Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Biomechanik I

für D-HEST

Musterlösung

Prof. Jess Snedeker — Schnellübung 2 — FS19

Aufgabe 1

Gegeben:

geometrie

$v_c = v$

Gesucht:

$\vec{v}_F$

$\vec{v}_H$

Um eine solche Aufgabe zu bewältigen, können wir Anhand eines Kochrezeptes vorgehen:

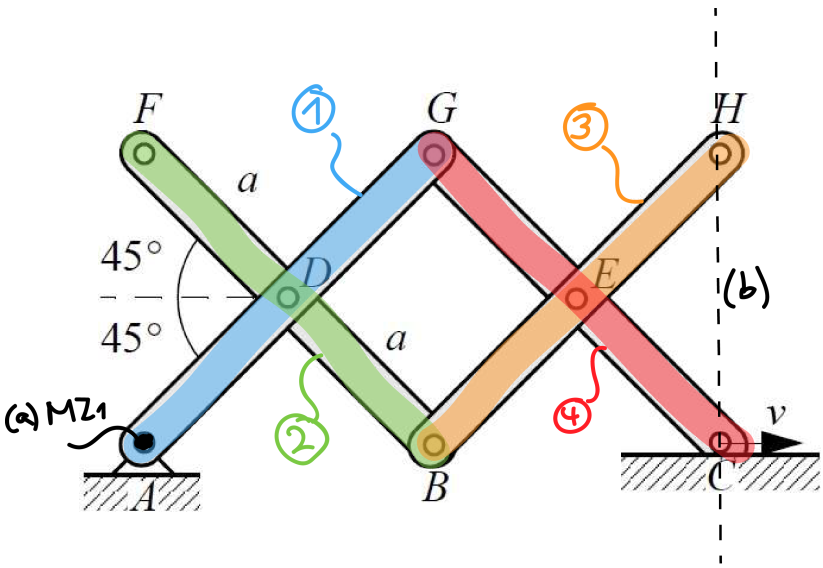
1. Identifikation aller starren Körper → Stäbe, Dreiecke, Platten

$1 : ADG$

$2 : FBD$

$3 : BEH$

$4 : GEC$



2. Identifikation der Lagerungen:

   (a) Festlager → Lager A ist Momentanzentrum MZ_1 von Stab 1

   (b) Auflager → MZ_4 muss auf Senkrechte durch Lager C sein

3. ω_i und Z_i für alle beteiligten Körper bestimmen:

   (a) Satz vom Momentanzentrum

   (b) $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ oder $v = \omega \cdot r$

   (c) S.d.p.G: $\vec{v}_A \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{v}_B \cdot \overrightarrow{AB}$ oder $|\vec{v}_A| \cos\alpha = |\vec{v}_B| \cos\beta$

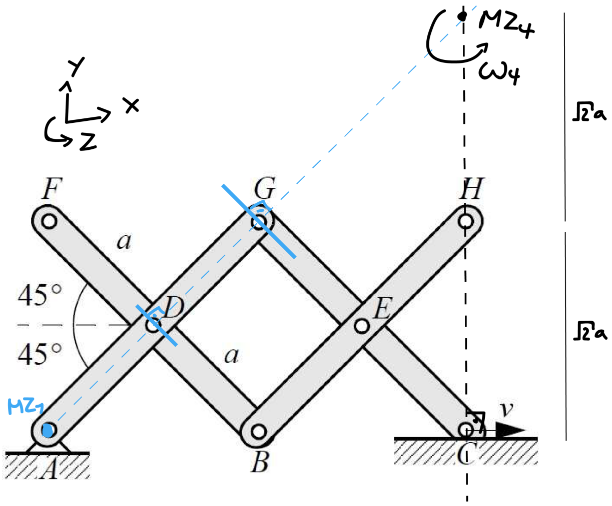
   (d) Parallelogrammregel

Satz vom Momentanzentrum in Stab 1, da MZ_1 bekannt $\rightarrow$ Richtungslinie von v_d und v_g (Betrag und Richtung fehlen noch)

