Tag 1 PVK Lösungen Biomechanik I

Lösungsskript zum Prüfungsvorbereitungskurs

Jack Kendall

kendallj@student.ethz.ch

Lösung zu vergangenen Übungen und Prüfungen vom D-HEST, D-MAVT & D-USYS, von Hibbeler Mechanics of Materials 8th und von Jack Kendall

ETH Zürich

10.06.19

Inhalt

1 TAG 1

1.1 Kinematik 3D

1.1.1 Aufgabe Kurs

Gegeben: $\underline{v}_D$, $\underline{v}_F$, $\underline{v}_G$
Gesucht: Zentralachse, $\underline{\omega}$, $\underline{v}_O$
Lösung:

$$\underline{v}_D = \underline{v}_F + \underline{\omega} \times \underline{FD} = \begin{pmatrix} v \\ -v \\ v_{Fz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v \\ -v \\ v_{Fz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a\omega_y \\ a\omega_x + a\omega_z \\ -a\omega_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_y = 0, \quad \omega_x + \omega_z = {}^v/_a, \quad v_{Fz} = 2v$$

$$\underline{v}_D = \underline{v}_G + \underline{\omega} \times \underline{GD} = \begin{pmatrix} v \\ v_{Gy} \\ v_{Gz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ a \\ -a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v \\ v_{Gy} \\ v_{Gz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a\omega_z \\ a\omega_x + a\omega_z \\ a\omega_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \omega_z = 0, \quad \omega_x = {}^v/_a, \quad v_{Gy} = -v, \quad v_{Gz} = v$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\omega} = \frac{v}{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_O = \underline{v}_G + \underline{\omega} \times \underline{GO} = \begin{pmatrix} v \\ -v \\ v \end{pmatrix} + \frac{v}{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

1.1.2 Aufgabe Kurs

a) Gesucht: Rotationsachse der Pyramide.

Lösung:

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Gesucht: Rotationsgeschwindigkeit?

Lösung:

$$\underline{\omega} = \frac{v}{\sqrt{2}l} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Gesucht: $\underline{v}_E$?

Lösung:

$$\underline{v}_E = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.1.3 Aufgabe Kurs

- **Aufgabenteil a)**
  Die 1. und 2. Invariante sind:

  $$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} -3^v/_a \\ 0 \\ 3^v/_a \end{pmatrix}; \qquad \underline{v}_{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Aufgabenteil b)**
  Die grösste Schnelligkeit findet man in den Punkten mit grösstem Abstand von der Zentralachste, als E und O.

  $$v_{Ey} = 3$$

  $$v_{0y} = -3$$

1.1.4 Hausaufgabe

Gegeben: $\underline{v}_H$, $\underline{\omega}$, a
Gesucht: $\underline{v}_C$
Lösung:

$$\underline{HC} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\underline{v}_C = \underline{v}_H + \underline{\omega} \times \underline{HC} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 2v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v/a \\ v/a \\ -v/a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -v \\ v \end{pmatrix} \tag{2}$$

1.1.5 Hausaufgabe

Gegeben: $\underline{v}_C$, $\underline{v}_F$ (mit unbekannter x-Komponente)
Gesucht: Rotationsachse, $\underline{\omega}$, $\underline{v}_O$
Lösung: x-Komponente von $\underline{v}_F$ mit SdpG

$$\underline{v}_C \cdot \underline{CF} = \underline{v}_F \cdot \underline{CF} \quad \text{mit} \quad \underline{CF} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{v}_F = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ -v \end{pmatrix} \tag{3}$$

Komponenten von $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$

$$\underline{v}_C = \begin{pmatrix} -v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{v}_F + \underline{\omega} \times \underline{FC} = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ -v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a\omega_z \\ -a\omega_y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \omega_z = \frac{v}{a},\ \omega_y = -\frac{v}{a} \tag{4}$$

