische Mechanik

IMES
Institut für
Mechanische Systeme

Klausur II

17. November 2009, 09^{15} - 10^{00}

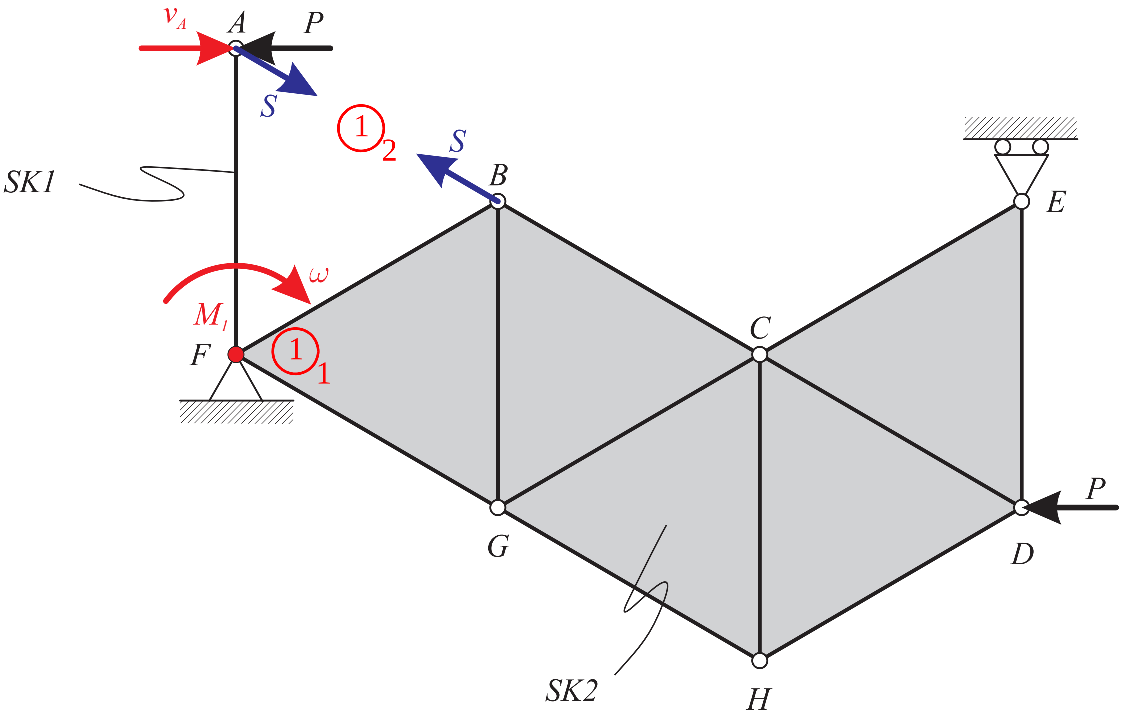
Dr. Stephan Kaufmann

Musterlösung

Herbstsemester 2009

Aufgabe 1 (18 Punkte)

a) Bewegungszustand



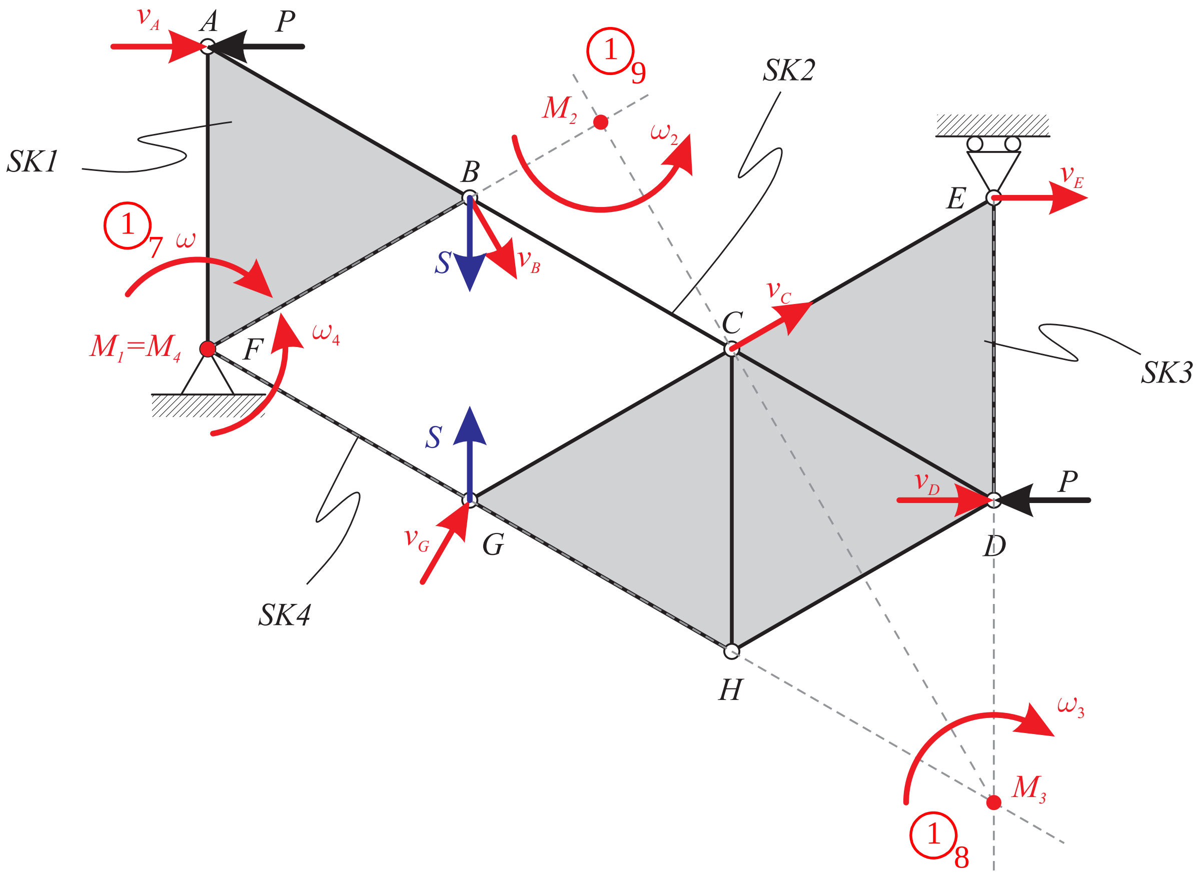
$v_A = \omega l$ ①$_3$

Die Leistung ist also $\wp = -v_A P + v_A\frac{\sqrt{3}}{2}S = -P\omega l + \frac{\sqrt{3}}{2}S\omega l$. ①$^{KR}_4$

Da die virtuelle Leistung null sein muss folgt: $S = \frac{2}{\sqrt{3}}P$ ①$_5$

Es handelt sich also um einen **Zugstab**. ①$^{KR}_6$

b)



Einführen von ω bei F.

①$_{10}$ $v_A = \omega l$, $v_B = \omega l$ ①$_{11}$

Das Momentanzentrum M_4 des Stabes *FG* liegt im Lager *F*. v_E muss aufgrund der Lagerung in horizontaler Richtung zeigen.

Das Momentanzentrum M_3 des Starrkörpers *GHDEC* muss auf einer Geraden senkrecht zu v_E und auf einer Geraden senkrecht zu v_G liegen.

Das Momentanzentrum M_2 muss auf einer Geraden senkrecht zu v_C und auf einer Geraden senkrecht zu v_B liegen.

Mit Hilfe der Momentanzentren lassen sich sich folgende Werte finden:

$$\omega_2 = \frac{v_B}{l/2} = 2\omega$$ ①$_{12}$

$$v_C = \omega_2 \frac{\sqrt{3}}{2} l = \sqrt{3}\omega l$$

$$\omega_3 = \frac{v_C}{\sqrt{3}l} = \omega$$ ①$_{13}$

$$v_D = \omega_3 l = \omega l$$ ①$_{14}$

$$v_G = \omega_3 2l = 2\omega l$$ ①$_{15}$

$\omega_4 = 2\omega$

Mit diesen Werten folgt für die Leistung:

$$\wp = -v_A P + \frac{\sqrt{3}}{2} v_B S - v_D P + v_G \frac{\sqrt{3}}{2} S = -\omega l P + \frac{\sqrt{3}}{2} \omega l S - \omega l P + 2\omega l \frac{\sqrt{3}}{2} S$$ ①$^{KR}_{16}$

Die virtuelle Leistung muss null sein. Also folgt $S = \frac{4}{3\sqrt{3}} P$. ①$_{17}$

Es handelt sich also um einen **Zugstab**. ①$^{KR}_{18}$

①$_{1}$ Momentanzentrum M_1 richtig

①$_{2}$ Stabkräfte richtig eingeführt

①$_{3}$ v_A richtig

①$^{\mathrm{KR}}_{4}$ Einzelleistungen richtig aufsummiert, k.r. bezüglich Zeichnung und Geschw.

①$_{5}$ Stabkraft richtig

①$^{\mathrm{KR}}_{6}$ Diskussion der Stabkraft k.r. bez. Vorzeichen

①$_{7}$ Momentanzentrum M_1 **und** M_4 richtig

①$_{8}$ Momentanzentrum M_3 richtig

①$_{9}$ Momentanzentrum M_2 richtig

①$_{10}$ v_A richtig

①$_{11}$ v_B richtig

①$_{12}$ ω_2 richtig

①$_{13}$ ω_3 richtig

①$_{14}$ v_D richtig

①$_{15}$ v_G richtig

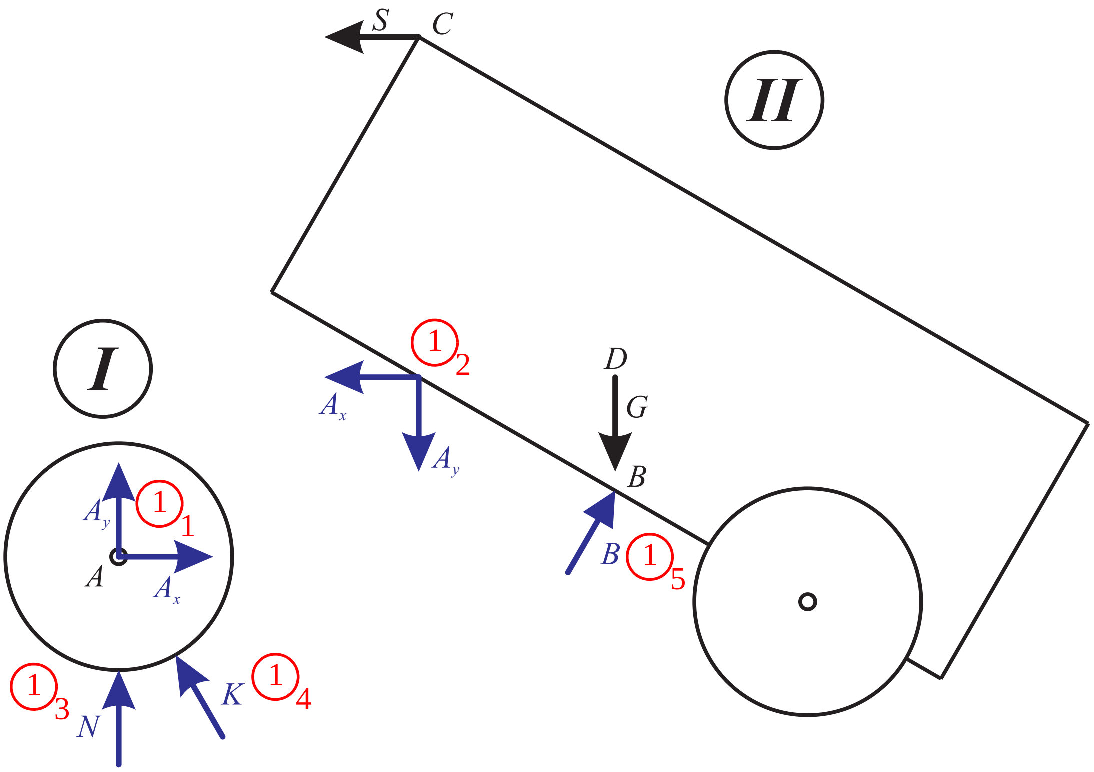
①$^{\mathrm{KR}}_{16}$ Einzelleistungen richtig aufsummiert, k.r. bezüglich Zeichnung und Geschw.

①$_{17}$ Stabkraft richtig

①$^{\mathrm{KR}}_{18}$ Diskussion der Stabkraft k.r. bez. Vorzeichen

Aufgabe 2 (21 Punkte)

a)



b) Das System ist nicht statisch unbestimmt (Nein). Das System ist kinematisch unbestimmt (Ja).

c) Gleichgewicht am Körper I: ①$_{6}$ ①$_{7}$

KB(x): $A_x - \frac{1}{2}K = 0$ ①$^{\text{KR}}_{8}$

KB(y): $A_y + N + \frac{\sqrt{3}}{2}K = 0$ ①$^{\text{KR}}_{9}$

Die Momentenbedingung liefert keine zusätzliche Gleichung (kin. unbestimmt).
Gleichgewicht am Körper II:

KB(x): $-A_x - S + \frac{1}{2}B = 0$ ①$^{\text{KR}}_{10}$

KB(y): $-A_y - G + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 0$ ①$^{\text{KR}}_{11}$

MB(A): $Bl - G\frac{\sqrt{3}}{2}l + S\frac{3}{2}l = 0$ ①$^{\text{KR}}_{12}$

Daraus folgen die Unbekannten

$B = \frac{\sqrt{3}}{2}G - \frac{3}{2}S$ ①$_{13}$

$A_y = -\frac{3\sqrt{3}}{4}S - \frac{1}{4}G$ ①$_{14}$

$$A_x = \frac{\sqrt{3}}{4}S - \frac{7}{4}S \quad \textcircled{1}_{15}$$

$$K = \frac{\sqrt{3}}{2}G - \frac{7}{2}S \quad \textcircled{1}_{16}$$

$$N = \frac{5\sqrt{3}}{2}S - \frac{1}{2}G \quad \textcircled{1}_{17}$$

d) Es muss gelten $N \geq 0$. Also:

$$\frac{5\sqrt{3}}{2}S - \frac{1}{2}G \geq 0 \quad \textcircled{1}^{\mathrm{KR}}_{18}$$

Daraus folgt: $S \geq \frac{1}{5\sqrt{3}G}$ $\textcircled{1}_{19}$

e) Es muss gelten: $K < 0$. Also:

$\frac{\sqrt{3}}{2}G - \frac{7}{2}S < 0$. Daraus folgt: $S > \frac{\sqrt{3}}{7}G$

$\textcircled{1}^{\mathrm{KR}}_{20}$ $\textcircled{1}_{21}$

①$_{1}$ Reaktionskräfte eingeführt bei A

①$_{2}$ Actio=Reactio in A richtig

①$_{3}$ Normalkraft beim Boden eingeführt

①$_{4}$ Normalkraft beim Klotz eingeführt

①$_{5}$ Normalkraft am Randstein eingeführt

①$_{6}$ Richtige Antwort (Nein)

①$_{7}$ Richtige Antwort (Ja)

①$^{KR}_{8}$ Kräftegleichgewicht in x, k.r. bezüglich Zeichnung

①$^{KR}_{9}$ Kräftegleichgewicht in y, k.r. bezüglich Zeichnung

①$^{KR}_{10}$ Kräftegleichgewicht in x, k.r. bezüglich Zeichnung

①$^{KR}_{11}$ Kräftegleichgewicht in y, k.r. bezüglich Zeichnung

①$^{KR}_{12}$ Momentenbedingung, k.r. bezüglich Zeichnung

①$_{13}$ Normalkraft B richtig

①$_{14}$ Reaktionskraft in y richtig

①$_{15}$ Reaktioinskraft in x richtig

①$_{16}$ Normalkraft K richtig

①$_{17}$ Normalkraft N richtig

①$^{KR}_{18}$ Bedingung $N \geq 0$ und k.r. eingesetzt

①$_{19}$ Ungleichung für S richtig

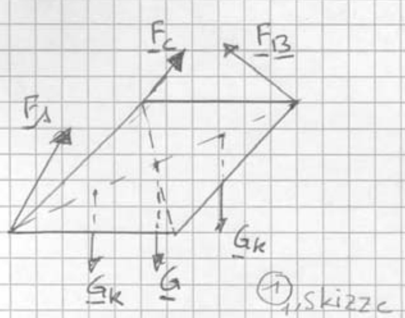
①$^{KR}_{20}$ Bedingung $K < 0$ und k.r. eingesetzt

①$^{KR}_{21}$ Ungleichung für S richtig

Klausur II: Mechanik GZ SS 2007

A1:

a)



①$_1$ Skizze

$$\underline{F}_A = \frac{^2\sqrt{6}}{3} A \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \underline{G}_K = G_K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

①$_5$

$$\underline{F}_B = \frac{3\sqrt{6}}{3} B \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \underline{G} = G \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}_C = \frac{^4\sqrt{6}}{3} C \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(① beside each force vector)

b) $\underline{\mathfrak{R}} = \underline{0}$

in x: $\frac{\sqrt{6}}{6}\left(-A + B + C\right) = 0$ ①$_6$ (I)

in y: $\frac{\sqrt{6}}{6}\left(A - B + C\right) = 0$ ①$_7$ (II)

in z: $\frac{\sqrt{6}}{3}\left(A + B + C\right) - G - 2G_K = 0$ ①$_8$ (III)

$\underline{M}_A = \underline{0}$

in x: $\frac{\sqrt{6}}{3} LB - LG_K - \frac{L}{2} G = 0$ ①$_9$ (IV)

in y: $-LG_K - \frac{L}{2}G + \frac{\sqrt{6}}{3}LB + \frac{\sqrt{6}}{3}LC = 0$ ①$_{10}$ (V)

in z: $-L\frac{B}{2} + L\frac{B}{2} - L\frac{C}{2} = 0$ ①$_{11}$ (VI)

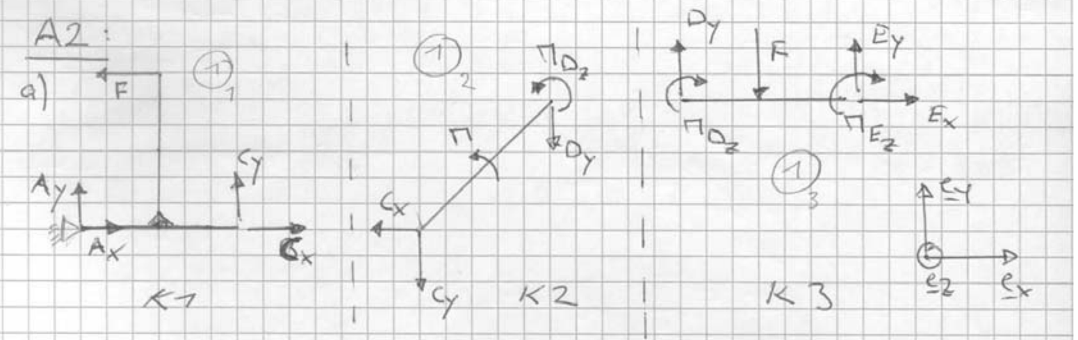
e) Aus I + II → $\underline{\underline{C = 0}}$ ①$_{12}$ daraus folgt: $\underline{A = B}$ ①$_{13}$ (Symmetrie)

in $\overline{III}$ einsetzen: ①$_{14}$ $\underline{\underline{A = B = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(G_K + \frac{G}{2}\right)}}$

c) + d) statisch bestimmt, ①$_{15}$ kinematisch unbestimmt ①$_{16}$

A2:

a)



b) • K1:

①$_{4,kr}$ in x: $A_x + C_x = F$

in y: $A_y + C_y = 0 \longrightarrow \underline{\underline{A_y}} = -C_y = \underline{\underline{F}}$ ①$_6$

①$_{5,kr}$ M_A: $FL + C_yL = 0 \longrightarrow \underline{\underline{C_y = -F}}$ ①$_7$

• K2:

①$_{8,kr}$ in x: $-\underline{\underline{C_x = 0}} \longrightarrow \underline{\underline{A_x}} = F - C_x = \underline{\underline{F}}$ ①$_{10}$

in y: $-C_y - D_y = 0 \longrightarrow \underline{\underline{D_y}} = -C_y = \underline{\underline{F}}$ ①$_{11}$

①$_{9,kr}$ M_C: $M + M_{D_z} - L\frac{\sqrt{2}}{2}D_y = 0 \longrightarrow \underline{\underline{M_{D_z}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}D_yL - M = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}FL - M}}$ ①$_{12}$

• K3:

①$_{13,kr}$ in x: $\underline{\underline{E_x = 0}}$

in y: $D_y + E_y = F \longrightarrow \underline{\underline{E_y}} = F - D_y = \underline{\underline{0}}$ ①$_{15}$

①$_{14,kr}$ M_E: $+M_{E_z} + M_{D_z} + LD_y = +\frac{L}{2}F \rightarrow M_{E_z} = -F\frac{L}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}FL + M$

$$\underline{\underline{M_{E_z} = M - \frac{FL}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)}}$$

①$_{16}$

◦ Bepunktung:

A1:

①$_1$: Skizze, Freischneiden und $\underline{F}_A, \underline{F}_B, \underline{F}_C, \underline{G}_K, \underline{G}$ einführen
①$_2$: $\underline{F}_A$ richtig, Kraft & Betrag (mit 1-Unbekannte)
①$_3$: $\underline{F}_B$ " " "
①$_4$: $\underline{F}_C$ " " "
①$_5$: $\underline{G}_K$ und $\underline{G}$ richtig, Kraft & Betrag
①$_6$: Resultierende in x, alle Komponenten richtig
①$_7$: " in y, " " "
①$_8$: " in z, " " "
①$_9$: Momentbedingung in x, " " "
①$_{10}$: " " y, " " "
①$_{11}$: " " z, " " "
Korrekt bzgl. Skizze
①$_{12}$: C Richtig
①$_{13}$: Symmetrie erkannt oder auch mit Rechnung
①$_{14}$: A, B richtig
①$_{15}$: Statisch bestimmt richtig
①$_{16}$: Richtig

