Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Biomechanik I

für D-HEST

Musterlösung

Prof. Jess Snedeker | Schnellübung 4 | FS19

Aufgabe 1

Gegeben:

Geometrie

$F_1 = F_2 = F \quad F_3 = \sqrt{2}F$

Rotation um z-Achse mit $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

Gesucht:

a) Leistung $P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$

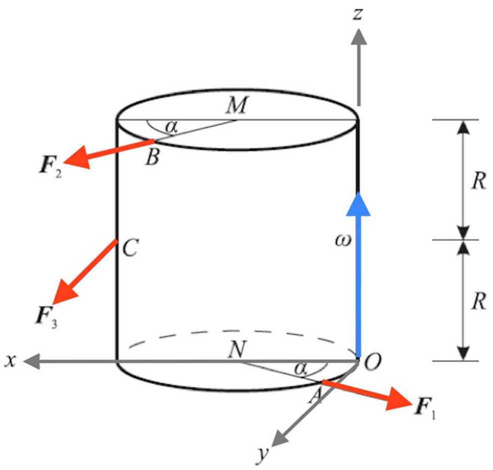
b) Leistung $P = \sum_i \vec{\omega} \cdot \vec{M}_i$

a) Um die Leistung $P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$ zu bestimmen, muss man zuerst alle $\vec{F}_i$ und deren Geschwindigkeit $\vec{v}_i$ bestimmen:

$$\vec{F}_1 = F \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_2 = F \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_3 = \sqrt{2}F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



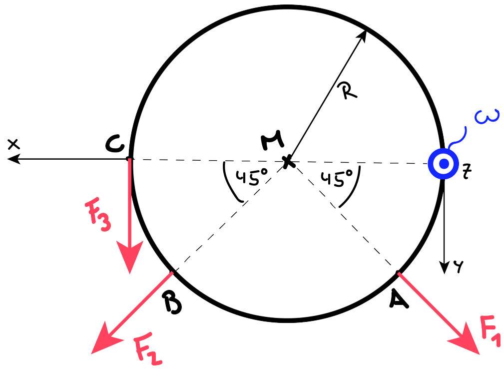
Geschwindigkeiten berechnen:

$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (1-\frac{\sqrt{2}}{2})R \\ \frac{\sqrt{2}}{2}R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \omega R, \quad \vec{v}_B = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \omega R, \quad \vec{v}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \omega R$$

Leistung:

$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \omega F R \left[\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 3\sqrt{2}\omega F R$$

Alternative: Da es sich um eine reine Rotation handelt und die Geometrien günstig sind verwandeln wir diese Aufgabe in ein ebenes Problem. Jetzt können wir vereinfacht mit $P = \sum_i F_i \cdot v_i$ rechnen und verschieben die Kräfte entlang ihrer Wirkungslinien:

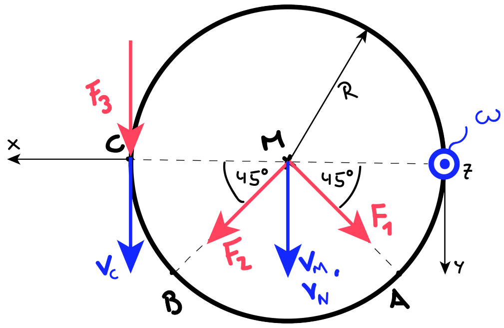


$$v_M = v_N = R\omega, \qquad v_c = 2R\omega$$

$$F_M = \frac{\sqrt{2}}{2}F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}F_2 = \sqrt{2}F$$

$$P = F_M \cdot v_M + v_c \cdot F_C$$

$$= \sqrt{2}FR\omega + 2\sqrt{2}FR\omega = 3\sqrt{2}FR\omega$$



b) Um die Leistung $P = \sum_i \vec{\omega} \cdot \vec{M}_i$ zu bestimmen, brauchen wir alle $\vec{M}_i$. Bemerke die Invariante $\vec{\omega}$ ist konstant im ganzen Körper. Wir berechnen die Momente $\vec{M}_O(F_i)$ bzgl. Punkt O da hier unsere Geschwindigkeit $\vec{v}_O = \vec{0}$:

$$\vec{M}_O(F_1) = \overrightarrow{ON} \times \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} FR$$

$$\vec{M}_O(F_2) = \overrightarrow{OM} \times \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 2R \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} FR$$

$$\vec{M}_O(F_3) = \overrightarrow{OC} \times \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 2R \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} FR$$

