Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Biomechanik I

für D-HEST

Musterlösung

Prof. Jess Snedeker — Schnellübung 3 — FS19

Aufgabe 1

Gegeben:

Geometrie

$|\vec{\omega}_{AB}| = \omega_{AB} = \omega$

Gesucht:

a) starre Körper

b) $\vec{v}_B$

c) $\vec{\omega}_{BEFD}$

d) $\vec{v}_C$

e) $\vec{\omega}_{AC}$

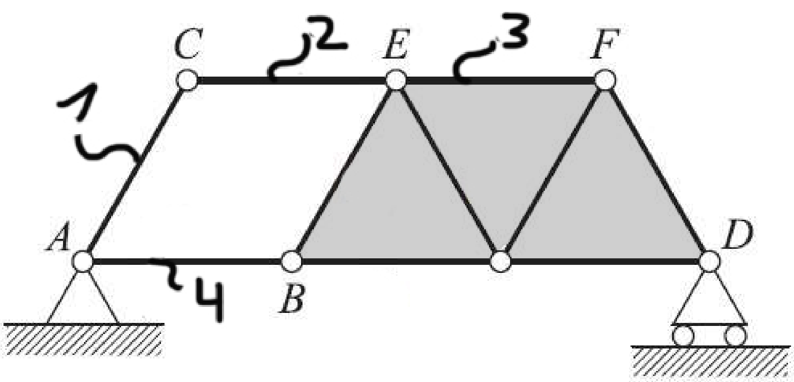
a) Identifikation aller starren Körper → Stäbe, Dreiecke, Platten?

$1: AC$

$2: CE$

$3: BEFD$

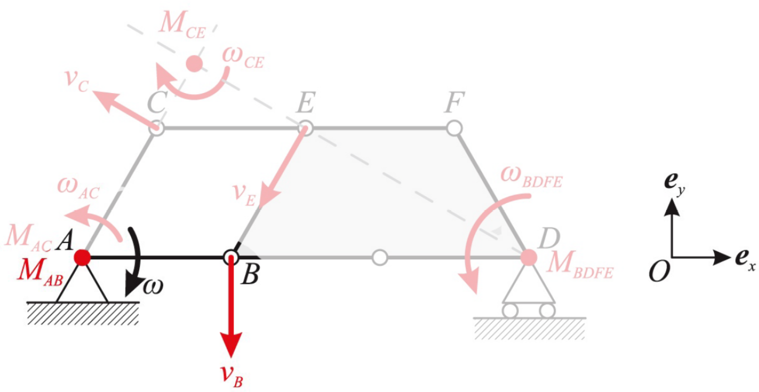
$4: AB$



b) Satz vom Momentanzentrum:

$$v_B = \omega_{AB} \cdot r_{AB} = \omega L$$

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega L \end{pmatrix}$$



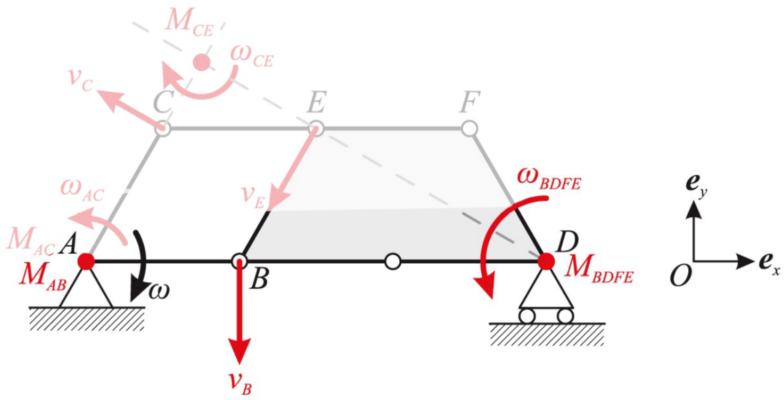
c) Satz vom Momentanzentrum:

Die Senkrechten zu $\vec{v}_B$ und $\vec{v}_D$ schneiden sich in Punkt $D \hat{=} M_{BEFD}$

$$v_B = \omega L = \omega_{BEFD} \cdot r_{BD}$$

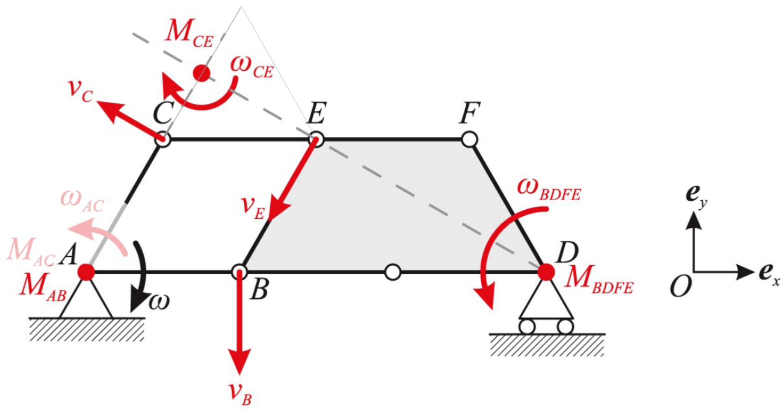
$$\omega_{BEFD} = \frac{v_B}{r_{AB}} = \frac{\omega L}{2L} = \frac{1}{2}\omega$$