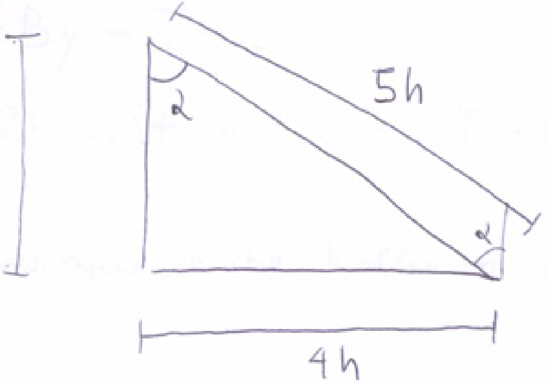
A2:

①$_1$: Körper AC richtig freischneiden, A_x, A_y, C_x, C_y, F
①$_2$: Körper CD " " , $C_x, C_y, M_{D_z}, D_y, M$ (evtl. M_B & B_x, B_y)
①$_3$: Körper DE " " , $D_y, M_{D_z}, F, M_{E_z}, E_x, E_y$
①$_4$: Körper AC : R_x, R_y richtig bzgl Skizze
①$_5$: " : M_A, richtig bzgl Skizze
①$_6$ ①$_7$: A_y, C_y richtig
①$_8$: Körper CD : R_x, R_y, richtig bzgl Skizze
①$_9$: " " : M_C richtig bzgl Skizze
①$_{10}$, ①$_{11}$, ①$_{12}$: A_x, D_y, M_{D_z}, richtig
①$_{13}$ Körper DE : R_x, R_y richtig bzgl Skizze
①$_{14}$ " " : M_E richtig " "
①$_{15}$, ①$_{16}$: E_y, M_{E_z} richtig

Musterlösung Klausur II

Aufgabe 1

a)

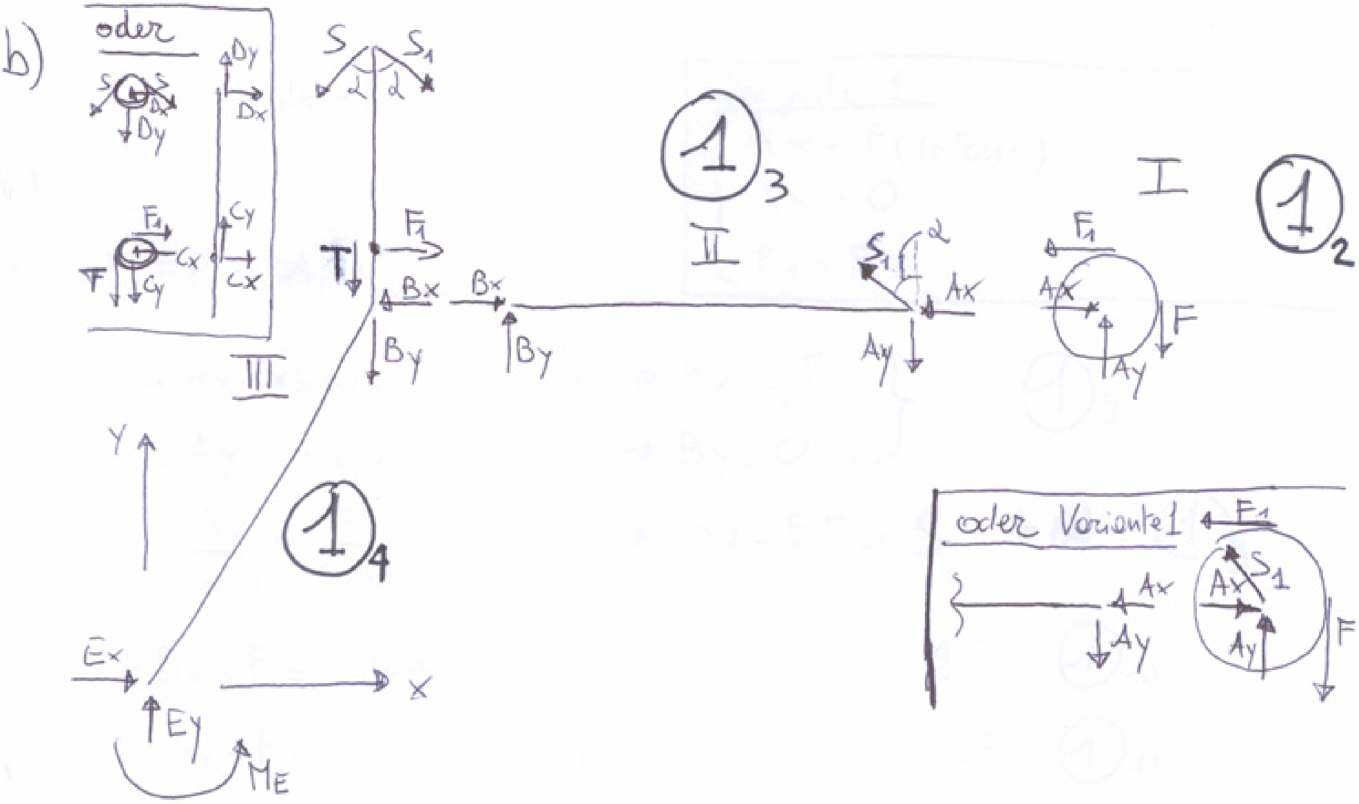


$\sin\alpha = \frac{4}{5}$

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\Big\}$ ①$_1$

b)



c) Gleichgewichtbedingungen

$$\text{I}\quad \begin{cases} x: & A_x - F_1 = 0 \\ y: & A_y - F = 0 \\ M_A: & F_1 r - F r = 0 \end{cases} \Bigg\} \text{①}_{5\,KR}$$

Variante 1

$$\begin{cases} A_x - F_1 - S_1 \sin\alpha = 0 \\ A_y - F + S_1 \cos\alpha = 0 \\ F_1 r - F r = 0 \end{cases}$$

$$\text{II}\quad \begin{cases} x: & B_x - A_x - S_1 \sin\alpha = 0 \\ y: & B_y - A_y + S_1 \cos\alpha = 0 \\ M_B: & S_1 \cos\alpha \cdot 4h - A_y \cdot 4h = 0 \end{cases} \Bigg\} \text{①}_{6\,KR}$$

$$\begin{cases} B_x - A_x = 0 \\ B_y - A_y = 0 \\ -4h \cdot A_y = 0 \end{cases}$$

$$\text{III}\ \begin{matrix} x \\ y \\ M_E \end{matrix}\begin{cases} Ex - Bx + F_1 = 0 \\ Ey - By - T - 2S\cos\alpha = 0 \\ M_E - 2h\,By + 5h\cdot Bx - 2hT - 6hF_1 - 2h(S_1+S)\cos\alpha = 0 \end{cases}$$ ①$_{7KR}$

Gleichgewichtbedingungen bei Rollen in C und D oder direkt

C: $F_1 = T$

D: $S_1 = S$

Lösen die Systeme

$$\text{I}\begin{cases} Ax = F \\ Ay = F \\ F = F_1 = T \quad (\star) \end{cases}$$

Variente 1

$$\begin{cases} Ax = F(1+\tan\alpha) \\ Ay = 0 \\ F_1 = F \end{cases}$$

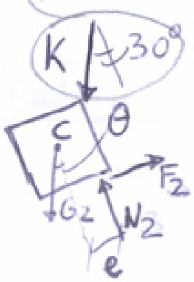
$$\text{II}\begin{cases} Bx = Ax + S_1\sin\alpha = F(1+\tan\alpha) \rightarrow Bx = \frac{7}{3}F \\ By = Ay - S_1\cos\alpha = 0 \rightarrow By = 0 \\ S_1 = \frac{Ay}{\cos\alpha} = \frac{F}{\cos\alpha} \rightarrow S_1 = \frac{5}{3}F = S \end{cases}$$ ①$_8$ $+ (\star)$ ①$_9$

$$\text{III}\begin{cases} Ex = Bx - F = F\tan\alpha \longrightarrow Ex = \frac{4}{3}F \\ Ey = By + F + 2S\cos\alpha = 0 + F + 2F = 3F \longrightarrow Ey = 3F \\ M_E = -5hF(1+\tan\alpha) - 12hF \longrightarrow M_E = \frac{Fh}{3} \end{cases}$$ ①$_{10}$ ①$_{11}$ ①$_{12}$

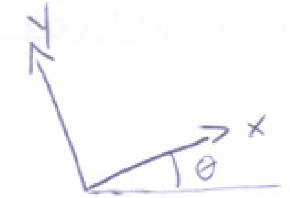
Aufgobe 2

a)

①$_1$ K richtig eingezeichnet



①$_2$ (richtig freigeschnitten) (KR bz. punkt 1)



b) 5 Unbekannten : N_1, K, F_2, N_2, e

Zylinder

$$\left.\begin{aligned} x&\quad K\,\mathrm{sim}(30) - G_1\,\mathrm{sim}\,\theta = 0 \\ y&\quad K\cos(30) + N_1 - G_1\cos\theta = 0 \\ M_0&\quad 0 = 0 \end{aligned}\right\} ①_{3KR}$$

$$\left\{\begin{aligned} K &= \frac{G_1\,\mathrm{sim}\,\theta}{\mathrm{Sim}30} = 2G_1\,\mathrm{Sin}\,\theta \\ N_1 &= G_1\left(\cos\theta - \frac{\mathrm{sim}\,\theta}{\mathrm{ton}(30)}\right) = \\ &= G_1\left(\cos\theta - \sqrt{3}\,\mathrm{sim}\,\theta\right) \end{aligned}\right.$$

Quader

$$\left.\begin{aligned} x&\quad F_2 - K\,\mathrm{sim}(30) - G_2\,\mathrm{sim}\,\theta = 0 \\ y&\quad N_2 - K\cos(30) - G_2\cos\theta = 0 \end{aligned}\right\} ①_{4KR}$$

$$M_c \quad N_2 \cdot e + F_2 \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{2}K\,\mathrm{sim}(30) - \frac{a}{2}K\cos(30) = 0 \quad ①_{5KR}$$

$$\left\{\begin{aligned} F_2 &= (G_1 + G_2)\,\mathrm{sim}\,\theta \\ N_2 &= \frac{G_1\,\mathrm{sim}\,\theta}{\mathrm{ton}(30)} + G_2\cos\theta = \sqrt{3}\,G_1\,\mathrm{sim}\,\theta + G_2\cos\theta \\ e &= \frac{a}{2}\left(\frac{-F_2 - K\,\mathrm{sim}(30) + K\cos(30)}{N_2}\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{-(G_1+G_2)\,\mathrm{Sim}\,\theta - G_1\,\mathrm{Sim}\,\theta + G_1\cot(30)\,\mathrm{Sin}\,\theta}{G_1\,\mathrm{Sim}\,\theta\cot(30) + G_2\cos\theta}\right) \end{aligned}\right.$$

$$= \frac{a}{2}\left\{\frac{\left[(\sqrt{3}-2)G_1 - G_2\right]\mathrm{sim}\,\theta}{\sqrt{3}G_1\,\mathrm{sim}\,\theta + G_2\cos\theta}\right\}$$

Reibungsbedingung $|F_2| \leq \mu_0 |N_2|$ ①$_{6}$ idee (mit Betrag)

nicht Kippen $|e| \leq \frac{a}{2}$ ①$_{7}$ idee (mit Betrag)

KontaktKräfte und NormalKräften müssen positive sein. $N_1, N_2, K > 0$

①$_{8}$ idee (auch wenn nur $N_1 > 0$)

d) $|F_2| \leq \mu_0 |N_2|$ $\theta \in]0,90[\,, \mu_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, G_1 = G_2 = G$

$$\left|(G_2+G_1)\sin\theta\right| \leq \mu_0 \left|\sqrt{3}\,G_1 \sin\theta + G_2\cos\theta\right|$$

für $\theta \in]0,90[\longrightarrow \begin{cases} (G_2+G_1)\sin\theta > 0 \\ \sqrt{3}\,G_1\sin\theta + G_2\cos\theta > 0 \end{cases}$

$$2\cancel{G}\sin\theta - \mu_0\sqrt{3}\cancel{G}\sin\theta \leq \mu_0\cancel{G}\cos\theta$$

$$\tan\theta \leq \frac{\mu_0}{2-\mu_0\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$ $\underline{\theta \leq 60°}$ ①$_{9}$

e) $|e| \leq \frac{a}{2}$

$$|e| = \left|\frac{(\sqrt{3}-3)\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}\right| \frac{\overset{1}{\cancel{a}}}{2} \leq \frac{\overset{1}{\cancel{a}}}{\cancel{2}}$$

$-\frac{(\sqrt{3}-3)\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta} \leq 1$ weil $\overset{\approx -1{,}27}{(\sqrt{3}-3)}\sin\theta < 0 \quad \forall\theta]0,90[$

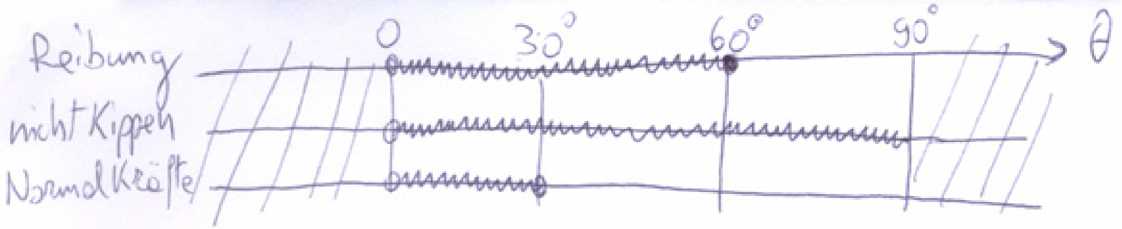
$-(2\sqrt{3}+3)\sin\theta \leq \cos\theta \rightarrow \tan\theta \leq -\frac{1}{(2\sqrt{3}+3)} < 0$

$\Longrightarrow \underline{\nexists\,\theta \in]0,90[}$ der Quader Kippt nicht! ①$_{10}$

f) $N_2 = (\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta)G > 0 \quad \forall\theta \in]0,90[$

$K = 2G\sin\theta > 0 \quad \forall\theta \in]0,90[$

$N_1 = G(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta) > 0 \quad \tan\theta < \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\underline{\theta < 30°}$ ①$_{11}$



Das System bleibt in Ruhe für $0<\theta<30°$

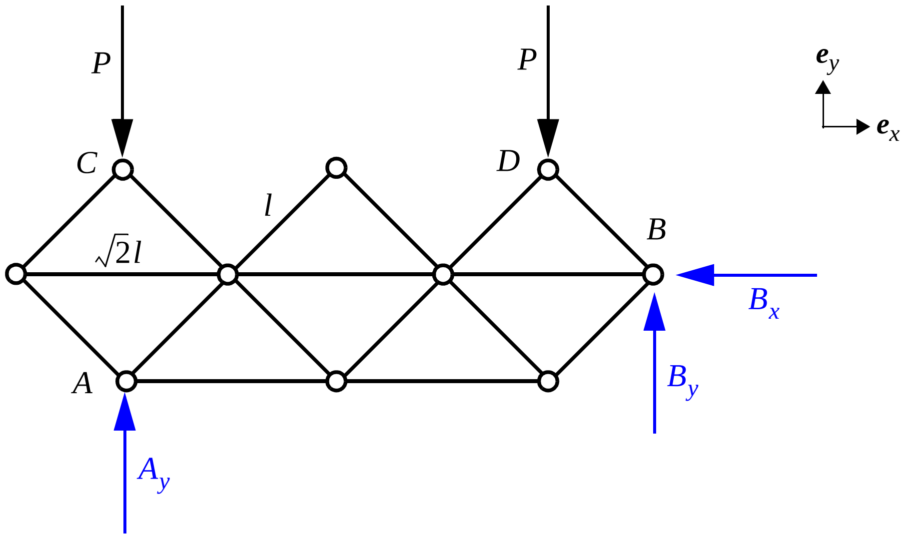
①$_{12}$

Klausur 2 - Lösung

Aufgabe 1

a) Berechne die Lagerkräfte in A und B!

System freischneiden, Bindungskräfte einführen, und Koordinatensystem einführen:



Gleichgewichtsbedingungen aufstellen:

R_x: $$-B_x = 0 \tag{1}$$

R_y: $$A_y + B_y - P - P = 0 \tag{2}$$

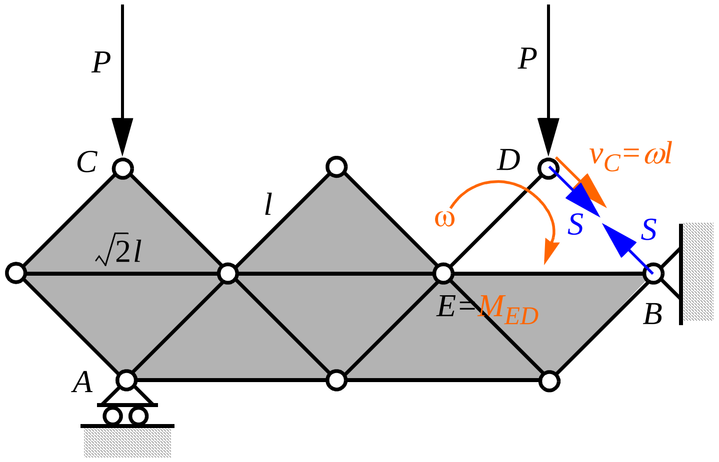
M_B: $$\frac{5\sqrt{2}}{2}l(P - A_y) + \frac{\sqrt{2}}{2}lP = 0 \tag{3}$$

Aus (3): $$A_y = \frac{6}{5}P$$

eingesetzt in (2): $$B_y = \frac{4}{5}P$$

b) Berechne mit dem PdvL die Stabkraft im Stab 1! Ist es eine Zug- oder eine Druckkraft?

Im Prinzip ist jeder (virtueller) Bewegungszustand möglich, aber eine geschickte Wahl macht das Leben einfacher! Am besten wählen wir einen Bewegungszustand, der das Problem löst, ohne dass wir Kräfte in *A* und *B* oder (wie hier der Fall) deren Leistungen berechnen müssen! (vgl. Bsp. im Skript, S. 43).
Mit anderen Worten, die Lagerkräfte in A und B sollten keine Beiträge zur Gesamtleistung liefern. Diese Bedingung wird gerade durch den wirklichen (zulässigen) Bewegungszustand des Systems erfüllt ($\boldsymbol{v}_A \perp$ Lagerkraft in A und $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{0}$)!



Wir geben z.B. die Rotationsschnelligkeit $\omega_{ED}=\omega$ vor. Da sowohl die Geschwindigkeit von *E* als auch von *B* null ist, ist der schraffierter starrer Körper in Ruhe.

Die Geschwindigkeit von *D* ergibt sich aus dem Satz vom Momentanzentrum auf *ED*:

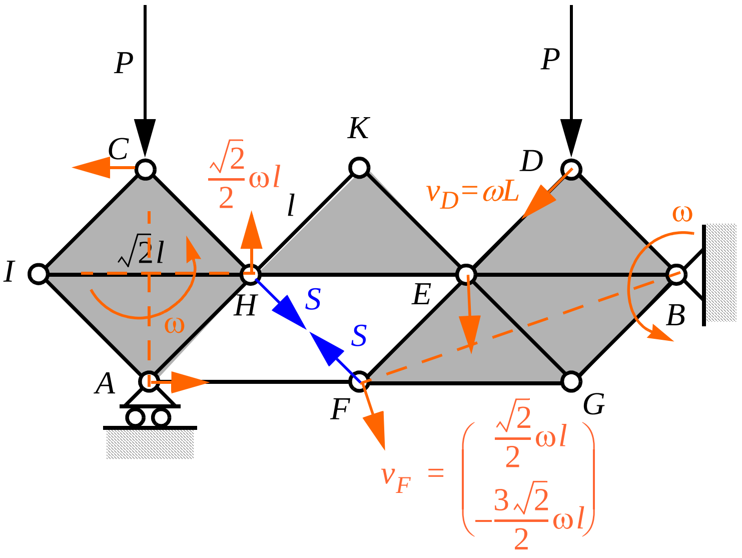
$$v_D = \omega l \text{ (Richtung, siehe Zeichnung)}$$

Aus dem PdvL folgt:

$$\wp = P \cdot \omega l \frac{\sqrt{2}}{2} + S \cdot \omega l = 0$$

$$S = -P\frac{\sqrt{2}}{2}\text{, Druckkraft}$$

c) Berechne mit dem PdvL die Stabkraft im Stab 2! Ist es eine Zug- oder eine Druckkraft?



