Musterlösung Aufgabe 1

Basisprüfung Sommer 2015

Kraftvektoren aufstellen:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad F_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad F_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

a)

Resultierende bestimmen:

$$R = \sum_i F_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}}_{Punkt 1} \tag{2}$$

Momente bestimmen:

$$\vec{M_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2b \\ 0 \end{pmatrix}}_{Punkt 2} \tag{3}$$

$$\vec{M_C} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}}_{Punkt 3} \tag{4}$$

$$\vec{M_B} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2a \\ 2a \\ a \end{pmatrix}}_{Punkt 4} \tag{5}$$

Resultierendes Moment bestimmen:

$$\vec{M_0} = \sum_i \vec{M_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2a \\ 2b + 2a \\ 0 \end{pmatrix}}_{Punkt 5} \tag{6}$$

b)

Moment in Punkt A bestimmen. Wir verwenden den Verschiebungssatz $\vec{M_A} = \vec{M_0} + \vec{R} \times \overline{0A}$ (*Punkt 7*) um uns Zeit zu sparen.

$$\vec{M_A} = \begin{pmatrix} -2a \\ 2a+2b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2a \\ 2b-a \\ -2a \end{pmatrix}}_{Punkt 7} \tag{7}$$

c)

Bedingung für statisch äquivalente Einzelkraft: $I_2 = 0$, $R \neq 0$ (*Punkt 8*). Invariante $I_2 = \vec{R} \cdot \vec{M_0}$ bestimmen:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2a \\ 2b+2a \\ 0 \end{pmatrix} = -6a + 4b + 4a = -2a + 4b = 0$$

$$a = 2b \qquad \leftrightarrow \qquad \underbrace{b = \frac{a}{2}}_{Punkt 9} \tag{8}$$

d)

Rotationsgeschwindigeit $\vec{\omega}$ ist gesucht. Da die Achse der Rotationsgeschwindigkeit in der x-y Ebene liegt, wissen wir dass $\omega_z = 0$. Die restlichen Komponenten ω_x und ω_y können über die bekannten Geschwindigkeiten bestimmt werden:

$$\vec{v_C} = \vec{v_E} + \vec{\omega} \times r_{\vec{EC}} \tag{9}$$

$$v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -b \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega_y \cdot b \\ \omega_x \cdot b \\ \omega_x \cdot a \end{pmatrix}$$

$$0 = v \cdot k_1 - \omega_y \cdot b \rightarrow \omega_y = \frac{vk_1}{b}$$

$$v \cdot k_2 = v \cdot k_2 + \omega_x \cdot b \rightarrow \omega_x = 0$$

$$\underbrace{\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{vk_1}{b} \\ 0 \end{pmatrix}}_{Punkt11} \tag{11}$$

Bewegungszustand: Textinvariante:

$$\underbrace{I = \vec{\omega} \cdot \vec{v}}_{Punkt12} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{vk_1}{b} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ vk_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{v^2 \cdot k_1 \cdot k_2}{b} \neq 0 \rightarrow \underbrace{Schraubung}_{Punkt13} \tag{12}$$

e)

Berechnung der Leistung mithilfe der Gleichung $P = \vec{v}_0 \cdot \vec{R} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_0$ (*Punkt 14*).

Zuerst muss die Geschwindigkeit im Punkt 0 bestimmt werden:

$$\underbrace{I = \vec{\omega} \cdot \vec{v}}_{Punkt12} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{vk_1}{b} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{v_0} = \vec{v_C} + \vec{\omega} \times \vec{r_{0C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ vk_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{vk_1}{b} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ vk_2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{Punkt15} \tag{13}$$

Leistung bestimmen:

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ vk_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{vk_1}{b} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2a \\ 2a + 2b \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} P &= 2vk_2 + 2vk_1 + 2vk_1 \frac{a}{b} \\ &= 2v \left(k_2 + k_1 \left(1 + \frac{a}{b} \right) \right) \\ &= 2v \left(k_2 + k_1 \left(1 + \frac{2b}{b} \right) \right) \\ &= \underbrace{2v(k_2 + 3k_1)}_{Punkt16} \end{aligned} \tag{15}$$

Musterlösung Aufgabe 2

Basisprüfung Sommer 2015

a)