Der Würfel führt eine Rotation aus: $\underline{v}_C \cdot \underline{\omega} = 0$

$$-v\omega_x + v\frac{-v}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_x = -\frac{v}{a} \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega} = \frac{v}{a}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

1.1.6 Hausaufgabe

Gesucht: $\underline{\omega}$ und a

Lösung:

a) $\underline{v}_A = \underline{v}_B = 0$ da auf der Rotationsachse

Richtung von $\underline{\omega}$ ist die Richtung von $\underline{AB}$, wobei $\underline{AB} = \left(0, \frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow |\underline{AB}| = R$

$$\underline{\omega} = \omega\frac{\underline{AB}}{|\underline{AB}|} = \omega\begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_0 = \underline{\omega} \times \underline{AO} = \omega\begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega R/\sqrt{2} \\ \omega R/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -v \\ v \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a = 0, \quad \frac{\omega R}{\sqrt{2}} = v \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\sqrt{2}v}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\omega} = \frac{\sqrt{2}v}{R}\begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v/R \\ v/R \end{bmatrix}$$

1.1.7 Hausaufgabe

Gegeben: Rollender Kegel, $\underline{v}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\underline{\omega}| = \omega$

Gesucht: Rotationsachse, $\underline{v}_P$, $\underline{v}_M$, Zeit für eine Umdrehung um $\underline{e}_z$

Lösung:

a) Die momentane Rotationsachse ist die Kontaktlinie zwischen Kegel und xy-Ebene und geht durch O.

$$\mu: \quad \underline{r}(p) = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

b)

$$\begin{aligned} \underline{v}_P &= \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{OP} \\ \underline{v}_P &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \sqrt{3}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}a\omega \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \underline{v}_M &= \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{OM} \\ \underline{v}_M &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3a}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}a}{2}\omega \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

c) Zeit T für eine Umkreisung um die z-Achse:

$$|\underline{v}_M \cdot \underline{e}_y| T = 2\pi(\underline{OM} \cdot \underline{e}_x) \tag{10}$$

$$T = \frac{2\pi(\underline{OM} \cdot \underline{e}_x)}{|\underline{v}_M \cdot \underline{e}_y|} = \frac{2\pi \frac{3a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}\omega} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{\omega} \tag{11}$$

1.1.8 Hausaufgabe

Der Tetraeder führt eine momentane Schraubung aus.

$$\underline{v}_B = \begin{pmatrix} -v \\ 2v \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Punkt mit minimaler Schnelligkeit befindet sich für die gegebene Schraubung auf der Schraubungsachse, und somit im Punkt C. Für seine Schnelligkeit folgt:

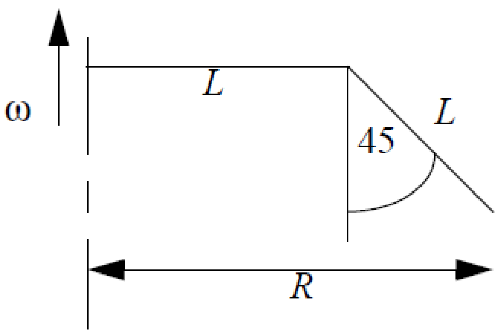
$$s_{min} = 2v$$

Der Punkt D hat maximalen Abstand von der Schraubungsachse und ist somit der Punkt mit maximaler Schnelligkeit.

$$s_{max} = \sqrt{6}v$$

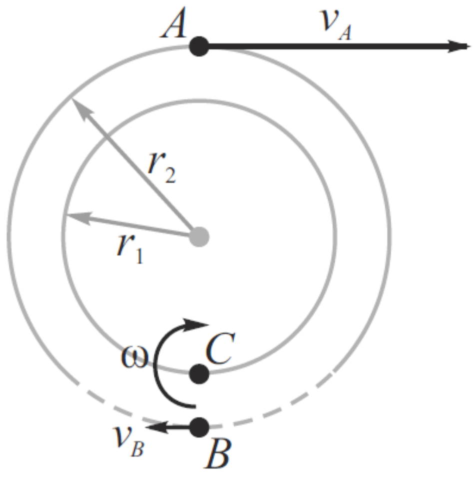
1.2 Kinematik 2D

1.2.1 Aufgabe Kurs



$$\dot{s} = R\omega = L\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\omega$$