Gemäss denselben Überlegungen wie oben geben wir z.B. die Rotationsschnelligkeit $\omega_{DEFGB} = \omega$ vor. Damit sind die Geschwindigkeiten von *D*, *E*, und *F* festgelegt:

$$v_D = \omega l \text{ (Richtung, siehe Zeichnung)}$$

$$v_E = \sqrt{2} l\omega \text{ (Richtung, siehe Zeichnung)}$$

Im Punkt *F* betrachten wir am besten die Komponenten der Geschwindigkeit einzeln (so dass wir nicht vektoriell rechnen müssen), d.h.

$$v_{Fx} = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega l \text{ (direkt aus der Zeichnung)}$$

$$v_{Fy} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\omega l \text{ (direkt aus der Zeichnung)}$$

Wir wissen zusätzlich, dass $\mathbf{v}_A$ in *x*-Richtung (pos. oder neg.) zeigen muss (Lagerbedingung). Aus dem SdpG auf *AF* folgt:

$$v'_F = v_{Fx} = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega l \equiv v'_A = v_A = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega l$$

Aus dem SdpG auf *EH* folgt, dass die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_H$ in *y*-Richtung (pos. oder neg.) zeigen muss. Somit sind das Momentanzentrum von *CIAH* und die Richtung der Rotationgeschwindigkeit bestimmt!

$$v_A = \frac{\sqrt{2}}{2} l\omega \equiv \omega_{CIAH}\frac{\sqrt{2}}{2} l \Rightarrow \omega_{CIAH} = \omega$$

Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_H$ ist:

$$v_H = \omega\frac{\sqrt{2}}{2}l$$

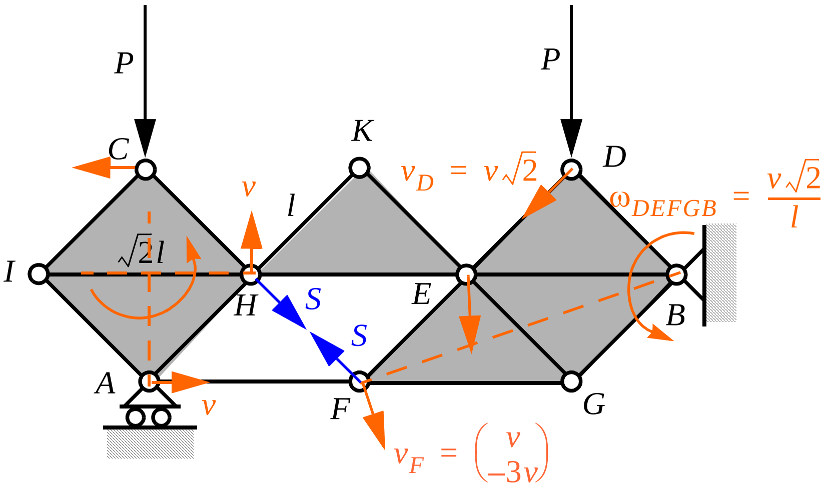
Aus dem PdvL folgt:

$$\wp = P\cdot\omega l\frac{\sqrt{2}}{2} - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}S}_{\text{x-Komp. von S}}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\omega l}_{\text{x-Komp. von }\mathbf{v}_\mathrm{F}} - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}S}_{\text{y-Komp. von S}}\cdot\underbrace{\frac{3\sqrt{2}}{2}\omega l}_{\text{y-Komp. von }\mathbf{v}_\mathrm{F}} - \frac{\sqrt{2}}{2}S\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\omega l = 0$$

$$S = \frac{\sqrt{2}}{5}P \text{ , Zugkraft}$$

Achtung: die Länge der Pfeile entspricht dem Betrag der Geschwindigkeiten nicht. Bitte beachte, dass das Momentanzentrum von *KEH* nicht in der Mitte des Stabes *HE* liegt!

Lösungsvariante:



Alternativ können wir die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_A$ vorgeben!¨

Aus dem SdpG auf *AF* folgt:

$$v'_A = v_A = v \equiv v'_F = v_{Fx} \Rightarrow v_{Fx} = v$$

Da wir einen wirklichen Bewegungszustand angenommen haben, rotiert der starre Körper *DEFGB* um *B*. Somit sind die Richtungen der Geschwindigkeiten in *D*, *E* und *G* festgelegt.

Aus dem SdpG auf *FG* folgt:

$$v'_F = v_{Fx} = v \equiv v'_G = v_G\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow v_G = v\sqrt{2}$$

Andererseits gilt es:

$$v_G = \omega_{DEFGB} l \equiv v\sqrt{2} \Rightarrow \omega_{DEFGB} = \frac{v\sqrt{2}}{l}$$

Daraus folgt:

$$v_D = \omega_{DEFGB} l = v\sqrt{2}$$

Die *y*-Komponte der Geschwindigkeit von *F* kann wie oben bestimmt werden:

$$v_{Fy} = \frac{3\sqrt{2}}{2} l \cdot \omega_{DEFGB} = \frac{3\sqrt{2}}{2} l \cdot \frac{v\sqrt{2}}{l} = 3v\text{, sie zeigt in negativer } y\text{-Richtung}$$

Mit derselben Überlegung wie oben weiss man, dass $\mathbf{v}_H$ in *y*-Richtung (pos. oder neg.) zeigen muss. Somit ist die Lage des Momentanzentrum von *CIAH* festgelegt (siehe Zeichnung). Daraus folgt direkt, dass (die Punkte *A* und *H* weisen ja den selben Abstand vom Momentanzentrum auf!):

$$v_H = v_A = v$$

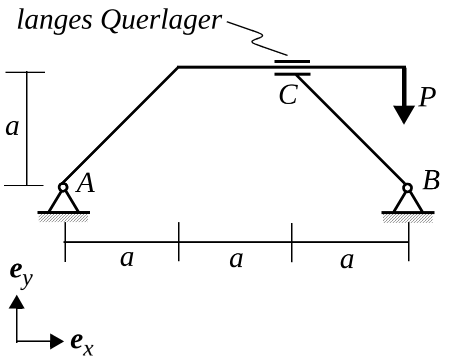
Aus dem PdvL folgt:

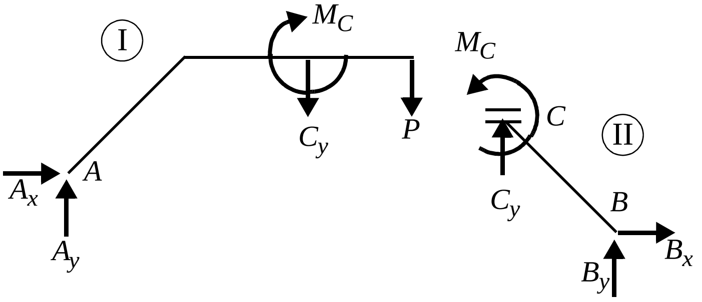
$$\wp = -v \cdot S\frac{\sqrt{2}}{2} - v \cdot S\frac{\sqrt{2}}{2} - 3v \cdot S\frac{\sqrt{2}}{2} + v\sqrt{2} \cdot P\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$S = \frac{\sqrt{2}}{5}P \text{ , Zugkraft}$$

Aufgabe 2

Fall 1





(I) x: $A_x = 0$

y: $A_y - C_y - P = 0$

M_A: $-2aC_y - M_C - 3aP = 0$

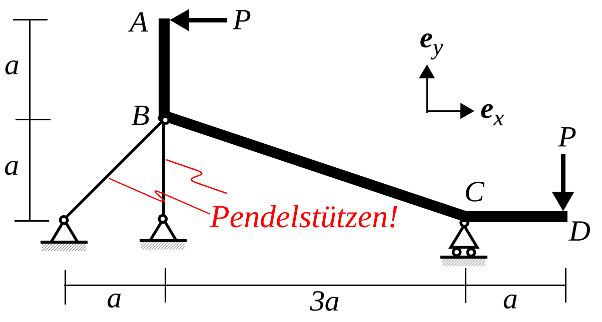
(II) x: $B_x = 0$

y: $C_y + B_y = 0$

M_B: $-aC_y + M_C = 0$

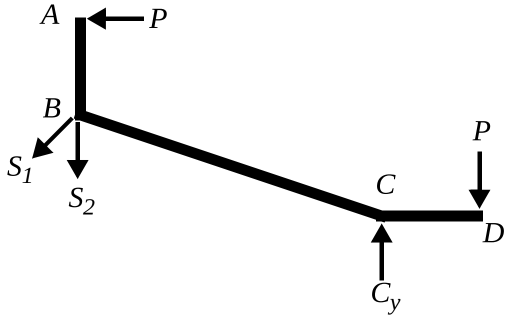
R: ☒ F: ☐

Fall 2



ABCD ist eine gebogene Stange

Pendelstützen: Kraft zeigt in Stabrichtung! (S.49)



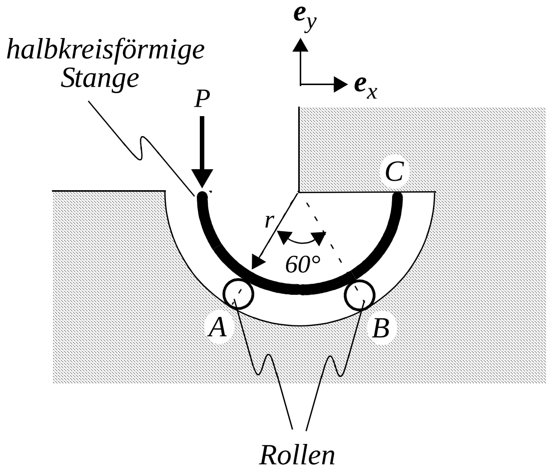
x: $-\frac{S_1}{\sqrt{2}} - P = 0$

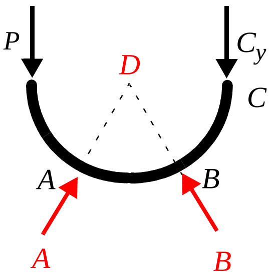
y: $-S_2 - \frac{S_1}{\sqrt{2}} + C_y - P = 0$

M_B: $aP + 3aC_y - 4aP = 0$

R: ☒ F: ☐

Fall 3



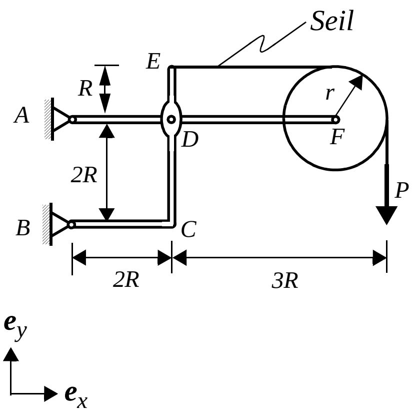


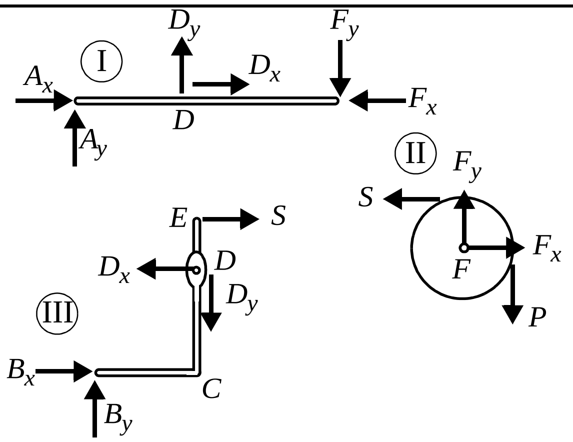
x: $\frac{A}{2}-\frac{B}{2} = 0$ y: $\frac{\sqrt{3}A}{2}+\frac{\sqrt{3}B}{2}-P-C_y = 0$

M_D: $Pr-C_y r = 0$

R: ☐ F: ☒

Fall 4





Ⅰ x: $A_x+D_x-F_x = 0$

y: $A_y+D_y-F_y = 0$

M_D: $-2RA_y\boxed{-3RF_y} = 0$

$-(3R-r)F_y$

Ⅱ x: $F_x-S = 0$

y: $F_y-P = 0$

M_F: $Sr-Pr = 0$

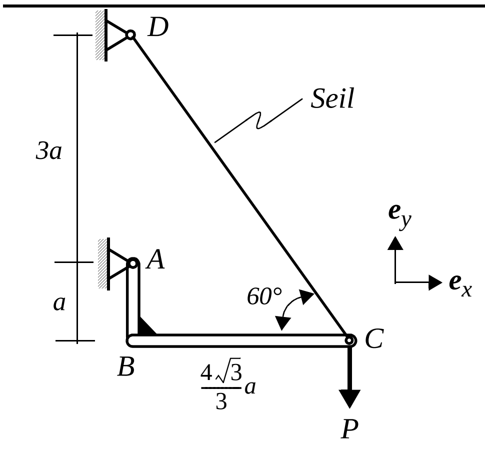
Ⅲ x: $B_x-D_x+S = 0$

y: $B_y-D_y = 0$

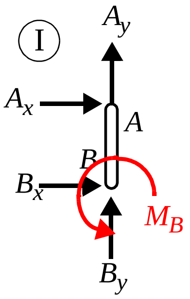
M_B: $-2RD_y+2RD_x-3RS = 0$

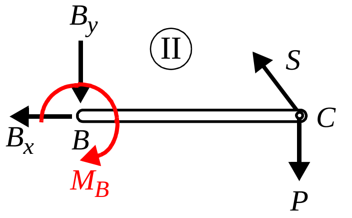
R: ☐ F: ☒

Fall 5



die Stäbe AB und BC sind in B zusammengeschweisst





Ⓘ x: $A_x + B_x = 0$

y: $A_y + B_y = 0$

M_A: $aB_x + M_B = 0$

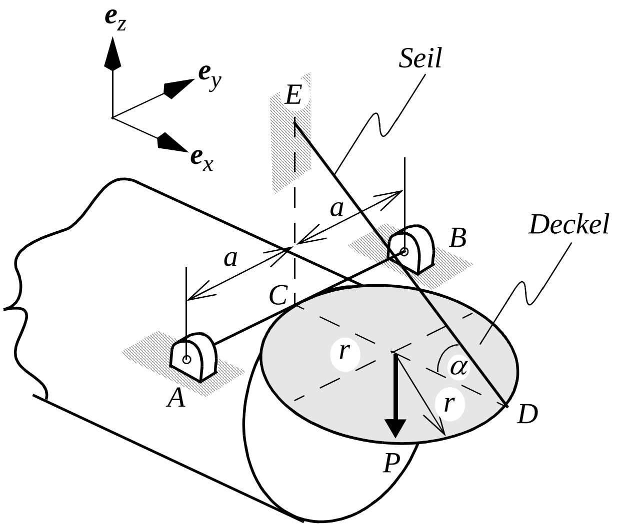
Ⓘⓘ x: $-B_x - \frac{S}{2} = 0$

y: $-B_y - P + \frac{\sqrt{3}}{2}S = 0$

M_B: $-\frac{4\sqrt{3}}{3}aP + 2aS - M_B = 0$

R: ☐ F: ☒

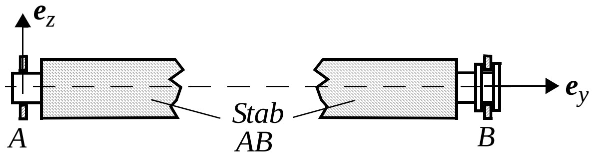
Fall 6



Deckel ist in C mit Stab AB verschweisst

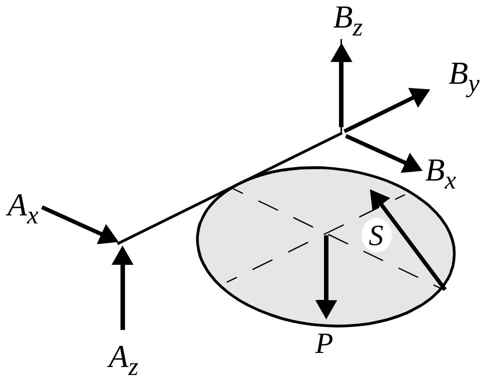
Die Kraft P zeigt in die negative z-Richtung

Schnitt entlang *AB*:



(Kurzes Querlager)

(Kurzes Querlager mit zusätzlichem Längslager)



x: $A_x + B_x - S\cos\alpha = 0$

y: $B_y = 0$

z: $A_z + B_z - P + S\sin\alpha = 0$

M_{Bx}: $-2aA_z + aP - aS\sin\alpha = 0$

M_{By}: $rP - 2rS\sin\alpha = 0$

M_{Bz}: $2aA_x - aS\cos\alpha = 0$

R: ☐ F: ☒

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Zentrum für Mechanik
IMES
Institut für Mechanische Systeme

Mechanik GZ

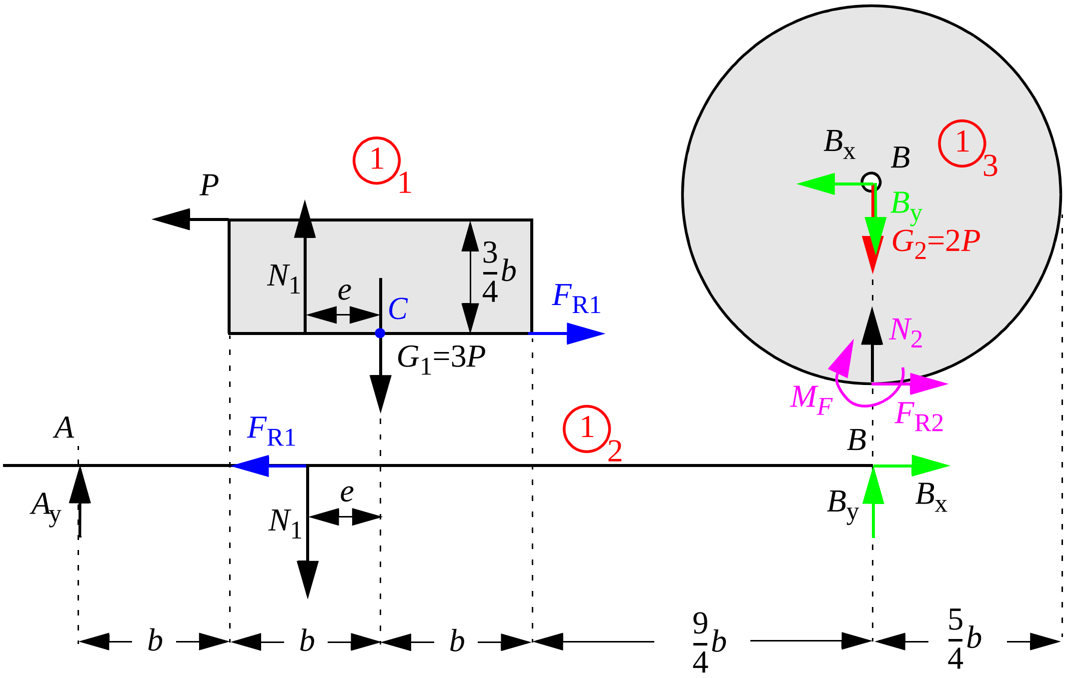
für Geomatik- und Umweltingenieurwissenschaften

Klausur III **21. Mai 2008, 10^{15} - 11^{15}**

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Frühjahrssemester 2008**

Aufgabe 1 (16 Punkte)

a)



b) Quader: R_x: $F_{R1} - P = 0 \rightarrow F_{R1} = P$ gilt $F_{R1} \le \mu_0 N_1$? Mit $\mu_0 = \frac{1}{2}$: ①$^{KR}_{6}$

①$^{KR}_{4}$ R_y: $N_1 - 3P = 0 \rightarrow N_1 = 3P$ $P \le \frac{3}{2}P$ erfüllt → haftet (rutscht nicht) ①$_7$

①$^{KR}_{5}$ M_C: $eN_1 - \frac{3}{4}bP = 0 \rightarrow e = \frac{1}{4}b \rightarrow$ gilt $e \le b$? $\frac{1}{4}b \le b$ erfüllt → kippt nicht ①$_9$

①$^{KR}_{8}$

c) Ladefläche: R_x: $B_x - F_{R1} = 0 \rightarrow B_x = P$ ①$^{KR}_{10}$

R_y: $A_y + B_y - N_1 = 0$

M_A: $\frac{7}{4}bN_1 - \frac{21}{4}bB_y = 0 \rightarrow B_y = \frac{1}{3}N_1 = P$ ①$^{KR}_{11}$

Rad: R_x: $-B_x + F_{R2} = 0 \rightarrow F_{R2} = P$ gilt $F_{R2} \le \mu_0 N_2$? Mit $\mu_0 = \frac{1}{2}$:

①$^{KR}_{12}$

R_y: $N_2 - B_y - 2P = 0 \rightarrow N_2 = 3P$ $P \le \frac{3}{2}P$ erfüllt → haftet (rutscht nicht)

①$_{14}$

M_B: $M_F - \frac{5}{4}bF_{R2} = 0$ ①$^{KR}_{13}$ $\rightarrow M_F = \frac{5}{4}bP$

①$_{16}$

①$^{KR}_{15}$ gilt $M_F \le \mu_2 N_2$? Mit $\mu_2 = \frac{1}{4}b$: $\rightarrow M_F = \frac{5}{4}bP \nleq \frac{3}{4}bP$ nicht erfüllt, das Rad rollt.