$$\vec{\omega}_{BEFD} = \frac{\omega}{2}\vec{e}_z$$



d) Es gibt viele Ansätze um $\vec{v}_C$ zu bestimmen:

Um die Geschwindigkeit $\vec{v}_C$ zu bestimmen, müssen wir mehr über den Bewegungszustand der Stäbe CE und AC wissen.



- *Satz der projizierten Geschwindigkeiten:*
  SdpG auf den Stab AC gibt keine neue Information, ausser dass Punkt C um A rotiert.
  SdpG auf den Stab CE:

$$\vec{v}_C \cdot \overrightarrow{CE} = \vec{v}_E \cdot \overrightarrow{CE} \qquad \rightarrow \begin{pmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{Ex} \\ v_{Ey} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow v_{Cx} = v_{Ex}$$

  Die Geschwindigkeit in E und die Richtung von v_C lässt sich mit dem S.v.M bestimmen:

$$\vec{v}_E = \vec{\omega}_{BEFD} \times \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\omega}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}L \\ \frac{\sqrt{3}}{2}L \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4}L\omega \\ -\frac{1}{4}L\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_{AC} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AC} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}L \\ \frac{\sqrt{3}}{2}L \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}L\omega_{AC} \\ \frac{1}{2}L\omega_{AC} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad v_{Cx} = v_{Ex}: \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}L\omega_{AC} = -\frac{\sqrt{3}}{4}L\omega \quad \rightarrow \omega_{AC} = \frac{\omega}{2} \quad \rightarrow \vec{v}_C = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4}L\omega \\ \frac{1}{4}L\omega \end{pmatrix}$$

- *Satz vom Momentanzentrum (Bild):* Wir sehen, dass $A \hat{=} M_{AC}$ und somit Stab AC um A rotiert. Genauer heisst das, dass $\vec{v}_C$ orthogonal zu AC steht.

Um M_{CE} zu bestimmen, bilden wir den Schnittpunkt aus den Senkrechten von $\vec{v}_C$ und $\vec{v}_E$ (siehe Bild). Anhand vom S.v.M. berechnet man:

$$\omega_{CE} = 2 \cdot \omega_{BEFD} = \omega$$

$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_{CE} \times \overrightarrow{M_{CE}C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_{CE} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}L \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}L \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4}L\omega \\ \frac{1}{4}L\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

- *Parallelogrammregel:*

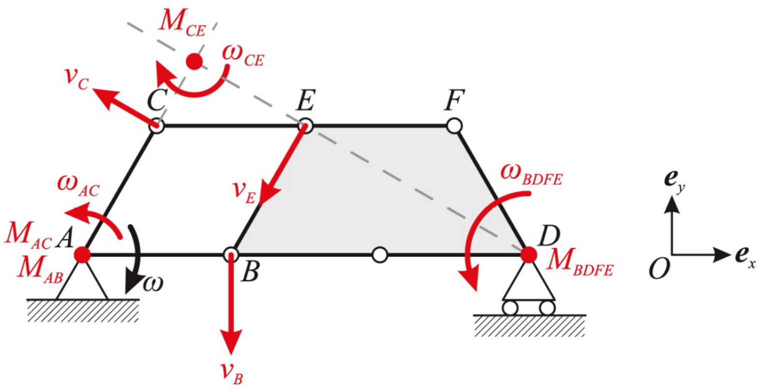
$$\omega_{AB} = \omega_{CE} = \omega \qquad \omega_{AC} = \omega_{BEFD} = \frac{\omega}{2}$$

$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_{AC} \times \overrightarrow{M_{AC}C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AC} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}L \\ \frac{\sqrt{3}}{2}L \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4}L\omega \\ \frac{1}{4}L\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) Richtung und Betrag von ω_{AC}?

Stab AC rotiert in Gegenuhrzeigersinn, bzw. ω_{AC} zeigt in die positive $\vec{e}_z$ Richtung.

$$\vec{\omega}_{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\omega}{2} \end{pmatrix}$$



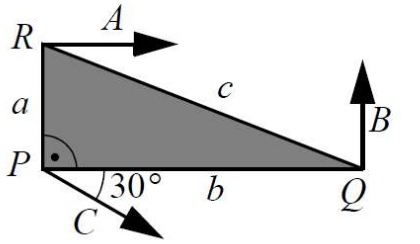
Bemerkung: Warum ist die Geschwindigkeit in D Null?

