Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Biomechanik I
für D-HEST

Prof. Jess Snedeker

Musterlösung
Hausübung
Serie 3

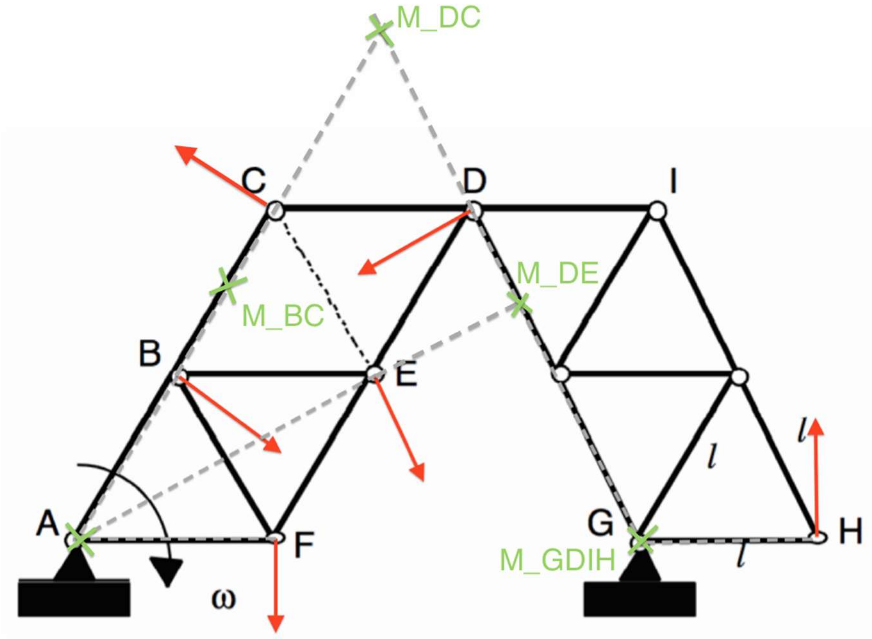
FS 2019

Lösung 1

Gegeben:
- Abgebildetes System Rotationsgeschwindigkeit ω um A.
- Stab CE ist entfernt

Gesucht:
- Geschwindigkeiten von: B, C, D, E; Rotationsgeschwindigkeiten und Momentan- zentren der Stäbe: BC, CD, DE, DI

Vorgehen:
- Satz vom Momentanzentrum und Projektionssatz;
- Geschwindigkeit senkrecht auf Hebelarm durch Rotationszentrum;



a) Starre Körper: ABEF, BC; CD; DE; GHDI;

b) $|\vec{v}_B| = \omega l$

$|\vec{v}_E| = \omega\sqrt{3}l$

c) Körper GDIH rotiert um das Gelenk in G. Damit ist die Richtung der Geschwindigkeit in Punkt D bekannt. Vom Stab ED weiss man nun die Richtung zweier Geschwindigkeiten an unterschiedlichen Punkten (E & D) Daraus lässt sich die Position des Momentanzentrums M_DE bestimmen. Nun kann man die Rotationsgeschwindigkeit vom Stab ED berechnen:

$$\omega_{ED}:\ |\vec{v}_E| = \omega\sqrt{3}l = \omega_{ED}\frac{\sqrt{3}}{2}l \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{ED} = 2\omega$$

d) Geschwindigkeit in Punkt D und H

$$|\vec{v}_D| = 2\omega\frac{l}{2} = \omega l$$

Rotationsgeschwindigkeit des Körpers GDIH

$$\omega_{GDIH}: \quad |\vec{v}_D| = \omega l = \omega_{GDIH} 2l \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{GDIH} = \frac{\omega}{2}$$

$$|\vec{v}_H| = \frac{\omega}{2}l$$

e) Geschwindigkeit im Punkt C mithilfe des Satzes der projezierten Geschwindigkeiten (PdVL). Die Geschwindigkeit im Punkt D gibt die Richtung der Geschwindigkeit im Punkt C (Satz der projezierten Geschwindigkeiten). Daraus lässt sich die Position des Momentanzentrums CD bestimmen.