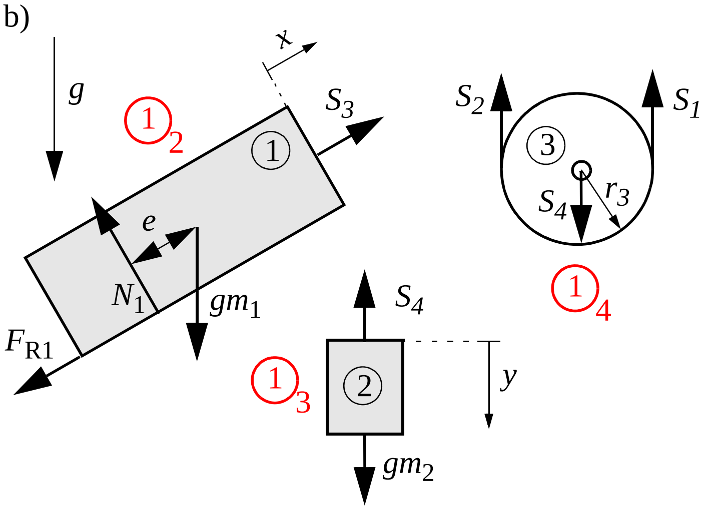
Punkteverteilung:

a)①$_{1}$ - Quader 1 richtig freigeschnitten (Skizze ohne Lagerungen, inkl. Abstand e)
①$_{2}$ - Ladeplattform richtig freigeschnitten (Skizze ohne Lagerungen, inkl. Abstand e)
①$_{3}$ - Rad richtig freigeschnitten (Skizze ohne Lagerungen, inkl. M_F)
b)①$^{KR}_{4}$ - Gleichgewicht Quader in x **und** y konsequent richtig bezüglich Zeichnung
①$^{KR}_{5}$ - Momentenbedingung Quader konsequent richtig bezüglich Zeichnung
①$^{KR}_{6}$ - Haftreibungsgesetz Quader auf Ladeplattform (eingesetzte Werte)
①$_{7}$ - Der Quader rutscht nicht (richtig berechnet)
①$^{KR}_{8}$ - Kippbedingung (eingesetzte Werte)
①$_{9}$ - Der Quader kippt nicht (richtig berechnet)
c)①$^{KR}_{10}$ - Gleichgewicht Ladeplattform in x konsequent richtig bezüglich Zeichnung
①$^{KR}_{11}$ - Momentenbedingung Ladeplattform konsequent richtig bezüglich Zeichnung
①$^{KR}_{12}$ - Gleichgewicht Rad in x **und** y konsequent richtig bezüglich Zeichnung
①$^{KR}_{13}$ - Momentenbedingung Rad konsequent richtig bezüglich Zeichnung
①$_{14}$ - Rad rutscht nicht (richtig berechnet)
①$^{KR}_{15}$ - Rollreibungsgesetz (eingesetzte Werte)
①$_{16}$ - Rad rollt (richtig berechnet)

Aufgabe 2 *(16 Punkte + 1 Bonuspunkt)*

a) Der Freiheitsgrad des Systems ist 2. ①$_{1}$

b)



c) Aus den Momentenbedingungen für Rolle 1 und Rolle 3 (masselos) folgt:

Rolle 3:

M_z: $S_1 r_3 - S_2 r_3 = 0$ ①$_{5}$

$\Rightarrow S_1 = S_2$

Rolle 1:

M_z: $S_2 r_1 - S_3 r_1 = 0$ ①$_{6}$

$\Rightarrow S_3 = S_2$

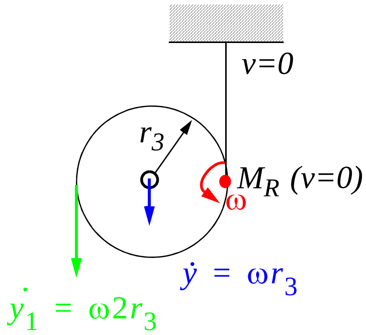
Die Seilkräfte sind also überall gleich gross, da die Rollen masselos modelliert werden. (Die Kraft einer Feder ist auf beiden Seiten gleich gross).

(Anmerkung: Die Distanz e ist im Massepunktmodell irrelevant.)

Masselose Rolle 3: $S_1 + S_2 - S_4 = 0 \quad \rightarrow S_4 = 2S_1$ ①$_{7}$

Die Seilkraft berechnet sich aus dem Federgesetz: $S_1 = S_2 = k\Delta l$

Die Verlängerung Δl berechnet sich aus der Differenz der beiden Verschiebungen *x* und *y*. Hierbei muss die kinematische Relation beim Abrollen der Rolle 3 gemäss nebenstehender Teilskizze beachtet werden:



$$\dot{y}_1 = \omega 2 r_3 = 2\dot{y} \text{ und somit } y_1 = 2y$$ ①$_{8}$

Die Verlängerung Δl der Feder ist somit:

$$\Delta l = y_1 - x = 2y - x$$ ①$^{KR}_{9}$

und die Seilkraft: $S_1 = S_2 = 2ky - kx$ ①$^{KR}_{10}$

c) Quader 1: GGW normal zu *x:* $N_1 - m_1 g \cos 30° = 0$ ①$^{KR}_{11}$ $\rightarrow N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} m_1 g$

Gleitreibung: $F_{R1} = \mu_1 N_1 \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$ ①$_{12}$ ①$_{\text{Bonus}}$ $\rightarrow F_{R1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_1 m_1 g \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$

①$^{KR}_{13}$ $m\ddot{x} = S_3 - F_{R1} - gm_1 \sin 30°$

$$m\ddot{x} = S_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_1 m_1 g \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} - \frac{1}{2} m_1 g \rightarrow m_1 \ddot{x} + kx - 2ky + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_1 \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + \frac{1}{2}\right) m_1 g = 0$$ ①$_{14}$

Quader 2: ①$^{KR}_{15}$ $m\ddot{y} = m_2 g - S_4 = m_2 g - 2S_1 \rightarrow m_2 \ddot{y} + 4ky - 2kx - m_2 g = 0$ ①$_{16}$

Punkteverteilung:

a) ①$_{1}$ - Freiheitsgrad 2

b) ①$_{2}$ - Quader 1 richtig freigeschnitten (in einer Skizze ohne Lagerungen, *e* nicht verlangt)

①$_{3}$ - Quader 2 richtig freigeschnitten (in einer Skizze ohne Lagerungen)

①$_{4}$ - Rolle 3 richtig freigeschnitten (in einer Skizze ohne Lagerungen)

c) ①$_{5}$ - $S_1 = S_2$ (Momentenbedingung um Rolle 3)

①$_{6}$ - $S_3 = S_2$ (Kraft Feder auf beiden Seiten gleich, Momentenbedingung Rolle 1)

①$_{7}$ - $S_4 = 2S_2$ (da masselos)

①$_{8}$ - $y_1 = 2y$ richtig

①$^{KR}_{9}$ - Federgesetz richtig bezüglich Zeichnung und Koordinatenrelation (Punkt 8)

①$^{KR}_{10}$ - Seilkraft konsequent richtig bezüglich Federkraft (Punkt 9)

d) ①$^{KR}_{11}$ - Gleichgewicht Quader 1 normal zu x konsequent richtig bezüglich Zeichnung

①$_{12}$ - Gleitreibungsgesetz richtig (eingesetzte Bezeichnungen)

①$^{KR}_{13}$ - Newton Quader 1 konsequent richtig bezüglich Zeichnung

①$_{14}$ - Bewegungsgleichung für Quader 1 richtig

①$^{KR}_{15}$ - Newton Quader 2 konsequent richtig bezüglich Zeichnung

①$_{16}$ - Bewegungsgleichung für Quader 2 richtig

①$_{\text{Bonus}}$ - Bonuspunkt für Vorzeichen $\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$ im Gleitreibungsgesetz des Quaders 1

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für
Mechanische Systeme

Mechanik GZ

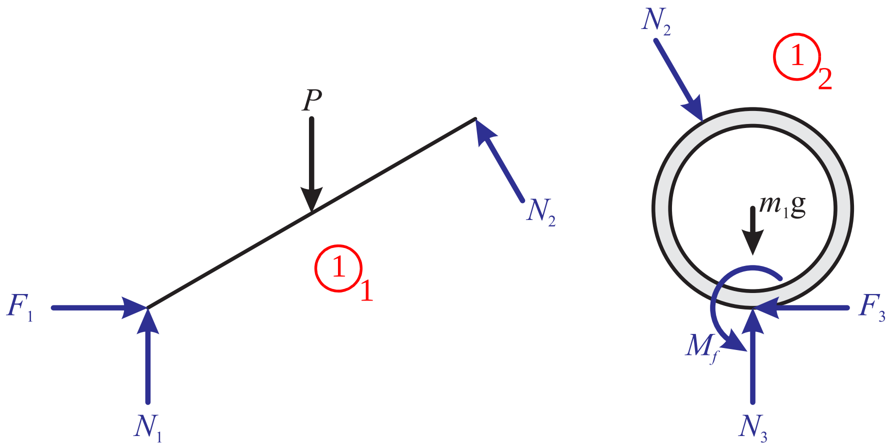
Klausur III

20. Mai 2009, 10^{15} - 11^{15}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Frühjahrssemester 2009**

Aufgabe 1 (15 Punkte)

a)



Freischneiden:
Stab:

KB(x): $F_1 - \frac{1}{2}N_2 = 0$ (I)

①$^{KR}_{3}$

KB(y): $N_1 - \frac{8}{3}m_1g + \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 = 0$ (II)

MB(A): $-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}r(2+\sqrt{3})\frac{8}{3}m_1g + r(2+\sqrt{3})N_2 = 0$ (III) ①$^{KR}_{4}$

Hohlzylinder:

KB(x): $\frac{1}{2}N_2 - F_3 = 0$ (IV)

①$^{KR}_{5}$

KB(y): $N_3 - m_1g - \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 = 0$ (V)

MB(M): $M_f - rF_3 = 0$ (VI) ①$^{KR}_{6}$

aus (III): $N_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}m_1g$ ①$_{7}$ (VII)

aus (I) mit (VII): $F_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}m_1g$ (VIII) aus (II) mit (VII): $N_1 = \frac{8}{3}m_1 g - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2\sqrt{3}}{3}m_1 g = \frac{5}{3}m_1 g$ ①$_{8}$ (IX)

aus (IV) mit (VII): $F_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}m_1 g$ (X)

①$_{9}$

aus (V) mit (VII): $N_3 = m_1 g + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2\sqrt{3}}{3}m_1 g = 2m_1 g$ (XI)

aus (VI) mit (X): $M_f = r\frac{\sqrt{3}}{3}m_1 g$ ①$_{10}$ (XII)

b) Reibung zwischen Stab und Ebene:
Haftreibungsbedingung:
$|F_1| \le \mu_0 N_1$ (XIII)

aus (XIII) mit (VIII), (IX) und $\mu_0 = \frac{2}{5}$: $\left|\frac{\sqrt{3}}{3}m_1 g\right| \le \frac{2}{5}\frac{5}{3}m_1 g$ ①$^{KR}_{11}$ $\Rightarrow$ $|\sqrt{3}| \le 2$ Bed. erfüllt!

Reibung zwischen Hohlzylinder und Ebene:
Haftreibungsbedingung:
$|F_3| \le \mu_0 N_3$ (XIV) ①$_{14}$

aus (XIV) mit (X), (XI) und $\mu_0 = \frac{2}{5}$: $\left|\frac{\sqrt{3}}{3}m_1 g\right| \le \frac{2}{5}2m_1 g$ ①$^{KR}_{12}$ $\Rightarrow$ $|\sqrt{3}| \le \frac{12}{5}$ Bed. erfüllt!

Rollreibungsbedingung:
$|M_f| \le \mu_2 N_3$ (XV)

aus (XV) mit (XI), (XII) und $\mu_2 = \frac{\sqrt{3}}{60}r$: $\left|r\frac{\sqrt{3}}{3}m_1 g\right| \le \frac{\sqrt{3}}{60}r2m_1 g$ ①$^{KR}_{13}$ $\Rightarrow$ $|1| \le \frac{1}{10}$

Bed. nicht erfüllt!

c) Nein, der Hohlzylinder beginnt als erstes wegzurollen. ①$^{KR}_{15}$

①$_{1}$ Stab richtig freigeschnitten.

①$_{2}$ Hohlzylinder richtig freigeschnitten.

①$^{\mathrm{KR}}_{3}$ Komponentenbedingung am Stab konsequent richtig zur Zeichnung.

①$^{\mathrm{KR}}_{4}$ Momentenbedingung am Stab konsequent richtig zur Zeichnung.

①$^{\mathrm{KR}}_{5}$ Komponentenbedingung am Hohlzylinder konsequent richtig zur Zeichnung.

①$^{\mathrm{KR}}_{6}$ Momentenbedingung am Hohlzylinder konsequent richtig zur Zeichnung.

①$_{7}$ Normalkraft $N_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} m_1 g$ richtig.

①$_{8}$ Normalkraft $N_1 = \frac{5}{3} m_1 g$ und Reibungskraft $F_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} m_1 g$ richtig.

①$_{9}$ Normalkraft $N_3 = 2 m_1 g$ und Reibungskraft $F_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} m_1 g$ richtig.

①$_{10}$ Rollreibungsmoment $M_f = r\frac{\sqrt{3}}{3} m_1 g$ richtig.

①$^{\mathrm{KR}}_{11}$ Haftreibungsbedingung für Stab konsequent richtig eingesetzt.

①$^{\mathrm{KR}}_{12}$ Haftreibungsbedingung für Hohlzylinder konsequent richtig eingesetzt.

①$^{\mathrm{KR}}_{13}$ Rollreibungsbedingung für Hohlzylinder konsequent richtig eingesetzt.

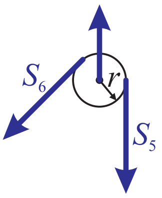
①$_{14}$ Reibungsungleichungen richtig und richtig ausgewertet.

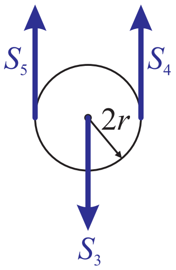
①$^{\mathrm{KR}}_{15}$ Ergebnis der Ungleichungen konsequent richtig interpretiert.

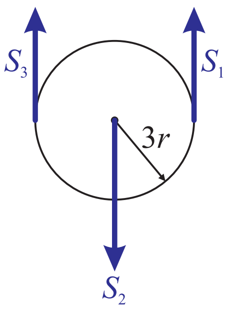
Aufgabe 2 *(13 Punkte)*

a) Der Freiheitsgrad des Systems ist 1. ①$_1$

b)







①$_2$

Rolle 1:

aus MB folgt: $S_5 \;=\; S_6$

Rolle 2: ①$_3$

aus MB folgt: $S_4 \;=\; S_5 \;=\; S_6$

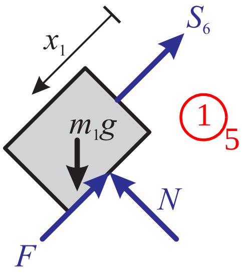
aus KB(y) folgt: $S_3 \;=\; S_4 + S_5 \;=\; 2S_5 \;=\; 2S_6$

Rolle 3:

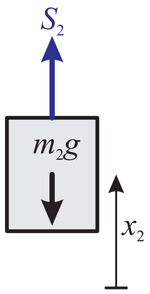
aus MB folgt: $S_1 \;=\; S_3 \;=\; 2S_6$

aus KB(y) folgt: $S_2 \;=\; S_1 + S_3 \;=\; 2S_3 \;=\; 4S_6$ ①$_4$ (I)

c)



①$_5$ ①$_6$



Körper 1:

Gleitreibungsbedingung:

$$F \;=\; \mu_1 N \;=\; \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}m_1 g \;=\; \frac{\sqrt{2}}{4}m_1 g$$ ①$_7$

Newtonsches Bewegungsgesetz:

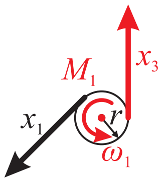
$$m_1\ddot{x}_1 \;=\; \frac{\sqrt{2}}{2}m_1 g - F - S_6 \;=\; \frac{\sqrt{2}}{2}m_1 g - \frac{\sqrt{2}}{4}m_1 g - S_6 \;=\; \frac{\sqrt{2}}{4}m_1 g - S_6$$ ①$^{\text{KR}}_8$ (II)

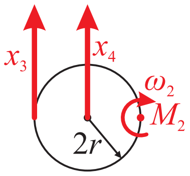
Körper 2:

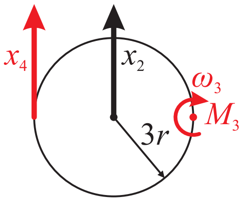
Newtonsches Bewegungsgesetz:

$$m_2\ddot{x}_2 \;=\; S_2 - m_2 g$$ ①$^{\text{KR}}_9$ (III)

d)







Rolle 1:

$$\omega_1 = \frac{\dot{x}_1}{r} = \frac{\dot{x}_3}{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_3 = \dot{x}_1$$

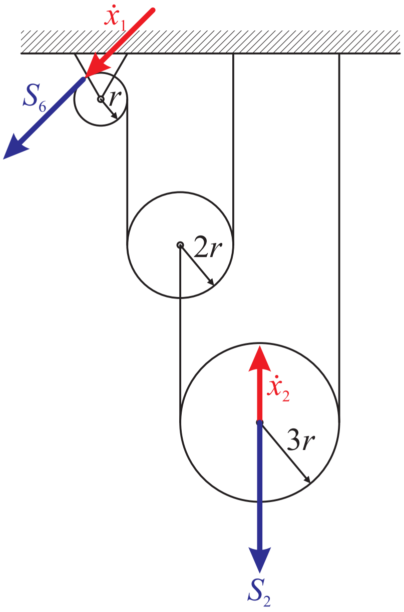
Rolle 2:

$$\omega_2 = \frac{\dot{x}_3}{4r} = \frac{\dot{x}_4}{2r} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_4 = \frac{\dot{x}_3}{2} = \frac{\dot{x}_1}{2}$$

Rolle 3:

$$\omega_3 = \frac{\dot{x}_4}{4r} = \frac{\dot{x}_2}{2r} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \frac{\dot{x}_4}{2} = \frac{\dot{x}_1}{4}$$

Alternativ mit PdvL:



$$\dot{x}_1 S_6 + \dot{x}_2(-S_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 S_6 = \dot{x}_2 4S_6$$

Kinematische Beziehung:

$\dot{x}_1 = 4\dot{x}_2$ ①$^{\text{KR}}_{10}$ ①$_{11}$ (IV)

e) Bewegungsdifferentialgleichung:

aus (III) mit (I): $m_2\ddot{x}_2 = 4S_6 - m_2 g$ (V)

aus (IV): $\ddot{x}_1 = 4\ddot{x}_2$ (VI)

aus (V) mit (VI): $m_2\ddot{x}_1 = 16S_6 - 4m_2 g$ (VII) aus (VII) mit (II): $16m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_1 = 4\sqrt{2}m_1 g - 4m_2 g$ (VIII)

aus (VIII): $\ddot{x}_1 = \dfrac{4g(\sqrt{2}m_1 - m_2)}{16m_1 + m_2}$ ①$^{\mathrm{KR}}_{12}$ ①$_{13}$

bzw.: $\ddot{x}_2 = \dfrac{g(\sqrt{2}m_1 - m_2)}{16m_1 + m_2}$

Bonus:

Anfangsbedingungen:

$x_1(0) = 0$ und $\dot{x}_1(0) = 0$ ①$_{\mathrm{B1}}$

Lösungsansatz:

$$x(t) = \frac{k}{2}t^2 + c_1 t + c_2 \text{ mit } k = \frac{4g(\sqrt{2}m_1 - m_2)}{16m_1 + m_2}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{k}{4}t + c_1$$

mit den Anfangsbedingungen gilt: $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$

Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung:

$$x_1(t) = \frac{4(\sqrt{2}m_1 - m_2)}{32m_1 + 2m_2}gt^2$$ ①$_{\mathrm{B2}}$

analog dazu für x_2:

$$x_2(t) = \frac{\sqrt{2}m_1 - m_2}{32m_1 + 2m_2}gt^2$$

①$_{1}$ FHG 1 richtig.

①$_{2}$ Die drei Rollen richtig freigeschnitten.

①$_{3}$ Ergebnis $S_3 = 2S_6$, $S_4 = S_6$ und $S_5 = S_6$ richtig.

①$_{4}$ Ergebnis $S_1 = 2S_6$ und $S_2 = 4S_6$ richtig.

①$_{5}$ Körper 1 richtig freigeschnitten.

①$_{6}$ Körper 2 richtig freigeschnitten.

①$_{7}$ Gleitreibungsbedingung $F = \frac{\sqrt{2}}{4}m_1 g$ richtig.

①$^{KR}_{8}$ Newtonsches Bewegungsgesetz für Körper 1 konsequent richtig bezüglich Zeichnung.

①$^{KR}_{9}$ Newtonsches Bewegungsgesetz für Körper 2 konsequent richtig bezüglich Zeichnung.

①$^{KR}_{10}$ Lösungsweg für Kinematische Beziehung konsequent richtig.

①$_{11}$ Kinematische Beziehung $\dot{x}_1 = 4\dot{x}_2$ richtig.

①$^{KR}_{12}$ Lösungsweg für Bewegungsdifferentialgleichung konsequent richtig.

①$_{13}$ Ergebnis $\ddot{x}_1 = \dfrac{4g(\sqrt{2}m_1 - m_2)}{16m_1 + m_2}$ bzw. $\ddot{x}_2 = \dfrac{g(\sqrt{2}m_1 - m_2)}{16m_1 + m_2}$ richtig.

①$_{B1}$ Anfangsbedingungen $x_1(0) = 0$ und $\dot{x}_1(0) = 0$ bzw. $x_2(0) = 0$ und $\dot{x}_2(0) = 0$ richtig.

