ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Biomechanik I
für D-HEST

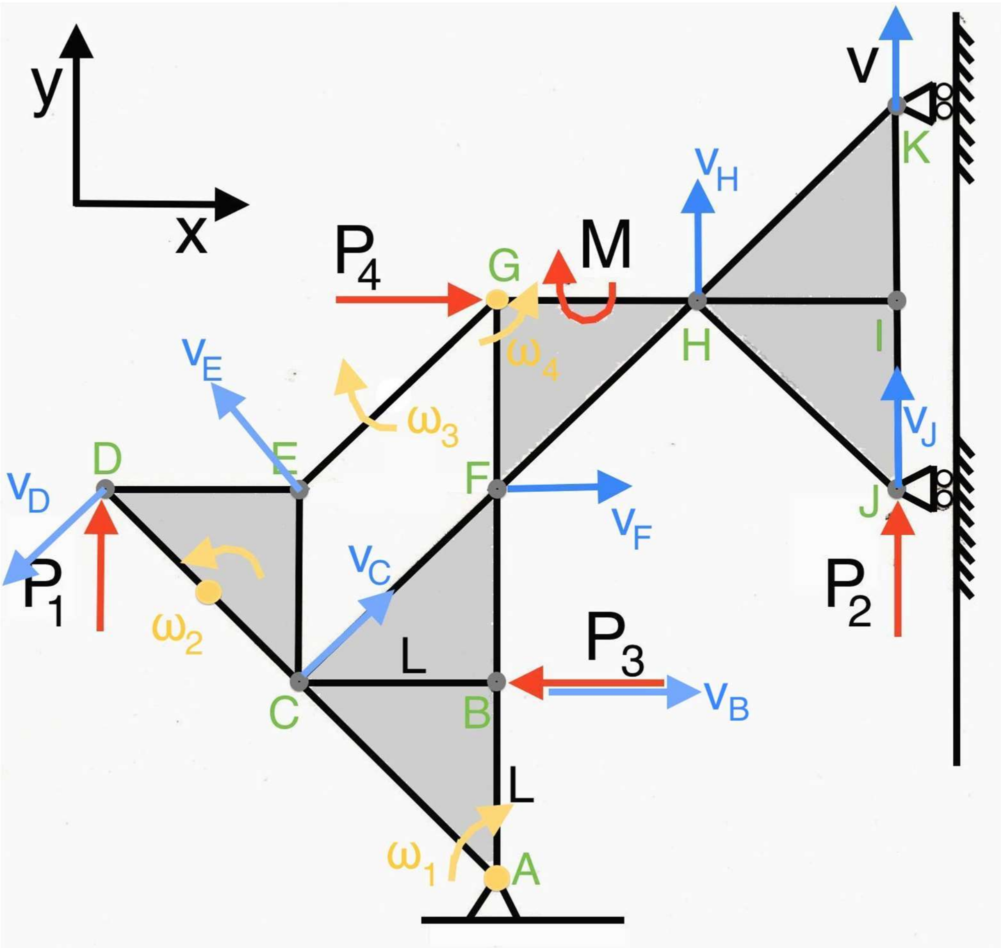
Musterlösung
Hausübung
Serie 4

Prof. Jess Snedeker

FS 2019

Aufgabe 1

a) Alle Starrkörper sind in der Skizze mit Grau markiert. Der Stab EG ist ebenfalls ein Starrkörper.



b) Momentanen Bewegungszustand bestimmen:

- Körper HJK erfährt nur eine Translation in y Richtung. Alle Geschwindigkeiten in dem Starrkörper sind somit gleich groß:
  $v_H = v_J = v_K = v$

- Da Punkt F um das Momentanzentrum A rotiert und Punkt H in y-Richtung zeigt, schneiden sich die beiden senkrechten Achsen auf den Geschwindigkeiten im Punkt G. Der Starrkörper