1.2.2 Aufgabe Kurs



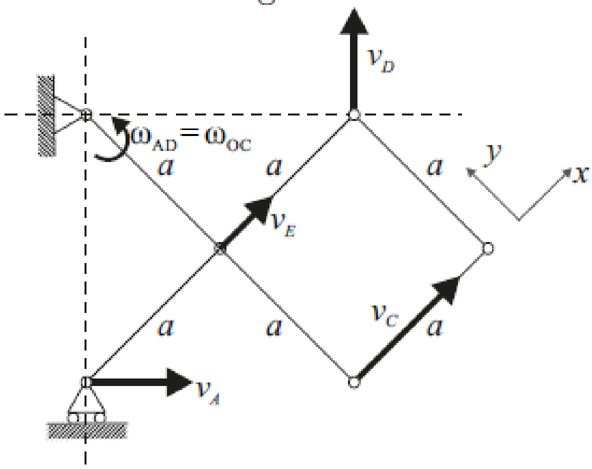
Rollen um Punkt C:

$$\begin{aligned} |\underline{v}_A| &= (r_2 + r_1)\omega \\ |\underline{v}_B| &= (r_2 - r_1)\omega \end{aligned} \tag{18}$$

1.2.3 Aufgabe Kurs

Gegeben: System aus vier starren Stäben, gelenkig miteinander verbunden, in O gelenkig gelagert und in A aufgelegt. Schnelligkeit von A: $v_A = v$
Gesucht: Geschwindigkeit von B.

Vorgehen: Ermittlung der einzelnen Momentanzentren und anwendung des Satzes der projizierten Geschwindigkeiten.



Lösung:

$$\left.\begin{array}{l} M_{z(AD)} \text{ auf OA} \perp v_A \\ M_{z(AD)} \text{ auf OE} \perp v_E \end{array}\right\} \Rightarrow \quad M_{z(AD)} = O \quad \Rightarrow \quad \omega_{AD} = \omega_{OC} \tag{1}$$

$$\omega_{AD} = \frac{v}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}v}{2a} \tag{2}$$

$$v_D = \sqrt{2}a\,\omega_{AD} = v \tag{3}$$

$$v_C = 2a\,\omega_{OC} = \sqrt{2}v \tag{4}$$

Aus SdpG:

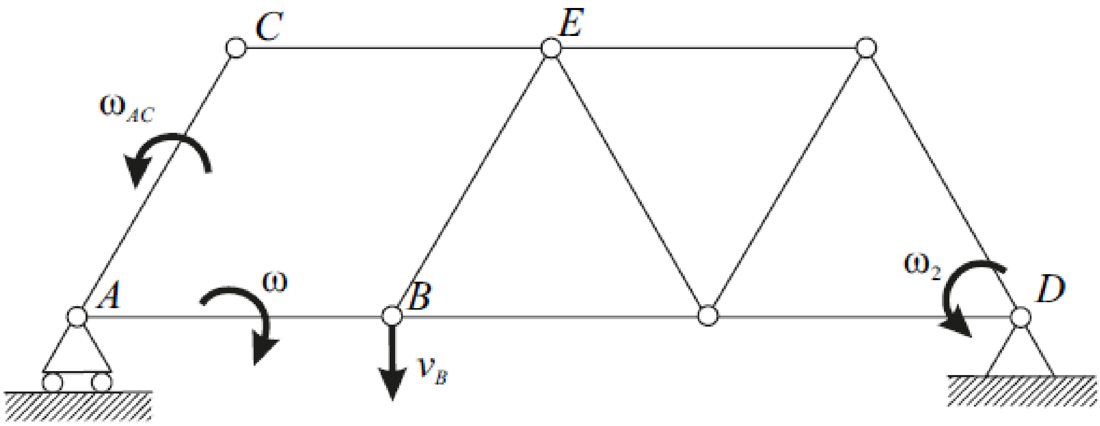
$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_C = \sqrt{2}v \\ v_{By} &= \frac{\sqrt{2}v}{2} \end{aligned} \tag{5}$$

