Tag 2 PVK Lösungen Biomechanik I

Lösungsskript zum Prüfungsvorbereitungskurs

Jack Kendall

kendallj@student.ethz.ch

Lösung zu vergangenen Übungen und Prüfungen vom D-HEST, D-MAVT & D-USYS, von Hibbeler Mechanics of Materials 8th und von Jack Kendall

ETH Zürich

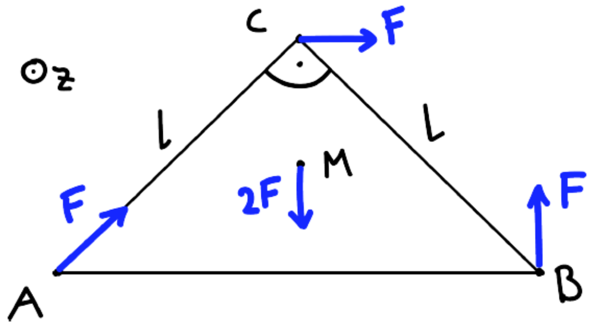
10.06.18

Inhalt

1 TAG 2

1.1 Momente

1.1.1 Aufgabe Kurs



Berechne das Moment in A, B & C. **Lösung:** $M_A = -\frac{\sqrt{2}}{2}lF$, $M_B = (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)lF$, $M_C = \frac{\sqrt{2}}{2}lF$

1.2 Dyname

1.2.1 Aufgabe Kurs

- **Aufgabenteil a)**
  Die Dyname der Kräftegruppe in O besteht aus $\underline{R}$ und $\underline{M}_O$.

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3F \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{M}_O = \begin{pmatrix} -2Fa \\ 1/2\, Fa \\ 3/2\, Fa \end{pmatrix}$$

- **Aufgabenteil b)**
  Zwei Kräftegruppen sind statisch äquivalent, falls sie für **jede Starrkörperbewegung** die **gleiche Leistung** erbringen. Das heisst auch, dass sie die gleiche Resultierenden und Gesamtmomente bezüglich jedem beliebigen Punkt haben müssen.

1.2.2 Hausaufgabe

Die Dyname im Punkt O besteht aus der Resultierenden $\underline{R}$ und dem Moment im Punkt O, $\underline{M}_O$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \underline{R} &= \begin{pmatrix} 3F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{M}_O &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3aF \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Angriffspunkt ist ein beliebiger Punkt auf der Kante BE.

$$\underline{F}_E = \begin{pmatrix} 3F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für statische Äquivalenz muss entweder die Leistung P zweier Kräftegruppen $G1$ und $G2$ für alle virtuellen Bewegungszustände des Starrkörpers gleich sein, oder es muss $\underline{R}_1 = \underline{R}_2$ und $\underline{M}_{O,1} = \underline{M}_{O,2}$ für einen beliebigen Punkt O gelten.

1.3 Leistung

1.3.1 Aufgabe Kurs

$$P_{tot} = -2vP$$

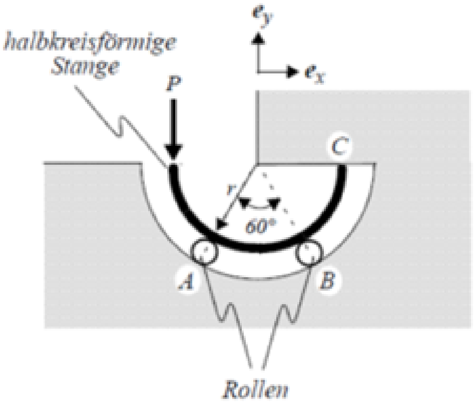
1.4 Statik

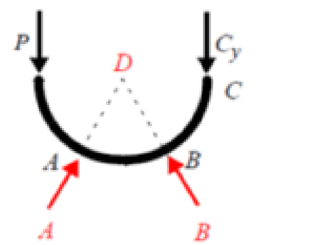
1.4.1 Aufgabe Kurs

Fall 1: Richtig

Fall 2: Richtig, (S1 & S2 Pendelstützen)

