Tag 3 PVK Lösungen Biomechanik I

Lösungsskript zum Prüfungsvorbereitungskurs

Jack Kendall

kendallj@student.ethz.ch

Lösung zu vergangenen Übungen und Prüfungen vom D-HEST, D-MAVT & D-USYS, von Hibbeler Mechanics of Materials 8th und von Jack Kendall

ETH Zürich

10.06.19

Inhalt

1 TAG 3

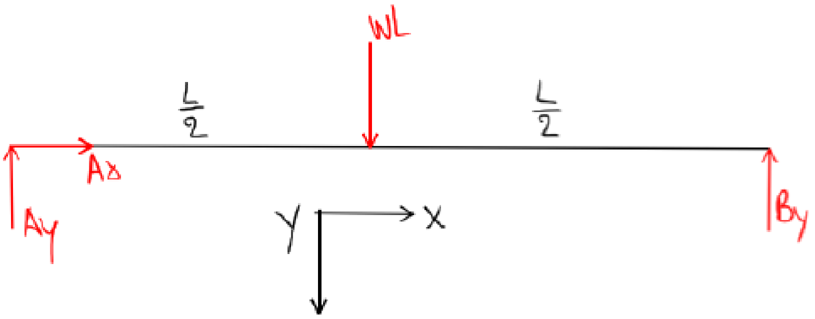
1.1 Beanspruchung

1.1.1 Aufgabe Kurs

Aufgabenteile a) & b)

1. Lagerkräfte berechnen

1.1 Freischnitt

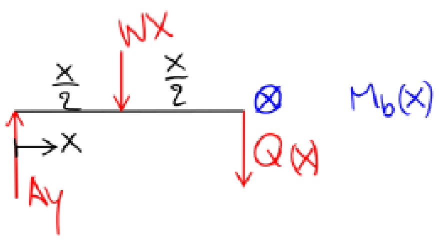


1.2 GGB lösen

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0, \qquad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y = wL - B_y = \frac{1}{2}wL, \qquad M_A = 0 \rightarrow B_y = \frac{1}{2}wL$$

2. Beanspruchung im Abschnitt $0 < x < L$

2.1 Freischnitt von links



2.2 GGB lösen

$$\sum F_y = 0 \rightarrow Q(x) = \boxed{w\left(\frac{L}{2} - x\right)}$$

$$\sum M_z = M_b(x) + A_y \cdot x - wx \cdot \frac{x}{2} = 0 \rightarrow M_b(x) = \boxed{\frac{wx}{2}(x - L)}$$

3. Alternativer Lösungsweg mit den Differenzialbeziehungen

3.1 $Q(x)$ berechnen

$$Q(x) = \int -w(x)dx = -\int w dx = -wx + C_1$$

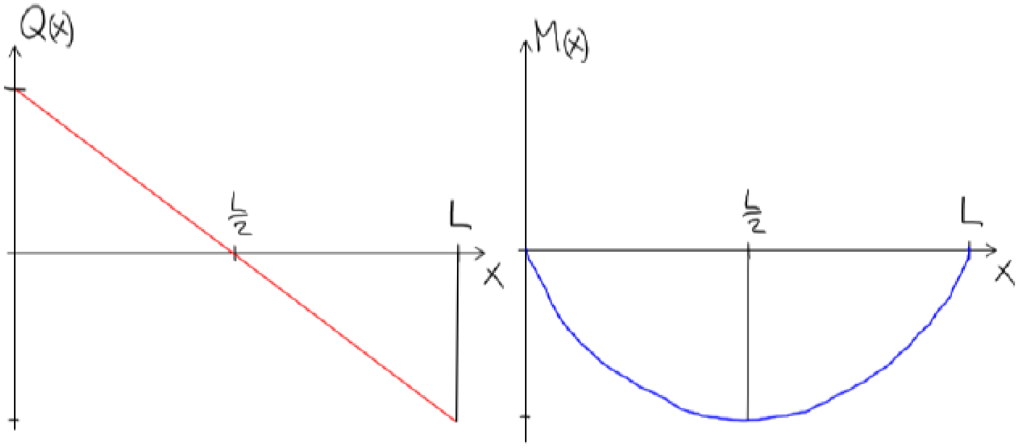
$$\text{mit } Q(0) = Q(L) = -\frac{wL}{2} \rightarrow C_1 = A_y = \frac{1}{2}wL \rightarrow \boxed{Q(x) = w\left(\frac{L}{2} - x\right)}$$

3.2 $M_b(x)$ berechnen

$$M_b(x) = \int -Q(x)dx = -\int \left(\frac{1}{2}wL - wx\right) dx = -\frac{1}{2}wL + \frac{1}{2}wx^2 + C_2$$

$$\text{mit } M_b(0) = M_b(L) = 0 \rightarrow C_2 = 0 \rightarrow \boxed{M_b(x) = \frac{1}{2}wx(x - L)}$$

<u>Aufgabenteil c)</u>



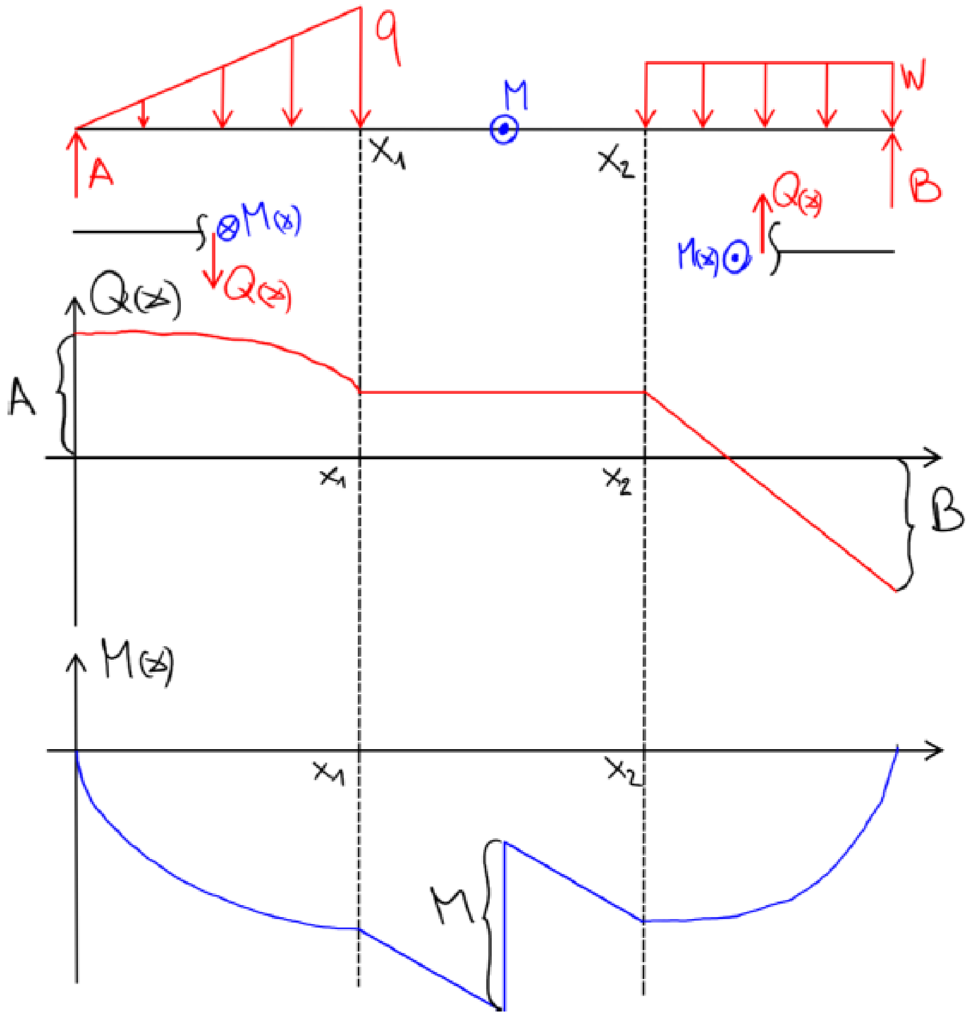
<u>Aufgabenteil d)</u>

Es gibt zwei logische Szenarien, die in Frage kommen: Entweder bricht der Stab, wo die Querkraft am höchsten ist, oder dort, wo das Biegemoment am grössten ist.

