ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Biomechanik I
für D-HEST

Musterlösung
Hausübung
Serie 7

Prof. Jess Snedeker

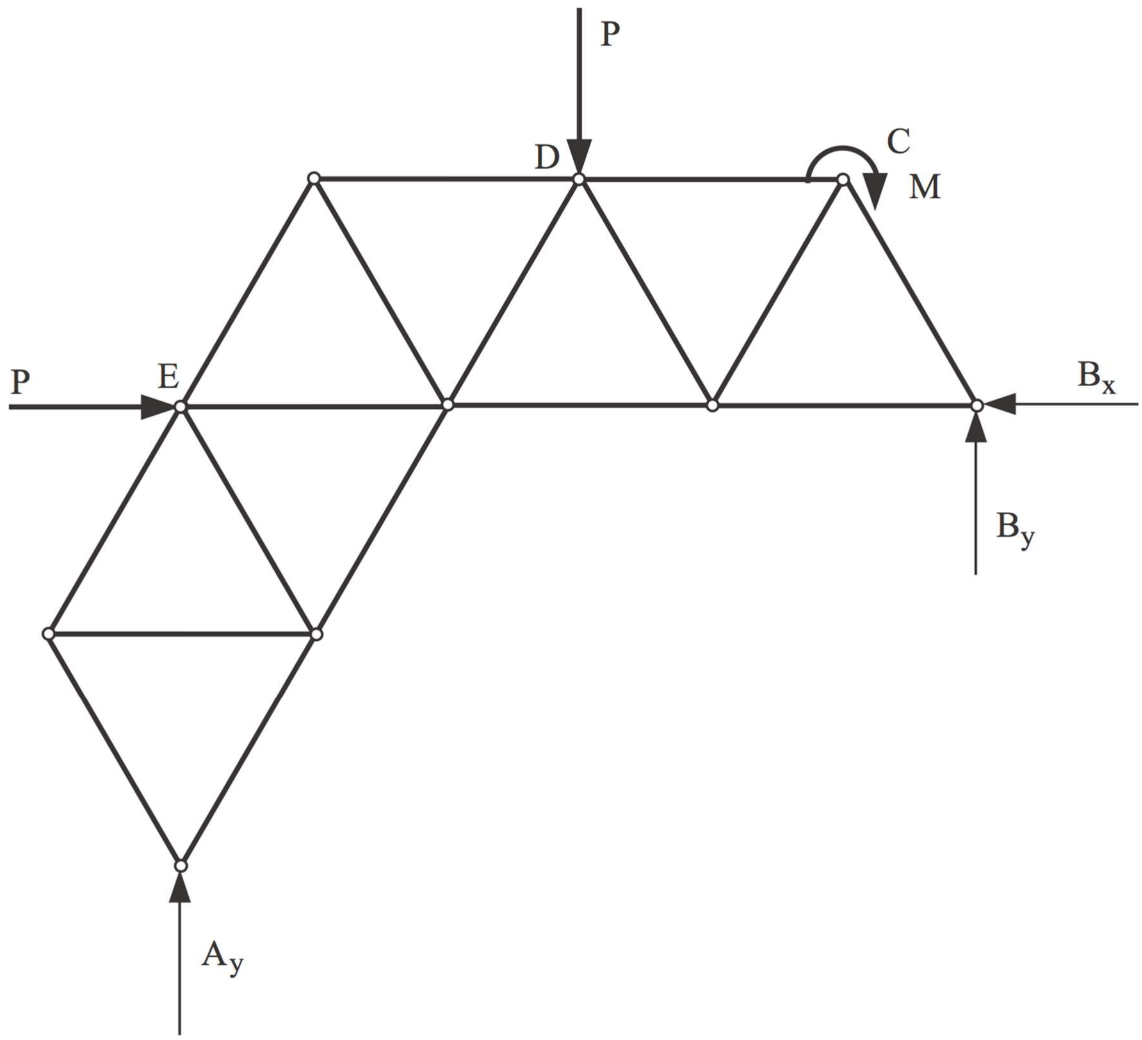
FS 2019

Aufgabe 1

a)

Lagerkräfte bestimmen:

Hierzu muss das gesamte System von seinen Lagern getrennt werden und anstelle der Gelenke die jeweiligen Lagerkräfte eingeführt werden.