Leistung:

$$P = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O(F_1) + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O(F_2) + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O(F_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}FR\omega + \frac{\sqrt{2}}{2}FR\omega + 2\sqrt{2}FR\omega = 3\sqrt{2}FR\omega$$

Aufgabe 2

Gegeben:

Geometrie

$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -G \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix}$$

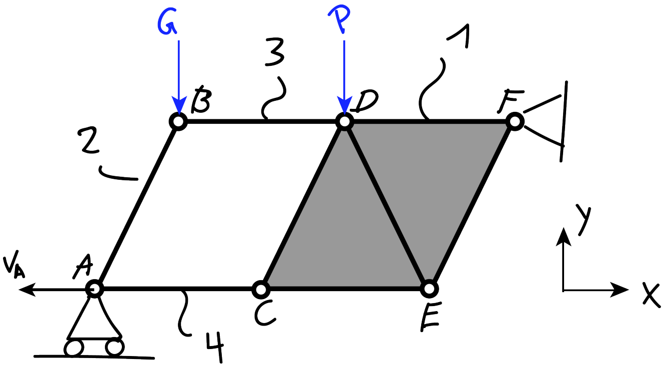
Gesucht:

a) Momentaner Bewegungszustand d.h. ω_i & MZ_i

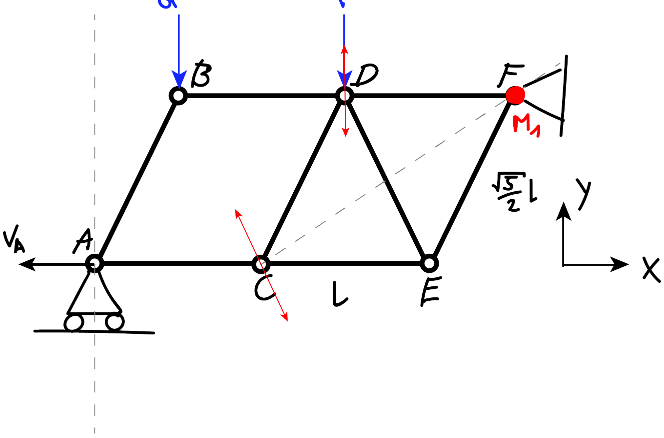
b) Leistung **P**

a) Zuerst bestimmen wir alle Starrkörper des Systems

$$1 : CDFE$$
$$2 : AB$$
$$3 : BD$$
$$4 : AC$$



Wir identifizieren die Lager und sehen, dass MZ_1 in F ist. Die Richtungslinien der Geschwindigkeiten in C und D sind folglich auch bekannt.



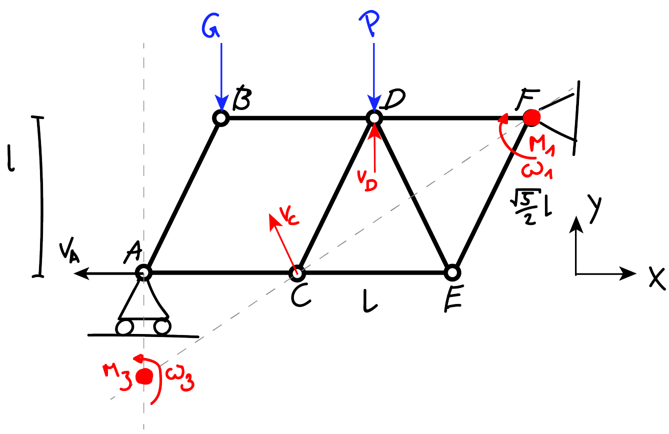
Anhand vom SdpG wissen wir, dass $v_{Cx} = v_A = v$ und können die Winkelschnelligkeit ω_1 bestimmen:

$$v_{Cx} = \omega_1 \cdot l, \quad \omega_1 = \frac{v}{l}$$

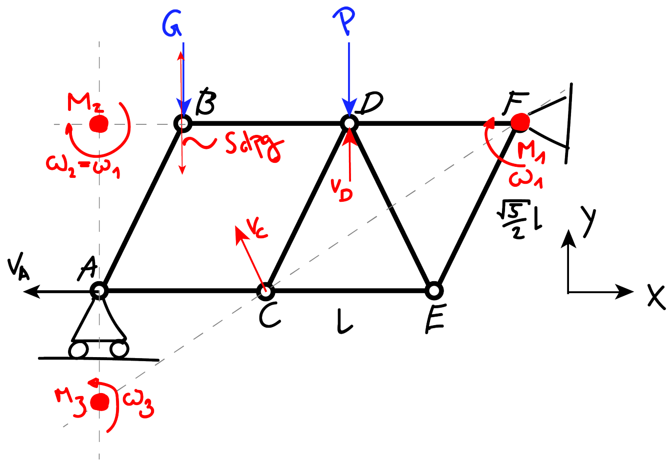
$$\rightarrow \quad v_D = \omega \cdot l = v$$

$$\rightarrow \quad v_{Cy} = \frac{3}{2} v$$

$$\rightarrow \quad \omega_3 = \frac{v_{Cy}}{l} = \frac{3v}{2l}$$



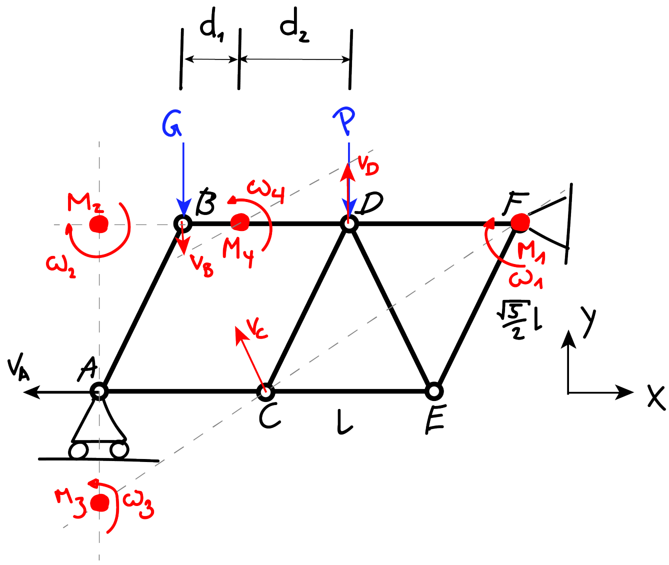
Anhand vom SdpG wissen wir, dass v_B auch Senkrecht auf Stab BD stehen muss. Mit dem S.v.M kann man weiter MZ_2 bestimmen und mit der Parallelogrammregel:



$$\omega_2 = \omega_1 = \frac{v}{l}$$
$$\omega_4 = \omega_3 = \frac{3v}{2l}$$

$$v_B = \omega_2 \cdot \frac{l}{2} = \frac{v}{2}$$

Da v_B und v_D in entsprechend verkehrte y-Richtung zeigen, muss MZ_4 auf dem Stab zwischen beiden Punkte liegen. Weil die Schnelligkeit der beiden Punkte B & D nicht gleich gross sind müssen wir die genaue Position des Zentrums berechnen. Wir führen d_1 bzw. d_2 ein:



$$\omega_4 = \frac{3v}{2l} = \frac{v_B}{d_1} = \frac{v_D}{d_2}$$
$$\rightarrow \quad d_1 = \frac{v_B}{\omega_4} = \frac{l}{3}, \quad d_2 = \frac{v_D}{\omega_4} = \frac{2}{3}l$$

b) Für die Gesamtleistung **P** des Systems werden die Schnelligkeiten / Geschwindigkeiten in B und D benötigt und miteinander multipliziert / mit Skalarprodukt berechnet.

$$\mathbf{P} = G \cdot \frac{v}{2} - P \cdot v$$