Aus der Erfahrung kann man aber definitiv sagen, dass der Stab wegen des Biegemoments in der Mitte (bei $x = \frac{1}{2}L$) brechen wird. Einerseits, weil der Stab physikalisch nicht an seinen Enden brechen kann und anderseits, weil Momente generell höhere Belastungen im Material verursachen.

Der letzte Punkt wird noch im folgenden Semester besprochen, sobald ihr die inneren Spannungen, die durch Querkräfte und Biegemomente verursacht werden, berechnen könnt.

1.1.2 Aufgabe Kurs



1.1.3 Aufgabe Kurs

Aufgabe 1

Gegeben:
System gemäss Skizze
Linienlast mit Gesamtbetrag $2P$ und Kraft P

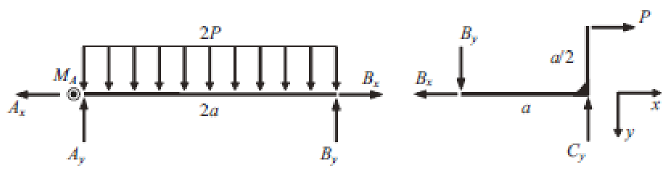
Gesucht:

a) Beanspruchungen in AB und BC

b) Ort und Betrag von M_{Zmax}

Lösung:

a) Systemtrennung:



Gleichgewichtsbedingungen für den Stab AB:

$$\begin{aligned}
&\sum F_x: \quad -A_x + B_x = 0\\
&\sum F_y: \quad A_y + B_y - 2P = 0\\
&\sum M_z^A: \quad M_A + 2aB_y - 2aP = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Gleichgewichtsbedingungen für den Stab BD:

$$\begin{aligned}
&\sum F_x: \quad -B_x + P = 0\\
&\sum F_y: \quad C_y - B_y = 0\\
&\sum M_z^B: \quad aC_y - \frac{a}{2}P = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

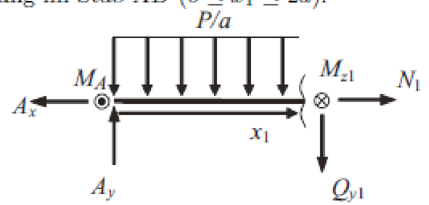
Aus diesen Gleichungen können dann die Lagerreaktionen berechnet werden:

$$\begin{aligned}
&A_x = P \qquad A_y = \frac{3}{2}P \qquad M_A = aP\\
&B_x = P \qquad B_y = \frac{P}{2} \qquad C_y = \frac{P}{2}
\end{aligned} \tag{3}$$

Berechnung der verteilten Last q:

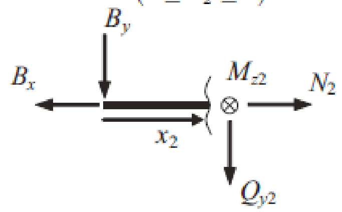
$$q = \frac{2P}{2a} = \frac{P}{a} \tag{4}$$

Beanspruchung im Stab AB ($0 \leq x_1 \leq 2a$):

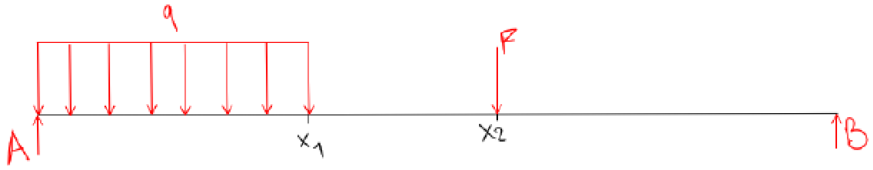


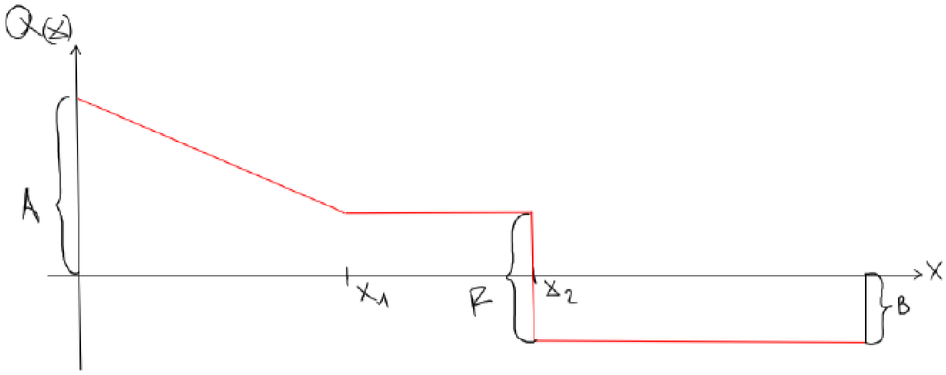
$$\begin{aligned}
&\sum F_x: \quad N_1(x_1) = A_x = P\\
&\sum F_y: \quad Q_1(x_1) = A_y - \frac{P}{a}x_1 = \frac{3}{2}P - \frac{P}{a}x_1\\
&\sum M_z: \quad M_{z1}(x_1) = M_A - A_y x_1 + \frac{P}{a}x_1\frac{x_1}{2} = aP - \frac{3}{2}Px_1 + \frac{P}{2a}x_1^2
\end{aligned}$$

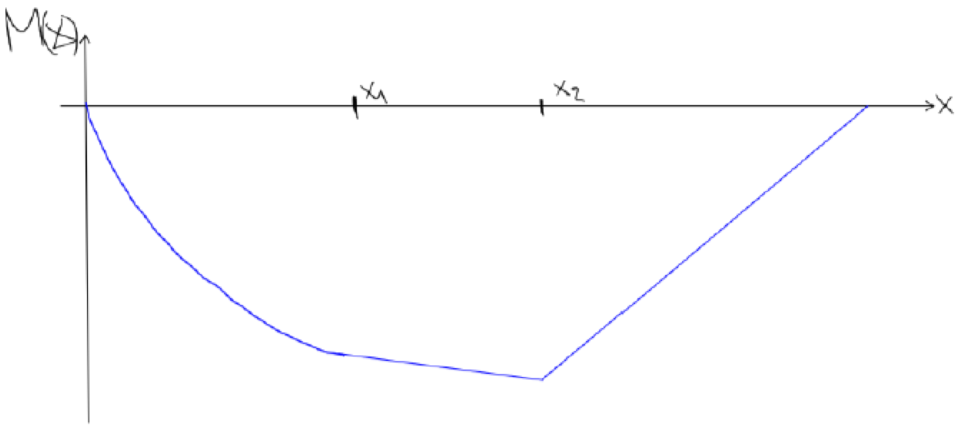
Beanspruchung im Stab BC ($0 \leq x_2 \leq a$):