Lagerkräfte bestimmen am Starrkörper 1:

$$\begin{aligned}
\sum F_x: &\quad A_x + B_x = 0 &\quad \rightarrow A_x = -B_x \\
\sum F_y: &\quad A_y + B_y - G = 0 &\quad \rightarrow \underbrace{A_y = -G}_{Punkt\ \ 2} \\
\sum M_z: &\quad B_y \cdot l - G \cdot 2l = 0 &\quad \rightarrow \underbrace{B_y = 2G}_{Punkt\ \ 1}
\end{aligned} \tag{1}$$

Lagerkräfte bestimmen am Starrkörper 2:

$$\begin{aligned}
\sum F_x: &\quad C_x - B_x = 0 &\quad \rightarrow C_x = B_x \\
\sum F_y: &\quad C_y - B_y = 0 &\quad \rightarrow \underbrace{C_y = B_y = 2G}_{Punkt\ \ 3} \\
\sum M_z: &\quad B_x \cdot l - B_y \cdot l = 0 &\quad \rightarrow \underbrace{B_x = B_y = 2G}_{Punkt\ \ 4}
\end{aligned} \tag{2}$$

Daraus folgt:

$$\underbrace{C_x = 2G}_{Punkt\ \ 5}$$

$$\underbrace{A_x = -2G}_{Punkt\ \ 6}$$

b)

Beanspruchung im Stab 1 bestimmen:

$$\begin{aligned}
\sum F_x: &\quad N + A_x = 0 &\quad \rightarrow \underbrace{N = -A_x = 2G}_{Punkt\ \ 8} \\
\sum F_y: &\quad A_y - Q = 0 &\quad \rightarrow \underbrace{Q = A_x = -C_y}_{Punkt\ \ 7} \\
\sum M: &\quad M_Q + A_y \cdot x = 0 &\quad \rightarrow \underbrace{M_q = -A_y \cdot x = G \cdot x}_{Punkt\ \ 9}
\end{aligned} \tag{3}$$

Beanspruchung im Stab 2 bestimmen:

$$
\begin{aligned}
&\sum F_x: && A_x + B_x + N = 0 && \rightarrow \underbrace{N = -A_x - B_x = 2G - 2G = 0}_{Punkt\ \ 10}\\
&\sum F_y: && A_y + B_y - Q = 0 && \rightarrow \underbrace{Q = A_x + B_y = -G + 2G = G}_{Punkt\ \ 11}\\
&\sum M: && M_Q + A_y \cdot x + B_y \cdot (x-l) = 0 && \rightarrow M_Q = -A_y \cdot x - B_y \cdot (x-l)\\
& && && = G \cdot x - 2G \cdot (x-l)\\
& && && = \underbrace{G \cdot (2l - x)}_{Punkt\ \ 12}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Maximales Biegemoment bei $x = l$ (*Punkt 13*).

Maximale Biegespannung: Aus $\sigma_x = \frac{M_{Q,max} \cdot y}{I}$ folgt $y_{max} = \pm a$ (*Punkt 14*).

c)

Flächenträgheitsmoment bestimmen mit der Gleichung $I_{Quader} = \frac{b \cdot h^3}{12}$ (*Punkt 15*):

$$I_{z,aussen} = \frac{(4a) \cdot (2a)^3}{12} = \frac{4a \cdot 8a^3}{12} = \frac{32a^4}{12}$$

$$I_{z,innen} = \frac{(2a) \cdot (a)^3}{12} = \frac{2a^4}{12}$$

Resultierendes Flächenträgheitsmoment:

$$I_z = I_{z,aussen} - I_{z,innen} = \underbrace{\frac{30a^4}{12}}_{Punkt\ \ 16} \tag{5}$$

d)

Die maximale Biegespannung tritt dort auf, wo das Biegemoment am größten ist: $M_{Q,max}$ (bei x = 0)

$$M_{Q,max} = G \cdot L$$

Im ersten Teil befindet sich ebenfalls eine Normalkraft, welche sich auf die Spannungen auswirkt.