$$|v_B| = \sqrt{\frac{5}{2}}v \tag{6}$$

1.2.4 Aufgabe Kurs

Gegeben: Stab AB rotiert mit Winkelschnelligkeit ω.
Gesucht: Betrag und Richtung der Winkelgeschwindigkeit des Stabes AC.

Lösung:



$$v_B = l\,\omega = 2l\,\omega_2 \quad \Rightarrow \quad w_2 = \frac{\omega}{2} \tag{9}$$

Stab AC rotiert gegen den Uhrzeigersinn mit Winkelschnelligkeit ω_2, da parallele Stäbe die gleiche Winkelgeschwindigkeit haben.

$$\underline{AC} \parallel \underline{BE} \quad \Rightarrow \quad \omega_{AC} = \omega_{BE} = \omega_2 \tag{10}$$

1.2.5 Hausaufgabe

Gegeben:

$$\underline{v}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{v}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Gesucht: $\underline{\omega}$ und die Momentane Drehachse

a) 2. Invariante: $\underline{v}_\omega$
Satz der Invarianten: $\underline{\omega} \cdot \underline{v}_A = \underline{\omega} \cdot \underline{v}_C$

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \omega_y = 0 \tag{2}$$

$$|\underline{v}_\omega| = \frac{\underline{v}_A \cdot \underline{\omega}}{|\underline{\omega}|} = 0 \quad \text{mit}: \underline{\omega} \neq \underline{0} \quad \Rightarrow \text{reine Rotation!} \tag{3}$$

b)

$$\begin{aligned} \underline{v}_A = \underline{v}_C + \underline{\omega} \times \underline{CA} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2R \end{pmatrix} \\ \underline{v}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2R\omega_x \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_x = \frac{v}{R} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{AB} &= \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v/R \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2R \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \\ \underline{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -v + 2R\omega_z \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_z = \frac{v}{R} \tag{7}$$

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} v/R \\ 0 \\ v/R \end{pmatrix} \tag{8}$$

c) Momentane Rotationsachse: Punkt P mit $\underline{v}_P = \underline{0}$ und $\underline{r}_P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \underline{v}_P = \underline{0} = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{AP} &= \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v/R \\ 0 \\ v/R \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y\frac{v}{R} \\ (x-z)\frac{v}{R} \\ y\frac{v}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

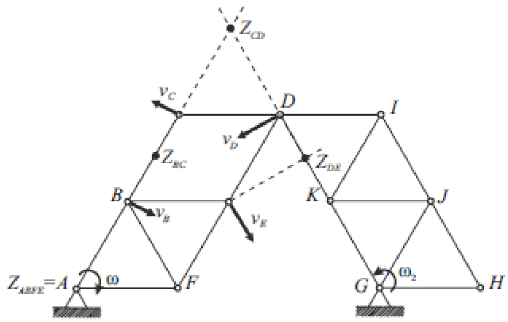
$$\Rightarrow \quad y = 0, \quad (x-z)\frac{v}{R} + v = 0 \quad \Rightarrow \quad z = x + R \tag{10}$$

x ist beliebig wählbar: $\Rightarrow$ $x = 0$ resultiert in folgender Rotationsachse:

$$\mu: \quad \underline{r}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

1.2.6 Hausaufgabe

Gegeben: Abgebildetes System, Rotationsgeschwindigkeit ω um A. Stab CE ist entfernt.
Gesucht:
Geschwindigkeiten von: B, C, D, E; Rotationsschnelligkeiten und Momentanzentren der Stäbe: BC, CD, DE, DI.
Vorgehen:
Satz vom Momentanzentrum und Projektionssatz.
Geschwindigkeit senkrecht auf Hebelarm durch Rotationszentrum.
Starre Körper: $ABEF$, BC, CD, DE, $GHDI$.