Fall 3



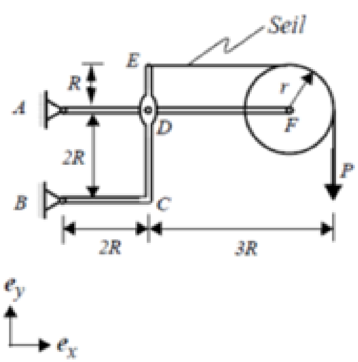


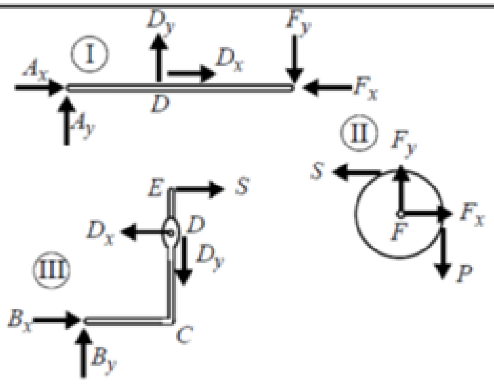
x: $\frac{A}{2} - \frac{B}{2} = 0$ y: $\frac{\sqrt{3}A}{2} + \frac{\sqrt{3}B}{2} - P - C_y = 0$

M_D: $Pr - C_y r = 0$

R: ☐ F: ☒

Fall 4





(I) x: $A_x + D_x - F_x = 0$

y: $A_y + D_y - F_y = 0$

M_D: $-2RA_y - 3RF_y = 0$ $-(3R-r)F_y$

(II) x: $F_x - S = 0$

y: $F_y - P = 0$

M_F: $Sr - Pr = 0$

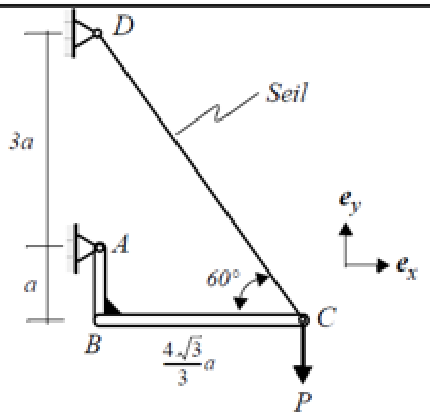
(III) x: $B_x - D_x + S = 0$

y: $B_y - D_y = 0$

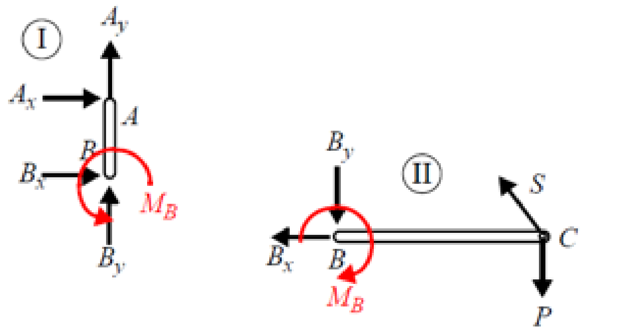
M_B: $-2RD_y + 2RD_x - 3RS = 0$

R: ☐ F: ☒

Fall 5



die Stäbe AB und BC sind in B zusammengeschweisst



(I) x: $A_x + B_x = 0$

y: $A_y + B_y = 0$

M_A: $aB_x + M_B = 0$

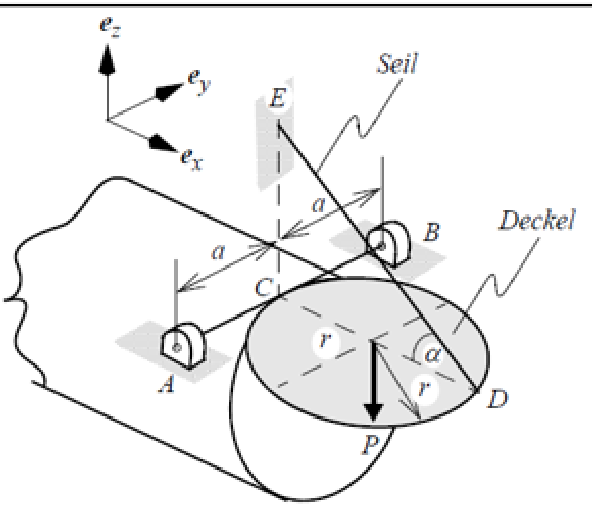
(II) x: $-B_x - \frac{S}{2} = 0$

y: $-B_y - P + \frac{\sqrt{3}}{2}S = 0$

M_B: $-\frac{4\sqrt{3}}{3}aP + 2aS - M_B = 0$

R: ❑ F: ☒

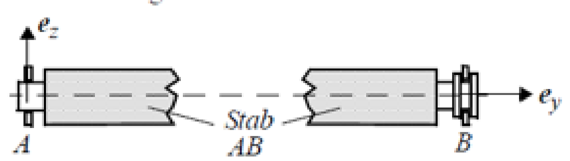
Fall 6



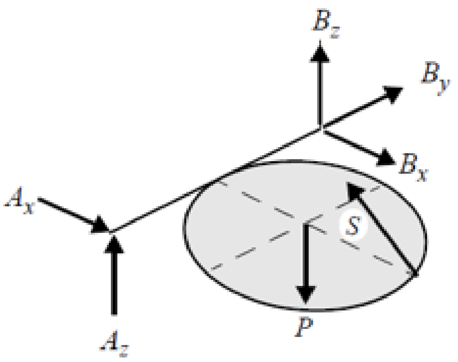