①$_{B2}$ Lösung $x_1(t) = \dfrac{4(\sqrt{2}m_1 - m_2)}{32m_1 + 2m_2}gt^2$ bzw. $x_2(t) = \dfrac{\sqrt{2}m_1 - m_2}{32m_1 + 2m_2}gt^2$ richtig.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für
Mechanische Systeme

Mechanik GZ

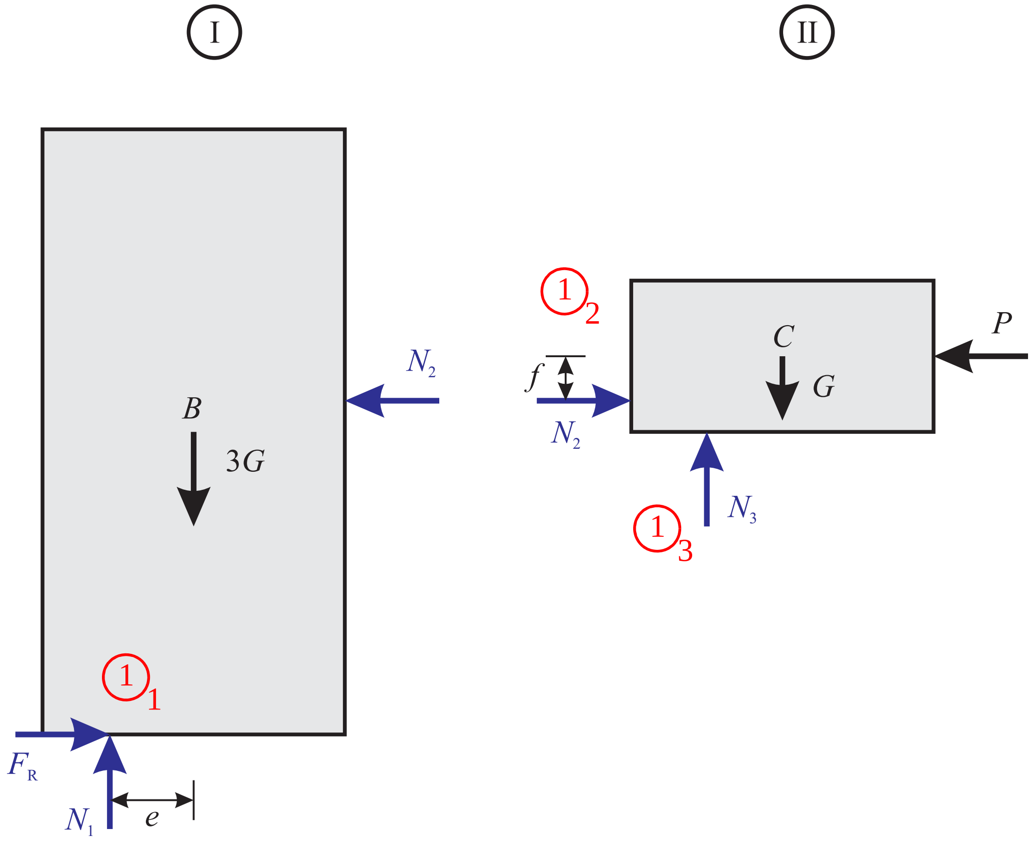
Klausur III

26. Mai 2010, 10^{15} - 11^{15}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Frühjahrssemester 2010**

Aufgabe 1 (17 Punkte)

a)



b) Körper I

KB(x): $F_R - N_2 \;=\; 0$ I)

KB(y): $N_1 - 3G \;=\; 0$ ①$^{KR}_4$ II)

MB(B,z): $-eN_1 + LF_R + \left(\frac{L}{4} - f\right)N_2 \;=\; 0$ III)

Körper II:

KB(x): $N_2 - P \;=\; 0$ IV)

KB(y): $N_3 - G \;=\; 0$ V) ①$^{KR}_5$

MB(C,z): $fN_2 - \frac{L}{4}N_3 \;=\; 0$ VI)

Daraus folgen:

$$N_2 \;=\; P\,,\; N_3 \;=\; G\,,\; f \;=\; \frac{LG}{4P}\,,\; N_1 \;=\; 3G\,,\; F_R \;=\; P \text{ und } e \;=\; L\left(\frac{5}{12}\frac{P}{G} - \frac{1}{12}\right)$$

①$_6$ ①$_7$ ①$_8$ ①$_9$ ①$_{10}$ ①$_{11}$

c) Damit der grosse Klotz nicht rutscht, muss gelten: $|F_R| \leq \mu_0 |N_1|$

Mit den Resultaten von oben ergibt sich, dass $|P| \leq \mu_0 3G$ und damit $\mu_0 \geq \dfrac{P}{3G}$ ①$_{13}$

①$^{\text{KR}}_{12}$

d) Die Bedingung, dass der kleine Klotz nicht kippt ist $|f| \leq \dfrac{L}{4}$, also $\left|\dfrac{L}{4}\dfrac{G}{P}\right| \leq \dfrac{L}{4}$. ①$^{\text{KR}}_{14}$

Die Bedingung, dass der grosse Klotz nicht kippt ist $|e| \leq \dfrac{L}{2}$, also $\left|L\left(\dfrac{5}{12}\dfrac{P}{G} - \dfrac{1}{12}\right)\right| \leq \dfrac{L}{2}$.

Aus der ersten Bedingung folgt: $P \geq G$. ①$_{15}$

Aus der zweiten Bedingung folgt: $0 \leq P \leq \dfrac{7}{5}G$. ②$_{16\text{-}17}$

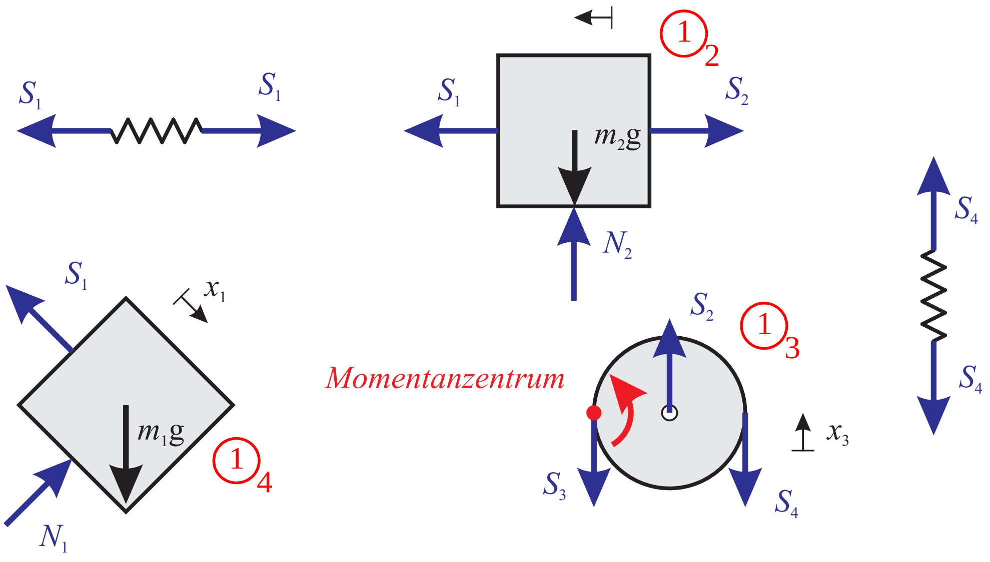
Aus den beiden Bedingungen folgt dann $G \leq P \leq \dfrac{7}{5}G$.

①$_{1}$	Normalkraft, Reibungskraft und Abstand eingeführt
①$_{2}$	Abstand und Normalkraft eingeführt, an beiden Klötzen
①$_{3}$	Normalkraft eingeführt
①$^{KR}_{4}$	Gleichgewicht am Körper I k.r. zur Zeichnung
①$^{KR}_{5}$	Gleichgewicht am Körper II k.r. zur Zeichnung
①$_{6}$	N_2 richtig
①$_{7}$	N_3 richtig
①$_{8}$	f richtig
①$_{9}$	N_1 richtig
①$_{10}$	F_R richtig
①$_{11}$	e richtig
①$^{KR}_{12}$	Formel k.r. eingesetzt von oben
①$_{13}$	Resultat für μ_0 richtig
①$^{KR}_{14}$	Beide Kippbedingungen k.r. zur Zeichnung
①$_{15}$	Bedingung für P aus 1. Kippbedingung richtig
②$_{16\text{-}17}$	Intervall für P aus 2. Kippbedingung richtig (1 Punkt pro Bedingung)

Aufgabe 2 *(13 Punkte)*

a) Das System hat den Freiheitsgrad 2.①$_{1}$

b)



c) Anmerkung: Eigentlich handelt es sich hier um ein Problem der Dynamik und es müssten der Massenmittelpunktsatz sowie der Drallsatz gelöst werden. Da die Rolle masselos ist, fallen jedoch die entsprechenden Terme heraus und es ergibt sich ein statisches Problem.
Die relevanten Gleichgewichtsbedingungen sind:

KB(y): $S_2 - S_3 - S_4 = 0$

MB(z): $2RS_3 - 2RS_4 = 0$ ①$^{\text{KR}}_{5}$

Daraus folgt $S_2 = 2S_4$ ①$_{6}$

Des weiteren findet man mit Hilfe vom Satzes vom Momentanzentrum $x_2 = \frac{1}{2}x_3$.①$_{7}$

d) Die Federkräfte sind:

①$_{8}$ $S_4 = kx_3$ und $S_1 = k(x_1 - x_2)$ ①$_{9}$

e) Die Bewegungsdifferentialgleichungen sind:

$$m_1\ddot{x}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}m_1g - S_1$$ ①$^{\text{KR}}_{10}$

$$m_2\ddot{x}_2 = S_1 - S_2$$ ①$^{\text{KR}}_{11}$

f) Alle Werte eingesetzt liefert das:

$$m_1\ddot{x}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}m_1g - k(x_1 - x_2)$$ ①$_{12}$

$$m_2\ddot{x}_2 = kx_1 - 5kx_2$$ ①$_{13}$

①$_{1}$ Freiheitsgrad richtig

①$_{2}$ Klotz 2 richtig freigeschnitten

①$_{3}$ Rolle richtig freigeschnitten

①$_{4}$ Klotz 1 richtig freigeschnitten

①$^{KR}_{5}$ Gleichgewichtsbedingungen k.r. zur Zeichnung

①$_{6}$ Beziehung für Seilkräfte richtig

①$_{7}$ Beziehung für Koordinaten richtig

①$_{8}$ Federkraft S_4 richtig

①$_{9}$ Federkraft S_1 richtig

①$^{KR}_{10}$ Newton für x_1-Koordinate k.r. zur Zeichnung

①$^{KR}_{11}$ Newton für x_2-Koordinate k.r. zur Zeichnung

①$_{12}$ DG für x_1-Koordinate richtig

①$_{13}$ DG für x_2-Koordinate richtig

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mechanik GZ

IMES
Institut für
Mechanische Systeme

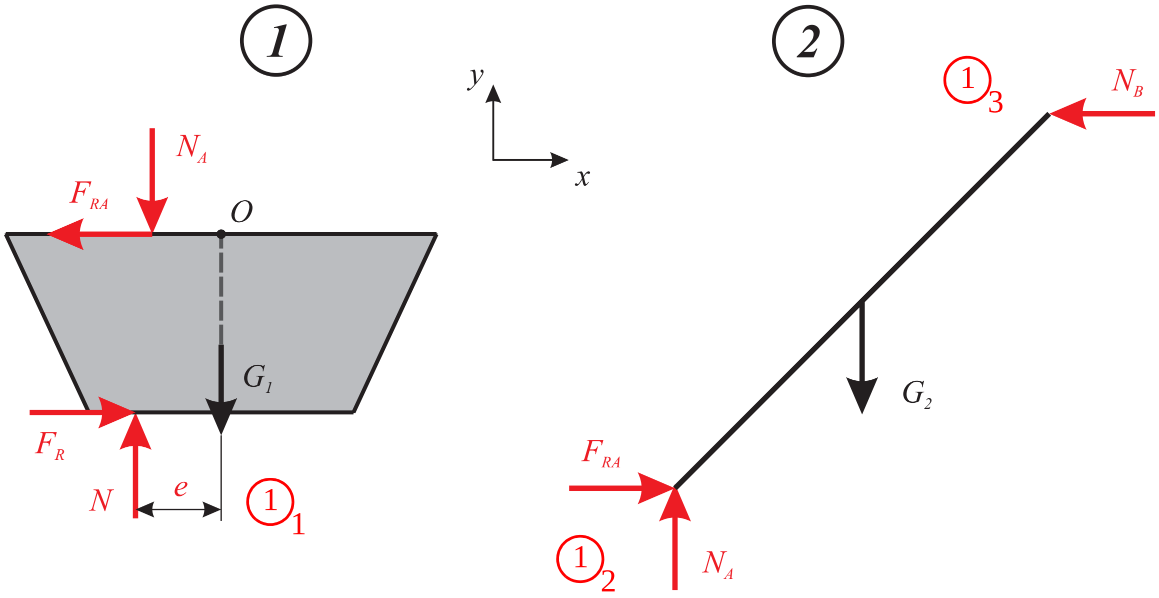
Klausur III

25. Mai 2011, 10^{15} - 11^{15}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Frühjahrssemester 2011**

Aufgabe 1 *(18 Punkte)*

a) Freigeschnittenes System



Gleichgewichtsbedingungen Mulde:

KB(x): $F_R - F_{RA} = 0$ (I)

①$^{KR}_{4}$

KB(y): $N - N_A - G_1 = 0$ (II)

MB(O,z): $\frac{1}{4}LN_A + HF_R - eN = 0$ ①$^{KR}_{5}$ (III)

Gleichgewichtsbedingungen Stahlträger:

KB(x): $F_{RA} - N_B = 0$ (IV)

①$^{KR}_{6}$

KB(y): $N_A - G_2 = 0$ (V)

MB(A,z): $\frac{\sqrt{2}}{2}2LN_B - \frac{\sqrt{2}}{2}LG_2 = 0$ ①$^{KR}_{7}$ (VI)

Gesuchte Kräfte und Kraftangriffspunkt:

(VI) $N_B = \frac{1}{2}G_2$ ①$_{8}$

(IV) $F_{RA} = N_B = \frac{1}{2}G_2$ ①$_{9}$

(V) $N_A = G_2$ ①$_{10}$

(I) $F_R = F_{RA} = \frac{1}{2}G_2$ ①$_{11}$

(II) $N = G_1 + G_2$ ①$_{12}$

(III) $e = \frac{1}{4}(L + 2H)\frac{G_2}{G_1 + G_2}$ ①$_{13}$

b) Damit das System in Ruhe ist, müssen beide Haftbedingungen $|\boldsymbol{F}_R| \le \mu_0|\boldsymbol{N}|$ erfüllt sein.

unten: $\frac{1}{2}G_2 < \mu_{01}(G_1 + G_2)$ $\rightarrow \mu_{01} > \frac{G_2}{2(G_1 + G_2)}$ ①$_{15}$

①$^{KR}_{14}$

oben: $\frac{1}{2}G_2 < \mu_{02}G_2$ $\rightarrow \mu_{02} > \frac{1}{2}$ ①$_{16}$

c) Um das Kippen zu verhindern, kann der Angriffspunkt der Normalkraft maximal am Rand der Mulde sein.

$$|e| < \frac{1}{2}L$$

①$^{KR}_{17}$

$$\frac{1}{4}\left(L + 2\frac{3}{4}L\right)\frac{G_2}{G_1 + G_2} < \frac{1}{2}L$$

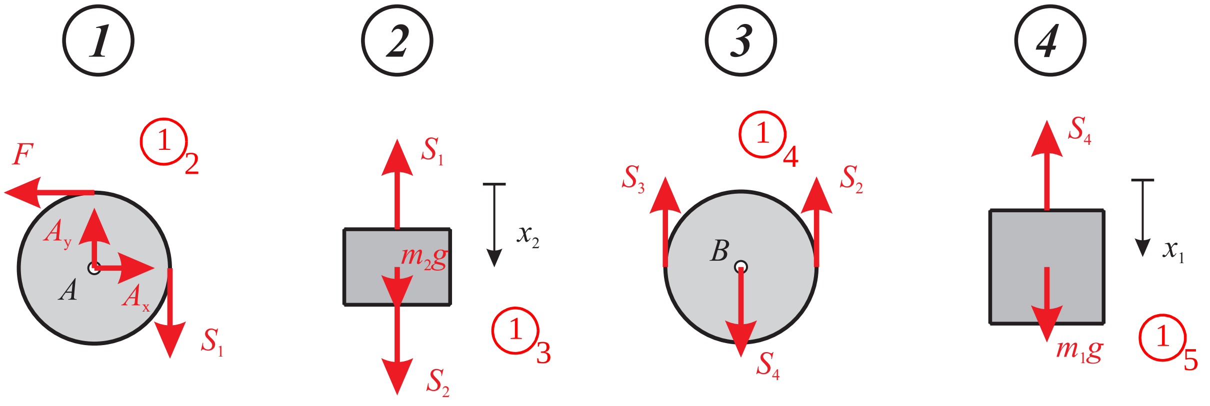
$\rightarrow G_2 < 4G_1$ ①$_{18}$

①$_{1}$	Korrekt freigeschnitten: Normalkraft, Reibungskraft, Abstand e
①$_{2}$	Korrekt freigeschnitten: Normalkraft, Reibungskraft
①$_{3}$	Korrekt freigeschnitten: nur Normalkraft, keine Reibung
①$^{KR}_{4}$	Komponentenbedingung in x- und y- Richtung konsequent richtig zu Skizze
①$^{KR}_{5}$	Momentenbedingung konsequent richtig zu Skizze
①$^{KR}_{6}$	Komponentenbedingung in x- und y- Richtung konsequent richtig zu Skizze
①$^{KR}_{7}$	Momentenbedingung konsequent richtig zu Skizze
①$_{8}$	Normalkraft Stab oben richtig
①$_{9}$	Reibungskraft zwischen Stab und Mulde richtig
①$_{10}$	Normalkraft zwischen Stab und Mulde richtig
①$_{11}$	Reibungskraft zwischen Mulde und Boden richtig
①$_{12}$	Normalkraft zwischen Mulde und Boden richtig
①$_{13}$	Kraftangriffspunkt der Normalkraft richtig
①$^{KR}_{14}$	Konsequent richtige Anwendung der Haftbedingung (ein mal)
①$_{15}$	Richtige Bedingung für μ_{01}
①$_{16}$	Richtige Bedingung für μ_{02}
①$^{KR}_{17}$	Konsequent richtige Anwendung der Idee
①$_{18}$	Richtige Bedingung für Gewicht G_2

Aufgabe 2 *(15 Punkte)*

a) Der Freiheitsgrad des Systems ist 1. ①$_{1}$

b) Freigeschnittenes System



c) Die Bewegungsdifferentialgleichungen für die beiden Massen lauten:

Masse 1: $m_1\ddot{x}_1 = m_1g - S_4$ ①$^{KR}_{6}$ (1)

Masse 2: $m_2\ddot{x}_2 = m_2g + S_2 - S_1$ ①$^{KR}_{7}$ (2)

d) Beachte: Es handelt sich hier um ein Problem der Dynamik. Eigentlich müsste für die Rollen der Drallsatz aufgestellt werden. Da diese aber masselos sind, verschwindet der Drall und es kann mit den Methoden der Statik gearbeitet werden.

Federkraft: $F = cx_2$

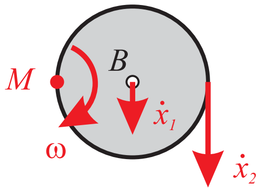
System 1: MB(A,z): $RF - RS_1 = 0$ ①$^{KR}_{8}$ $\rightarrow F = S_1 = cx_2$ ①$_{9}$

System 3: KB(x$_2$): $S_2 + S_3 - S_4 = 0$

MB(B,z): $RS_2 - RS_3 = 0$ ①$^{KR}_{10}$ $\rightarrow S_2 = S_3$

$\rightarrow S_4 = 2S_2$ ①$_{11}$

e) Da die untere Rolle auf dem Seilabschnitt (3) abrollt, liegt das Momentanzentrum der Rolle auf der linken Seite.



$\dot{x}_2 = 2R\omega$

$\dot{x}_1 = R\omega$ $\dot{x}_2 = 2\dot{x}_1$ ①$_{12}$

f) Aus der kinematischen Relation folgen weitere nützliche Beziehungen:

$$x_2 = 2x_1 \qquad \ddot{x}_2 = 2\ddot{x}_1$$ ①$_{13}$

Multiplikation von Gleichung (2) mit 2 und Addition mit Gleichung (1) sowie Einsetzen obiger Resultate führt auf die gesuchte Differentialgleichung in x_1.

