Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Biomechanik I
für D-HEST

Prof. Jess Snedeker

Musterlösung Hausübung
Serie 2

FS 2018

Lösung 1

a) x-Komponente von $\boldsymbol{v}_F$ mit SdpG auf $\boldsymbol{CF}$:

$$\boldsymbol{CF} = a\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}_C} \cdot \frac{\boldsymbol{CF}}{|\boldsymbol{CF}|} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}_F} \cdot \frac{\boldsymbol{CF}}{|\boldsymbol{CF}|}$$

daraus folgt: $v_x = -v \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\boldsymbol{v}_F} = \begin{bmatrix}-v\\0\\-v\end{bmatrix}$

b) Rotationsgeschwindigkeit

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}_C} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}_F} + \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{r}_{FC}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}_{FC}} = \begin{bmatrix}a\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-v\\v\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-v\\0\\-v\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}a\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-v\\0\\-v\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\\omega_z a\\-\omega_y a\end{bmatrix}$$

$$-v = -v$$

$$v = \omega_z a \quad \Rightarrow \quad \omega_z = \frac{v}{a}$$

$$0 = -v - \omega_y a \quad \Rightarrow \quad \omega_y = -\frac{v}{a}$$

Zudem: Würfel führt eine reine Rotation aus, d.h. $I_2 = \vec{v_C} \cdot \vec{\omega} = \vec{v_F} \cdot \vec{\omega} = 0$ (keine Geschwindigkeitskomponente in Rotationsachsenrichtung).

$$\begin{bmatrix} -v \\ v \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ -v/a \\ v/a \end{bmatrix} = -v\omega_x - \frac{v^2}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_x = -\frac{v}{a}$$

Kontrolle: $\vec{v_F} \cdot \vec{\omega} = \begin{bmatrix} -v \\ 0 \\ -v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -v/a \\ -v/a \\ v/a \end{bmatrix} = 0$

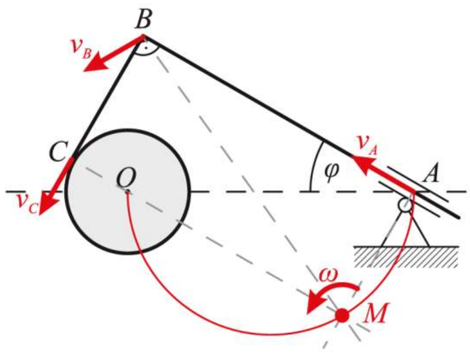
$$\vec{\omega} = \frac{v}{a} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeit des Punktes O:

$$\vec{v_O} = \vec{v_F} + \vec{\omega} \times \vec{r_{FO}} = \begin{bmatrix} -v \\ 0 \\ -v \end{bmatrix} + \frac{v}{a} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} a = \begin{bmatrix} -v \\ 0 \\ -v \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1-(-1) \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -v \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösung 2

a) siehe Zeichnung.



b) Momentanzentrum: Das Momentanzentrum M liegt im Schnittpunkt der Senkrechten zu $\boldsymbol{v}_C$ und $\boldsymbol{v}_A$. Begründung: es gilt $\boldsymbol{v}_M = 0$, da gemäss des SdpG die Projektionen von $\boldsymbol{v}_C$ auf $\boldsymbol{CM}$ und $\boldsymbol{v}_A$ auf $\boldsymbol{AM}$ jeweils gleich null sein müssen. Also müssen sowohl $\boldsymbol{v}_C$ senkrecht auf $\boldsymbol{CM}$ als auch $\boldsymbol{v}_A$ senkrecht auf $\boldsymbol{AM}$ stehen.

c) $v_C = \omega \cdot |\boldsymbol{MC}|$

$|\boldsymbol{MC}| = l \cdot \cos\varphi + r$

daraus folgt: $\omega = \dfrac{v_C}{|\boldsymbol{MC}|} = \dfrac{v_C}{l \cdot \cos\varphi + r}$

$v_A = \omega \cdot |\boldsymbol{MA}|$

$|\boldsymbol{MA}| = l \cdot \sin\varphi$

daraus folgt: $v_A = \dfrac{v_C}{l \cdot \cos\varphi + r} \cdot l \cdot \sin\varphi = v_C \cdot \dfrac{l \cdot \sin\varphi}{l \cdot \cos\varphi + r}$

$v_B = \omega \cdot |\boldsymbol{MB}|$

$$|\boldsymbol{MB}|^2 = |\boldsymbol{MA}|^2 + |\boldsymbol{MC}|^2 = (l \cdot \sin\varphi)^2 + (l \cdot \cos\varphi)^2 + 2 \cdot l \cdot r \cdot \cos\varphi + r^2$$
$$= l^2 + 2 \cdot l \cdot r \cdot \cos\varphi + r^2$$

daraus folgt: $v_B = v_C \cdot \dfrac{\sqrt{l^2 + 2 \cdot l \cdot r \cdot \cos\varphi + r^2}}{l \cdot \cos\varphi + r}$