1.1.4 Hausaufgabe

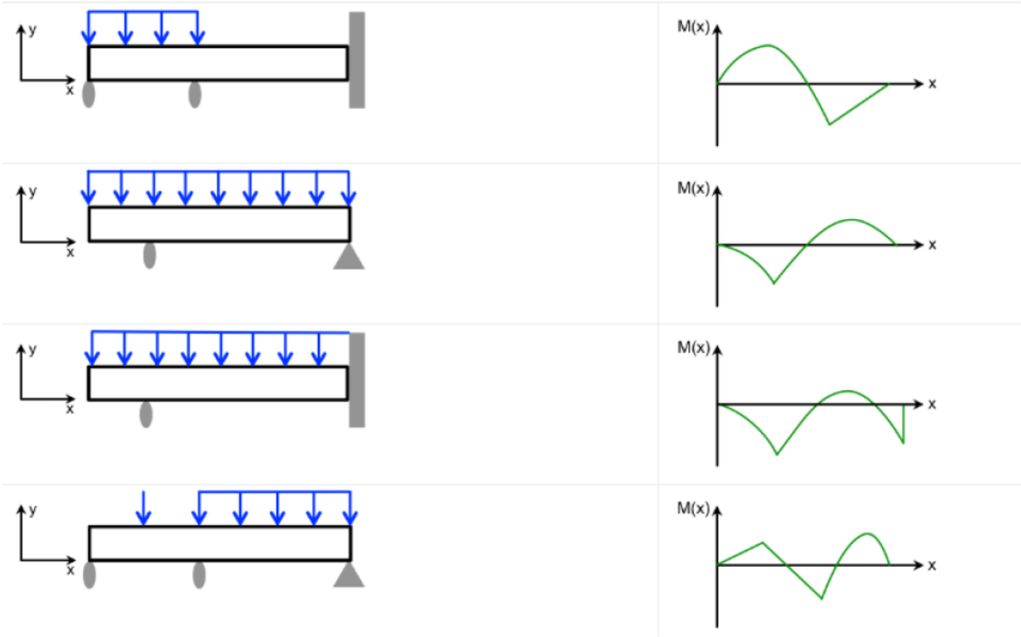




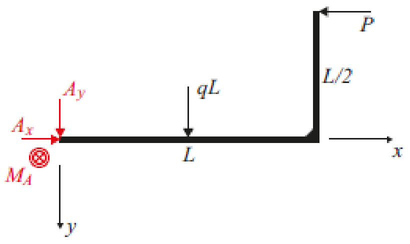


1.1.5 Hausaufgabe

Die Anordnung ist gerade so wie in der Aufgabenstellung.



1.1.6 Hausaufgabe

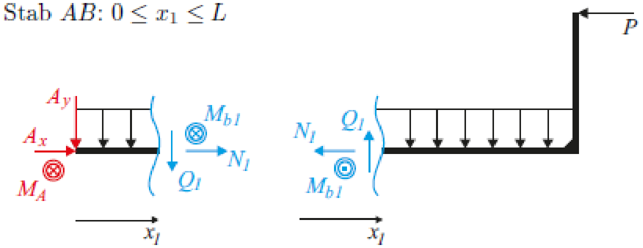


b) Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x: \quad A_x - P = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = P$$
$$\sum F_y: \quad A_y + qL = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = -qL \qquad (6)$$
$$\sum M_z^A: \quad M_A + qL\frac{L}{2} - P\frac{L}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = P\frac{L}{2} - q\frac{L^2}{2}$$

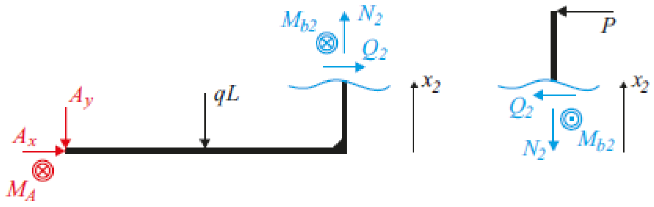
Freischnitte

Stab AB: $0 \le x_1 \le L$



$$N_1 = -P$$
$$Q_1 = q(L - x_1) \qquad (7)$$
$$M_{b1} = \frac{q}{2}(L - x_1)^2 - \frac{PL}{2}$$

Stab BC: $0 \le x_2 \le {}^{L}/_{2}$



$$N_2 = 0$$
$$Q_2 = -P$$
$$M_{b2} = -P\left(\frac{L}{2} - x_2\right)$$

1.1.7 Hausaufgabe

Gesucht: Beanspruchung im Stab

Lösung:

Für $0 \leq x_1 \leq L/4$:

$$N_1 = 0 \qquad Q_1(x_1) = -\frac{1}{2}p_0\frac{x_1^2}{L} \qquad M_{B1}(x_1) = \frac{1}{6}p_0\frac{x_1^3}{L}$$

Für $L/4 \leq x_2 \leq 3L/4$:

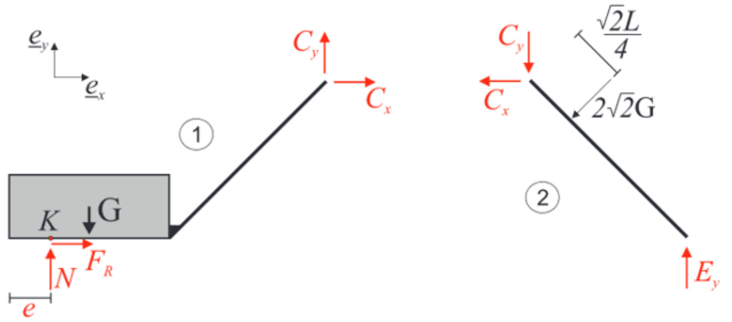
$$N_2 = 0 \qquad Q_2(x_2) = \frac{1}{12}p_0 L - \frac{1}{2}p_0\frac{x_2^2}{L} \qquad M_{B2}(x_2) = \frac{1}{6}p_0\frac{x_2^3}{L} - \frac{1}{12}p_0 L(x_2 - L/4)$$

Für $3L/4 \leq x_3 \leq L$:

$$\begin{aligned} N_3 &= 0 \qquad Q_3(x_3) = \frac{1}{2}p_0\left(L - \frac{x_3^2}{L}\right) \\ M_{B3}(x_3) &= \frac{1}{6}p_0\frac{x_3^3}{L} - \frac{1}{12}p_0 L(x_3 - L/4) - \frac{5}{12}p_0 L(x_3 - 3L/4) \end{aligned}$$

1.1.8 Hausaufgabe

Aufgabenteil a)



$E_y = G$

Aufgabenteil b)

$$\begin{aligned} F_R &= 2G \\ N &= 2G \end{aligned}$$

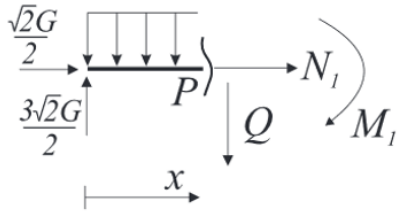
Aufgabenteil c)

$\mu_0 > 1$

Aufgabenteil d)

Es folgt:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}G \\ Q(x) &= \frac{3}{2}\sqrt{2}G - \frac{4}{L}xG \\ M_1(x) &= -\frac{3}{2}\sqrt{2}Gx + \frac{2}{L}Gx^2 \end{aligned}$$