(1) $$m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - 2S_2$$

(2) $$m_2\ddot{x}_2 = m_2 g + S_2 - cx_2$$

$$\rightarrow (m_1 + 4m_2)\ddot{x}_1 + 4cx_1 = (m_1 + 2m_2)g$$

$$\rightarrow \ddot{x}_1 + \frac{4c}{m_1 + 4m_2}x_1 = \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + 4m_2}g$$ ②$_{14,15}$

①$_{1}$ Richtige Antwort

①$_{2}$ Obere Rolle richtig freigeschnitten

①$_{3}$ Masse 2 richtig freigeschnitte

①$_{4}$ Untere Rolle richtig freigeschnitten

①$_{5}$ Masse 1 richtig freigeschnitten

①$^{KR}_{6}$ Bewegungsdifferentialgleichung Masse 1 konsequent richtig zu Skizze

①$^{KR}_{7}$ Bewegungsdifferentialgleichung Masse 2 konsequent richtig zu Skizze

①$^{KR}_{8}$ Momentenbedingung Rolle oben konsequent richtig zu Skizze

①$_{9}$ Richtiges Resultat für Federkraft und Seilkraft in Abschnitt 1

①$^{KR}_{10}$ Komponenten- und Momentenbedingung für untere Rolle konsequent richtig zu Skizze

①$_{11}$ Richtige Beziehung zwischen Seilkräften in Abschnitten (2) und (4)

①$_{12}$ Kinematische Relation richtig

①$_{13}$ Erzeugung von weiteren Beziehungen aus der kinematischen Relation

②$_{14\text{-}15}$ Reduktion auf eine Differentialgleichung in x_1

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Zentrum für Mechanik
IMES Institut für Mechanische Systeme

Technische Mechanik

für D-ITET

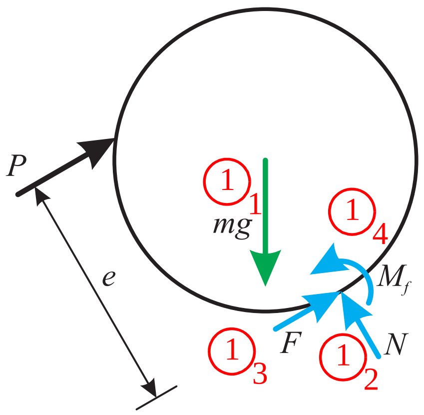
Klausur III

09. Dezember 2008, 9^{15} - 10^{00}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Herbstsemester 2008**

Aufgabe 1

a)



$$KB(x): \quad P+F-\frac{1}{2}mg = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{2}mg-P$$ ①$_5^{KR}$

$$KB(y): \quad N-\frac{\sqrt{3}}{2}mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$$ ①$_6^{KR}$

$$MB(B): \quad M_f+\frac{1}{2}rmg-eP = 0 \quad \Rightarrow \quad M_f = eP-\frac{1}{2}rmg$$ ①$_7^{KR}$

b) $|F| \le \mu_0 N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{2}mg-P\right| \le \mu_0\frac{\sqrt{3}}{2}mg$

$$\Rightarrow \quad -\mu_0\frac{\sqrt{3}}{2}mg \le \frac{1}{2}mg-P \le \mu_0\frac{\sqrt{3}}{2}mg$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}-\mu_0\frac{\sqrt{3}}{2}\right)mg \le P \le \left(\frac{1}{2}+\mu_0\frac{\sqrt{3}}{2}\right)mg$$ ①$_8$ ①$_9$ ①$_{10}$ ①$_{11}$

(ausserdem muss $P \ge 0$ gelten)

c) $|M_f| \le \mu_2 N \quad \Rightarrow \quad \left|eP-\frac{1}{2}rmg\right| \le \mu_2\frac{\sqrt{3}}{2}mg$

$$\Rightarrow \quad -\mu_2\frac{\sqrt{3}}{2}mg \le eP-\frac{1}{2}rmg \le \mu_2\frac{\sqrt{3}}{2}mg$$

$$\left(\frac{1}{2}r-\mu_2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{mg}{P} \le e \le \left(\frac{1}{2}r+\mu_2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{mg}{P}$$ ①$_{12}$ ①$_{13}$ ①$_{14}$ ①$_{15}$

(ausserdem muss $0 \le e \le 2r$ gelten)

Punkteverteilung:

$(1)_1$: Gewichtskraft richtig eingeführt.

$(1)_2$: Normalkraft richtig eingeführt.

$(1)_3$: Haftreibungskraft richtig eingeführt.

$(1)_4$: Rollreibungsmoment richtig eingeführt.

$(1)_5^{KR}$: Reibungskraft konsequent richtig bezüglich Zeichnung ausgerechnet.

$(1)_6^{KR}$: Normalkraft konsequent richtig bezüglich Zeichnung ausgerechnet.

$(1)_7^{KR}$: Rollreibungsmoment konsequent richtig bezüglich Zeichnung ausgerechnet.

$(1)_8$: Untere Grenze von P richtig.

$(1)_9$: Untere Grenze richtig als Ungleichung formuliert.

$(1)_{10}$: Obere Grenze von P richtig.

$(1)_{11}$: Obere Grenze richtig als Ungleichung formuliert.

$(1)_{12}$: Untere Grenze von e richtig.

$(1)_{13}$: Untere Grenze richtig als Ungleichung formuliert.

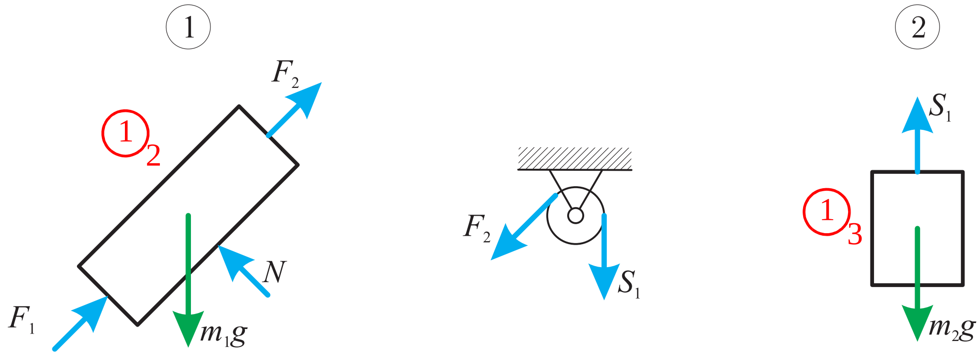
$(1)_{14}$: Obere Grenze von e richtig.

$(1)_{15}$: Obere Grenze richtig als Ungleichung formuliert.

Aufgabe 2

a) Der Freiheitsgrad des Systems ist 2. ①$_{1}$

b)



(Körper 1): $F_1 = c_1x_1$ ①$^{KR}_{4}$ $F_2 = c_2(x_1+x_2)$ ①$^{KR}_{5}$ ①$_{6}$

$$m_1\ddot{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}m_1g - F_1 - F_2$$

(Rolle): $F_2 = S_1$ ①$^{KR}_{7}$

(Körper 2): $m_2\ddot{x}_2 = m_2g - S_1$

$\Rightarrow S_1 = c_2(x_1+x_2)$ ①$_{8}$

c) (Körper 1): $m_1\ddot{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}m_1g - c_1x_1 - c_2(x_1+x_2)$ ①$_{9}$ ①$_{10}$ ①$^{KR}_{11}$

(Körper 2): $m_2\ddot{x}_2 = m_2g - c_2(x_1+x_2)$ ①$_{12}$ ①$_{13}$ ①$^{KR}_{14}$

Punkteverteilung:

$(1)_1$: Freiheitsgrad richtig.

$(1)_2$: Körper 1 richtig freigeschnitten.

$(1)_3$: Körper 2 richtig freigeschnitten.

$(1)_4^{KR}$: Federkraft F_1 konsequent richtig bezüglich Zeichnung berechnet.

$(1)_5^{KR}$: Federkraft F_2 konsequent richtig bezüglich Zeichnung berechnet.

$(1)_6$: Verlängerung der Feder 2 richtig.

$(1)_7^{KR}$: Momentenbedingung an Rolle konsequent richtig.

$(1)_8$: Seilkraft $S_1 = c_2(x_1 + x_2)$ richtig berechnet.

$(1)_9$: In Bewegungsdifferentialgleichung für Körper 1 “$m_1\ddot{x}_1$“ richtig.

$(1)_{10}$: In Bewegungsdifferentialgleichung für Körper 1 “$\frac{1}{\sqrt{2}}m_1 g - c_1 x_1$“ richtig.

$(1)_{11}^{KR}$: In Bewegungsdifferentialgleichung für Körper 1 “$-c_2(x_1 + x_2)$“ k. r. VZ richtig.

$(1)_{12}$: In Bewegungsdifferentialgleichung für Körper 2 “$m_2\ddot{x}_2$“ richtig.

$(1)_{13}$: In Bewegungsdifferentialgleichung für Körper 2 “$m_2 g$“ richtig.

$(1)_{14}^{KR}$: In Bewegungsdifferentialgleichung für Körper 2 “ $-c_2(x_1 + x_2)$ “ k. r. VZ richtig.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für
Mechanische Systeme

Technische Mechanik

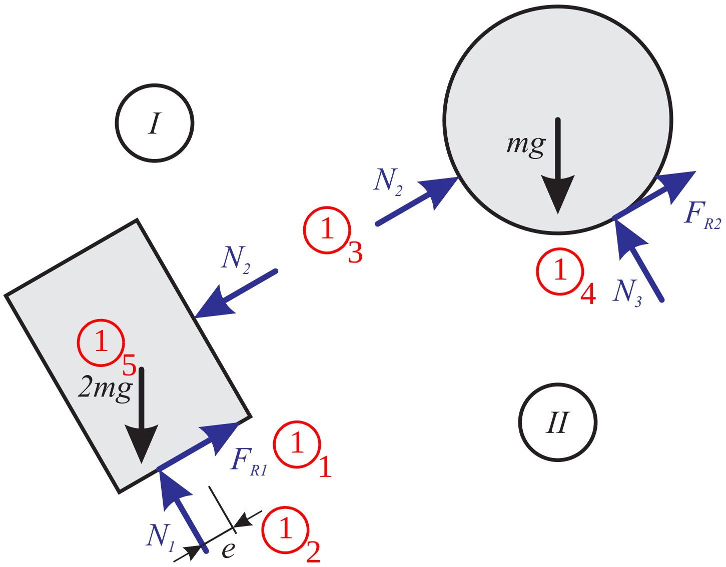
Klausur III

8. Dezember 2009, 09^{15} - 10^{00}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Herbstsemester 2009**

Aufgabe 1 (18 Punkte)

a)



Komponenten- und Momentenbedingungen des Systems I

KB(x): $F_{R1} - N_2 - \frac{1}{2}2mg \;=\; 0$ ①$^{KR}_{6}$

KB(y): $N_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}2mg \;=\; 0$ ①$^{KR}_{7}$

MB(C_1): $\frac{b}{2}F_{R1} - eN_1 \;=\; 0$

Komponenten- und Momentenbedingungen des Systems II

KB(x): $N_2 + F_{R2} - \frac{1}{2}mg \;=\; 0$

KB(y): $N_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}mg \;=\; 0$

MB(C_2): $\frac{b}{2}F_{R2} \;=\; 0$

①$^{KR}_{8}$

Daraus folgen:

$$F_{R2} \;=\; 0\,,\; N_3 \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}mg\,,\; N_2 \;=\; \frac{1}{2}mg\,,\; N_1 \;=\; \sqrt{3}mg\,,\; e \;=\; \frac{\sqrt{3}}{4}b\,,\; F_{R1} \;=\; \frac{3}{2}mg$$

①$_9$ ①$_{10}$ ①$_{11}$ ①$_{12}$ ①$_{13}$ ①$_{14}$

c) Damit der Klotz haftet muss gelten

$|F_{R1}| \leq \mu_0 |N_1|$, also $\frac{3}{2}mg \leq \mu_0\sqrt{3}mg$ ①$^{\text{KR}}_{15}$

Daraus folgt: $\mu_0 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ①$_{16}$

c) Damit der Klotz nicht kippt muss gelten

$\frac{a}{2} \geq |e| \;=\; \frac{\sqrt{3}}{4}b$. Daraus folgt: $a \geq \frac{\sqrt{3}}{2}b$

①$^{\text{KR}}_{17}$ ①$_{18}$

①$_{1}$ Einführen der Normal- und Reibungskraft am Klotz

①$_{2}$ Einführen von e

①$_{3}$ Einführen der Reaktionskraft, actio=raction

①$_{4}$ Einführen der Normal- und Reibungskraft am Zylinder

①$_{5}$ Einführen der Gewichtskraft an Zylinder und Klotz. mG ist falsch und gibt -1P.

①$^{KR}_{6}$ Komponentenbedingung in x-Richtung k.r. bez. Skizze

①$^{KR}_{7}$ Komponentenbedingung in y-Richtung k.r. bez. Skizze

①$^{KR}_{8}$ Komponenten- und Momentenbedinungen k.r. bez. Skizze.

①$_{9}$ F_{R2} richtig

①$_{10}$ N_3 richtig

①$_{11}$ N_2 richtig

①$_{12}$ N_1 richtig

①$_{13}$ e richtig

①$_{14}$ F_{R1} richtig

①$^{KR}_{15}$ Haftbedinung richtig eingesetzt von oben

①$_{16}$ Bedingung für μ_0 richtig

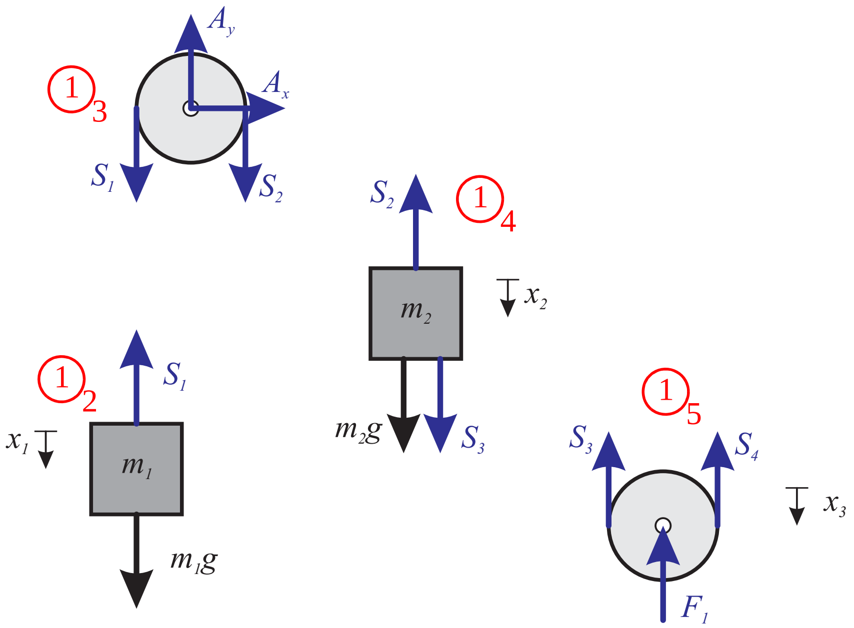
①$^{KR}_{17}$ Bedingung für e resp. a und von oben richtig eingesetzt

①$_{18}$ Bedingung für a richtig

Aufgabe 2 *(20 Punkte)*

a) Der Freiheitsgrad beträgt 1 ①$_{1}$

b)



c) Beachte: Es handelt sich hier um eine Problem der Dynamik, d.h. für die Rollen müssten Impuls- und Drallsatz aufgestellt werden. Da diese aber masselos sind fallen die entsprechenden Terme heraus und das Problem kann mit den Methoden der Statik gelöst werden.

Die Gleichgewichtsbedingungen an der linken Rolle sind:

KB(x): $S_1 + S_2 - A_y = 0$

KB(y): $A_x = 0$

MB(C_1): $RS_1 - RS_2 = 0$ ①$_{6}$

Sie liefern:

$S_2 = S_1$, ①$_{7}$

$A_x = 0$, $A_y = 2S_1$

Die Gleichgewichtsbedingungen an der rechten Rolle sind:

KB(y): $S_3 + S_4 + F_1 = 0$ ①$^{KR}_{8}$

MB(C_2): $RS_4 - RS_3 = 0$ ①$^{KR}_{9}$

Sie liefern:

$S_4 = S_3$, $F_1 = -2S_3$ ①$_{10}$

Die Federkraft ist: $F_1 = cx_3$. ①$_{11}$

d) Die Bewegungsdifferenzialgeleichungen lauten

$m_1\ddot{x}_1 = m_1g - S_1$ ①$^{KR}_{12}$

$m_2\ddot{x}_2 = m_2g + S_3 - S_2$ ①$^{KR}_{13}$

e) Es gilt:

$\dot{x}_1 \; = \; -\dot{x}_2$ ①$_{14}$

Das Momentanzentrum der rechten Rolle liegt an ihrem rechten Rand, wo das Seil aufliegt.

Also $\dot{x}_3 \; = \; -\frac{1}{2}\dot{x}_1$ ①$_{15}$

f) Einsetzen der Käfte S_2 und S_3 liefert aus der zweiten Differenziagleichung

$$m_2\dot{x}_2 \; = \; m_2 g - \frac{1}{2}c x_3 - S_1$$

Zusammen mit der ersten Differentialgleichung kann S_1 eliminiert werden. Das liefert zusammen mit den kinematischen Beziehungen:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + \frac{1}{4}c x_1 \; = \; (m_1 - m_2)g$$ ⑤$_{16\text{-}20}$

①$_{1}$ Freiheitsgrad 1

①$_{2}$ Körper 1 richtig freigeschnitten

①$_{3}$ Linke Rolle richtig freigeschnitten

①$_{4}$ Körper 2 richtig freigeschnitten

①$_{5}$ Rechte Rolle richtig freigeschnitten

①$_{6}$ Momentenbedingung für die linke Rolle

①$_{7}$ $S_1 = S_2$

①$^{KR}_{8}$ Komponentenbedingung in y-Richtung an der rechten Rolle

①$^{KR}_{9}$ Momentenbedingung an der rechten Rolle

①$_{10}$ $S_3 = S_4$

①$_{11}$ Federkraft richtig

①$^{KR}_{12}$ Bewegungsdifferentialgleichung für x_1 k.r. bezüglich Zeichnung

①$^{KR}_{13}$ Bewegungsdifferentialgleichung für x_2 k.r. bezüglich Zeichnung

①$_{14}$ Kinematische Relation zwischen x_1 und x_2 richtig

①$_{15}$ Kinematische Relation zwischen x_1 und x_3 richtig

⑤$_{16-20}$ Differentialgleichung richtig

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMES
Institut für
Mechanische Systeme

Technische Mechanik

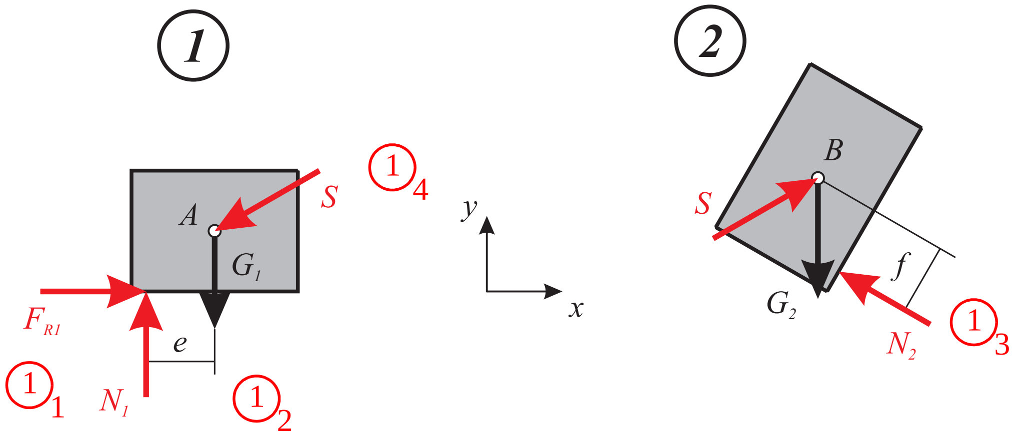
Klausur III

14. Dezember 2010, 08^{15} - 09^{00}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Herbstsemester 2010**

Aufgabe 1 (18 Punkte)

a) Freigeschnittenes System



Körper 1:

KB(x): $F_{R1} - \frac{\sqrt{3}}{2}S = 0$ 1)

①$^{\mathrm{KR}}_{5}$

KB(y): $N_1 - G_1 - \frac{1}{2}S = 0$ 2)

MB(A,z): $\frac{1}{2}bF_{R1} - eN_1 = 0$ ①$^{\mathrm{KR}}_{6}$ 3)

Körper 2:

KB(x): $\frac{\sqrt{3}}{2}S - \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 = 0$ 4)

①$^{\mathrm{KR}}_{7}$

KB(y): $\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}N_2 - G_2 = 0$ 5)

MB(B,z): $-fN_2 = 0$ ①$^{\mathrm{KR}}_{8}$ 6)

Lösung des Gleichungssystems:

4) $N_2 = S$

5) $N_2 = S = G_2$ ①$_{9}$ ①$_{10}$

6) $f = 0$ ①$_{11}$

1) $F_{R1} = \frac{\sqrt{3}}{2}G_2$ ①$_{12}$

2) $N_1 = G_1 + \frac{1}{2}G_2$ ①$_{13}$

3) $e = \frac{G_2}{G_1 + \frac{1}{2}G_2}\frac{\sqrt{3}}{4}b = \frac{\sqrt{3}G_2}{2(2G_1 + G_2)}b$ ①$_{14}$

b) Damit das System in Ruhe ist, muss die Haftbedingung $|\boldsymbol{F}_R| \leq \mu_0 |\boldsymbol{N}|$ erfüllt sein.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}G_2 \leq \mu_0\left(G_1 + \frac{1}{2}G_2\right)$$ ①$^{KR}_{15}$

$$\mu_0 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{G_2}{G_1}\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{G_2}{G_1}} = \sqrt{3}\frac{G_2}{2G_1 + G_2}$$ ①$_{16}$

c) Um das Kippen zu verhindern, kann der Angriffspunkt der Normalkraft maximal am Rand des Körpers liegen.

$$|e| \leq \frac{a}{2}$$ ①$_{17}$

$$a \geq 2e = \frac{G_2}{G_1}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{G_2}{G_1}}b = \frac{\sqrt{3}G_2}{2G_1 + G_2}b$$

$$a \geq \frac{\sqrt{3}}{2}b$$ ①$_{18}$

①$_{1}$ Normal- und Reibungskraft eingeführt

①$_{2}$ Abstand e eingeführt

①$_{3}$ Normalkraft eingeführt (keine Reibung)

①$_{4}$ Stabkraft eingeführt

①$^{KR}_{5}$ Komponentenbedingungen konsequent richtig bezüglich Skizze

①$^{KR}_{6}$ Momentenbedingung konsequent richtig bezüglich Skizze

①$^{KR}_{7}$ Komponentenbedingungen konsequent richtig bezüglich Skizze

①$^{KR}_{8}$ Momentenbedingung konsequent richtig bezüglich Skizze

①$_{9}$ Normalkraft N_2 richtig

①$_{10}$ Stabkraft S richtig

①$_{11}$ Abstand f richtig bzw. auf Skizze richtig eingeführt

①$_{12}$ Reibungskraft richtig

①$_{13}$ Normalkraft N_1 richtig

①$_{14}$ Abstand e richtig

①$^{KR}_{15}$ Haftbedingung konsequent richtig bezüglich F_{R1} und N_1 angewendet

①$_{16}$ Bedingung für μ_0 richtig

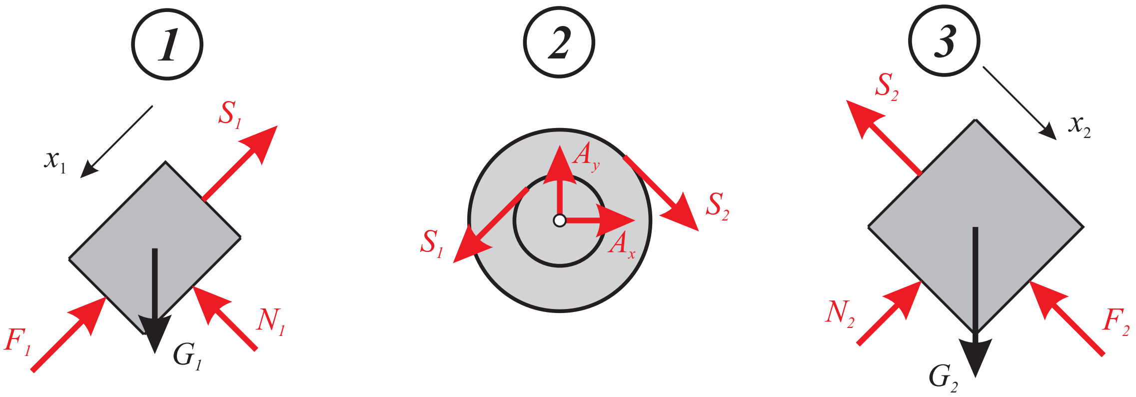
①$_{17}$ Richtige Idee $e \leq \frac{a}{2}$

①$_{18}$ Resultat für a richtig

Aufgabe 2 *(15 Punkte)*

a) Der Freiheitsgrad des Systems ist 1. ①$_{1}$

b) Freigeschnittenes System



①$_{2}$ ①$_{3}$ ①$_{4}$

c) Beachte: Es handelt sich hier um Problem der Dynamik. Eigentlich müsste für die Rolle der Drallsatz aufgestellt werden. Da diese aber masselos ist, verschwindet der Drall und es kann mit den Methoden der Statik gearbeitet werden.