Zusammengesetzte Beanspruchung:

$$\sigma(x,y) = -\frac{M_Q \cdot y}{I_Z} + \frac{N}{A} \qquad (Punkt\ \ 17) \tag{6}$$

$$\sigma_{x,y} = -\frac{GL \cdot y}{\frac{30}{12}a^4} + \frac{2G}{6a^2} = \frac{-12Gly + 10Ga^2}{30a^4}$$

Am Ort des maximalen Biegemomentes:

$$\sigma_{oben}(x = l, y = -a) = \underbrace{\frac{12GLa + 10Ga^2}{30a^4}}_{Punkt\ 18} \qquad \rightarrow Zug \tag{7}$$

$$\sigma_{unten}(x = l, y = a) = \underbrace{\frac{-12GLa + 10Ga^2}{30a^4}}_{Punkt\ 19} \qquad \rightarrow Druck \tag{8}$$

e)

Aus den Formeln $\epsilon \leq 0,1$ (*Punkt 20*) und $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$ ergibt sich folgende Lösung:

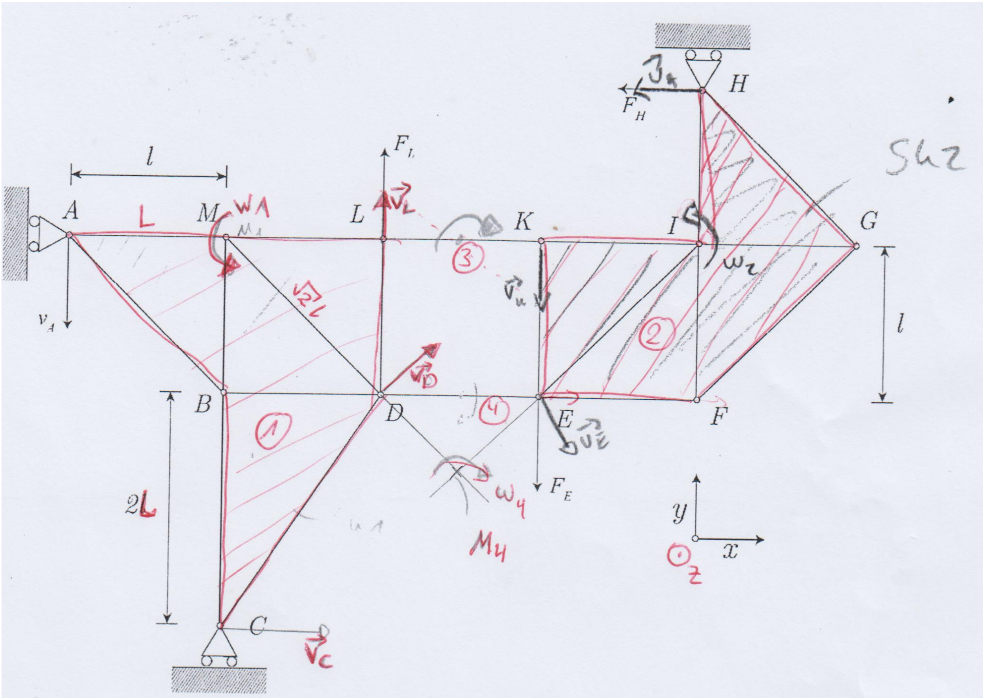
$$\begin{aligned} \frac{12GLa + 10Ga^2}{E \cdot 30a^4} &\leq 0,1 \\ 12GLA + 10Ga^2 &\leq 3a^4E \\ 3a^3E - 10Ga &\leq 12GL \end{aligned} \tag{9}$$

$$L \leq \frac{3a^3E - 10Ga}{12G} \qquad (Punkt\ \ 21) \tag{10}$$

Musterlösung Aufgabe 3

Basisprüfung Sommer 2015

a)



Starrkörper identifizieren (*Punkt 1*):

- Starrkörper 1: ABCDF
- Starrkörper 2: FGHIK
- Starrkörper 3: LK
- Starrkörper 4: DE

b) und c)

Geschwindigkeiten bestimmen:

$$\vec{\omega}_1 = \frac{\vec{v}_A}{L} \qquad \rightarrow \qquad \vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v_A}{L} \end{pmatrix} \qquad (Punkt\ 8) \tag{1}$$

$$\vec{v}_C = \begin{pmatrix} 3v_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\vec{v}_C| = \frac{v_A}{L} \cdot 3L = 3v_A \qquad (Punkt\ 2) \tag{2}$$

$$\vec{v}_D = \begin{pmatrix} v_A \\ v_A \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\vec{v}_D| = \frac{v_A}{L} \cdot \sqrt{2}L = \sqrt{2}v_A \qquad (Punkt\ 3) \tag{3}$$

$$\vec{v}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ v_A \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\vec{v}_L| = \frac{v_A}{L} \cdot L = v_A \qquad (Punkt\ 4) \tag{4}$$