1.1.9 Hausaufgabe

Aufgabenteil a)

$H_y = 0$

Aufgabenteil b)

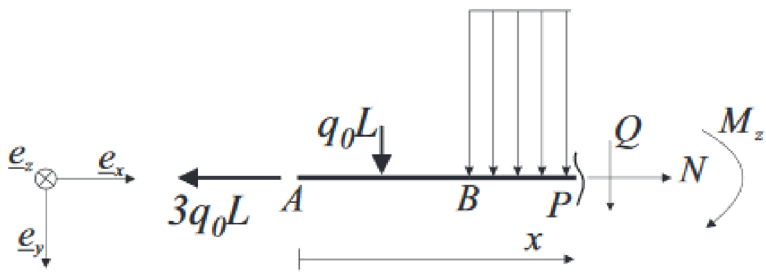
$$\begin{aligned} F_R &= 3q_0L \\ N &= G + 3q_0L \\ e &= \frac{\frac{G}{2}L - \frac{35}{2}q_0L^2}{G + 3q_0L} \end{aligned}$$

Es gilt zu beachten, dass e vom linken Ende der Auflagefläche gemessen wird. Die Kraft F_R wird in positive x-Richtung eingeführt, und die Kraft N in negative y-Richtung.

Aufgabenteil c)

Der Körper $ABCDE$ kann nicht abkippen wenn $\frac{G}{q_0L} > 35$ gilt.

Aufgabenteil d)



$$\begin{aligned} N(x) &= 3q_0L \\ Q(x) &= q_0(L - 2x) \\ M_z(x) &= q_0L(x - \frac{L}{2}) + q_0(x - L)^2 = q_0(x^2 - xL + \frac{L^2}{2}) \end{aligned}$$

1.2 Spannung

1.2.1 Aufgabe Kurs

Ein Fluid in einem Behälter übt auf allen Flächen den gleichen Druck aus.

Aus dieser Tatsache können wir die folgende Gleichung aufstellen:

$$p_1 = p_2 \rightarrow \frac{m_1 g}{\frac{\pi}{4} D_1^2} = \frac{m_2 g}{\frac{\pi}{4} D_2^2}$$

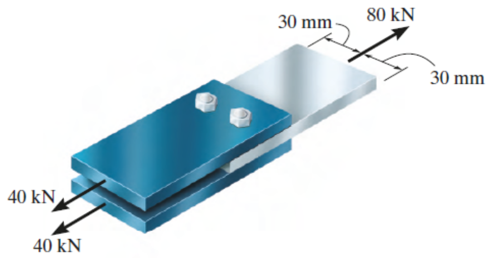
Nach D_2 auflösen und die Werte einsetzen ergibt:

$$\boxed{D_2 = 50mm}$$

1

1.2.2 Hausaufgabe

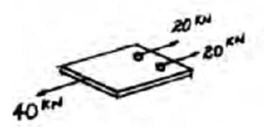
1–75. The joint is fastened together using two bolts. Determine the required diameter of the bolts if the failure shear stress for the bolts is $\tau_{\text{fail}} = 350$ MPa. Use a factor of safety for shear of F.S. = 2.5.



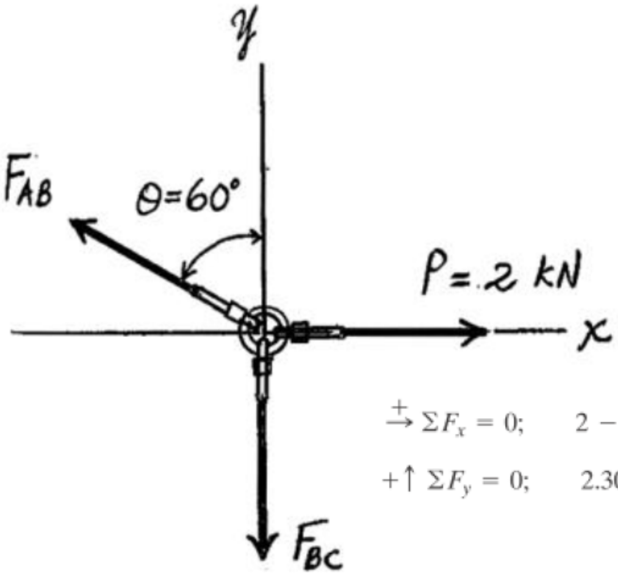
$$\frac{350(10^6)}{2.5} = 140(10^5)$$

$$\tau_{\text{allow}} = 140(10^6) = \frac{20(10^3)}{\frac{\pi}{4} d^2}$$

$d = 0.0135$ m $= 13.5$ mm **Ans.**



1.2.3 Hausaufgabe



$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad 2 - F_{AB} \sin 60^\circ = 0 \qquad F_{AB} = 2.309 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 2.309 \cos 60^\circ - F_{BC} = 0 \qquad F_{BC} = 1.155 \text{ kN}$$

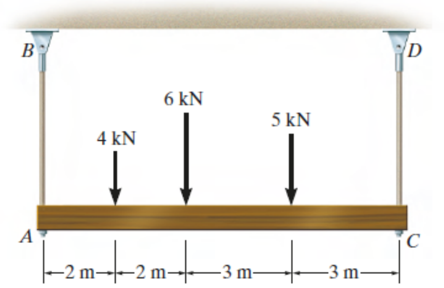
$$A_{AB} = A_{BC} = \frac{\pi}{4}(0.005^2)$$

$$\left(\sigma_{\text{avg}}\right)_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} = \frac{2.309(10^3)}{6.25(10^{-6})\pi} = 117.62(10^6) \text{ Pa} = 118 \text{ MPa}$$

$$\left(\sigma_{\text{avg}}\right)_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{1.155(10^3)}{6.25(10^{-6})\pi} = 58.81(10^6) \text{ Pa} = 58.8 \text{ MPa}$$

1.2.4 Hausaufgabe

•1–97. The rods AB and CD are made of steel having a failure tensile stress of $\sigma_{\text{fail}} = 510$ MPa. Using a factor of safety of F.S. = 1.75 for tension, determine their smallest diameter so that they can support the load shown. The beam is assumed to be pin connected at A and C.



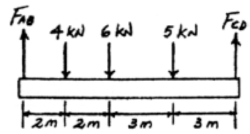
Support Reactions:

$$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0; \qquad F_{CD}(10) - 5(7) - 6(4) - 4(2) = 0$$

$$F_{CD} = 6.70 \text{ kN}$$

$$\circlearrowleft +\Sigma M_C = 0; \qquad 4(8) + 6(6) + 5(3) - F_{AB}(10) = 0$$

$$F_{AB} = 8.30 \text{ kN}$$



Allowable Normal Stress: Design of rod sizes

For rod AB

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{\sigma_{\text{fail}}}{\text{F.S}} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}}; \qquad \frac{510(10^6)}{1.75} = \frac{8.30(10^3)}{\frac{\pi}{4}d_{AB}^2}$$

$$d_{AB} = 0.006022 \text{ m} = 6.02 \text{ mm} \qquad \textbf{Ans.}$$

For rod CD

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{\sigma_{\text{fail}}}{\text{F.S}} = \frac{F_{CD}}{A_{CD}}; \qquad \frac{510(10^6)}{1.75} = \frac{6.70(10^3)}{\frac{\pi}{4}d_{CD}^2}$$

$$d_{CD} = 0.005410 \text{ m} = 5.41 \text{ mm} \qquad \textbf{Ans.}$$

1.2.5 Hausaufgabe

Consider the equilibrium of joint B, Fig. a,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_{AB}\cos\theta - F_{BC} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad P - F_{AB}\sin\theta = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