Gleichgewichtsbedingungen für die Rolle:

KB(x): $$A_x + \frac{\sqrt{2}}{2}S_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}S_1 = 0 \qquad 1)$$

①$^{\mathrm{KR}}_{5}$

KB(y): $$A_y - \frac{\sqrt{2}}{2}S_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}S_2 = 0 \qquad 2)$$

MB(A,z): $$R_1S_1 - R_2S_2 = 0 \qquad 3)$$

①$^{\mathrm{KR}}_{6}$

$$\rightarrow S_1 = \frac{R_2}{R_1}S_2$$ ①$_{7}$

d) Die Beziehungen für die Federkräfte sind:

Feder 1: $$F_1 = c_1x_1 \qquad 4)$$ ①$^{\mathrm{KR}}_{8}$

Feder 2: $$F_2 = c_2x_2 \qquad 5)$$ ①$^{\mathrm{KR}}_{9}$

Die Bewegungsdifferentialgleichungen für die Körper in den gegebenen Koordinaten lauten:

Körper 1: $m_1\ddot{x}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}G_1 - F_1 - S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}m_1 g - c_1 x_1 - S_1$ ①$^{\text{KR}}_{10}$ 6)

Körper 2: $m_2\ddot{x}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}G_2 - F_2 - S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}m_2 g - c_2 x_2 - S_2$ ①$^{\text{KR}}_{11}$ 7)

e) Es gilt: $\frac{\dot{x}_1}{R_1} = -\frac{\dot{x}_2}{R_2}$ bzw. $\dot{x}_2 = -\frac{R_2}{R_1}\dot{x}_1$ ①$_{12}$ 8)

f) Aus den kinematischen Relationen ergibt sich:

$$x_2 = -\frac{R_2}{R_1}x_1 \qquad \text{und} \qquad \ddot{x}_2 = -\frac{R_2}{R_1}\ddot{x}_1$$

Reduktion des Gleichungssystems:
Gleichung 7) nach S_2 aufgelöst, ergibt:

$$S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}G_2 - c_2 x_2 - m_2\ddot{x}_2$$

Verwendung der kinematischen Relationen und der Beziehung 3) führt auf:

$$S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{R_2}{R_1}G_2 + c_2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 x_1 + m_2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \ddot{x}_1 \qquad 9)$$

Einsetzen der Gleichung 9) in 6) und Verwendung der gegebenen Verhältnisse führt auf:

$$3m_1\ddot{x}_1 + 9c_1x_1 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \ddot{x}_1 + 3\frac{c_1}{m_1}x_1 = 0$$

Oder für die Koordinate x_2: ③$_{13\text{-}15}$

$$4m_2\ddot{x}_2 + 3c_2x_2 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \ddot{x}_2 + \frac{3}{4}\frac{c_2}{m_2}x_2 = 0$$

①$_{1}$ Freiheitsgrad des Systems richtig

①$_{2}$ Linker Klotz richtig freigeschnitte

①$_{3}$ Rolle richtig freigeschnitten

①$_{4}$ Rechter Klotz richtig freigeschnitten

①$^{KR}_{5}$ Komponentenbedingungen für Rolle konsequent richtig bezüglich Skizze

①$_{6}$ Momentenbedingung für Rolle konsequent richtig bezüglich Skizze

①$_{7}$ Beziehung zwischen Seilkräften richtig

①$^{KR}_{8}$ Funktion für Federkraft 1 konsequent richtig bezüglich Skizze

①$^{KR}_{9}$ Funktion für Federkraft 2 konsequent richtig bezüglich Skizze

①$^{KR}_{10}$ Bewegungsdifferentialgleichung für Klotz 1 konsequent richtig bezüglich Skizze

①$^{KR}_{11}$ Bewegungsdifferentialgleichung für Klotz 2konsequent richtig bezüglich Skizze

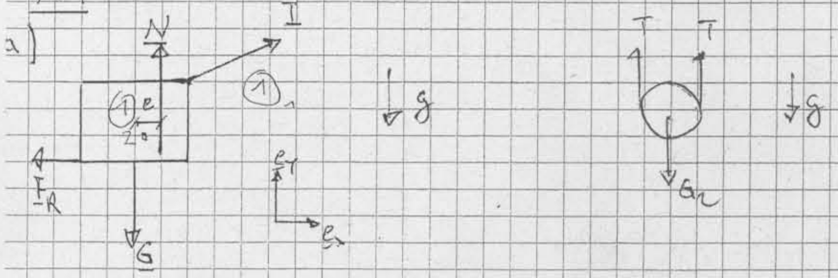
①$_{12}$ Kinematische Relation richtig

③$_{13-15}$ System richtig auf eine Gleichung reduziert

Mechanik GZ : Klausur III SS07

A1:

a)



$T = \frac{G_2}{2}$ ①$_3$

b)

- $\underline{R} = \underline{0}$

①$_{4,kr}$ in x: $-F_R + T\cos 30° = 0 \rightarrow F_R = \frac{\sqrt{3}}{2} T = \frac{\sqrt{3}}{4} G_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} m_2 g\right)$ ①$_5$

in y: $-G_1 + N + T\sin 30° = 0 \rightarrow N = G_1 - \frac{G_2}{4}$ ①$_6$

- $\underline{\Pi_0} = \underline{0}$

$eN + \frac{b}{2} T \sin 30° - hT\cos 30° = 0$ ①$_{7,kr}$

$eN = \frac{G_2}{4}\left(\sqrt{3}h - \frac{b}{2}\right)$

c)

$G_2 = 2G_1 \qquad F_R = \frac{\sqrt{3}}{2} G_1 \qquad N = \frac{G_1}{2}$ ①$_8$ $\qquad e = \sqrt{3}h - \frac{b}{2}$ ①$_9$

Haftreibung: $|F_R| \leq \mu_0 |N|$

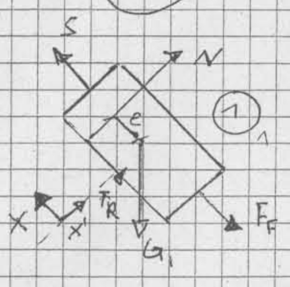
$\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cancel{G_1} \leq \mu_0 \frac{\cancel{G_1}}{\cancel{2}}$ ①$_{10}$ $\rightarrow \underline{\underline{\mu_0 \geq \sqrt{3}}}$ ①$_{11}$

d) Nicht kippt: $0 \leq e \leq \frac{b}{2}$ ①$_{12}$

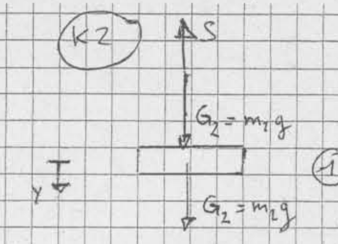
$\sqrt{3}h - \frac{b}{2} \leq \frac{b}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{b}{h} \geq \sqrt{3}}}$ ①$_{13}$

A2:

(K1)



(K2)



$G_1 = m_1 g \qquad F_F = k \cdot x$ ①$_3$

K1:

$R_x: \quad S - kx - F_R - \frac{G_1}{\sqrt{2}} = m_1 \ddot{x}$ ①$_{4,kr}$

$R_{x'}: \quad N - \frac{G_1}{\sqrt{2}} = 0$ ①$_{5,kr}$

$\Rightarrow N = \frac{G_1}{\sqrt{2}} = \frac{m_1 g}{\sqrt{2}}$ ①$_6$ $\quad$ Gleiten: $|F_R| = \mu_1 |N| = \frac{\mu_1}{\sqrt{2}} m_1 g$ ①$_7$

(I) $R_x: \quad \underline{\underline{m_1\ddot{x} + kx - S}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mu_1 m_1 g - \frac{1 m_1 g}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{-(\mu_1 + 1)\frac{m_1 g}{\sqrt{2}}}}$ ①$_8$

K2:

$R_y: \quad 2G_2 - S = 2m_2 \ddot{y}$ ①$_{9,kr}$ $\rightarrow S = 2m_2(g - \ddot{y})$ (II)

Kinematische Relation:

$\dot{x} = \dot{y} \rightarrow \ddot{x} = \ddot{y} \rightarrow x = y$ ①$_{10}$

in (II) einsetzen: $\underline{\underline{S = 2m_2(g - \ddot{x})}}$ ①$_{11}$

AB:

$x(0) = 0$

$\dot{x}(0) = 0$ ①$_{15}$

in (I) einsetzen:

$m_1\ddot{x} + kx - 2m_2 g + 2m_2\ddot{x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_1 + 1) m_1 g$

$\underline{\underline{(m_1 + 2m_2)\ddot{x} + kx = 2m_2 g - \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_1 + 1) m_1 g}}$ ①$_{12}$

Bepunkung:

- A1:

①$_1$: Skizze mit alle Kräfte
①$_2$: Mit "e"
①$_3$: Seilkraft $T = \frac{G_z}{2}$ mit/ohne Skizze
①$_{4,kr}$: R_x & R_y richtig bzgl Skizze

①$_5$ F_R richtig
①$_6$ N richtig
①$_{7,kr}$ Momentbedingung richtig bzgl Skizze
①$_8$ G_2 überall richtig eingesetzt
①$_9$ e richtig mit G_2 eingesetzt
①$_{10}$ Formel und richtig eingesetzt
①$_{11}$ μ_0 richtig
①$_{12}$ Bedingung richtig
①$_{13}$ $b/_H$ richtig

- A2:

①$_1$ Skizze mit alle Kräfte für K1
①$_2$ " " " " " K2
①$_3$ Federkraft richtig definiert and eingesetzt
①$_{4,kr}$ Impulssatz in x-Rtg richtig bzgl Skizze
①$_{5,kr}$ Ggw in x'-Rtg richtig bzgl Skizze
①$_6$ Normalkraft richtig
①$_7$ F_R: formel und Einsetzen [redacted] richtig
①$_{8,kr}$ Impulssatz in y-Rtg richtig bzgl Skizze

①$_8$ [redacted] Bewegungsgleichung für K1 richtig [redacted]
①$_{10}$ Kinematische Relation richtig ($\dot{x} = \dot{y}$ muss mindestens sein)

①$_{11}$ Seilkraft richtig ausgedrückt
①$_{12}$ Dgl richtig formuliert nur mit
$\ddot{x}, x, k, m_1, m_2, \mu, g$
①$_{13}$ Beide AB richtig

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Zentrum für Mechanik
IMES
Institut für Mechanische Systeme

Technische Mechanik

für D-ITET

Klausur III

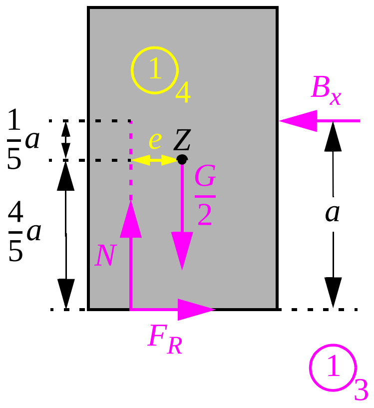
11. Dezember 2007, 9^{15} - 10^{00}

Dr. Stephan Kaufmann **Musterlösung** **Herbstsemester 2007**

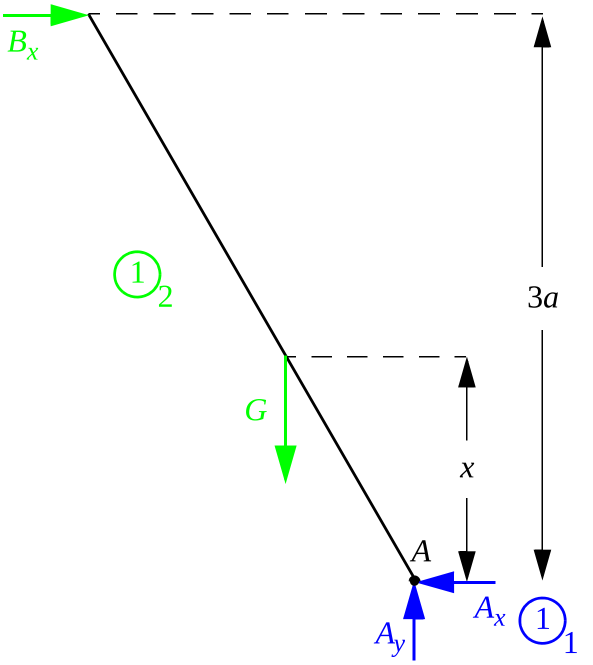
Aufgabe 1 (15 Punkte)

a) Freischneiden

Metallkiste:



Leiter:



$$R_x:\quad B_x - F_R = 0 \qquad B_x = F_R$$

$$R_y:\quad \frac{G}{2} - N = 0 \qquad N = \frac{G}{2}$$

①$^{KR}_{8}$

$$M_Z:\quad \frac{1}{5}aB_x + \frac{4}{5}aF_R - Ne = 0$$

①$^{KR}_{9}$

$$e = \left(\frac{1}{5}aB_x + \frac{4}{5}aB_x\right)\frac{2}{G} = \frac{2B_xa}{G}$$

$$R_x:\quad A_x - B_x = 0 \qquad A_x = B_x$$

$$R_y:\quad A_y - G = 0 \qquad A_y = G$$

①$^{KR}_{5}$

$$M_A:\quad \frac{2}{\sqrt{3}}x\frac{1}{2}G - \frac{2}{\sqrt{3}}3a\frac{\sqrt{3}}{2}B_x = 0$$

①$^{KR}_{6}$

$$A_x = B_x = \frac{Gx}{3\sqrt{3}a} = F_R$$

①$_7$

1) nicht kippen Kiste: $e = \frac{2Gxa}{3\sqrt{3}aG} = \frac{2x}{3\sqrt{3}} \Rightarrow e \leq \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{2x}{3\sqrt{3}} \leq \frac{a}{2} \Rightarrow x \leq \frac{3}{4}\sqrt{3}a$ ①$_{12}$

①$_{10}$

2) nicht rutschen Kiste: $|F_R| \leq \mu_K|N| \Rightarrow \left|\frac{Gx}{3\sqrt{3}a}\right| \leq \mu_K\left|\frac{G}{2}\right| \Rightarrow \frac{Gx}{3\sqrt{3}a} \leq \frac{1}{4}\frac{G}{2} \Rightarrow x \leq \frac{3}{8}\sqrt{3}a$ ①$_{13}$

①$_{11}$

3) nicht rutschen Leiter: $|A_x| \leq \mu_L|A_y| \Rightarrow \left|\frac{Gx}{3\sqrt{3}a}\right| \leq \mu_L|G| \Rightarrow \frac{Gx}{3\sqrt{3}a} \leq \frac{1}{3}G \Rightarrow x \leq \sqrt{3}a$ ①$_{14}$

Der kleine Niels kann also nur bis $x \leq \frac{3}{8}\sqrt{3}a$ steigen, dann beginnt die Metallkiste auf der Holzkiste zu rutschen. ①$_{15}$

Punkteliste:

①$_{1}$ - Lagerkräfte A_x und A_y richtig eingeführt.

①$_{2}$ - in B nur eine Lagerkraft in x eingeführt (da keine Reibung) **und** G eingezeichnet.

①$_{3}$ - F_R, N, B_x, $\frac{G}{2}$ richtig eingeführt.

①$_{4}$ - Abstand e der Normalkraft N richtig eingeführt.

①$^{KR}_{5}$ - Gleichgewicht Leiter in x **und** Gleichgewicht in y bezüglich Skizze richtig.

①$^{KR}_{6}$ - Momentenbedingung Leiter bezüglich Skizze richtig.

①$_{7}$ - $A_x = B_x = \frac{Gx}{3\sqrt{3}a} = F_R$ richtig.

①$^{KR}_{8}$ - Gleichgewicht Metallkiste in x und Gleichgewicht in y bezüglich Skizze richtig.

①$^{KR}_{9}$ - Momentenbedingung Metallkiste bezüglich Skizze richtig.

①$_{10}$ - Abstand e der Normalkraft richtig berechnet.

①$_{11}$ - Haftreibungsgesetz für Leiter **oder** für Kiste, Kräfte bzgl. Skizze richtig eingesetzt.

①$_{12}$ - Kippbedingung $x \leq \frac{3}{4}\sqrt{3}a$ richtig.

①$_{13}$ - Haftbedingung Kiste $x \leq \frac{3}{8}\sqrt{3}a$ richtig.

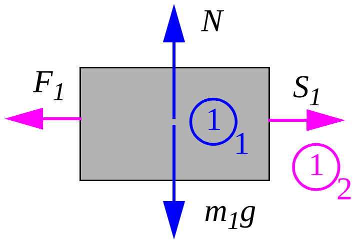
①$_{14}$ - Haftbedingung Leiter $x \leq \sqrt{3}a$ richtig.

①$_{15}$ - Disskussion, dass als erstes die Metallkiste zu rutschen beginnt, richtig.

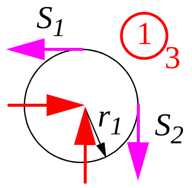
Aufgabe 2 *(15 Punkte)*

a) Freischneiden

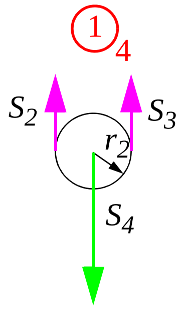
Körper 1:



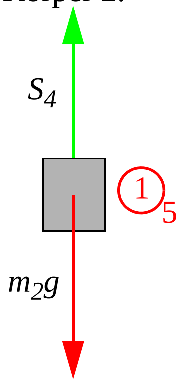
Rolle 1:



Rolle 2:



Körper 2:



b) Beziehung zwischen den Seilkräften S_1, S_2, S_3 und S_4

Rolle 1:

M_z: $S_1r_1 - S_2r_1 = 0$ ①$_{6}^{\mathrm{KR}}$

$\Rightarrow S_1 = S_2$

Rolle 2:

M_z: $S_2r_2 - S_3r_2 = 0$ ①$_{7}^{\mathrm{KR}}$

$\Rightarrow S_2 = S_3 = S_1$

R_y: $S_1 + S_3 - S_4 = 0$

$\Rightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \dfrac{S_4}{2}$ ①$_8$

c) Bewegungsgleichungen

Körper 1:

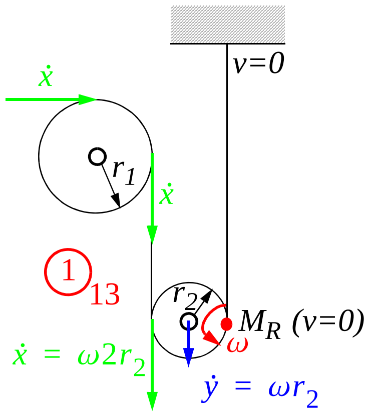
y: $m_1g - N = 0 \Rightarrow N = m_1g$

x: $m_1\ddot{x} = S_1 - F_1$ ①$_{9}^{\mathrm{KR}}$ wobei die Federkraft $F_1 = kx$ beträgt. ①$_{10}^{\mathrm{KR}}$

eingesetzt: $m_1\ddot{x} + kx - S_1 = 0$ ①$_{11}^{\mathrm{KR}}$

Körper 2: $m_2\ddot{y} = m_2g - 2S_1$ ①$_{12}^{\mathrm{KR}}$

d) Kinematische Relation und Bewegungsgleichung des Körpers 2



Kinematische Relation gemäss nebenstehender Teilskizze:

$$\dot{x} = \omega 2r_2 = 2\dot{y}$$ ①$_{14}$

Bewegungsgleichung des Körpers 2:

$$(m_2 + 4m_1)\ddot{y} + 4ky = m_2g$$

oder: ①$_{15}$

$$\left(2m_1 + \frac{m_2}{2}\right)\ddot{x} + 2kx = m_2g$$

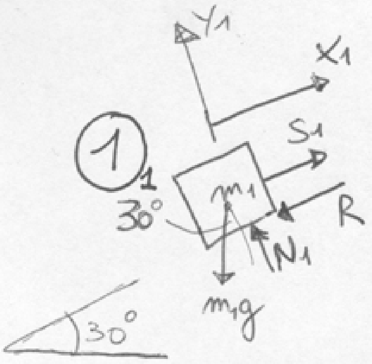
Punkteliste:

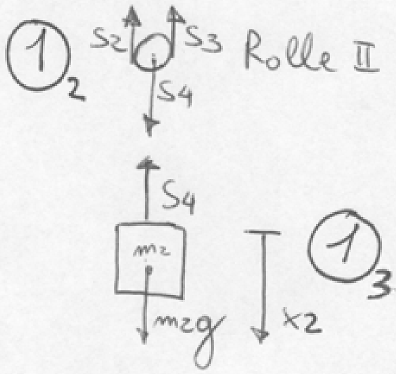
①$_{1}$ - Normalkraft N und Gewichtskraft $m_1 g$ am Körper 1 richtig eingezeichnet.
①$_{2}$ - Seilkraft S_1 und Federkraft F_1 am Körper 1 richtig eingezeichnet.
①$_{3}$ - Rolle 1 richtig freigeschnitten (Lagerkräfte und Seilkräfte S_1, S_2 eingezeichnet).
①$_{4}$ - Rolle 2 richtig freigeschnitten (Seilkräfte S_2, S_3 und S_4 eingezeichnet).
①$_{5}$ - Körper 2 richtig freigeschnitten (Seilkraft S_4 und Gewichtskraft $m_2 g$ eingezeichnet).
①$^{KR}_{6}$ - Momentenbedingung an Rolle 1 bezüglich Zeichnung richtig aufgestellt.
①$^{KR}_{7}$ - Momentenbedingung an Rolle 2 bezüglich Zeichnung richtig aufgestellt.
①$_{8}$ - $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S_4}{2}$ richtig.
①$^{KR}_{9}$ - Bewegungsgleichung für Körper 1 in x richtig aufgestellt.
①$^{KR}_{10}$ - Federgesetz bezüglich Zeichnung richtig.
①$^{KR}_{11}$ - Bwggl. für Körper 1 in x mit eingesetzter Federkraft bezüglich Zeichnung richtig.
①$^{KR}_{12}$ - Bewegungsgleichung für Körper 2 in y bezüglich Zeichnung richtig.
①$_{13}$ - Herleitung Bezug Geschwindigkeiten (automatisch gegeben, falls Punkt 14 gegeben)
①$_{14}$ - Kinematische Relation $\dot{x} = 2\dot{y}$ **oder** $x = 2y + c$ (auch ohne Konstante c).
①$_{15}$ - Bewegungsgleichung für Körper 2 nur in x **oder** nur in y.