Da Richtungslinie von v_g bekannt und G $\in$ Stab 4

$$\rightarrow \text{SvM: } MZ_4 \hat{=} (2\sqrt{2}a/2\sqrt{2}a)$$

$$v_c = \omega_4 \cdot r \rightarrow \quad \omega_4 = \frac{v_c}{r} = \frac{v}{2\sqrt{2}a} \rightarrow \quad \vec{\omega}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +\frac{v}{2\sqrt{2}a} \end{pmatrix}$$

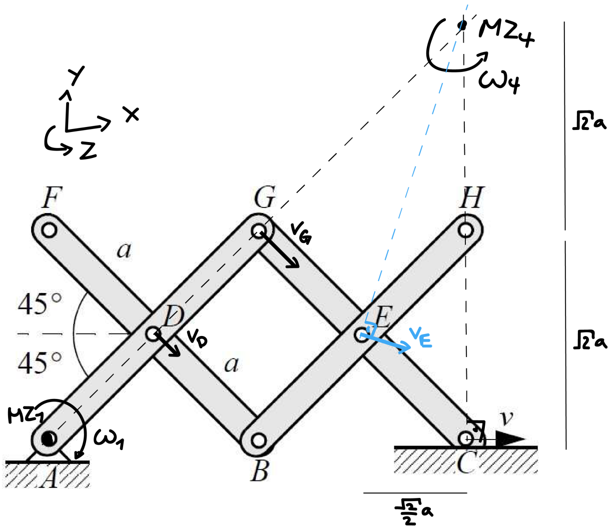


MZ_4 & $\omega_4 \rightarrow \vec{v}_i \in$ Stab 4 bestimmen:

$$\vec{v}_e = \vec{\omega}_4 \times \vec{r}_{MZ_4E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +\frac{v}{2\sqrt{2}a} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -3\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}v \\ -\frac{1}{4}v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_g = \vec{\omega}_4 \times \vec{r}_{MZ_4G} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{MZ_1G} \rightarrow \quad \vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_4, \text{ da } \vec{r}_{MZ_1G} = -\vec{r}_{MZ_4G}$$

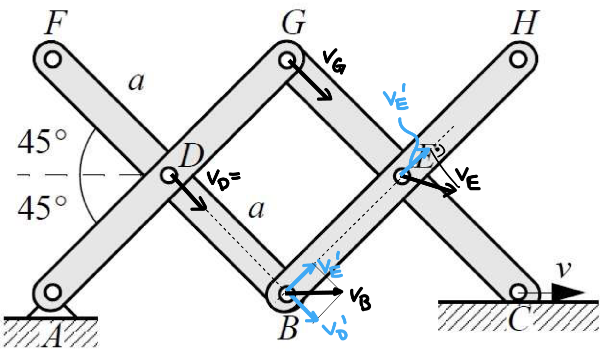
$$\vec{v}_d = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{MZ_1D} = -\vec{\omega}_4 \times \vec{r}_{MZ_1D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{v}{2\sqrt{2}a} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}v \\ -\frac{1}{4}v \\ 0 \end{pmatrix}$$



$\vec{v}_b$ können wir mithilfe des Satzes der projizierten Geschwindigkeiten finden: $\vec{v}_e \in$ Stab BEH & $\vec{v}_d \in$ FBD $\rightarrow$ Punkt B gemeinsam.

$$\vec{v}_d \cdot \overrightarrow{DB} = \vec{v}_b \cdot \overrightarrow{DB}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}v \\ -\frac{1}{4}v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{bx} \\ v_{by} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{v}_e \cdot \overrightarrow{EB} = \vec{v}_b \cdot \overrightarrow{EB}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4}v \\ -\frac{1}{4}v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{bx} \\ v_{by} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow v_{bx} = \frac{1}{2}v, v_{by} = 0$