GHF rotiert demnach um den Punkt G. Die Rotationsgeschwindigkeit berechnet sich folgendermaßen:

$$\omega_4 = \frac{v_H}{L} = \frac{v}{L}$$

- Da Punkt F und Punkt H beide den gleichen Abstand zum Momentanzentrum haben, müssen beide auch die gleichen Schnelligkeiten besitzen:

$$v_F = \omega_4 \cdot L = \frac{v}{L} \cdot L = v$$

- Daraus lässt sich die Rotationsgeschwindigkeit des Starrkörpers ACFB und die Geschwindigkeit in den Punkten C und B berechnen:

$$\omega_1 = \frac{v_F}{2L} = \frac{v}{2L}$$

$$v_C = \omega_1 \cdot \sqrt{2}L = \frac{v}{2L} \cdot \sqrt{2}L = \frac{\sqrt{2}}{2} v \qquad v_B = \omega_1 \cdot L = \frac{v}{2L} \cdot L = \frac{v}{2}$$

- Mit dem Satz der projezierten Geschwindigkeit wissen wir, dass die y-Komponente der beiden Geschwindigkeiten in den Punkten C und E: $v_{Cy} = v_{Ey} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_C = \frac{v}{2}$ betragen müssen. Außerdem muss das Momentanzentrum des Stabes EG im Punkt G liegen, da dieser im Moment unbeweglich ist. Für die Geschwindigkeit in E ergibt sich daraus:

$$v_E = \sqrt{2} \cdot v_{Ey} = \frac{\sqrt{2}}{2} v$$

- Mit den beiden bekannten Geschwindigkeiten in den Punkten E und C lässt sich nun das Momentanzentrum des Körpers DCE bestimmen. Es befindet sich im Schnittpunkt der Senkrechten auf den beiden Geschwindigkeiten:

$$\omega_2 = \frac{v_c}{\frac{\sqrt{2}}{2} L} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} v}{\frac{\sqrt{2}}{2} L} = \frac{v}{L}$$

- Die Geschwindigkeit in Punkt D beträgt:

$$v_D = \frac{\sqrt{2}}{2} L \cdot \omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} v$$

c) Gesamtleistung des Systems

- Nun bestimmen wir die Leistung des Systems. Dazu betrachten wir alle Punkten in welchen eine Geschwindigkeit sowie eine Kraft wirken. Dabei muss man die Komponenten der Kraft betrachten welche senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor liegen. Falls Kraft und Geschwindigkeit in entgegengesetzte Richtungen zeigen ist das Produkt negativ. Schlussendlich müssen noch die Momente betrachtet werden welche auf einen Starrkörper wirken:

$$P = \vec{P}_1 \cdot \vec{v}_D + \vec{P}_2 \cdot \vec{v}_J + \vec{P}_3 \cdot \vec{v}_B + \vec{P}_4 \cdot \vec{0} + \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

$$P = -2P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} v + P \cdot v - 3P \cdot \frac{v}{2} + P \cdot 0 - P \cdot L \cdot \frac{v}{L} = -P \cdot v + P \cdot v - \frac{3}{2} P \cdot v - P \cdot v$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P = -\frac{5}{2} P \cdot v}$$

Aufgabe 2:

Zuerst müssen die relevanten Geschwindigkeiten in den Punkten A, B und C bestimmt werden. Wir rechnen hier einfachhalber vektoriell. Die skalare Rechnung ist jedoch auch möglich.

$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R - \cos(45) \cdot R \\ \sin(45) \cdot R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \cdot \sin(45) \cdot R \\ \omega \cdot (R - \cos(45) \cdot R) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot \omega \cdot R \\ \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot \omega \cdot R \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R + \cos(45) \cdot R \\ \sin(45) \cdot R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \cdot \sin(45) \cdot R \\ \omega \cdot (R + \cos(45) \cdot R) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot \omega \cdot R \\ \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \cdot \omega \cdot R \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot \omega \cdot R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus lässt sich nun die Leistung bestimmen:

$$P = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_A + \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_B + \vec{F}_3 \cdot \vec{v}_C$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot \omega \cdot R \\ \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot \omega \cdot R \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot F + \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot \omega \cdot R \\ \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \cdot \omega \cdot R \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot F + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot \omega \cdot R \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{2}F$$

$\Rightarrow \boldsymbol{P = -\sqrt{2}\omega R F}$