Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Biomechanik I
für D-HEST

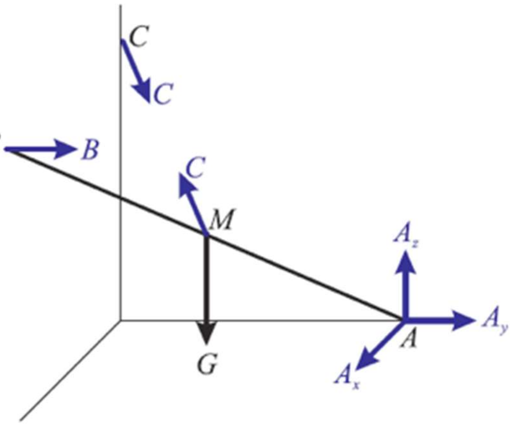
Musterlösung
Hausübung
Serie 6

Prof. Jess Snedeker

FS 2019

Aufgabe 1

a) System freigeschnitten:



$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{B} = B\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{C} = \frac{C}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Die Kraft $\boldsymbol{B}$ steht senkrecht auf der Wand (xz-Ebene). Die Kraft $\boldsymbol{C}$ zeigt in Richtung des Seils.
Keine Lagermomente in den Punkten A, B und C
Komponentenbedingungen:

KB(x): $A_x - \dfrac{C}{\sqrt{3}} = 0$ (I)

KB(y): $A_y + B - \dfrac{C}{\sqrt{3}} = 0$ (II)

KB(z): $A_z + \dfrac{C}{\sqrt{3}} - G = 0$ (III)

Momentenbedingungen (bezüglich Punkt A):

MB(A,x): $\dfrac{L}{2}G - LB = 0$ (IV)

MB(A,y): $\dfrac{L}{2}G - \dfrac{LC}{\sqrt{3}} = 0$ (V)

MB(A,z): $LB - \dfrac{LC}{\sqrt{3}} = 0$ (VI)

Die Gleichungen (IV), (V) und (VI) sind linear abhängig: 5 Unbekannte (A_x, A_y, A_z, B und C) und 5 Gleichungen.

aus (IV): $B = \dfrac{G}{2}$ (VII)

aus (V): $C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}G$ (VIII)

aus (I) mit (VIII): $A_x = \dfrac{G}{2}$

aus (II) mit (VI) und (VIII): $A_y = 0$

aus (III) mit (VIII): $A_z = \dfrac{G}{2}$

$$\boldsymbol{A} = \frac{G}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \boldsymbol{B} = \frac{G}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \boldsymbol{C} = \frac{G}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2:

Gegeben:

Quader mit Kantenlänge a und Gewicht G
Kraft P

Gesucht:

a) Fadenkräfte, Winkel φ
b) Maximales P, so dass die Fäden straff bleiben

Lösung:

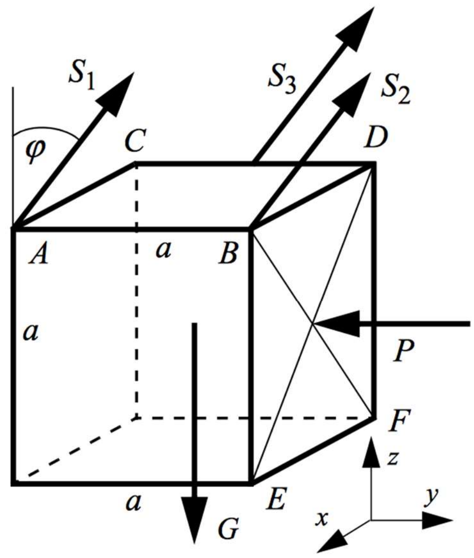
a) $\underline{S}_1, \underline{S}_2, \underline{S}_3$ liegen in der yz-Ebene, da:

$$\underline{S}_1 = \begin{bmatrix} S_{x_1} \\ S_{y_1} \\ S_{z_1} \end{bmatrix}, \underline{S}_2 = \begin{bmatrix} S_{x_2} \\ S_{y_2} \\ S_{z_2} \end{bmatrix}, \underline{S}_3 = \begin{bmatrix} S_{x_3} \\ S_{y_3} \\ S_{z_3} \end{bmatrix}$$

In x-Richtung: $R_x = S_{x_1} + S_{x_2} + S_{x_3} = 0$

Da alle $S_{x_{1,2,3}}$ das gleiche Vorzeichen haben (parallele Seile) muss gelten:

$$S_{x_1} = S_{x_2} = S_{x_3} = 0$$



Es gilt: $\underline{S}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot S_1 \quad , \quad \underline{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot S_2 \ , \quad \underline{S}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot S_3$