The cross-sectional area of rods AB and BC are $A_{AB} = A_{BC} = \frac{\pi}{4}(0.005^2) = 6.25(10^{-6})\pi\ \text{m}^2$. Since the average normal stress in rod AB is required to be 1.5 times to that of rod BC, then

$$(\sigma_{\text{avg}})_{AB} = 1.5\,(\sigma_{\text{avg}})_{BC}$$

$$\frac{F_{AB}}{A_{AB}} = 1.5\left(\frac{F_{BC}}{A_{BC}}\right)$$

$$\frac{F_{AB}}{6.25(10^{-6})\pi} = 1.5\left[\frac{F_{BC}}{6.25(10^{-6})\pi}\right]$$

$$F_{AB} = 1.5\,F_{BC} \qquad \textbf{(3)}$$

Solving Eqs (1) and (3),

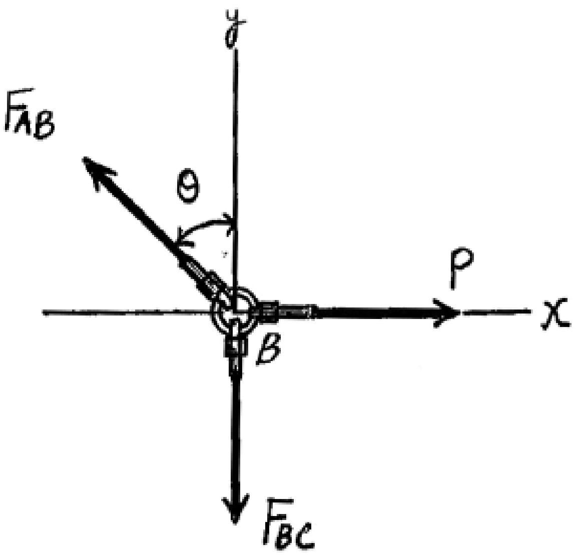
$\theta = 48.19° = 48.2°$ **Ans.**

Since wire AB will achieve the average normal stress of 100 MPa first when **P** increases, then

$$F_{AB} = \sigma_{\text{allow}}\,A_{AB} = \left[100(10^6)\right]\left[6.25(10^{-6})\pi\right] = 1963.50\ \text{N}$$

Substitute the result of F_{AB} and θ into Eq (2),

$P = 1.46$ kN **Ans.**



(a)

1.3 Flächenträgheitsmoment (FTM)

1.3.1 Aufgabe Kurs

- Frage D1 (1 Punkt):

Man bestimme das Flächenträgheitsmoment I_z^{re} für den Spezialfall $R = 0$ (rechteckiger Querschnitt)

D1. 5 mögliche Antworten	Ⓐ $I_z^{re} = b^4/8$	Ⓑ $I_z^{re} = b^4/12$	Ⓒ $I_z^{re} = b^4/6$	Ⓓ $I_z^{re} = b^4/4$	Ⓔ $I_z^{re} = b^4/2$

- Frage D2 (3 Punkte):

Man bestimme die η-Koordinate des Schwerpunkts, η_s, für Querschnitte mit $R = b > 0$ als Funktion von b.

D2. 5 mögliche Antworten	Ⓐ $\eta_s = \dfrac{2b}{3(3+\pi)}$	Ⓑ $\eta_s = \dfrac{2b}{3(4+\pi)}$	Ⓒ $\eta_s = \dfrac{b}{6(4+\pi)}$	Ⓓ $\eta_s = \dfrac{4b}{3(3+\pi)}$	Ⓔ $\eta_s = \dfrac{b}{3(4+\pi)}$

- Frage D3 (3 Punkte):

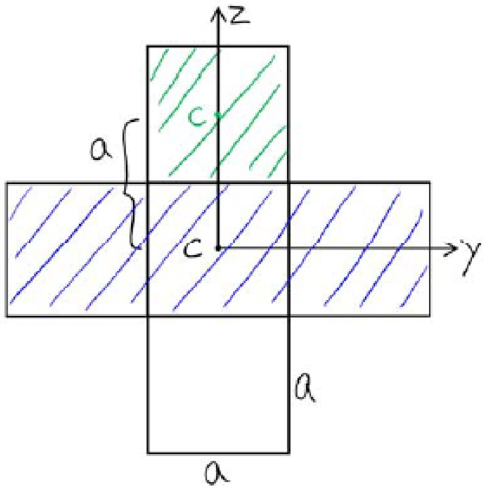
Man bestimme das Flächenträgheitsmoment I_z für Querschnitte mit $R = b > 0$ als Funktion von η_s, η_s^{re}, η_s^{hr}, I_z^{re}, I_z^{hr}, A^{hr} und A^{re}.

D3. 5 mögliche Antworten	
	Ⓐ $I_z = I_z^{re} + I_z^{hr}$
	Ⓑ $I_z = I_z^{re} + I_z^{hr} + (\eta_s - \eta_s^{hr})^2 A^{hr} + (\eta_s - \eta_s^{re})^2 A^{re}$
	Ⓒ $I_z = I_z^{re} + I_z^{hr} + (\eta_s^{hr})^2 A^{hr} + (\eta_s^{re})^2 A^{re}$
	Ⓓ $I_z = I_z^{re} + I_z^{hr} + (\eta_s + \eta_s^{hr})^2 A^{hr} + (\eta_s + \eta_s^{re})^2 A^{re}$
	Ⓔ $I_z = I_z^{re} + I_z^{hr} + (\eta_s + \eta_s^{hr})^2 A^{hr} + (\eta_s - \eta_s^{re})^2 A^{re}$

1.3.2 Hausaufgabe

1. **Schwerpunkt der Fläche bestimmen**
   Da die Fläche respektive der z-und y-Achse symmetrisch ist, ist der Schwerpunkt der Flächenmittelpunkt.

2. **Einzelne Flächenträgheitsmomente bestimmen**
   Die gesamte Fläche kann einer blauen und grünen Elementarfläche geteilt werden. Die Flächenträgheitsmomente dieser Elementarflächen, bezüglich des Schwerpunktes der gesamten Fläche, ergeben superponiert das gesamte Flächenträgheitsmoment.



2.1. Flächenträgheitsmoment der blauen Elementarfläche

$$I_{blau} = \frac{3}{12}a^4$$

2.2. Flächenträgheitsmoment der grünen Elementarfläche
Da die Schwerpunkte der gesamten und der grünen Fläche nicht übereinstimmen, müssen wir den Satz von Steiner anwenden:

$$I_{grün} = I'_{grün} + d^2 \cdot A = \frac{13}{12}a^4$$

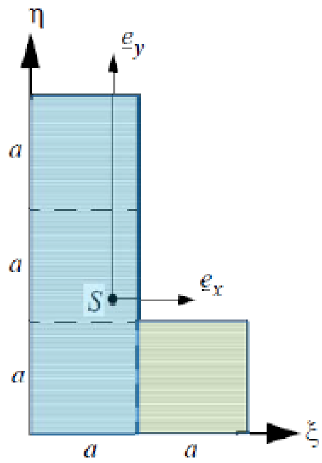
Wobei $I'_{grün} = \frac{1}{12}a^4,\ d = a,\ A = a^2$

3. **Einzelne Flächenträgheitsmomente zum gesamten Flächenträgheitsmoment superponieren**

$$\underbrace{I_y = I_z}_{aus\ Symmetriegründe} = I_{blau} + 2I_{grün} = \boxed{\frac{29}{12}a^4}$$

1.3.3 Hausaufgabe

1. **Schwerpunkt bestimmen**
   Um den Schwerpunkt zu bestimmen, wird ein neues Koordinatensystem η ξ eingeführt.



