Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Biomechanik I

für D-HEST

Musterlösung

Prof. Jess Snedeker — Schnellübung 5 — FS19

Aufgabe 1

Gegeben:

Geometrie

a, b

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$

Gesucht:

a) Dyname in O, $\{\vec{R}, \vec{M}_R\}$

b) Dyname in P

c) a, sodass Reduktion auf Einzelkraft möglich

a)

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix}; \quad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ F \\ F \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{M}_i = \begin{pmatrix} b \\ a \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= F \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix}$$

Dyname in O ist also $\{ \begin{pmatrix} F \\ F \\ F \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} \}$

b) Da $\vec{R}$ im ganzen Körper invariant ist, müssen wir nur das Moment bzgl. P berechnen:

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{R} \times \overrightarrow{OP} = F \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ F \\ F \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ -b \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 0 \\ b-a \\ -a \end{pmatrix}$$

c) Reduktion der Kräftegruppe auf Einzelkraft:

- $\vec{R} \neq 0$
- $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_O = \begin{pmatrix} F \\ F \\ F \end{pmatrix} \cdot F \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} = F^2(-a+b-a) = F^2(-2a+b) = 0 \quad \rightarrow -2a+b=0 \quad \rightarrow a = \frac{b}{2}$$

Aufgabe 2

Gegeben:
l, R
$\vec{F}_E, \vec{F}_B, \vec{F}_C$

Gesucht:
a) Dyname in D, $\{\vec{R}, \vec{M}_D\}$
b) α, l und F sodass ein Nullsystem

a) Berechne die Dyname der Kräfte in B, C und E bzgl. des Punktes D:

$$\vec{M}_D(\vec{F}_B) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2R \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \; 2RP \end{pmatrix}$$

Alle die Kräfte und Kraftangriffspunkte liegen in der gleichen Ebene - 2D Problem! Deswegen sind alle die Momente in $\vec{e}_z$ Richtung. Man kann skalar rechnen, mit dem Betrag der Kräfte und dem Abstand von der Wirkungslinien und Punkt D. Die Rechte-Hand-Regel wird verwendet, um die Richtung des Moments zu bestimmen.

$$\vec{M}_D(\vec{F}_E) = -(R+l)P \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \; -(R+l)P \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_D(\vec{F}_C) = -\frac{R}{2}3P \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \; -\frac{R}{2}3P \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_D = \vec{M}_D(\vec{F}_E) + \vec{M}_D(\vec{F}_E) + \vec{M}_D(\vec{F}_E) = (2RP - (R+l)P - \frac{3}{2}RP)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P(l+\frac{R}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\vec{R} = \vec{F}_B + \vec{F}_E + \vec{F}_C = \begin{pmatrix} P \\ -2P \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Nullsystem ist wenn alles in einem statischen Gleichgewicht ist, d.h. die Dyname verschwindet: $\vec{R} = \vec{0}$ und $\vec{M}_D = \vec{M}_0$. Beachte, da $\vec{R} = \vec{0}$, gilt $\vec{M}_D = \vec{M}_0 + \cancel{\vec{R} \times \vec{OD}}$

$$\vec{F}_D = \begin{pmatrix} -F\cos\alpha \\ -F\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} P - F\cos\alpha \\ -2P - F\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0} \quad \rightarrow \quad P - F\cos\alpha = 0, \quad -2P - F\sin\alpha = 0$$

$$\overrightarrow{M}_D = \vec{0} \quad \rightarrow \quad -P(l + \frac{R}{2}) = 0$$

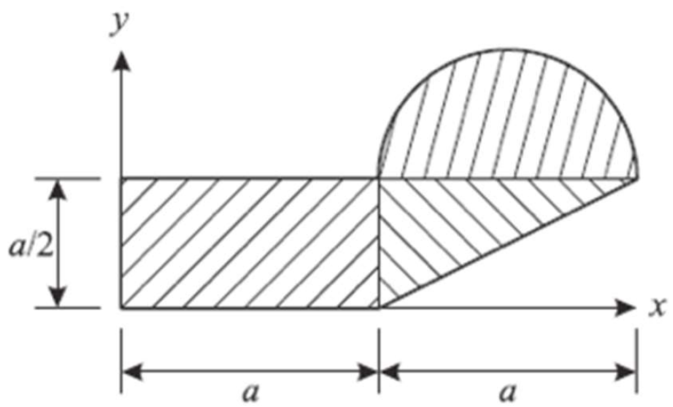
Gleichungssystem lösen:

$$\frac{F\sin\alpha}{F\cos\alpha} = -\frac{2P}{P} \quad \rightarrow \quad \tan\alpha = -2 \quad \rightarrow \quad \alpha = \arctan(-2)$$

$$\rightarrow F = \frac{P}{\cos\alpha} \quad \rightarrow \quad l = -\frac{R}{2}$$

Aufgabe 3

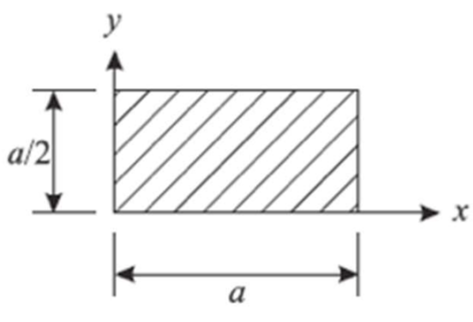
Um den Schwerpunkt zu finden, können wir die Eigenschaft der Superposition ausnutzen: Wir teilen den komplexen Körper in einfachere Teilkörper, berechnen deren Schwerpunkte und summieren diese gewichtet auf. In diesem Beispiel sehen wir, dass der Körper in drei Stücke zerlegt werden kann:



Ein Rechteck mit den Seitenlängen a und $\frac{a}{2}$, einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kantenlängen a und $\frac{a}{2}$ und einem Halbkreis mit dem Radius $\frac{a}{2}$

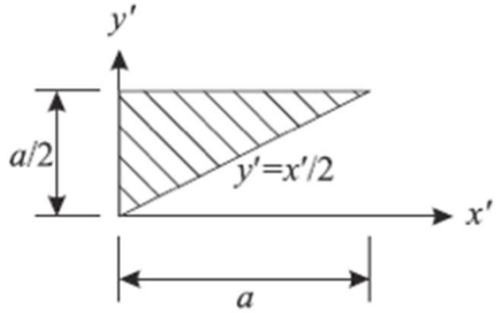
Schwerpunkt Rechteck:

$$A_R = \frac{1}{2}a^2$$
$$x_{RS} = \frac{1}{2}a$$
$$y_{RS} = \frac{1}{4}a$$



Schwerpunkt Dreieck, aus Formelsammlung oder selbst berechnen (siehe Schluss)

$$A_D = \frac{1}{2}a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}a^2$$
$$x'_{DS} = \frac{1}{3}a$$
$$y'_{DS} = \frac{1}{3}a$$

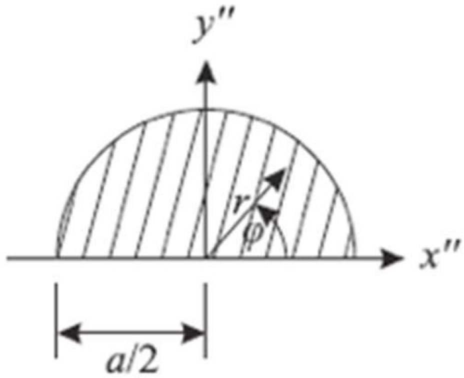


Rücktransformation in xy-Koordinaten:

$$x_{DS} = a + x'_{DS} = \frac{4}{3}a, \qquad y_{DS} = y'_{DS} = \frac{1}{3}a$$

Schwerpunkt Halbkreis aus Formelsammlung oder selbst berechnen (siehe Schluss)

$$A_K = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi}{8}a^2$$
$$x''_{KS} = 0 \text{ (Symmetrie)}$$
$$y''_{KS} = \frac{2}{3\pi}a$$



Rücktransformation in xy-Koordinaten:

$$x_{KS} = \frac{3}{2} + x''_{DS} = \frac{3}{2}a, \qquad y_{DS} = \frac{1}{2}a + y'_{DS} = \frac{4+3\pi}{6\pi}a$$

Gesamtfläche:

$$A = A_R + A_D + A_K = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{\pi}{8}a^2 = \frac{6+\pi}{8}a^2$$

Schwerpunkt gesamter Fläche (gewichteter Durchschnitt wird berechnet):

$$x_s = \frac{1}{A}(x_{RS}\cdot A_R + x_{DS}\cdot A_D + x_{KS}\cdot A_K) = \frac{8}{(6+\pi)a^2}(\frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{3}a^3 + \frac{3\pi}{16}a^3) = \frac{8}{6+\pi}a(\frac{7}{12} + \frac{3\pi}{16}) = \frac{28+9\pi}{36+6\pi}a$$

$$y_s = \frac{1}{A}(y_{RS}\cdot A_R + y_{DS}\cdot A_D + y_{KS}\cdot A_K) = \frac{8}{(6+\pi)a^2}(\frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{12}a^3 + \frac{4+3\pi}{48}a^3) = \frac{8}{6+\pi}a\frac{14+3\pi}{48} = \frac{14+3\pi}{36+6\pi}a$$

Schwerpunkt selbst berechnen

Dreieck:

$$x'_{DS} = \frac{1}{A}\int_0^a (\frac{a}{2} - \frac{1}{2}x')x'dx' = \frac{4}{a^2}\int_0^a (\frac{a}{2}x' - \frac{1}{2}x'^2)dx' = \frac{4}{a^2}\left[\frac{a}{4}x'^2 - \frac{1}{6}x'^3\right]_0^a = \frac{4}{a^2}(\frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{6}) = \frac{1}{3}a$$

$$y'_{DS} = \frac{1}{A_D}\int_0^{\frac{a}{2}} 2y'y'dy' = \frac{4}{a^2}\int_0^{\frac{a}{2}} 2y'^2dy' = \frac{4}{a^2}\left[\frac{2}{3}y'^3\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{4}{a^2}(\frac{1}{12}a^3) = \frac{1}{3}a$$

Halbkreis:

$$\begin{aligned} x''_{KS} = \frac{1}{A_K}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r\cos\varphi r dr d\varphi &= \frac{8}{\pi a^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{a}{2}} r^2\cos\varphi dr d\varphi = \frac{8}{\pi a^2}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{3}r^3\cos\varphi\right]_0^{\frac{a}{2}} d\varphi \\ &= \frac{8}{\pi a^2}\int_0^{\pi}\frac{1}{24}a^3\cos\varphi d\varphi = \frac{a}{3\pi}[\sin\varphi]_0^{\pi} = \frac{a}{3\pi}\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''_{KS} = \frac{1}{A_K}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r\sin\varphi r dr d\varphi &= \frac{8}{\pi a^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{a}{2}} r^2\sin\varphi dr d\varphi = \frac{8}{\pi a^2}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{3}r^3\sin\varphi\right]_0^{\frac{a}{2}} d\varphi \\ &= \frac{8}{\pi a^2}\int_0^{\pi}\frac{1}{24}a^3\sin\varphi d\varphi = \frac{a}{3\pi}[-\cos\varphi]_0^{\pi} = \frac{a}{3\pi}\cdot 2 = \frac{2}{3\pi}a \end{aligned}$$