Gleichgewichtsbedingung (Kraft):

$$R_x = 0$$

$$R_y = \sin\varphi \cdot (S_1 + S_2 + S_3) - P = 0 \ (1)$$

$$R_z = \cos\varphi \cdot (S_1 + S_2 + S_3) - G = 0 \ (2)$$

Momentenbedingungen: $\underline{M}_A = \underline{0}$, d.h.:

$$\underline{M}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot S_2 + \begin{bmatrix} -a \\ \frac{a}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot S_3 + \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} \\ a \\ -\frac{a}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a \cdot \cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot S_2 + \begin{bmatrix} \frac{a}{2} \cdot \cos\varphi \\ a \cdot \cos\varphi \\ -a \cdot \sin\varphi \end{bmatrix} \cdot S_3 + \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} \cdot G \\ -\frac{a}{2} \cdot G \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} \cdot P \\ 0 \\ \frac{a}{2} \cdot P \end{bmatrix} = 0$$

oder:

$$M_x = 0 = a \cdot \cos\varphi \cdot S_2 + \frac{a}{2} \cdot \cos\varphi \cdot S_3 - \frac{a}{2}G - \frac{a}{2}P \quad (3)$$

$$M_y = 0 = a \cdot \cos\varphi \cdot S_3 - \frac{a}{2}G \quad (4)$$

$$M_z = 0 = -a \cdot \sin\varphi \cdot S_3 + \frac{a}{2}P \quad (5)$$

Aus (1)/(2) oder (5)/(4) folgt: $\sin\varphi = \dfrac{P}{S_1 + S_2 + S_3}$, $\cos\varphi = \dfrac{G}{S_1 + S_2 + S_3}$

$$\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{P}{G}\right)$$

Aus (4) folgt: $S_3 = \dfrac{G}{2 \cdot \cos\varphi}$

Aus (3) folgt: $S_2 = -\dfrac{S_3}{2} + \dfrac{G}{2 \cdot \cos\varphi} + \dfrac{P}{2 \cdot \cos\varphi} = \dfrac{G}{4 \cdot \cos\varphi} + \dfrac{P}{2 \cdot \cos\varphi}$

Aus (2) folgt: $S_1 = \dfrac{G}{\cos\varphi} - S_2 - S_3 = \dfrac{G}{4 \cdot \cos\varphi} - \dfrac{P}{2 \cdot \cos\varphi}$

Oder: $S_{1y} = \frac{1}{4}P - \frac{1}{2}\frac{P^2}{G}$ $\qquad S_{1z} = \frac{1}{4}G - \frac{1}{2}P$

$$S_{2y} = \frac{1}{4}P + \frac{1}{2}\frac{P^2}{G} \qquad S_{2z} = \frac{1}{4}G + \frac{1}{2}P$$

$$S_{3y} = \frac{1}{2}P \qquad S_{3z} = \frac{1}{2}G$$

b) Damit der Faden straff bleibt muss gelten: $\underline{S}_1, \underline{S}_2, \underline{S}_3 \geq 0$

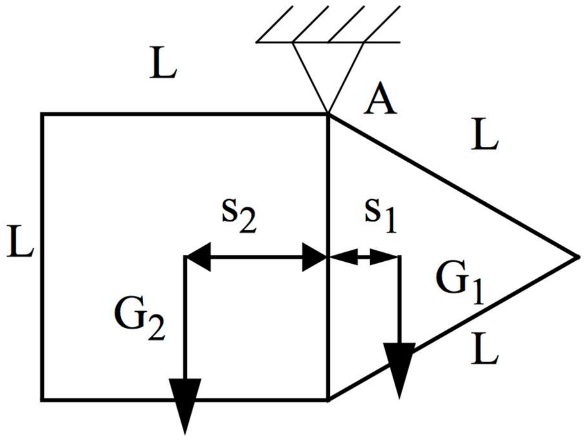
Der kritische Faden ist hierbei $\underline{S}_1 \geq 0$

$$\frac{G}{4 \cdot \cos\varphi} - \frac{P}{2 \cdot \cos\varphi} \geq 0$$

$$\frac{G}{4 \cdot \cos\varphi} \geq \frac{P}{2 \cdot \cos\varphi}$$

Wegen $\cos\varphi \geq 0$ für $\varphi \in [0°, 90°]$ muss gelten: $P \leq \frac{G}{2}$

Aufgabe 3



Lage des Schwerpunktes:

- $s_2 = \frac{L}{2}$
- $s_1 = \frac{1}{3} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} L$

Moment in A

- M_A: $s_2 \cdot G_2 - s_1 \cdot G_1 = 0$

$$\frac{L}{2} \cdot G_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{L}{2} \cdot G_1$$

$$G_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot G_1$$

b) Der Schwerpunkt befindet sich daher bei s1 = s2 = 0 (Ansonsten wäre das System nicht im Gleichgewicht – notwendige Bedingung für a)).