Daraus lassen sich nun die Gleichgewichtsbedingungen formulieren:

$$\sum F_x : \quad -B_x + P = 0$$

$$\sum F_y : \quad A_y + B_y - P = 0$$

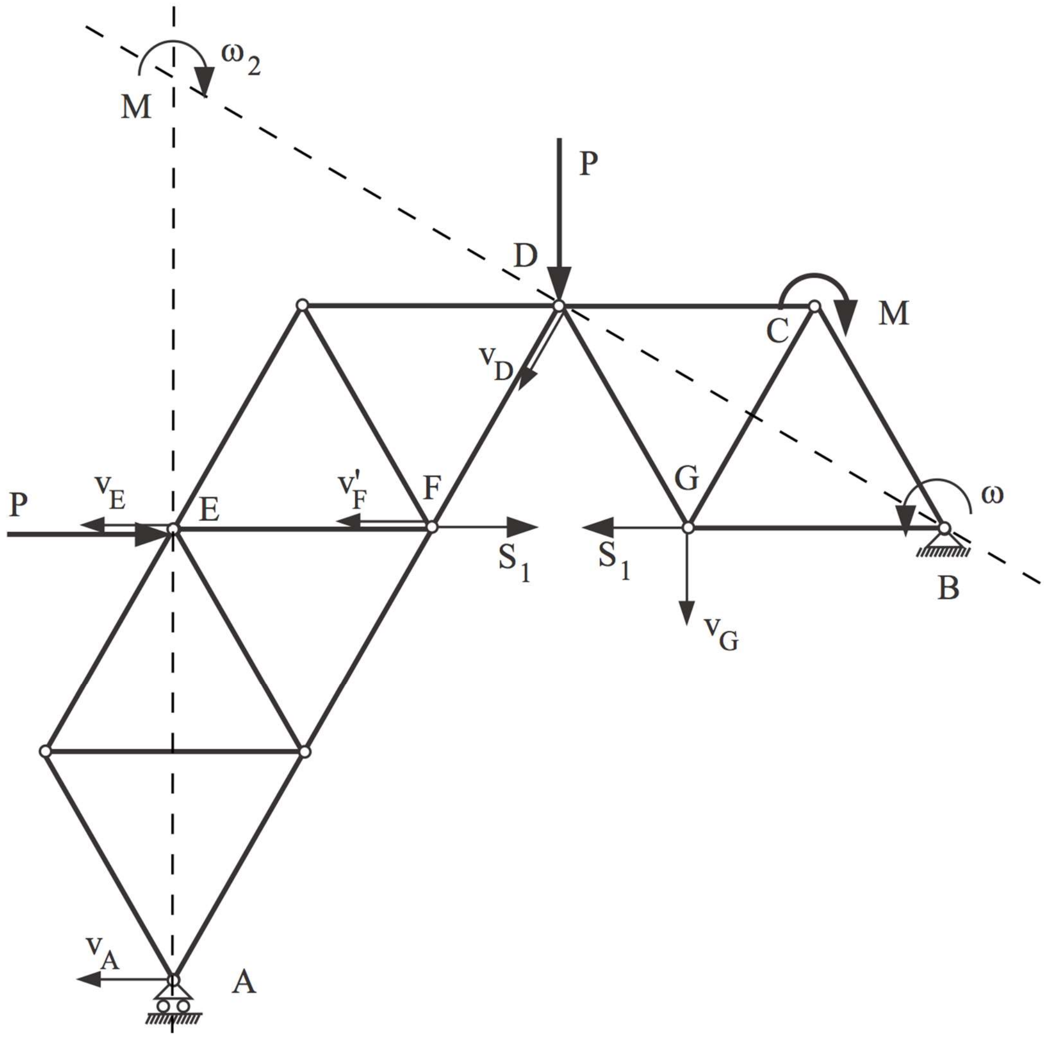
$$\sum M_B : \quad \frac{3}{2}aP - 3aA_y - 3Pa = 0$$

Auflösen dieser drei Bedingungen führt zu den drei gesuchten Lagerkräfte:

$$B_x = P\,, \quad A_y = -\frac{P}{2}\,, \quad B_y = \frac{3}{2}P$$

b) STAB 1

Um die Stabkraft S1 mithilfe des PdvL zu finden muss der Stab als erstes entfernt werden und an seiner Stelle die Stabkraft S1 einfgeführt werden. Nun lässt sich eine virtuelle Geschwindigkeit oder Winkelgeschwindigkeit einführen. In unserem Fall wurde die Winkelgeschwind ω im Punkt B definiert:



- Wir haben zwei Starrkörper vorliegen
- Das Momentanzentrum des ersten Starrkörpers liegt im Punkt B
- Das Momentanzentrum des zweiten Starrkörpers liegt in M, dort wo sich die beieden Gerade schneiden welche senkrecht auf v_D und v_A stehen.