Deckel ist in C mit Stab AB verschweisst

Die Kraft P zeigt in die negative z-Richtung

Schnitt entlang *AB*:



(Kurzes Querlager) (Kurzes Querlager mit zusätzlichem Längslager)



x: $A_x + B_x - S\cos\alpha = 0$

y: $B_y = 0$

z: $A_z + B_z - P + S\sin\alpha = 0$

M_{Bx}: $-2aA_z + aP - aS\sin\alpha = 0$

M_{By}: $rP - 2rS\sin\alpha = 0$

M_{Bz}: $2aA_x + aS\cos\alpha = 0$

R: ❑ F: ☒

1.4.2 Hausaufgabe

$$M = 2m_1 + m_2$$

1.4.3 Hausaufgabe

- **Aufgabenteil a)**
  Position x:

  $$x = \frac{m_2}{m_1} L_2$$

- **Aufgabenteil b)**
  Auslenkung der Feder:

  $$\Delta x = \frac{g(m_1 + m_2)}{k}$$

1.5 Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL)

1.5.1 Aufgabe Kurs

$$S_{CD} = \frac{1}{2} F$$

1.5.2 Aufgabe Kurs

Der Abstand x wird mithilfe einer Rotation $\tilde{\omega}$, z.B. um Punkt A, bestimmt.

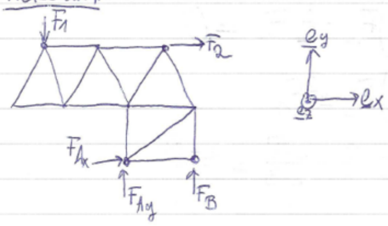
$$P_{tot} = -Fx\tilde{\omega} + \frac{\sqrt{2}}{2} FL\tilde{\omega} = 0$$