Lösung:

$$v_B = \omega\, l \qquad \underline{v_B} \perp \underline{AB} \tag{7}$$

$$v_E = \sqrt{3}\omega\, l \qquad \underline{v_E} \perp \underline{AE} \tag{8}$$

Momentanzentrum vom Körper $GHDI$ ist in G (Lagerpunkt).

$$\Rightarrow \underline{v_D} \perp \underline{DG} \tag{9}$$

Finde Z_{DE} im Schnittpunkt der Senkrechten zur Geschwindigkeiten in D und E. $\Rightarrow$ $\omega_{ED} = 2\omega$ und $v_D = \omega l$.

$$\omega_2 = \frac{v_D}{2l} = \frac{\omega}{2} = \omega_{DI} \tag{10}$$

Aus SdpG: $\underline{v_C} \perp \underline{BC}$
Finde Z_{CD} im Schnittpunkt der Senkrechten zur Geschwindigkeiten in C und D. $\Rightarrow$ $\omega_{CD} = \omega$ und $v_C = \omega l$.
Gleiches Vorgehen um Z_{BC} zu finden. $\Rightarrow$ $\omega_{BC} = 2\omega$

1.2.7 Hausaufgabe

Gegeben: $\underline{v}_A = v\underline{e}_x$, Fachwerk mit Stäben der Länge l und $2l$
Gesucht:

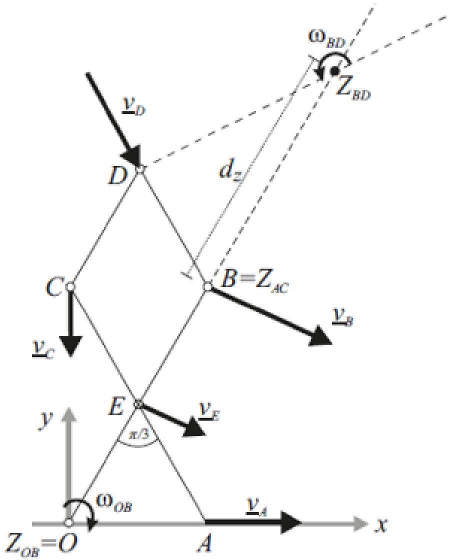
a) $\underline{\omega}_{OB}$

b) Momentanzentrum des Stabes AC: Z_{AC} , $\underline{v}_C$

c) Momentanzentrum des Stabes BD: Z_{BD}

d) $\underline{v}_D$

Lösung:



a)

$$v_E = l \cdot \omega_{OB} \tag{1}$$

Satz der projizierten Geschwindigkeiten: $v_E \cos(30°) = v \cos(60°)$

$$\Rightarrow \quad v_E = \frac{1}{2} v \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \omega_{OB} = \frac{\sqrt{3}}{3l} v \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega}_{OB} = -\omega_{OB}\,\underline{e}_z \tag{2}$$

b) Z_{AC}: Senkrecht auf $\underline{v}_A$ und senkrecht auf $\underline{v}_E \quad \Rightarrow \quad Z_{AC} = B$

$$\omega_{AC} = \frac{v}{2\sqrt{3}\frac{l}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3l} v = \omega_{OB} \quad \Rightarrow \quad \underline{v}_C = -l\omega_{AC}\underline{e}_y = -\frac{\sqrt{3}}{3} v\,\underline{e}_y \tag{3}$$

c) Parallele Stäbe (eines Parallelograms) haben gleiche Winkelschnelligkeit ω.