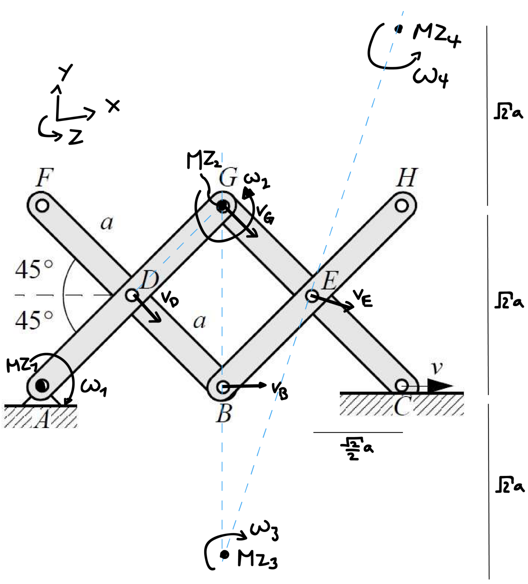
MZ_2: Schnittpunkt der Senkrechten zu $\vec{v}_b$ & $\vec{v}_d$ in G

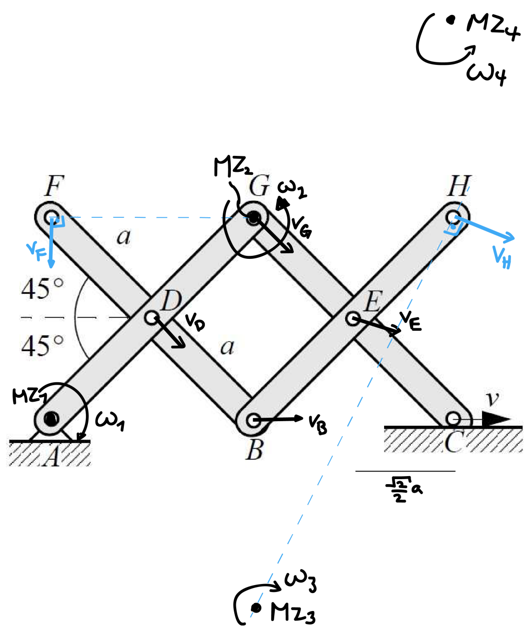
MZ_3: Schnittpunkt der Senkrechten zu $\vec{v}_b$ & $\vec{v}_e$ in $(2\sqrt{2}a, -2\sqrt{2}a)$

Aus der Symmetrie sieht man leicht, dass: $|\vec{\omega}_1| = |\vec{\omega}_2| = |\vec{\omega}_3| = |\vec{\omega}_4|$

$$\vec{v}_f = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{MZ_2F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +\frac{v}{2\sqrt{2}a} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{2}a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_h = \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{MZ_3H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{v}{2\sqrt{2}a} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{2}a \\ 2\sqrt{2}a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{1}{2}v \\ 0 \end{pmatrix}$$





Aufgabe 2

Gegeben:

geometrie

$v_s = v$

rollen ohne gleiten

Gesucht:

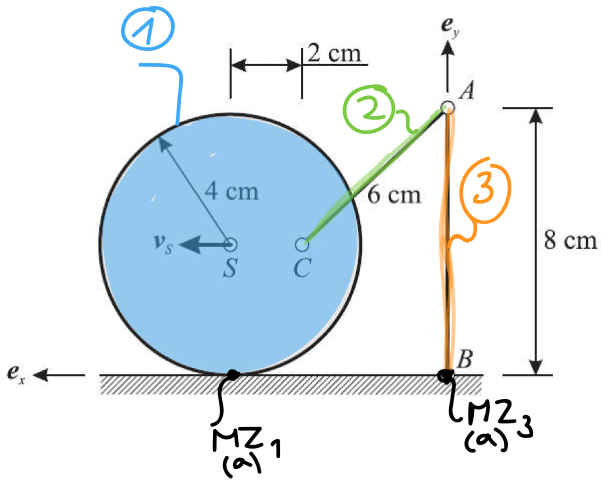
a) MZ_{Kreis} & ω_{Kreis}

b) $\vec{v}_c$ & v_c

c) ω_{AB} & MZ_{AB}

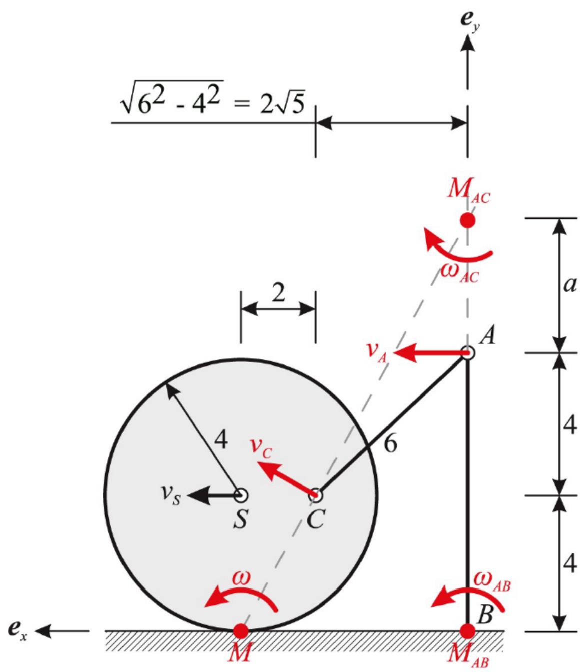
d) ω_{AC} & MZ_{AC}

Das Problem besteht aus drei starren Körpern, die gelenkig miteinander verbunden sind. Es sind also ebenfalls drei Momentanzentren MZ_i, mit den jeweiligen Rotationsschnelligkeiten ω_i, zu bestimmen. Das Kochrezept, welches wir für Aufgabe 1 benutzt haben, lässt dich auch bei dieser Aufgabe problemlos anwenden, da beide ebene Bewegungen sind.



a) Die Walze rollt ohne gleiten über den Boden → der Kontaktpunkt ist MZ_{Kreis} (verhält sich momentan wie ein Festlager). Die Rotationsschnelligkeit ω_{Kreis} beträgt:

$$\omega_{Kreis} = \frac{v_s}{R} = \frac{v_s}{4cm}$$



b) Die Geschwindigkeit im Punkt C kann über die Starrkörperformel $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ oder durch Vektorzerlegung bestimmt werden:

$$v_{cx} = \omega \cdot R = v_s$$

$$v_{cy} = \omega \cdot 2cm = \frac{v_s}{2}$$

$$\vec{v}_c = \begin{pmatrix} v_s \\ \frac{v_s}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \quad v_c = \sqrt{(v_s)^2 + (\frac{v_s}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} v_s$$

c) Der Stab AB ist gelenkig mit dem Boden verbunden. B ist somit in Ruhe. Das Momentanzentrum befindet sich also in B. Die Geschwindigkeit A besitzt keine Komponente in y.

$$\vec{v}_a = \begin{pmatrix} \omega_{AB} 8cm \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um ω_{AB} zu bestimmen, muss man zuerst die Geschwindigkeit in A explizit bestimmen. Dafür wenden wir SdpG auf den Stab AC an, um $\vec{v}_c$ mit $\vec{v}_a$ zu verknüpfen.

$$\vec{v}_a \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{v}_c \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_{AB} 8cm \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{5}cm \\ -4cm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_s \\ \frac{v_s}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{5}cm \\ -4cm \end{pmatrix}$$

$$2\sqrt{5}\omega_{AB} 8cm = (2\sqrt{5}cm) v_s - (4cm)\frac{v_s}{2} \rightarrow \quad \omega_{AB} = (1 - \frac{1}{\sqrt{5}})\frac{v_s}{8cm}$$

d) Das Momentanzentrum von AC liegt auf den Senkrechten der Geschwindigkeiten in A und C. Der Schnittpunkt entspricht dem Momentanzentrum. Das Momentanzentrum und die Rotationsschnelligkeiten können folgendermassen bestimmt werden:

$$v_{ax} = (1 - \frac{1}{\sqrt{5}}) v_s \stackrel{!}{=} a\omega_{AC}$$

$$v_{cx} = v_s \stackrel{!}{=} (a + 4cm)\omega_{AC}$$

$$\rightarrow v_{ax} = a\frac{v_s}{a + 4cm} = (1 - \frac{1}{\sqrt{5}}) v_s$$

$$\rightarrow a = 4\sqrt{5}(1 - \frac{1}{\sqrt{5}})cm = 4(\sqrt{5} - 1)cm$$

$$\rightarrow \omega_{AC} = \frac{v_s}{4\sqrt{5}cm}$$