- Geschwindigkeit in Punkt D bestimmen: $v_D = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a\omega$

- Rotationsgeschwnidigkeit im Punkt M bestimmen: $\omega_2 = \frac{v_D}{DM} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \omega$

- Geschwindigkeit in E bestimmen: $v_E = \sqrt{3} a\omega$

- Geschwindigkeit in F bestimmen welche colinear zur Stabkraft S steht: $v_F{}' = \sqrt{3} a\omega$

  (Die y-Abstand zwischen M und F ist gleich gross wie die y-Abstand zwischen M und E, und ist die einzige wichtige Werte um die x-Komponente von v_F zu bestimmen)

Da nun sämtliche Geschwindigkeiten an den Punkten wo Kräfte wirken bestimmt wurden lässt sich nun mit dem PdvL die Stabkraft S1 ausrechnen:

Die **<u>Gesamtleistung</u>** beträgt:

$$P = -P \cdot v_E + P \cdot v_D' - M \cdot \omega - v_F' \cdot S_1 = 0$$

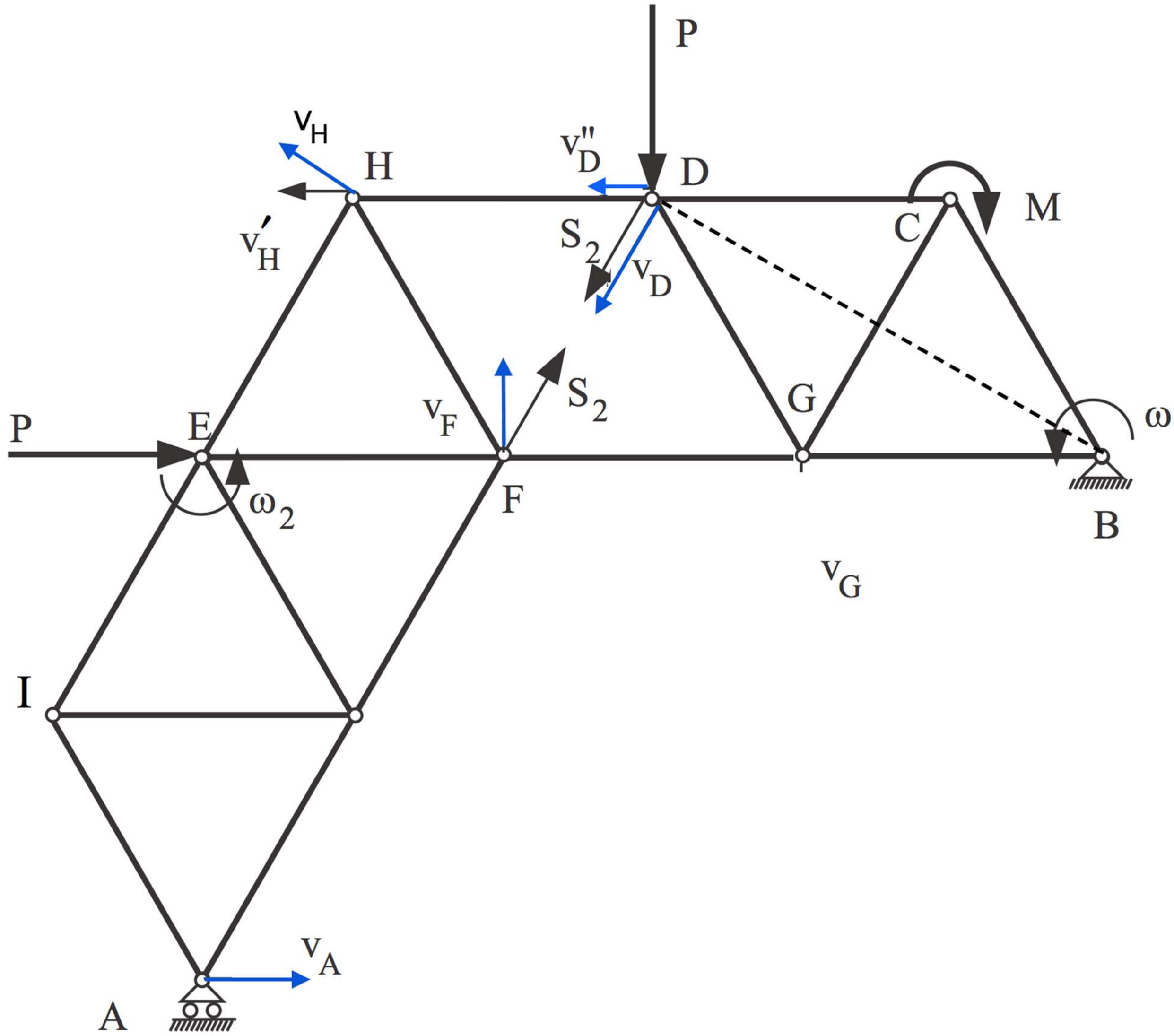
$$P = -P \cdot \sqrt{3} a\omega + P \cdot \sqrt{3} a\omega \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3Pa \cdot \omega - S_1 \cdot \sqrt{3} a\omega = 0$$