Der Punkt B kann sich nur in vertikaler Richtung bewegen (denn er gehört auch zu AB, der um A rotiert). Wendet man den SdpG auf den Stab $BDFE$ an, folgt sofort, dass die horizontale Geschwindigkeit in D Null sein muss. Wegen der Lagerbedingung ist die vertikale Geschwindigkeit in D auch Null.

Aufgabe 2

Diese Aufgabe wird mittels einer Superposition der einzelnen Momente gelöst. Um die einzelne Momente zu berechnen lässt sich bei dieser Aufgabe die Rechte Hand Regel gut anwenden, sonst wie gewöhnt $\vec{M}_o = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$

$$M_P = -Aa + Bb$$
$$M_Q = -Aa + C\frac{b}{2}$$
$$M_R = C\frac{\sqrt{3}}{2}a + Bb$$



Aufgabe 3

a)

$$\vec{F}_A = A\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \qquad \vec{F}_B = B\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix} \qquad \vec{F}_C = C\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Momente bzgl. O:

$$\vec{M}_O(A) = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}_A = \begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix} \times A\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}aA\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_O(B) = \overrightarrow{OB} \times \vec{F}_B = \begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} \times B\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3}aB\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_O(C) = \overrightarrow{OC} \times \vec{F}_C = \begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix} \times C\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = aC\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Momente bzgl. P:

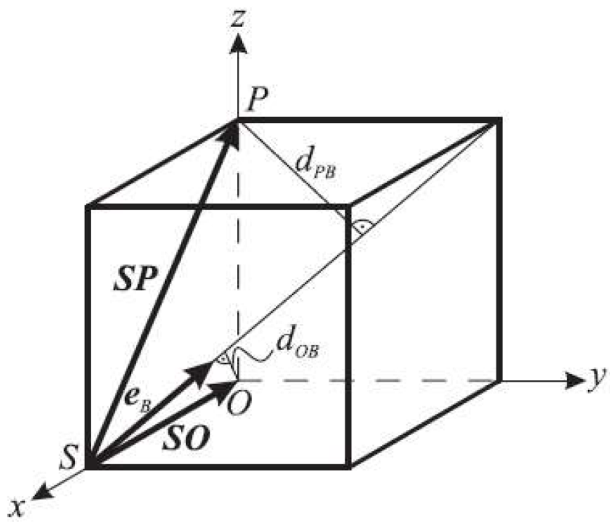
$$\vec{M}_P(A) = \overrightarrow{PA} \times \vec{F}_A = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \times A\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_P(B) = \overrightarrow{PB} \times \vec{F}_B = \begin{pmatrix}a\\0\\-a\end{pmatrix} \times B\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3}aB\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_P(C) = \overrightarrow{PC} \times \vec{F}_C = \begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix} \times C\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = aC\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

b) Abstände der Kraft-Wirkungslinien von den Punkten O und P aus der Zeichnung ablesen:

$$d_{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$
$$d_{OB} = ?$$
$$d_{OC} = \sqrt{2}a$$
$$d_{PA} = 0$$
$$d_{PB} = ?$$
$$d_{PC} = a$$



d_{OB} und d_{PB} können nicht einfach visuell bestimmt werden (siehe Skizze). Wir müssen eine Eigenschaft des Kreuzproduktes uns zunutze machen: Der Betrag des Kreuzproduktes berechnet die Fläche, welche von zwei Vektoren aufgespannt wird (sie müssen nicht senkrecht zueinander sein). Wir berechnen also die Fläche und teilen dann mit der Länge welche senkrecht zur Distanz steht, um dann die Distanz zu bekommen:

$$d_{OB} = \frac{|\overrightarrow{SO} \times \vec{F}_B|}{|\vec{F}_B|} = |\overrightarrow{SO} \times \vec{e}_B| = \left| \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \right| = \left| a \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

$$d_{PB} = \frac{|\overrightarrow{SP} \times \vec{F}_B|}{|\vec{F}_B|} = |\overrightarrow{SP} \times \vec{e}_B| = \left| \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \right| = \left| a \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

Die Beträge der Momente lässt sich leicht skalar berechnen: $|\overrightarrow{M}| = M = d \cdot F$

$$M_O(A) = \frac{\sqrt{2}}{2}aA \qquad M_P = 0$$
$$M_O(B) = \sqrt{\frac{2}{3}}aB \qquad M_P(B) = \sqrt{\frac{2}{3}}aB$$
$$M_O(C) = \sqrt{2}aC \qquad M_P(C) = aC$$

Vergleicht man die Beträge mit denen aus Teilaufgabe a), dann sind die Ergebnisse gleich.