$$\omega_{BD} = \omega_{AC} \quad \Rightarrow \quad v_B = d_z\,\omega_{BD} = 2l\,\omega_{OB} \tag{4}$$

$$d_z = \frac{2l\,\omega_{OB}}{\omega_{BD}} = \frac{2lv\,3l\sqrt{3}}{3lv\sqrt{3}} = 2l \tag{5}$$

$$\Rightarrow \underline{O\,Z_{BD}} = (2l + d_z)\begin{pmatrix} \cos(60°) \\ \sin(60°) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l \\ 2\sqrt{3}l \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

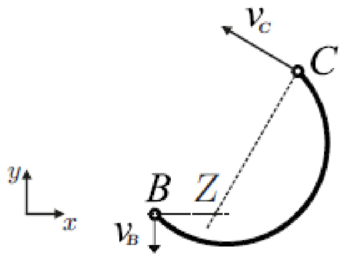
d)

$$\underline{v}_D = \underline{\omega}_{BD} \times \underline{Z_{BD}\,D}$$

$$\underline{v}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3l} v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{3l}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}l}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}v}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

1.3 Kinematik SdpG

1.3.1 Aufgabe Kurs



Gegeben: $|v_B| = v$, Punkt D bewegt sich nach oben mit Geschwindigkeit v.
Gesucht: momentaner Bewegungszustand des Stabes BC.
Lösung:

$$\underline{v_C} \cdot \underline{CD} = \underline{v_D} \cdot \underline{CD} \tag{7}$$

$$\underline{v_B} \cdot \underline{BC} = \underline{v_C} \cdot \underline{BC} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot 2R = \begin{pmatrix} v_{Cx} \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot 2R$$

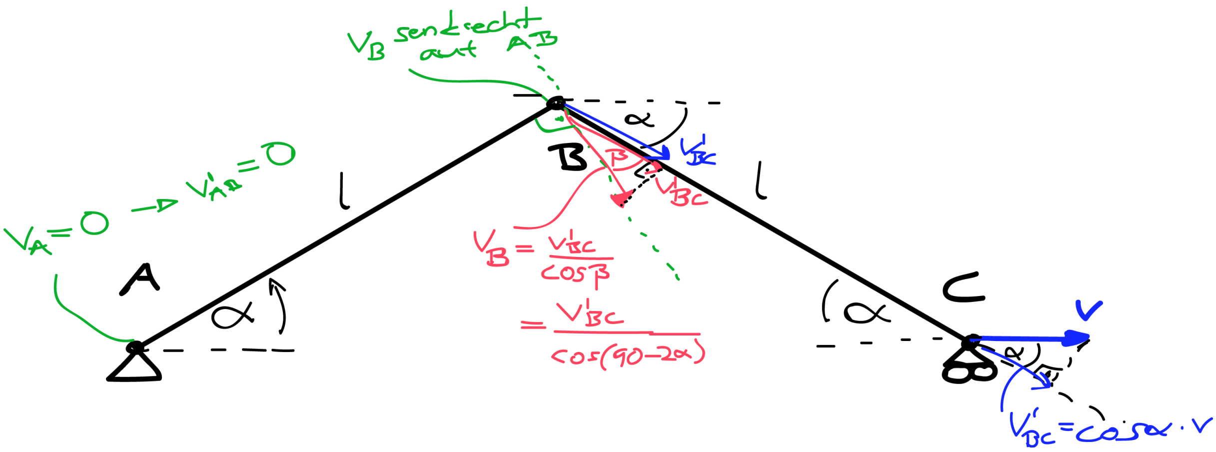
Daraus folgt

$$\Rightarrow v_{Cy} = v, v_B = v + v_{Cx}$$

Fall 1: $v_B = v$, $v_{Cx} = 0$. BC: momentane Translation.

Fall 2: $v_B = -v$, $v_{Cx} = -2v$. BC: momentane Rotation um Punkt Z.

1.3.2 Aufgabe Kurs



1.3.3 Hausaufgabe

$$
\begin{aligned}
\omega_{CD} &= \omega \\
\omega_{BC} &= \omega_{AD} = 0
\end{aligned}
$$