1.5.3 Aufgabe Kurs

$$S = -\frac{\sqrt{2}}{4} K$$

1.5.4 Hausaufgabe

a) Freischnitt



$$R_x := F_2 + F_{A_x} = 0 \quad \Rightarrow F_{A_x} = -F_2$$

$$R_y := F_{A_y} + F_B - F_1 = 0$$

$$M_A := F_1 \cdot \frac{3}{2}a - F_2 \cdot \left(\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} + a\right) + F_B \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow F_B = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) F_2 - \frac{3}{2} F_1$$

$$(\text{von } R_y) \quad F_{A_y} = F_1 - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) F_2 + \frac{3}{2} F_1$$

$$= \frac{5}{2} F_1 - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) F_2$$

$$\underline{\underline{F_{A_x} = -F_2}} \qquad \underline{\underline{F_{A_y} = \frac{5}{2} F_1 - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) F_2}} \qquad \underline{\underline{F_B = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) F_2 - \frac{3}{2} F_1}}$$

b) $F_B \geq 0$

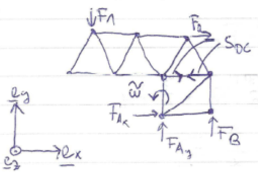
$$F_B = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) F_2 - \frac{3}{2} F_1 \geq 0$$

$$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) F_2 \geq \frac{3}{2} F_1$$

$$\frac{F_1}{F_2} \leq \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{2 + \sqrt{3}}{3}$$

$$\underline{\underline{\frac{F_1}{F_2} \leq \frac{2 + \sqrt{3}}{3}}}$$

c) Freischnitt (Stab DC entfernt)



$$F_1 = F \qquad F_2 = \sqrt{3} F$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{F}{\sqrt{3} F} \leq \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Dreieck ABDA bildet einen Starrkörper mit $\tilde{\underline{v}} = \underline{0}$

Virtueller Bewegungszustand: Stab AC rotiert mit $\tilde{\omega}$ um Punkt A

$$\underline{\underline{\tilde{\underline{v}}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}} \qquad \underline{\underline{\tilde{\underline{v}}_C = \begin{pmatrix} a\tilde{\omega} \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

SdpG: $\tilde{\underline{v}}_C \cdot \underline{CE} = \tilde{\underline{v}}_E \cdot \underline{CE}$ und $\tilde{\underline{v}}_D \cdot \underline{DE} = \tilde{\underline{v}}_E \cdot \underline{DE}$

$$\begin{pmatrix} a\tilde{\omega} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow a\tilde{\omega} = e_x + e_y \cdot \sqrt{3}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a \\ \sqrt{3}/2\, a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{pmatrix} \Rightarrow e_x = \sqrt{3}\, e_y$$

$$\Rightarrow e_y = \frac{a\tilde{\omega}}{2\sqrt{3}} \qquad e_x = \frac{a\tilde{\omega}}{2}$$

$$\underline{\underline{\tilde{\underline{v}}_E = \frac{a\tilde{\omega}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}}$$

SdpG: $\tilde{\underline{v}}_H \cdot \underline{CH} = \tilde{\underline{v}}_C \cdot \underline{CH}$ und $\tilde{\underline{v}}_H \cdot \underline{EH} = \tilde{\underline{v}}_E \cdot \underline{EH}$

$$\frac{a\tilde{\omega}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow h_x = \frac{a\tilde{\omega}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} a\tilde{\omega} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -3a\tilde{\omega} = -\frac{3a\tilde{\omega}}{2} + \sqrt{3}\, h_y$$

$$h_y = -\frac{\sqrt{3}}{2} a\tilde{\omega} \qquad \tilde{\underline{v}}_H = \frac{a\tilde{\omega}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\boxed{P_{total} = 0}$

$$P_{total} := \begin{pmatrix} 0 \\ -F_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a\tilde{\omega}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}a\tilde{\omega}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a\tilde{\omega}}{2} \\ \frac{a\tilde{\omega}}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_2 \\ \frac{5}{2}F_1 - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)F_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ F_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{DC} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a\tilde{\omega} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -S_{DC} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} F_1 + F_2 + 2 S_{DC} = 0$$

$$\underline{\underline{\Rightarrow S_{DC} = \frac{\sqrt{3} F_1 + F_2}{2}}}$$

$$F_1 = F \qquad F_2 = \sqrt{3} F$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_{DC} = \sqrt{3} F}}$$

1.5.5 Hausaufgabe

Gegeben:
Ideales ebenes Fachwerk, belastet durch 2 Kräfte mit Betrag F.