Die Rotationsgeschwindigkeit lässt sich über die Parallelogram-Regel bestimmen:

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v_A}{L} \end{pmatrix} \qquad (Punkt\ 9) \tag{5}$$

Momentanzentrum M_{z2} liegt in I weil:

- Punkt H sich nur auf der x-Achse bewegen kann.
- Punkt K aufgrund des SdPG ($v_{kx} = v_{Lx} = 0$) sich nur in y-Richtung bewegen kann.

$$\vec{v}_K = \vec{\omega}_2 \times \begin{pmatrix} -L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v_A \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\vec{v}_K| = \frac{v_A}{L} \cdot L = v_A \qquad (Punkt\ 5) \tag{6}$$

$$\vec{v}_E = \vec{\omega}_2 \times \begin{pmatrix} -L \\ -L \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_A \\ -v_A \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\vec{v}_H| = \frac{v_A}{L} \cdot \sqrt{2}L = \sqrt{2}v_A \qquad (Punkt\ 6) \tag{7}$$

$$\vec{v}_H = \vec{\omega}_2 \times \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\vec{v}_H| = \frac{v_A}{L} \cdot L = v_A \qquad (Punkt\ 7) \tag{8}$$

Jetzt können noch die beiden fehlenden Rotationsgeschwindigkeiten bestimmt werden:

$$\omega_4 = \frac{2v_A}{L} \qquad \rightarrow = \vec{\omega}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2v_A}{L} \end{pmatrix} \qquad (Punkt\ \ 11) \tag{9}$$

Da die Geschwindigkeiten v_L und v_K vom Betrag her gleich groß sind, sie aber in entgegengesetzte Richtungen zeigen muss das Momentanzentrum vom Stab LK genau in der Mitte des Stabes liegen:

$$\omega_3 = \frac{2v_A}{L} \qquad \rightarrow = \vec{\omega}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2v_A}{L} \end{pmatrix} \qquad (Punkt\ \ 10) \tag{10}$$

d)

Bestimmen der Leistung mithilfe der Formel $P = v_E \cdot F_E + v_H \cdot F_H + v_L \cdot F_L$ (*Punkt 12*):

$$P = \begin{pmatrix} v_A \\ -v_A \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_A \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{3v_A F}_{Punkt\ \ 13} \tag{11}$$

e)

Stabkraft im Stab DK bestimmen mithilfe des PdvL:

$$P = \underbrace{\vec{v}_E \cdot \vec{F}_L + \vec{v}_H \cdot \vec{F}_H + \vec{v}_E \cdot F_E}_{Bekannt\ \ aus\ \ d)} + \vec{v}_D \cdot S + \vec{v}_K \cdot \vec{S} = 0 \qquad (Punkt\ \ 14)$$

$$P = 3v_A \cdot F + \begin{pmatrix} v_A \\ v_A \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \\ S \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \begin{pmatrix} 0 \\ -v_A \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -S \\ -S \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\begin{aligned} P = 3v_A F + \frac{2v_A}{\sqrt{2}} S + v_A \cdot \frac{S}{\sqrt{2}} &= 0 \\ 3F &= -\sqrt{2}S - \frac{\sqrt{2}}{2}S \\ 3F &= -\frac{3}{2}\sqrt{2}S \\ F &= \underbrace{-\sqrt{2}F}_{Punkt\ \ 15} \end{aligned} \tag{12}$$

Es handelt sich um einen Druckstab (*Punkt 16*)

Musterlösung Aufgabe 3

Basisprüfung Sommer 2015

a)

Kräftegleichgewicht an der Rolle:

$$\begin{aligned}
\sum F_x: &\quad \frac{\sqrt{2}}{2}N_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}P - S = 0 \\
\sum F_y: &\quad \frac{\sqrt{2}}{2}N_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}P - G_3 = 0 \qquad \rightarrow \underbrace{N_3 = P + \sqrt{2}G_3}_{Punkt\ \ 1} \\
\sum M_z: &\quad 0
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
S &= \frac{\sqrt{2}}{2}N_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}P \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(P + \sqrt{2}G_3) + \frac{\sqrt{2}}{2}P \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}P + G_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}P \\
&= \sqrt{2}P + G_3 Punkt\ \ 2
\end{aligned} \tag{2}$$