   Allgemein gilt für die Koordinaten des Schwerpunkts:

$$x_i = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i}$$

   Somit kriegen wir für die ξ −Koordinate:

$$\xi_s = \frac{3a^2\frac{a}{2} + \frac{3}{2}aa^2}{3a^2 + a^2} = \frac{3}{4}a$$

   Und für die η −Koordinate:

$$\eta_s = \frac{\frac{3}{2}a3a^2 + \frac{a}{2}a^2}{3a^2 + a^2} = \frac{5}{4}a$$

2. **Trägheitsmomente**
   2.1. I_x berechnen
   Mit dem Satz von Stokes erhält man folgende Gleichung:

$$I_x = \frac{1}{12}a27a^3 + \frac{1}{16}a^2 3a^2 + \frac{1}{12}a^4 + \frac{9}{16}a^4 = \boxed{\frac{37}{12}a^4}$$

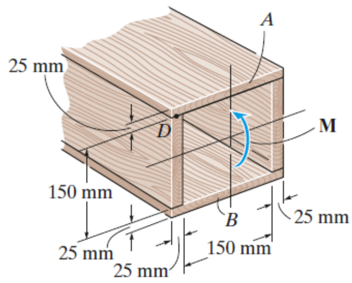
   2.2. I_y berechnen
   Das Gleiche gilt für I_y:

$$I_y = \frac{1}{12}3a^4 + \frac{1}{16}a^2 3a^2 + \frac{1}{12}a^4 + \frac{9}{16}a^4 = \boxed{\frac{13}{12}a^4}$$

1.4 Biegespannung

1.4.1 Aufgabe Kurs

•**6–53.** Determine the moment **M** that should be applied to the beam in order to create a compressive stress at point D of $\sigma_D = 30$ MPa. Also sketch the stress distribution acting over the cross section and compute the maximum stress developed in the beam.



Section Property:

$$I = \frac{1}{12}(0.2)\left(0.2^3\right) - \frac{1}{12}(0.15)\left(0.15^3\right) = 91.14583\left(10^{-6}\right)\ \text{m}^4$$

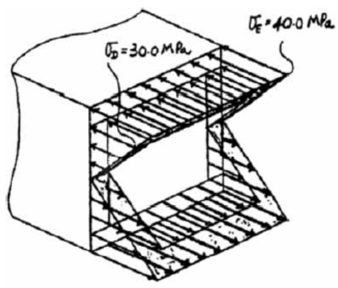
Bending Stress: Applying the flexure formula

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

$$30\left(10^6\right) = \frac{M(0.075)}{91.14583(10^{-6})}$$

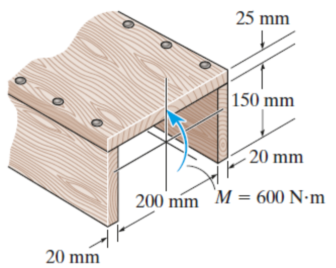
$$M = 36458\ \text{N}\cdot\text{m} = 36.5\ \text{kN}\cdot\text{m} \qquad \textbf{Ans.}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{36458(0.1)}{91.14583(10^{-6})} = 40.0\ \text{MPa} \qquad \textbf{Ans.}$$



1.4.2 Hausaufgabe

6–55. The beam is made from three boards nailed together as shown. If the moment acting on the cross section is $M = 600$ N·m, determine the resultant force the bending stress produces on the top board.

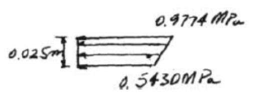


$$\bar{y} = \frac{(0.0125)(0.24)(0.025) + 2\,(0.15)(0.1)(0.02)}{0.24\,(0.025) + 2\,(0.15)(0.02)} = 0.05625\ \text{m}$$

$$I = \frac{1}{12}(0.24)(0.025^3) + (0.24)(0.025)(0.04375^2)$$

$$+\ 2\left(\frac{1}{12}\right)(0.02)(0.15^3) + 2(0.15)(0.02)(0.04375^2)$$

$$= 34.53125\ (10^{-6})\ \text{m}^4$$



$$\sigma_1 = \frac{My}{I} = \frac{600(0.05625)}{34.53125(10^{-6})} = 0.9774\ \text{MPa}$$

$$\sigma_b = \frac{My}{I} = \frac{600(0.05625 - 0.025)}{34.53125(10^{-6})} = 0.5430\ \text{MPa}$$

$$F = \frac{1}{2}(0.025)(0.9774 + 0.5430)(10^6)(0.240) = 4.56\ \text{kN} \qquad \textbf{Ans.}$$

1.4.3 Hausaufgabe

The moment of inertia of the cross-section about the neutral axis is

$$I = \frac{1}{12}(0.2)(0.3^3) - \frac{1}{12}(0.16)(0.25^3) = 0.2417(10^{-3})\ \mathrm{m}^4.$$

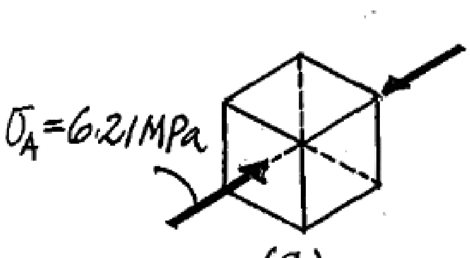
For point A, $y_A = C = 0.15$ m.

$$\sigma_A = \frac{My_A}{I} = \frac{10(10^3)\,(0.15)}{0.2417(10^{-3})} = 6.207(10^6)\mathrm{Pa} = 6.21\ \mathrm{MPa\ (C)} \qquad \textbf{Ans.}$$

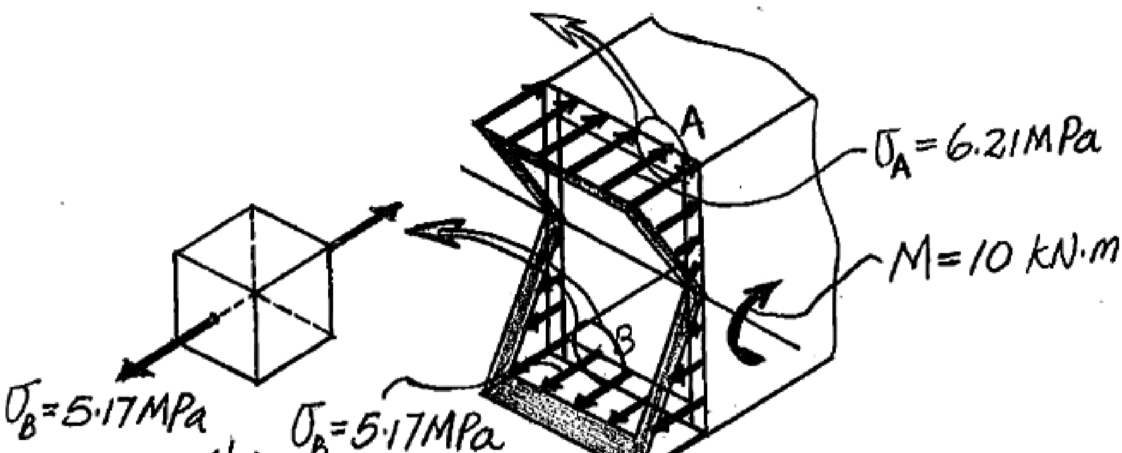
For point B, $y_B = 0.125$ m.

$$\sigma_B = \frac{My_B}{I} = \frac{10(10^3)(0.125)}{0.2417(10^{-3})} = 5.172(10^6)\mathrm{Pa} = 5.17\ \mathrm{MPa\ (T)} \qquad \textbf{Ans.}$$

The state of stress at point A and B are represented by the volume element shown in Figs. a and b respectively.