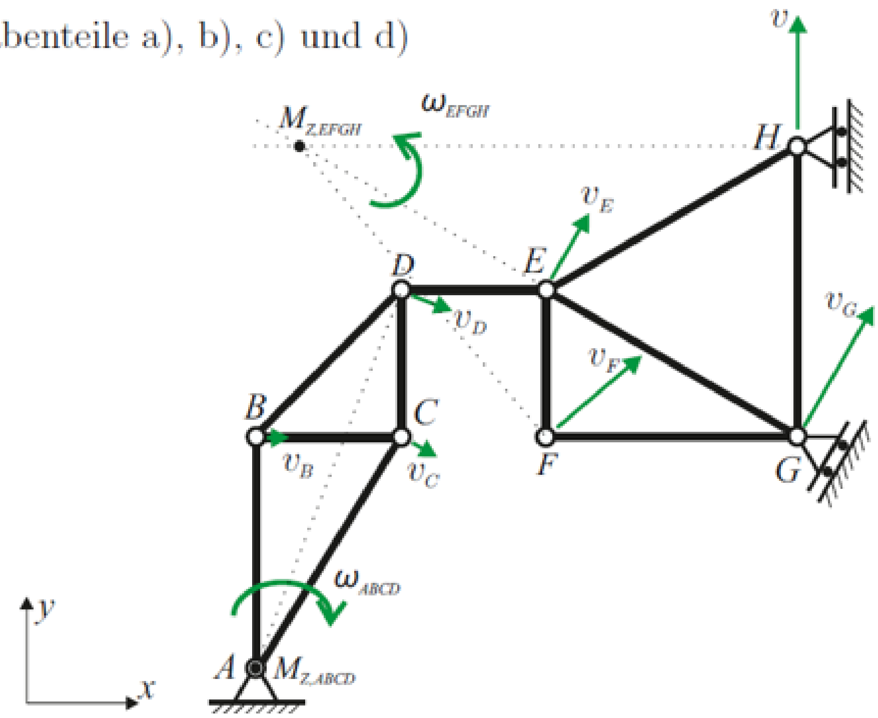
Gesucht:
Stabkraft S_3 (gemäss Konvention als Zugkraft eingeführt)

Lösung:
Knotengleichgewicht in y-Richtung am Knoten zwischen Stab 1, 3 und 4:

$$\sum F_y : \quad F + S_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_3 = -F \tag{10}$$

1.5.6 Hausaufgabe

Skizze für Aufgabenteile a), b), c) und d)



- **Aufgabenteil c)**
  Statische Bestimmtheit des Systems:

$$\begin{aligned} u &= s + r - 2k \\ &= 12 + 4 - 2 \cdot 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Statisch bestimmt!} \end{aligned}$$

  Wobei s die Anzahl Stäbe ist, k die Anzahl Knoten und r die Anzahl Lagerreaktionen.

- **Aufgabenteil d)**
  Stabkraft S_{CF}:

$$S_{CF} = \frac{12mg + 3P(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} + 3}$$

- **Aufgabenteil e)**
  Stabkraft S_{AB}:

$$S_{AB} = \frac{P(2 - \sqrt{3}) - 6mg}{2 + \sqrt{3}}$$

1.6 Ruhe: Reibung & Standfestigkeit

1.6.1 Aufgabe Kurs

Schlitten rutscht nicht.

