Biomechanik I
für D-HEST

Prof. Jess Snedeker

Musterlösung
Hausübung
Serie 5

FS 2019

Aufgabe 1

a) 6 Unbekannten und 6 Gleichungen aus $\vec{R} = \vec{0}$; $\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix}$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{6} \vec{F}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B-E \\ C-F \\ A-D \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{6} \vec{r}_{Oi} \times \vec{F}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ aB \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -aC \\ 0 \\ aC \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -aD \\ aD \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ aE \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -C-D \\ B+D \\ C+E \end{pmatrix}$$

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad B = E, \qquad C = F, \quad A = D$$

Moment ist für $\vec{R} = \vec{0}$ unabhängig von Bezugspunkt: $\vec{M}_O = \vec{M}_P = \cdots = \vec{M}$

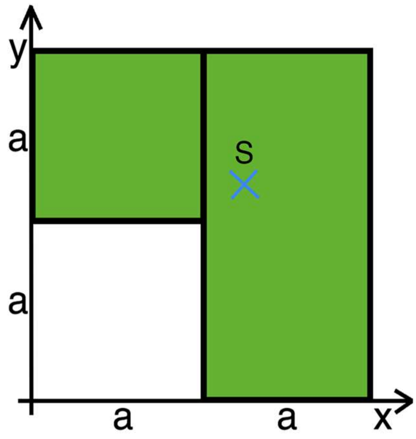
$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -C-D \\ B+D \\ C+E \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -C-A \\ B+A \\ C+B \end{pmatrix}$$

$$A = -C$$
$$B = -A \quad \Rightarrow \quad C = -A = B$$
$$C = \frac{M}{a} - C \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{a} = 2C$$

$$\Rightarrow \quad C = B = E = F = \frac{M}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad A = D = -\frac{M}{2a}$$

Aufgabe 2:



Schwerpunkt Quadrat:

- $x_{QS} = \frac{a}{2}$
- $y_{QS} = \frac{3}{2}a$

Schwerpunkt Rechteck:

- $x_{RS} = \frac{3}{2}a$
- $y_{RS} = a$

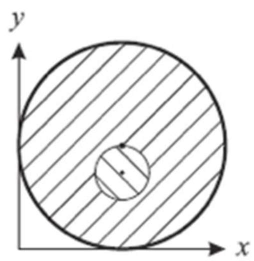
Gesamtfläche:

- $A_{tot} = A_{Quadrat} + A_{Rechteck} = a^2 + 2a^2 = 3a^2$

Resultierender Schwerpunkt:

- $x_S = \frac{1}{A} \cdot \left(x_{QS} \cdot A_Q + x_{RS} \cdot A_R\right) = \frac{1}{3a^2} \cdot \left(\frac{1}{2}a^3 + 3a^3\right) = \frac{7}{6}a$
- $y_S = \frac{1}{A} \cdot \left(y_{QS} \cdot A_Q + y_{RS} \cdot A_R\right) = \frac{1}{3a^2} \cdot \left(\frac{3}{2}a^3 + 2a^3\right) = \frac{7}{6}a$

b) Die Fläche kann zusammengesetzt werden aus einem grossen Kreis abzüglich einem kleinen Kreis.
Der Schwerpunkt eines Kreises liegt in seinem Mittelpunkt.



Grosser Kreis:

Fläche: $A_G = \pi R^2$

Schwerpunkt: $x_{GS} = R$; $y_{GS} = R$

Kleiner Kreis:

Fläche: $A_K = \frac{\pi}{16}R^2$

Schwerpunkt: $x_{KS} = R$; $y_{KS} = R - \frac{1}{4}R = \frac{3}{4}R$

Schwerpunkt gesamter Fläche:

Gesamtfläche: $A = A_G - A_K = \frac{15\pi}{16}R^2$

$$x_S = \frac{1}{A}(x_{GS} \cdot A_G - x_{KS} \cdot A_K) = \frac{16}{15\pi R^2}\left(\pi R^3 - \frac{\pi}{16}R^3\right) = R$$

$$y_S = \frac{1}{A}(y_{GS} \cdot A_G - y_{KS} \cdot A_K) = \frac{16}{15\pi R^2}\left(\pi R^3 - \frac{3\pi}{64}R^3\right) = \frac{61}{60}R$$

Aufgabe 3

a)

Aus Hausübung 4 wissen wir, dass die Kräftegruppe G: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ die Leistung $P_G = -\sqrt{2}\omega RF$ besitzt. Leistungen der neuen Kräfte bestimmen. Wir benutzen hier:

$$P = \vec{v}_B \cdot \vec{R} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_B$$

Und wir wählen der Punkt B so, dass B auf der Rotationsachse liegt ($\vec{v}_B = \vec{0}$). Wir wählen zwei verschiedene Punkte für die zwei Kräfte und zwar S und Z.

- Für $\vec{F}_4$ wählen wir der Bezugspunkt S so, dass auf µ liegt, und die gleiche Höhe von D hat. Dann können wir $\vec{M}_S(\vec{F}_4)$ bestimmen:
  - $\vec{M}_S(\vec{F}_4) = \vec{r}_{SD} \times \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} R \\ -R \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2}FR \end{pmatrix}$
- Für $\vec{F}_5$ wählen wir der Bezugspunkt Z so, dass auf µ liegt, und die gleiche Höhe von E hat. Dann können wir $\vec{M}_Z(\vec{F}_5)$ bestimmen:
  - $\vec{M}_Z(\vec{F}_5) = \vec{r}_{ZE} \times \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} R \\ R \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{2}F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2}FR \end{pmatrix}$

Jetzt, kann man die zwei Leistungen P_4 und P_5 bestimmen mit $\vec{\omega}$.

Leistungen:

- $P_4 = \vec{v}_S \cdot \vec{R} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_S(\vec{F}_4) = \vec{0} \cdot \vec{R} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_S(\vec{F}_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2}FR \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\omega RF = P_G$

- $P_5 = \vec{v}_Z \cdot \vec{R} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_Z(\vec{F}_5) = \vec{0} \cdot \vec{R} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_Z(\vec{F}_5) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2}FR \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\omega RF = P_G$

Die Leistungen der beiden neuen Kräfte sind genauso groß wie die Leistung der Kräftegruppe G.

b)

Äquivalenz der Kräftegruppe G mit $\vec{F}_4$ und $\vec{F}_5$.
Notwendige Bedingung: Resultierende und Gesamtmoment sind gleicht.

- $\vec{R}(G) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \neq \vec{F}_4$

- $\vec{R}(G) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \neq \vec{F}_5$

Die Resultierende der Kräftegruppe G ist weder mit $\vec{F}_4$, noch mit $\vec{F}_5$ äquivalent. Somit sind die beiden Kräfte nicht äquivalent zur Kräftegruppe G.