Klausur III: Musterlösung

Aufgabe 1

a)





Momentsbedingung Rolle I

$$S_1 \cdot r_I - S_2 \cdot r_I = 0 \qquad S_1 = S_2$$

Gleichgewicht Rolle II

$$\begin{cases} S_2 + S_3 - S_4 = 0 \\ -S_2 \cdot r_{II} + S_3 r_{II} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} S_4 = S_2 + S_3 = 2 S_2 \\ S_2 = S_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S_4}{2}}$$ ①$_4$

b) Newtonsche Gesetz Masse 1

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 & m_1 \ddot{x}_1 = S_1 - R - m_1 g \sin 30 \\ y_1 & 0 = N_1 - m_1 g \cos 30 \end{array}\right\}$$ ①$_5$ KR

Gleitreibungsgesetz

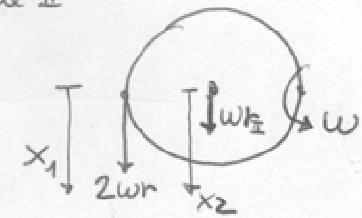
$$|R| = \mu_1 |N_1|$$ ①$_6$

Newtonsche Gesetz Masse 2

$$x_2 : \quad m_2 \ddot{x}_2 = -S_4 + m_2 g$$ ①$_7$ KR

c) Kinematische Relation

Rolle II



$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{2\omega r}{\omega r} = 2$$ ①$_{8}$

d) $\mu_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $x_1 = 2x_2$, $S_4 = 2S_1$

$N_1 = \frac{\sqrt{3} m_1}{2} g$

$|R| = \mu_1 \frac{\sqrt{3}}{2} m_1 g$ falls $\dot{x}_1 > 0 \Rightarrow R = \mu_1 \frac{\sqrt{3}}{2} m_1 g$

$$\begin{cases} 2m_1 \ddot{x}_2 = S_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_1 m_1 g - \frac{m_1 g}{2} \\ m_2 \ddot{x}_2 = -2S_1 + m_2 g \end{cases}$$

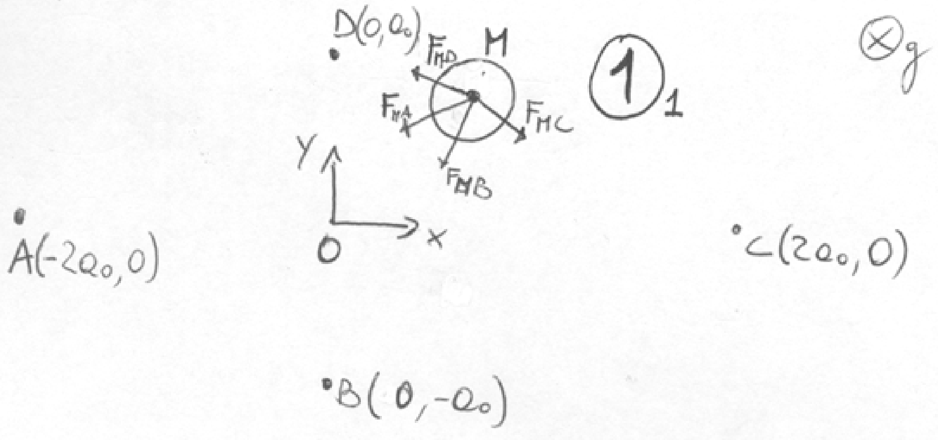
$$(4m_1 + m_2)\ddot{x}_2 = -(\sqrt{3}\mu_1 + 1) m_1 g + m_2 g$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_2 - (\sqrt{3}\mu_1 + 1) m_1}{4m_1 + m_2} g = \frac{2 - \left(\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} + 1\right)}{4 + 2} g = \underline{\frac{1}{12} g}$$ ①$_{9}$

$$S_1 = \frac{m_2}{2}(g - \ddot{x}_2) = \frac{m_2}{2} \frac{(\sqrt{3}\mu_1 + 5)}{4m_1 + m_2} m_1 g = \underline{\frac{11}{12} mg}$$ ①$_{10}$

Aufgabe 2

a)



①$_1$

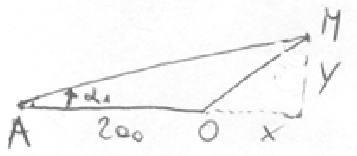
b) $\underline{F_{MA}} = -K_1\,\underline{AM} = -K_1(\underline{OM} - \underline{OA}) = -K_1\begin{pmatrix} x+2a_0 \\ y-0 \end{pmatrix}$ ①$_2$

$\underline{F_{MB}} = -K_2\,\underline{BM} = -K_2(\underline{OM} - \underline{OB}) = -K_2\begin{pmatrix} x-0 \\ y+a_0 \end{pmatrix}$ ①$_3$

$\underline{F_{MC}} = -K_1\,\underline{CM} = -K_1(\underline{OM} - \underline{OC}) = -K_1\begin{pmatrix} x-2a_0 \\ y-0 \end{pmatrix}$ ①$_4$

$\underline{F_{MD}} = -K_2\,\underline{DM} = -K_2(\underline{OM} - \underline{OD}) = -K_2\begin{pmatrix} x-0 \\ y-a_0 \end{pmatrix}$ ①$_5$

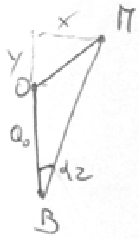
oder Variante



$|\underline{AM}| = \sqrt{(2a_0+x)^2+y^2}$

$\sin\alpha_1 = \frac{y}{|\underline{AM}|}$ $\cos\alpha_1 = \frac{x+2a_0}{|\underline{AM}|}$ ①$_2$

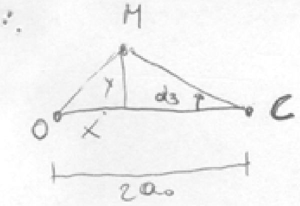
$F_{MA} = -K_1 \cdot \underline{AM} = -K_1 |\underline{AM}| \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 \end{pmatrix} = -K_1 \begin{pmatrix} x+2a_0 \\ y \end{pmatrix}$



$|\underline{BM}| = \sqrt{x^2+(y+a_0)^2}$

$\sin\alpha_2 = \frac{x}{|\underline{BM}|}$ $\cos\alpha_2 = \frac{y+a_0}{|\underline{BM}|}$ ①$_3$

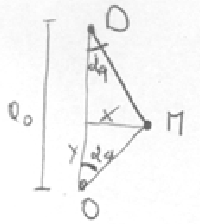
$F_{MB} = -K_2\,\underline{BM} = -K_2 |\underline{BM}| \begin{pmatrix} \sin\alpha_2 \\ \cos\alpha_2 \end{pmatrix} = -K_2 \begin{pmatrix} x \\ y+a_0 \end{pmatrix}$



$$|\underline{CM}| = \sqrt{(x-2a_0)^2+y^2}$$

$$\sin\alpha_3 = \frac{y}{|\underline{CM}|} \qquad \cos\alpha_3 = \frac{2a_0 - x}{|CM|} \qquad \textcircled{1}_4$$

$$\underline{F_{MC}} = -K_1\,\underline{CM} = -K_1\,|\underline{CM}|\begin{pmatrix}-\cos\alpha_3\\ \sin\alpha_3\end{pmatrix} = -K_1\begin{pmatrix}x-2a_0\\ y\end{pmatrix}$$



$$DM = \sqrt{x^2+(y-a_0)^2}$$

$$\sin\alpha_4 = \frac{x}{|\underline{DM}|} \qquad \cos\alpha_4 = \frac{a_0-y}{|\underline{DM}|} \qquad \textcircled{1}_5$$

$$\underline{F_{MD}} = -K_2\,\underline{DM} = -K_2|\underline{DM}|\begin{pmatrix}\sin\alpha_4\\ -\cos\alpha_4\end{pmatrix} = -K_2\begin{pmatrix}x\\ y-a_0\end{pmatrix}$$

c) Bewegungsgleichung

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = \underline{F_{MA}} + \underline{F_{MB}} + \underline{F_{MC}} + \underline{F_{MD}} = -K_1\left[\begin{pmatrix}x+2a_0\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x-2a_0\\ y\end{pmatrix}\right] - K_2\left[\begin{pmatrix}x\\ y-a_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\ y+a_0\end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2(K_1+K_2)x = 0\\ m\ddot{y} + 2(K_1+K_2)y = 0\end{cases} \qquad \textcircled{1}_{6\,KR}$$

d) $\omega_x = \omega_y = \sqrt{\dfrac{2(K_1+K_2)}{m}}$ $\textcircled{1}_{7\,KR}$

e) E = Konstant $\longrightarrow$ $\mathcal{E}(t=0) = \mathcal{E}(t)$

$$T = \frac{1}{2}m\left(v_{0x}^2 + v_{0y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\left(-\sqrt{\frac{K_1}{m}}a_0\right)^2 + \left(-\sqrt{\frac{K_1}{m}}a_0\right)^2\right) = K_1 a_0^2 \qquad \textcircled{1}_8$$

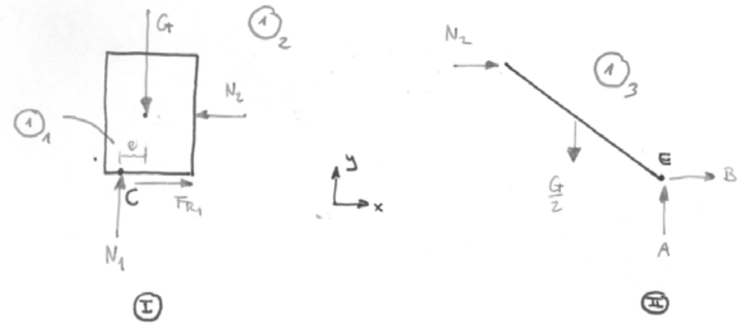
$$\left.\begin{aligned}
V_{AM} &= \frac{1}{2}K_1\,|\underline{AM}|^2 = \frac{1}{2}K_1\left((2a_0+x_0)^2+y_0^2\right) = \frac{1}{2}K_1\left(\frac{25}{4}a_0^2+\frac{a_0^2}{4}\right) = \frac{13}{4}K_1 a_0^2\\
V_{BM} &= \frac{1}{2}K_2\,|BM|^2 = \frac{1}{2}K_2\left(x_0^2+(y_0+a_0)^2\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}K_1\left(\frac{a_0^2}{4}+\frac{9a_0^2}{4}\right) = \frac{5}{2}K_1 a_0^2\\
V_{CM} &= \frac{1}{2}K_1|CM|^2 = \frac{1}{2}K_1\left((x_0-2a_0)^2+y_0^2\right) = \frac{1}{2}K_1\left(\frac{9}{4}a_0^2+\frac{a_0^2}{4}\right) = \frac{5}{4}K_1 a_0^2\\
V_{DM} &= \frac{1}{2}K_2|DM|^2 = \frac{1}{2}K_2\left(x_0^2+(y_0-a_0)^2\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot 2K_1\left(\frac{a_0^2}{4}+\frac{a_0^2}{4}\right) = \frac{1}{2}K_1 a_0^2
\end{aligned}\right\}\textcircled{1}_9$$

$$\mathcal{E}(t) = K_1 a_0^2 + \frac{13}{4} K_1 a_0^2 + \frac{5}{2} K_1 a_0^2 + \frac{5}{4} K_1 a_0^2 + \frac{1}{2} K_1 a_0^2 =$$

$$= \frac{4+13+10+5+2}{4} K_1 a_0^2 = \frac{34}{4} K_1 a_0^2 = \underline{\frac{17}{2} K_1 a_0^2} \qquad \textcircled{1}_{10}$$

Klausur 3 - Musterlösung

Aufgabe 1



Ⓘ $x: \quad F_{R1} - N_2 = 0$

$y: \quad N_1 - G = 0$

$M_C: \quad N_2 \frac{a}{2} - Ge = 0$ ①$_{4KR}$

Ⓘⓘ $x: \quad N_2 + B = 0$

$y: \quad A - \frac{G}{2} = 0$ } nicht nötig

$M_E: \quad -N_2 \frac{\ell}{2} + \frac{G}{2} \frac{\ell}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ ①$_{5KR}$

$\Rightarrow N_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} G$ ①$_6$

$F_{R1} = N_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} G$ ①$_7$

$N_1 = G$ ①$_8$

$e = \frac{N_2}{G} \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} a$ ①$_9$

kein Gleiten $\Leftrightarrow$ $|F_{R1}| \leq \mu_0 |N_1|$

$\left|\frac{\sqrt{3}}{4} G\right| \leq \mu_0 |G|$

$\frac{\sqrt{3}}{4} G \leq \mu_0 G$ ①$_{10KR}$ (Werte eingesetzt)

$\mu_0 \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$ ①$_{11}$

kein Kippen $\Leftrightarrow$ $|e| \leq \frac{b}{2}$ ①$_{12}$ Idee

$\frac{\sqrt{3}}{8} a \leq \frac{b}{2}$

$\frac{a}{b} \leq \frac{4}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ ab dem Verhältnis $\frac{a}{b} > \frac{4}{\sqrt{3}}$ wird der Klotz kippen! ①$_1$

Aufgabe 1

①$_1$ Abstand e eingezeichnet (N_1)

①$_2$ Alle andere am Quader angreifende Kräfte richtig eingezeichnet

①$_3$ Alle am Stab angreifende Kräfte richtig eingezeichnet

①$_{4KR}$ Momentenbed. am Quader (Bezugspunkt beliebig) konsequent richtig bzgl Zeichnung

①$_{5KR}$ Momentenbed. am Stab (Bezugspunkt beliebig) konsequent richtig bzgl Zeichnung

$$\left.\begin{array}{ll} \textcircled{1}_6 & N_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} G \\ \textcircled{1}_7 & F_{R1} = \frac{\sqrt{3}}{4} G \\ \textcircled{1}_8 & N_1 = G \\ \textcircled{1}_9 & e = \frac{\sqrt{3}}{8} a \end{array}\right\} \text{richtige Resultate}$$

①$_{10KR}$ Werte von N_1 und F_{R1} richtig eingesetzt, konsequent richtig bzgl. den Kräfte, die der Student/die Studentin vorher bestimmt hat.

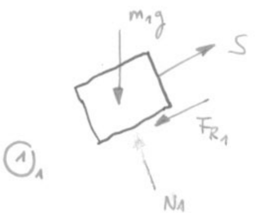
①$_{11}$ $\mu_0 \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$ (richtig)

①$_{12}$ Idee $|e| \leq \frac{b}{2}$ für nicht-Kippen (oder äquivalente Formel, oder Satz)

①$_{13}$ $\frac{a}{b} > \frac{4}{\sqrt{3}}$ (richtig)

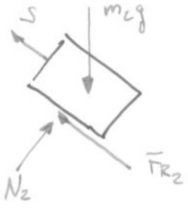
Aufgabe 2

a)



①$_1$

Ⓘ



①$_2$

Ⓘⓘ

b)

Ⓘ $x_1 : \quad m_1 \ddot{x}_1 = S - F_{R_1} - \frac{m_1 g}{2}$ ①$_{3KR}$

$y_1 : \quad 0 = -m_1 g \frac{\sqrt{3}}{2} + N_1 = 0$ ①$_{4KR}$

$\Rightarrow N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} m_1 g$ ①$_5$

$|F_{R_1}| = \mu_1 |N_1| = \frac{\sqrt{3}}{2} \mu_1 m_1 g$ ①$_6$

$\Rightarrow m_1 \ddot{x}_1 = S - \frac{\sqrt{3}}{2} \mu_1 m_1 g - \frac{m_1 g}{2}$

①$_{7KR}$

Ⓘⓘ $x_2 : \quad m_2 \ddot{x}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} m_2 g - S - F_{R_2}$

$y_2 : \quad 0 = N_2 - \frac{m_2 g}{2}$ ①$_{8KR}$

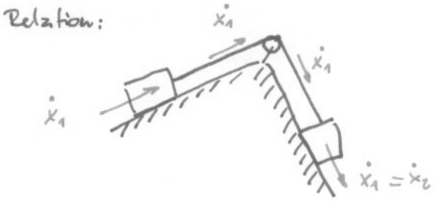
$\Rightarrow N_2 = \frac{m_2 g}{2}$ ①$_9$

$|F_{R_2}| = \mu_1 |N_2| = \frac{\mu_1 m_2 g}{2}$ ①$_{10}$

$\Rightarrow m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g \frac{\sqrt{3}}{2} - S - \mu_1 \frac{m_2}{2} g$

c)

kin. Relation:



$\dot{x}_2 = \dot{x}_1$ ①$_{11}$

$\Rightarrow m_1 \ddot{x}_1 = S - \frac{m_1 g}{2} \left(\sqrt{3} \mu_1 + 1 \right)$ ①

$\Rightarrow m_2 \ddot{x}_1 = \frac{m_2 g}{2} \left(\sqrt{3} - \mu_1 \right) - S$ ②

d) Idee : $\underbrace{\ddot{x}_1 \text{ eliminieren}}_{①_{12} \text{ Idee}}$, z.B. ① $- \frac{m_1}{m_2}$ ②

$$0 = S - \frac{m_1 g}{2} \left(\sqrt{3} \mu_1 + 1 \right) - \frac{m_1 g}{2} \left(\sqrt{3} - \mu_1 \right) + S \frac{m_1}{m_2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\frac{m_1 g}{2} \left(\sqrt{3} \mu_1 + 1 + \sqrt{3} - \mu_1 \right)}{1 + \frac{m_1}{m_2}}$$ ①$_{13}$

die Seilkraft ist konstant!

Aufgabe 2

①$_1$ alle angreifende Kräfte richtig eingezeichnet

①$_2$ alle angreifende Kräfte richtig eingezeichnet

①$_{3\,KR}$ BDGl. in x_1-Richtung, Konsequent richtig bzgl. Zeichnung

①$_{4\,KR}$ BDGl. in y_1-Richtung, konsequent richtig bzgl. Zeichnung

①$_5$ $N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} m_1 g$

①$_6$ $F_{R1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \mu_1 m_1 g$

①$_{7\,KR}$ Bew. Diff.Gl in x_2-Richtung, konsequent richtig bzgl. Zeichnung

①$_{8\,KR}$ Bew. Diff. Gl. in y_2-Richtung, konsequent richtig bzgl. Zeichnung

①$_9$ $N_2 = \frac{m_2 g}{2}$

①$_{10}$ $F_{R2} = \frac{\mu_1 m_2 g}{2}$

①$_{11}$ $\dot{x}_1 = \dot{x}_2$ (oder $x_1 = x_2$)

$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$

①$_{12}$ Idee $\ddot{x}_1$ eliminieren (durch Subtraktion der zwei Bew. Diff. Gl. oder durch Auflösen einer Diff. Gl. nach $\ddot{x}_1$ und $\ddot{x}_1$ in die zweite einsetzen)

①$_{13}$ $$S = \frac{\frac{m_1 g}{2}\left(\sqrt{3}\mu_1 + 1 + \sqrt{3} - \mu_1\right)}{1 + \frac{m_1}{m_2}}$$