1.6.2 Aufgabe Kurs

$$\mu_0 \geq \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}G}{\frac{G}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}G} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$$

1.6.3 Hausaufgabe

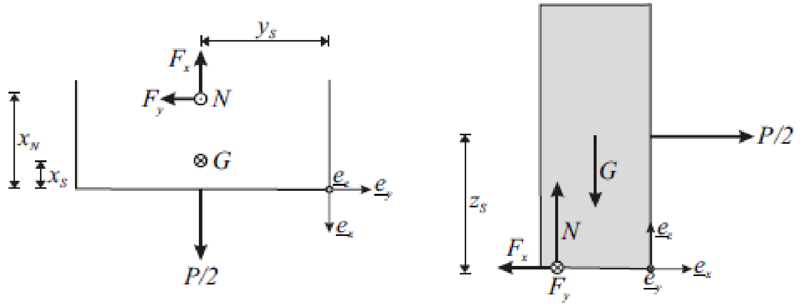
$$-\frac{5}{4}G \leq F \leq \frac{1}{4}G$$

1.6.4 Hausaufgabe

Gegeben:
System gemäss Skizze
$\mu_0 = 0.15$ und Kraft $\frac{P}{2}\underline{e}_x$

Gesucht:
Intervall von P für welches das System rutscht aber nicht kippt.

Lösung:
Trenne System und führe die Reibkräfte F_x und F_y und die Normalkraft N ein.



Schwerpunkt des Gesamtsystems: (Abstände vom Ursprung)

$$x_S = \frac{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot a + 0 \cdot 2a}{a + 2a + a} = \frac{1}{4}a \qquad (1)$$
$$y_S = a$$
$$z_S = 4a$$

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x : \quad \frac{P}{2} - F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x = \frac{P}{2}$$
$$\sum F_y : \quad F_y = 0 \qquad (2)$$
$$\sum F_z : \quad N - G = 0 \quad \Rightarrow \quad N = G$$

$$\sum M_y^O : \quad x_N N - x_S G + \frac{P}{2}4a = 0$$
$$\Rightarrow \quad x_N = \frac{1}{G}\left(\frac{1}{4}aG - \frac{P}{2}4a\right) = \left(\frac{1}{4} - 2\frac{P}{G}\right)a \qquad (3)$$

Bedingung gegen Kippen: $0 \leq x_N \leq a$
Fall 1: $x_N \geq 0$

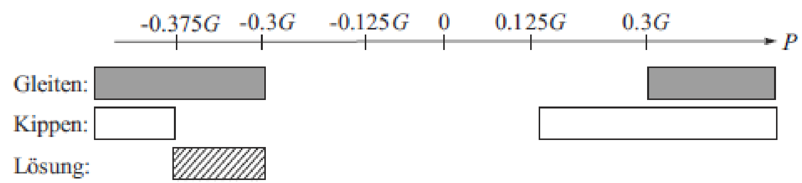
$$\left(\frac{1}{4} - 2\frac{P}{G}\right)a \geq 0$$
$$P \leq \frac{1}{8}G \qquad (4)$$

Fall 2: $x_N \leq a$

$$\left(\frac{1}{4} - 2\frac{P}{G}\right)a \leq a$$
$$P \geq -\frac{3}{8}G = -0.375G \qquad (5)$$

Bedingung gegen Gleiten: $|F_x| < \mu_0 N$

$$\left|\frac{P}{2}\right| < 0.15N$$
$$|P| < 0.3G \qquad (6)$$



Der Körper setzt sich in Bewegung bei $-0.375G < P < -0.3G$

1.6.5 Hausaufgabe

Aufgabe 2

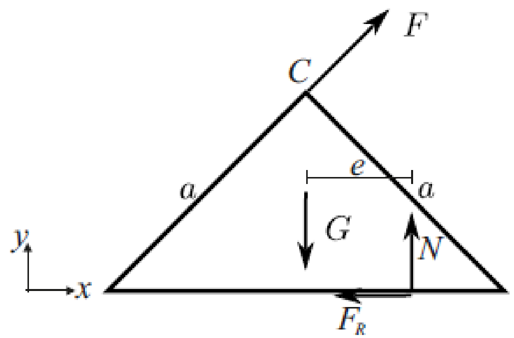
Gegeben:
Dreieckige Platte mit Gewicht G, aufgelegt auf einer rauen Oberfläche (Haftreibungskoeffizient μ_0) und belastet durch Kraft F

Gesucht:

a) Bedingung für F damit das System nicht rutscht.

b) Bedingung für F gegen damit das System nicht kippt.