$$\omega_{CD}: \quad |\vec{v}_D| = \omega l = \omega_{CD} l \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{CD} = \omega$$

$$\vec{v}_c = \omega l$$

f) Rotationsgeschwindigkeit und Momentanzentrum des Stabes BC:

Mit die zwei Geschwindigkeiten im Punkt B und Punkt C lässt sich die Position des Momentanzentrums BC bestimmen.

$$\omega_{CB}: \quad |\vec{v}_C| = \omega = \omega_{CB}\frac{l}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{CB} = 2\omega$$

Lösung 2

a) Punkt C kann sich nicht bewegen weil um ihn die momentane Kreiselung stattfindet. Er ist stationär und sein Geschwindigeitsvektor lässt sich somit folgendermaßen beschreiben:

$$\vec{v}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Um die Rotationsgeschwindigkeit zu bestimmen brauchen wir 2 Geschwindigkeiten und den Abstand ihrer Angriffspunkte:

$$\vec{v}_c = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overline{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L\omega_y \\ L\omega_z - L\omega_x \\ -L\omega_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v = L\omega_y \Rightarrow \omega_y = \frac{v}{L}$,
$\omega_x = \omega_z$

Aus dem ersten Gleichungssystem lässt sich ein Teil der Rotationsgeschwindigkeit schon bestimmen. Um den Rest zu bestimmen stellen wir die Gleichung nochmal auf, dieses mal aber zwischen 2 anderen Punkten:

$v = L\omega_z \Rightarrow \omega_z = \frac{v}{L} = \omega_x$

Wir haben alle Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit bestimmt und können nun den Rotationsgeschwindigkeitsvektor aufstellen:

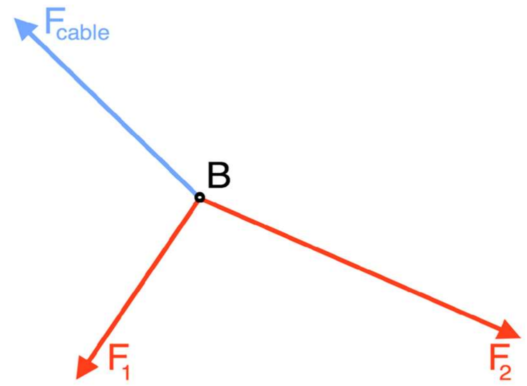
$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} v/L \\ v/L \\ v/L \end{pmatrix} = \frac{v}{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Daraus lässt sich schlussendlich die Geschwindigkeit im Punkt H berechnen:

$$\vec{v}_H = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overline{AH} = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \frac{v}{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -v \\ 2v \end{pmatrix}$$

Lösung 3

a) Resultierende bestimmen:



Vektoren aufstellen:

$$\vec{e}_{cable} = \frac{1}{1160}\begin{pmatrix}-840\\800\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}12\\-5\end{pmatrix}$$

Kraftvektoren aufstellen: $\vec{F}_i = \vec{e}_i \cdot |\vec{F}_i|$

$$\vec{F}_{cable} = 725 \cdot \vec{e}_{cable} = \begin{pmatrix}-525\\500\end{pmatrix} N$$

$$\vec{F}_1 = 500 \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix}-300\\-400\end{pmatrix} N$$

$$\vec{F}_2 = 780 \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}720\\-300\end{pmatrix} N$$

Resultierende bestimmen: $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

$$\vec{R} = \vec{F}_{cable} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{pmatrix}-525\\500\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-300\\-400\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}720\\-300\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-105\\-200\end{pmatrix} N$$

c) Moment in Punkt A bestimmen:

$$M_A = 840mm \cdot (-200)N = -168000\ Nmm = -168\ Nm$$

Die x-Komponente der Resultierenden hat kein Einfluss auf das Moment, weil ihre Wirkungslinie durch den Punkt A geht. Die y-Komponente steht senkrecht auf dem Abstand von Punkt A zu Punkt B.