Kräftegleichgewicht am Quader oben:

$$\begin{aligned}
\sum F_x: &\quad S - F_{r1} = 0 \qquad \rightarrow \underbrace{F_{r1} = S = \sqrt{2}P + G_3}_{Punkt\ \ 3} \\
\sum F_y: &\quad N_1 - G_1 = 0 \qquad \rightarrow \underbrace{N_1 = G_1}_{Punkt\ \ 4} \\
\sum M_z: &\quad N_1 \cdot e_1 - F_{r1} \cdot \frac{h}{2} = 0 \qquad \rightarrow e_1 = \frac{F_{r1} \cdot h}{2N_1} = \underbrace{\frac{(\sqrt{2}P + G_3) \cdot h}{2G_1}}_{Punkt\ \ 5}
\end{aligned} \tag{3}$$

Kräftegleichgewicht am Quader unten:

$$\begin{aligned}
\sum F_x: &\quad F_{r1} - F_{r2} = 0 \qquad \rightarrow \underbrace{F_{r1} = F_{r2} = \sqrt{2}P + G_3}_{Punkt\ \ 6} \\
\sum F_y: &\quad N_2 - G_2 - N_1 = 0 \qquad \rightarrow \underbrace{N_2 = G_2 + G_1}_{Punkt\ \ 7} \\
\sum M_z: &\quad N_2 e_2 - F_{r2}\frac{h}{2} - F_{r1}\frac{h}{2} - N_1 e_1 = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

$$e_2 = \frac{\frac{h}{2}\left(\sqrt{2}P+G_3+\sqrt{2}P+G_3\right)+G_1 \cdot h\left(\frac{\sqrt{2}P+G_3}{2G_1}\right)}{G_1+G_2}$$

$$e_2 = \frac{3(\sqrt{2}P+G_3)h}{2(G_1+G_2)} \qquad (Punkt\ \ 8)$$

b)

Quader 1:

$$\begin{aligned}
|F_{r1}| &\leq \mu_0 \cdot |N_1| \qquad (Punkt\ \ 9)\\
\sqrt{2}P + G_3 &\leq \mu_0 \cdot G_1\\
\sqrt{2}P &\leq \mu_0 \cdot G_1 - G_3\\
P &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_0 \cdot G_1 - G_3) \qquad (Punkt\ \ 10)
\end{aligned} \tag{5}$$

Quader 2:

$$\begin{aligned}
|F_{r2}| &\leq \mu_0 \cdot |N_2|\\
\sqrt{2}P + G_3 &\leq \mu_0 \cdot (G_1 + G_2)\\
\sqrt{2}P &\leq \mu_0 \cdot (G_1 + G_2) - G_3\\
P &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_0 \cdot (G_1 + G_2) - G_3) \qquad (Punkt\ \ 11)
\end{aligned} \tag{6}$$

c)

Kippbedingung:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{(\sqrt{2}P + G_3) \cdot h}{2G_1} &&\leq \frac{h}{2}\\
e_2 &= \frac{3(\sqrt{2}P + G_3) \cdot h}{2(G_1 + G_2)} &&\leq \frac{h}{2}
\end{aligned} \tag{7}$$

Da $e_2 \geq e_1$ (*Punkt 12*) muss der untere Quader zuerst kippen (*Punkt 13*).
d)

$$\begin{aligned}
e_2 = \frac{3(\sqrt{2} \cdot P + G_3) \cdot h}{2(G_1 + G_2)} &\leq \frac{h}{2} \qquad (Punkt\ \ 14)\\
3\sqrt{2} \cdot P \cdot h - 3 \cdot G_3 \cdot h &\leq (G_1 + G_2) \cdot h\\
3\sqrt{2}P - (G_1 + G_2) &\leq 3 \cdot G_3\\
G_3 &\geq \sqrt{2}P - \frac{1}{3}\underbrace{(G_1 + G_2)}_{2G} \qquad (Punkt\ \ 15)
\end{aligned} \tag{8}$$