(a)



(b)

1.5 Superposition

1.5.1 Aufgabe Kurs

Die richtige Antwort ist aus den folgenden Gründen E für A-A und B für B-B

- Das Biegemoment verläuft vom Lager bis zum Kraftangriffpunkt bei $x = \frac{L}{2}$. Somit existiert beim Querschnitt A-A gar kein Biegemoment, was die Antworten A, B und C ausschliesst.

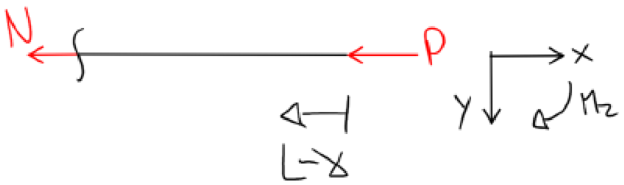
- Da die horizontale Kraft P in negativer x-Richtung zeigt, drückt sie auf der Querschnittsfläche des Balkens.

Aufgabenteil b):

1. Innere Beanspruchung im Stab berechnen

Bemerkung: Es wird in allen Fällen von rechts geschnitten, damit wir nicht zuerst die Lagerreaktionen berechnen müssen.

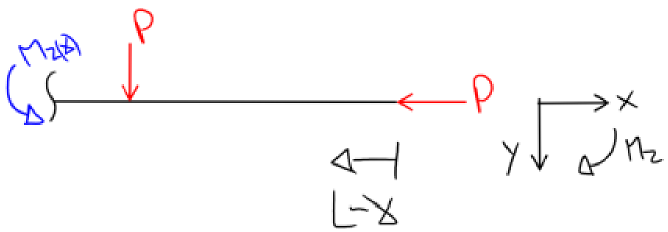
1.1. Normalkraft



$$\sum F_x = 0 \rightarrow N = -P$$

Bemerkung: Da im weiteren Verlauf des Stabes nichts die Normalkraft beeinflusst, ist sie für den ganzen Stab für $0 \leq x \leq L$ gültig

1.2. Biegemoment

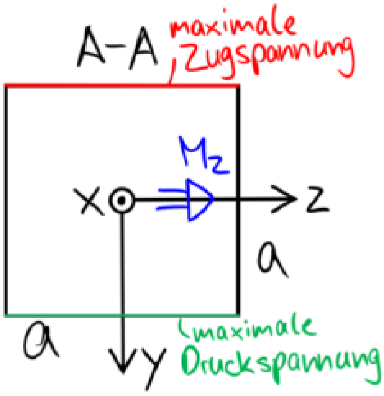


$$\sum M = 0 \rightarrow M_z(x) = -\left((L-x) - \frac{L}{2}\right)P = P\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

Bemerkung: Wie schon im Aufgabenteil a) erwähnt, ist das Biegemoment zwischen $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ Null.

2. Absolut maximale Normalspannung berechnen

2.1. Maximale Biegespannung im Stabquerschnitt berechnen



Die Biegespannung ist folgendermasse definiert: $\sigma_b(x, y) = -\frac{M_z(x) \cdot y}{I_z}$

Das Trägheitsmoment des quadratischen Querschnittes ist $I_z = \frac{1}{12}a^4$

Da $\sigma_b \propto y$, ist $\sigma_{b,max}$ bei $y = \pm\frac{a}{2}$ zu finden

$M_z(x)$ ist maximal bei $x = 0$

Setzt man alle diese Informationen in die ursprüngliche Gleichung erhält man

$$\sigma_{b,max} = \pm\frac{PL}{2}\frac{a}{2}\frac{12}{a^4} = \pm 3\frac{PL}{a^3} = \pm 30MPa$$

2.2. Normalspannung im Stabquerschnitt berechnen

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = -\frac{P}{a^2} = -1MPa$$

2.3. Superpositionsprinzip anwenden

$$|\sigma_{max}| = |\sigma_{b,max} + \sigma_N|_{max} = 31MPa \rightarrow \sigma_{max} = \boxed{-31MPa}$$

1.5.2 Hausaufgabe

8–27. The offset link has a width of $w = 200$ mm and a thickness of 40 mm. If the allowable normal stress is $\sigma_{\text{allow}} = 75$ MPa, determine the maximum load P that can be applied to the cables.

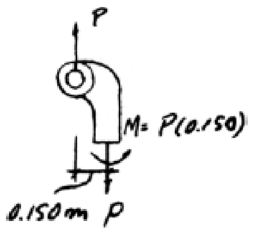
$$A = 0.2(0.04) = 0.008 \text{ m}^2$$

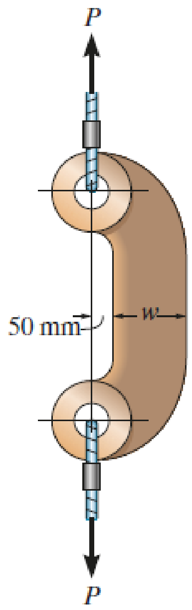
$$I = \frac{1}{12}(0.04)(0.2)^3 = 26.6667(10^{-6}) \text{ m}^4$$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

$$75(10^6) = \frac{P}{0.008} + \frac{0.150\,P(0.1)}{26.6667(10^{-6})}$$

$$P = 109 \text{ kN}$$





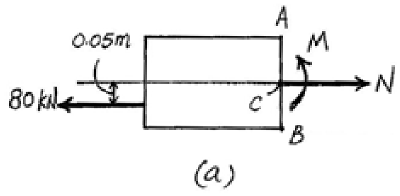
1.5.3 Hausaufgabe

Consider the equilibrium of the FBD of the left cut segment in Fig. *a*,

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad N - 80 = 0 \qquad N = 80\,\text{kN}$

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad M - 80(0.05) = 0 \qquad M = 4.00\,\text{kN}\cdot\text{m}$

$A = 0.01(0.2) = 0.002\,\text{m}^2 \qquad I = \frac{1}{12}(0.01)(0.2^3) = 6.667(10^{-6})\,\text{m}^4$



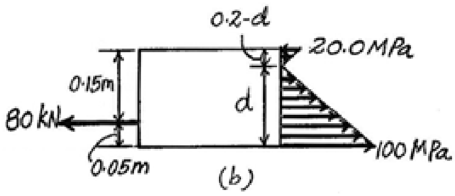
The normal stress developed is the combination of axial and bending stress

