Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Biomechanik I

für D-HEST

Musterlösung

Prof. Jess Snedeker — Schnellübung 1 — FS19

Aufgabe 1

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + (-7) \cdot 5 = -30$

b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = (-3) \cdot 4 + 4 \cdot (-3) + (-6) \cdot (-4) = 0 \quad \rightarrow$ Vektoren othogonal!

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 + 20 \cdot (-5) = -100$

$\rightarrow$ Das Skalarprodukt ist Null wenn beide Vektoren orthogonal (senkrecht) zueinander stehen

Aufgabe 2

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$

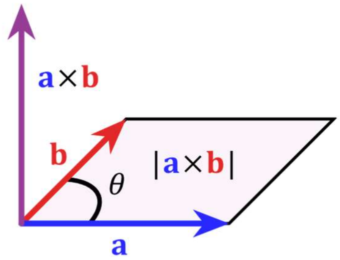
$\rightarrow$ normieren: $\frac{1}{\text{Länge des Vektors / Betrag}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+6^2}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-3) - (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - (-4) \cdot 3 \\ (-4) \cdot (-2) - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \frac{1}{\sqrt{12^2+8^2+4^2}} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

→ Das Kreuzprodukt eines Vektors mit sich selbst oder einem kollinearen (parallel) Vektor ergibt den Nullvektor

→ Das Kreuzprodukt, auch Vektorprodukt genannt, ist eine solche multiplikative Verknüpfung zweier Vektoren, welche ebenfalls einen Vektor ergibt; dieser Vektor steht stets senkrecht auf der von den anderen zwei Faktoren des Produktes aufgespannten Ebene. Die drei Vektoren bilden ein Rechtssystem (wie das übliche x,y,z- Koordinatensystem).



→ Man normiert einen Vektor, um den Einheitsvektor zu erhalten. Ein Einheitsvektor ist ein Vektor mit der Länge 1. Die Richtung bleibt unverändert, da man jeden Eintrag mit dem gleichen Faktor multipliziert.

Aufgabe 3

Es gilt immer Spitze minus Anfang! Für einen Vektor von A nach B:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \text{Punkt } B - \text{Punkt } A$$

a) $\vec{v_a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ → normieren: $|\vec{v_a}| = \frac{1}{\sqrt{6^2+(-2)^2}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{v_b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ → normieren: $|\vec{v_b}| = \frac{1}{\sqrt{2^2+3^2}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{v_c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ → normieren: $|\vec{v_c}| = \frac{1}{\sqrt{3^2+2^2+2^2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\vec{v_d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ → normieren: $|\vec{v_d}| = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+5^2+2^2}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{33}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

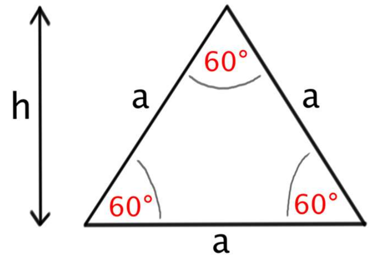
Aufgabe 4

a) Es gibt mehrere Möglichkeiten h zu bestimmen:

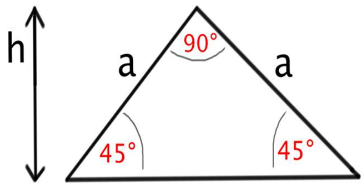
$$h = \sqrt{a^2 - (0.5a)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$h = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$h = \tan 60^\circ \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



b) Es gibt mehrere Möglichkeiten h zu bestimmen:



$$h = \sqrt{a^2 - (0.5 \cdot \sqrt{2}a)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$h = a \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$h = \tan 45^\circ \cdot \frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

Aufgabe 5

a) $$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 23 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ -32 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -56 \\ 43 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 25 \\ 24 \end{pmatrix}$$

b) $$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos\pi \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $$1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1.5 \cdot \begin{pmatrix} \cos 45^\circ \\ \sin 45^\circ \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ -\sin 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+1.5\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1.5\sqrt{2}-1}{2} \end{pmatrix}$$

d) $$1 \cdot \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos 45^\circ \\ -\sin 45^\circ \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -\cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}-3}{2} \\ \frac{1-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

e) $$2 \cdot \begin{pmatrix} \cos 45^\circ \\ -\sin 45^\circ \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -\cos 45^\circ \\ \sin 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Spitze minus Anfang! Setze das Koordinatensystem an den jeweiligen Anfangspunkt. $\vec{e}$ steht für Einheitsvektor.

a)

$$\vec{v}_{ab} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sqrt{2}a \\ 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \end{pmatrix}, \quad \overline{AB} = \sqrt{(2\sqrt{2}a)^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{10}a, \quad \vec{e}_{ab} = \frac{1}{\sqrt{10}a} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \sqrt{2}a \\ 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{ac} = \begin{pmatrix} 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ \frac{\sqrt{2}}{2}a \end{pmatrix}, \quad \overline{AC} = \sqrt{(7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2} = 5a, \quad \vec{e}_{ac} = \frac{1}{5a} \cdot \begin{pmatrix} 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ \frac{\sqrt{2}}{2}a \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{10} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{bc} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \end{pmatrix}, \quad \overline{BC} = \sqrt{(3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2} = \sqrt{5}a, \quad \vec{e}_{bc} = \frac{1}{\sqrt{5}a} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{v}_{ab} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AB} = \sqrt{(a)^2 + (\sqrt{3}a)^2} = 2a, \quad \vec{e}_{ab} = \frac{1}{2a} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{ac} = \begin{pmatrix} 3a \\ 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \sqrt{(3a)^2 + (\sqrt{3}a)^2} = 2\sqrt{3}a, \quad \vec{e}_{ac} = \frac{1}{2\sqrt{3}a} \cdot \begin{pmatrix} 3a \\ \sqrt{3}a \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{bc} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \sqrt{(2a)^2 + (0)^2} = 2a, \quad \vec{e}_{bc} = \frac{1}{2a} \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 14 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -21 \\ -9 & -1 \\ 12 & 17 \end{pmatrix}$

b) Matrixmultiplikation hier nicht definiert!

c) $x + y = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $3x - 2y = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 18 \end{pmatrix}$

e) $x \times y = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

f) $x \cdot y = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = -20$

g) $A \cdot x = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -26 \\ 16 \end{pmatrix}$