Lösung:



a) Kräftegleichgewichte:

$$\sum F_x: \quad \frac{\sqrt{2}}{2}F - F_R = 0 \quad \Rightarrow \quad F_R = \frac{\sqrt{2}}{2}F$$
$$\sum F_y: \quad \frac{\sqrt{2}}{2}F - G + N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = G - \frac{\sqrt{2}}{2}F \tag{4}$$

Damit die Platte nicht abhebt muss gelten:

$$N > 0 \quad \Rightarrow \quad F < \sqrt{2}G \tag{5}$$

Bedingung damit das System nicht rutscht: $|F_R| < \mu_0 |N|$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}F < \mu_0\left(G - \frac{\sqrt{2}}{2}F\right)$$
$$(1+\mu_0)F < \sqrt{2}\mu_0 G \tag{6}$$
$$F < \frac{\sqrt{2}\mu_0}{1+\mu_0}G$$

b) Momentgleichgewicht in C:

$$\sum M_z^C: \quad eN - \frac{\sqrt{2}}{2}aF_R = 0 \quad \Rightarrow \quad e = \frac{\sqrt{2}aF_R}{2N} \tag{7}$$

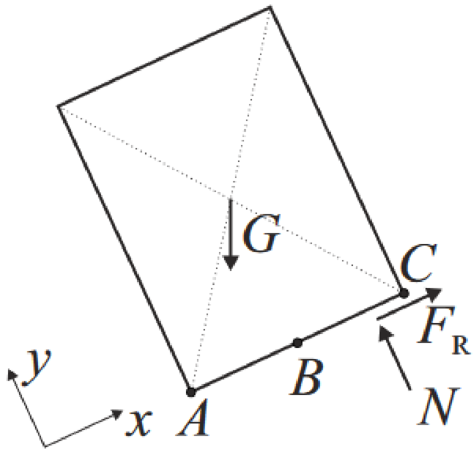
Bedingung damit das System nicht kippt: $|e| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}a$

$$\left|\frac{\sqrt{2}aF_R}{2N}\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}a$$
$$F_R \leq N$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}F \leq G - \frac{\sqrt{2}}{2}F \tag{8}$$
$$2F \leq \sqrt{2}G$$
$$F \leq \frac{\sqrt{2}}{2}G$$

Damit Kippen möglich ist muss die kritische Kraft für Kippen kleiner sein als die für Gleiten, es muss daher $\mu_0 > 1$ gelten.

1.6.6 Hausaufgabe

Freischnitt: Bedingung gegen Rutschen:



$$
\begin{aligned}
||F_R|| &\leq \mu_0 ||N|| \\
\mu_0 &\geq \tan(\alpha)
\end{aligned}
$$

Bedingung gegen Kippen:

$$
\begin{aligned}
||e|| &< \frac{a}{2} \\
\tan(\alpha) &< \frac{a}{b}
\end{aligned}
$$

Bedingung damit Gleiten vor Kippen eintritt:

$$
\Big(\mu_0 \leq \tan(\alpha)\Big) \cup \left(\tan(\alpha) < \frac{a}{b}\right) \quad \Rightarrow \quad \mu_0 < \frac{a}{b}
$$

1.6.7 Hausaufgabe

Damit zuerst der quadratförmige Klotz auf dem Boden zu rutschen beginnt, muss gelten:

$$
\begin{aligned}
\mu g(m+M) &< 2\mu m g \\
M &< m \\
\frac{M}{m} &< 1
\end{aligned}
$$