Die Stabkraft von Stab 1 beträgt:

$$S_1 = -\frac{P \cdot (3 + 2\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}$$

b) STAB 2

Anstelle des Stabes 1 nehmen wir nun Stab 2 aus dem System und ersetzen ihn durch die äquivalenten Stabkräfte. Auch hier führen wir wieder die Winkelgeschwind ω im Punkt B ein:



- Wir haben 4 Starrkörper vorliegen (2 Körper und 2 Stäbe)
- Geschwindigkeit in D berechnen: $v_D = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a\omega$
- Mit dem Satz der projezierten Geschwindigkeiten können wir daraus die Geschwindigkeit im Punkt H bestimmen:

  $$v'_H = v''_D \qquad \Rightarrow \qquad v'_H = \frac{\sqrt{3}}{2} a\omega$$

- Mit dem Satz der projezierten Geschwindigkeiten wissen wir auch, dass die horizontalen Koponenten in G und F gleich sein müssen:

  $$v'_G = v'_F = 0$$

- Wir kennen jetzt zwei Richtungen von Geschwindigkeiten des Starrkörpers ganz links (v_F vertikal und v_A horizontal) und können daraus die Position des Momentanzentrums bestimmen
  $\Rightarrow Punkt\ E$

- Daraus lässt sich nun die Rotationsschnelligkeit in E berechnen:

  $$\omega_2 = \frac{v'_H}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \omega$$

- Also hat die Geschwindigkeit in F den Betrag:

  $$v_F = a\omega$$

Die **<u>Gesamtleistung</u>** lässt sich daraus wie folgt bestimmen:

$$P = P \cdot v'_D - M \cdot \omega + v'_F \cdot S_2 + v_D \cdot S_2 = 0$$

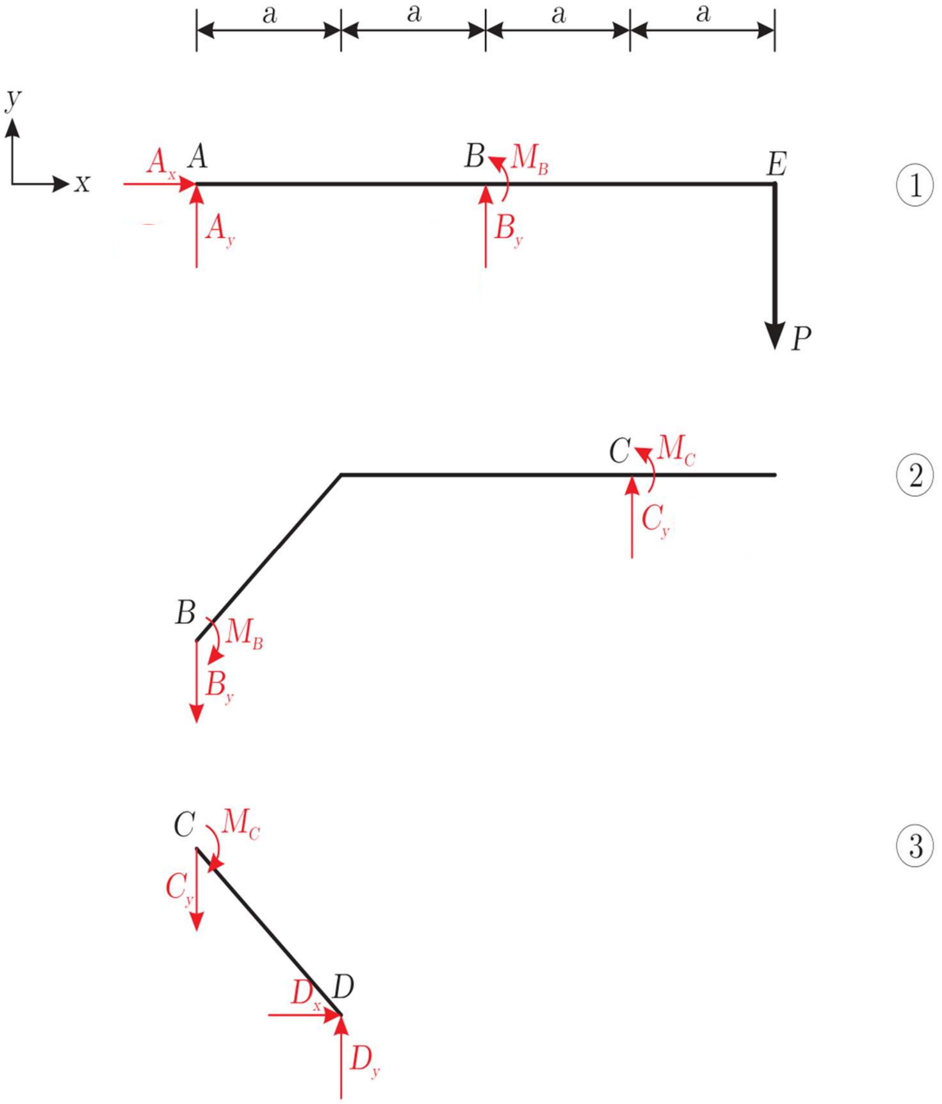
$$P = -3aP\omega + \sqrt{3}Pa\omega \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + S_2\sqrt{3}a\omega + S_2 a\omega \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Die Stabkraft von Stab 2 beträgt:

$$S_2 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \left(3P - \frac{3}{2}P\right) = \frac{P}{\sqrt{3}}$$

Aufgabe 2 (Klausuraufgabe aus der Klausur 2, Herbstsemester 2008)

1) System freischneiden:
Alle Gelenke trennen und Lagerkräfte einführen



2) Gleichgewichtsbedingungen aufstellen

(1):	$KB(x):$	$A_x = 0$	(I)
	$KB(y):$	$A_y + B_y - P = 0$	(II)
	$MB(A):$	$2aB_y + M_B - 4aP = 0$	(III)
(2):	$KB(x):$	$0 = 0$	(IV)
	$KB(y):$	$B_y - C_y = 0$	(V)
	$MB(B):$	$3aC_y + M_C - M_B = 0$	(VI)
(3):	$KB(x):$	$D_x = 0$	(VII)
	$KB(y):$	$D_y - C_y = 0$	(VIII)
	$MB(C):$	$aD_y + aD_x - M_C = 0$	(IX)

(III) mit (V) und (IX) mit (VII) und (VIII) in (VI):

$$3aC_y + aC_y + 2aC_y - 4aP = 0 \qquad \Rightarrow \quad C_y = \frac{2}{3}P \qquad \text{(X)}$$

(X) in (IX) mit (VII) und (VIII):

$$a\frac{2}{3}P - M_C = 0 \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{M}_C = a\frac{2}{3}P \qquad \text{(XI)}$$

(X) und (XI) in (VI):

$$3a\frac{2}{3}P + a\frac{2}{3}P - M_B = 0 \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{M}_B = a\frac{8}{3}P$$

Lagerkräfte und -momente:

	A	B	C	D
F_x:	$A_x = 0$			$\mathrm{D}_x = 0$
F_y:	$A_y = \frac{1}{3}P$	$B_y = \frac{2}{3}P$	$C_y = \frac{2}{3}P$	$D_y = \frac{2}{3}P$
M:		$\mathrm{M}_B = a\frac{8}{3}P$	$\mathrm{M}_C = a\frac{2}{3}P$	

b) Nein, da die Unbekannten sich eindeutig aus den Gleichungen bestimmen lassen.