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{My}{I}$$

At point A, $y = 0.1$ m. Then

$$\sigma_A = \frac{80(10^3)}{0.002} - \frac{4.00(10^3)(0.1)}{6.667(10^{-6})}$$

$$= -20.0(10^6)\text{ Pa} = 20.0\text{ Mpa (C)}$$



At point B, $y = 0.1$ m. Then

$$\sigma_B = \frac{80(10^3)}{0.002} + \frac{4.00(10^3)(0.1)}{6.667(10^{-6})}$$

$$= 100\,(10^6)\text{ Pa} = 100\text{ MPa (T)}$$

1.6 Verformung

1.6.1 Aufgabe Kurs

1. **E-Modul berechnen**

   Hook'sches Gesetz: $\sigma = E\varepsilon$, Normaldehnung: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

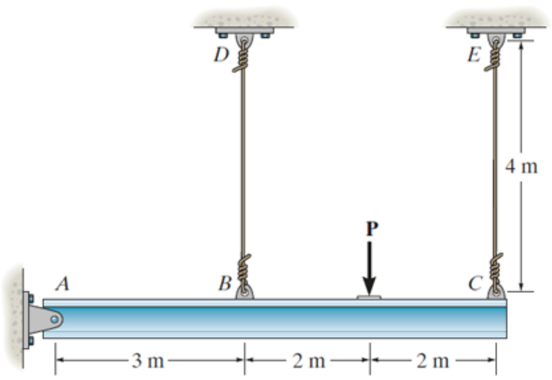
$$\rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\frac{P}{A_0}}{\frac{\Delta l}{l_0}} = \frac{P l_0}{A_0 \Delta l} = \boxed{400GPa}$$

2. **Material bestimmen**

   Als Maschinenbau- oder Bauingenieur/in ist es hilfreich zu wissen, was die Grössenordnug der E-Module verschiedener Materialen ist. In unserem Beispiel handelt es sich sehr wahrscheinlich um ein Siliciumkarbid (SiC). Weitere wichtige Materialen sind Stahl ($E_{Stahl} \approx 200GPa$) und Aluminium ($E_{Alu} \approx 70GPa$).

1.6.2 Aufgabe Kurs

2–3. The rigid beam is supported by a pin at A and wires BD and CE. If the load **P** on the beam causes the end C to be displaced 10 mm downward, determine the normal strain developed in wires CE and BD.



$$\frac{\Delta L_{BD}}{3} = \frac{\Delta L_{CE}}{7}$$

$$\Delta L_{BD} = \frac{3\,(10)}{7} = 4.286 \text{ mm}$$

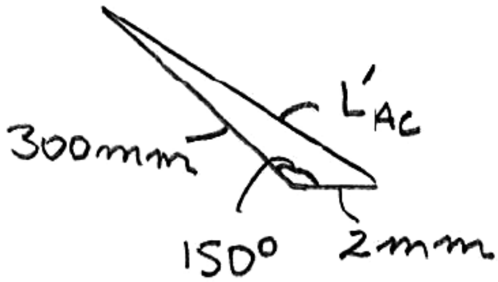
$$\varepsilon_{CE} = \frac{\Delta L_{CE}}{L} = \frac{10}{4000} = 0.00250 \text{ mm/mm} \qquad \textbf{Ans.}$$

$$\varepsilon_{BD} = \frac{\Delta L_{BD}}{L} = \frac{4.286}{4000} = 0.00107 \text{ mm/mm} \qquad \textbf{Ans.}$$

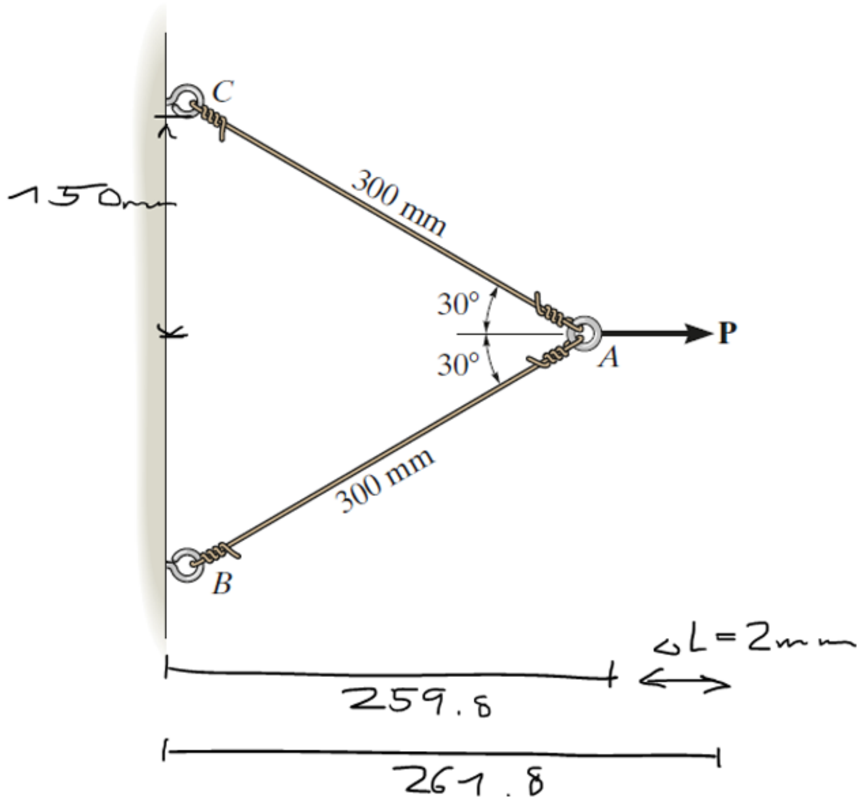
1.6.3 Aufgabe Kurs

***2–4.** The two wires are connected together at A. If the force **P** causes point A to be displaced horizontally 2 mm, determine the normal strain developed in each wire.

$$\varepsilon_{AC} = \varepsilon_{AB} = \frac{L'_{AC} - L_{AC}}{L_{AC}} = \frac{301.734 - 300}{300} = 0.00578 \text{ mm/mm}$$



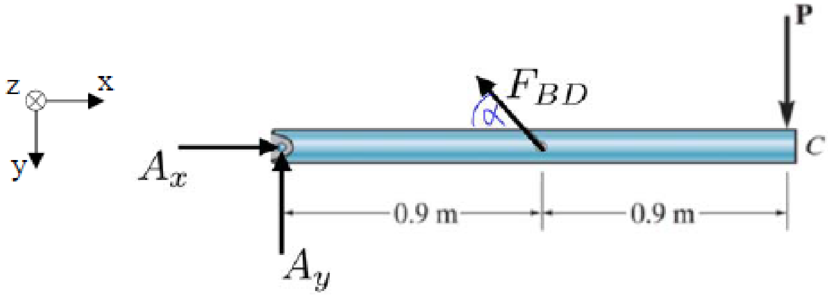
$$L'_{AC} = \sqrt{150^2 + 261.8^2}$$
$$= \underline{301.734 \text{mm}}$$



1.6.4 Hausaufgabe

1. Verlängerung des Drahtes berechnen

1.1. Drahtkraft berechnen



$$\sum M_A = 0 \rightarrow F_{BD} = P \cdot \frac{1.8m}{0.9m} \frac{1}{\underbrace{\sin\alpha}_{\sin\alpha = \frac{\frac{6}{5}m}{\sqrt{\left(\frac{6}{5}m\right)^2 + \left(\frac{9}{10}m\right)^2}} = \frac{4}{5}}} = 6.25kN$$

1.2. Verlängerung berechnen

Erinnerung: $\Delta l = \frac{F_\perp l_0}{AE}$

$$\rightarrow \Delta l_{BD} = \frac{F_{BD} l_0}{\frac{\pi}{4} d^2 E} = 2.5mm$$