Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Biomechanik I

für D-HEST

Musterlösung

Prof. Jess Snedeker — Schnellübung 7 — FS19

Aufgabe 1

Gegeben:

Geometrie

Kräfte

Gesucht:

a) Lagerkräfte

b) PdvL: Stabkraft CE

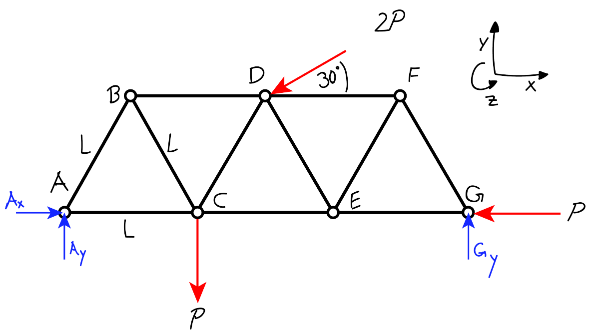
c) Zug- oder Druckstab?

a) System Freischneiden:

$$\sum F_x : A_x - P - \cos(30) \cdot 2P \stackrel{!}{=} 0$$

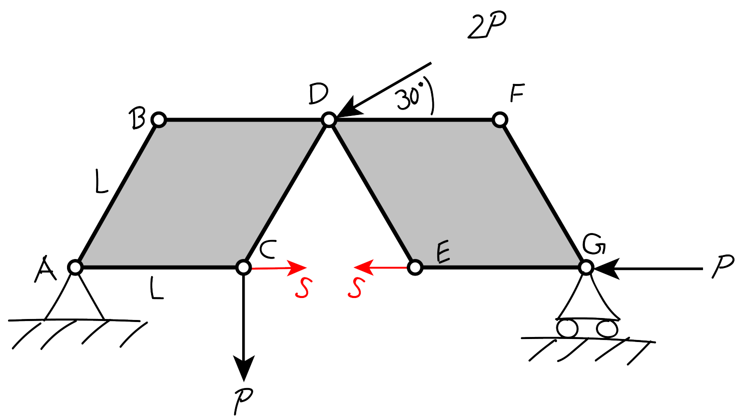
$$\sum F_y : A_y + G_y - P - \sin(30) \cdot 2P \stackrel{!}{=} 0$$

$$\sum M_z^D : \frac{1}{2}LP - \frac{3}{2}LA_y + \frac{\sqrt{3}}{2}LA_x - \frac{\sqrt{3}}{2}LP + \frac{3}{2}LG_y \stackrel{!}{=} 0$$



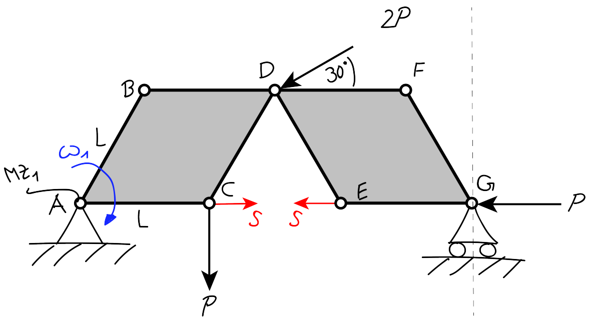
$$A_x = (1+\sqrt{3})P, \quad A_y = \frac{5}{3}P, \quad G_y = \frac{1}{3}P$$

b) Stab CE im Fachwerk entfernen und Stabkraft als Zugkraft an beiden Knoten einführen:

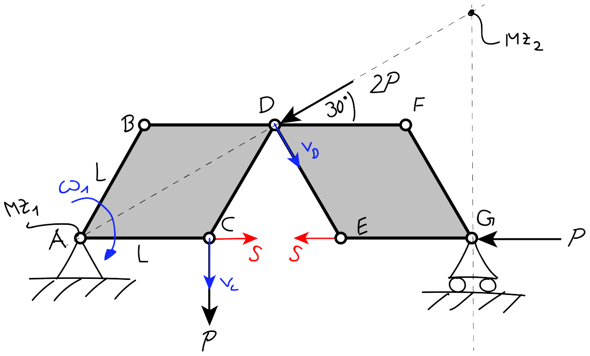


Um die Leistung mit dem Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL) zu berechnen, führt man einen virtuellen Bewegungszustand ein.

In dieser Aufgabe führen wir den virtuellen Bewegungszustand bevorzugt als $\omega_1 = \omega$ um Punkt A ein.

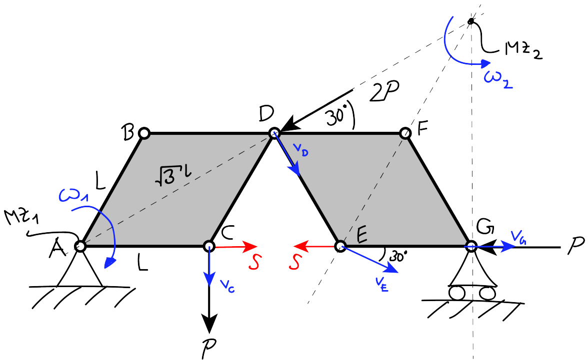


$$v_c = \omega \cdot L$$
$$v_d = \omega \cdot \sqrt{3}L$$
$$\omega_2 = \frac{v_d}{\sqrt{3}L} = \omega$$
$$v_e = 2L\omega, \quad v_g = \sqrt{3}L\omega$$



Wir berechnen die Gesamtleitung P_{tot}, indem wir jede Kraft mit deren Geschwindigkeit im Skalarprodukt multiplizieren. Wir sehen, dass die Lagerkräfte immer Leistungslos sind.

$$P_{tot} = \cancel{P_A} + P_C + P_D + P_E + P_G \overset{!}{=} 0$$
$$P_C = v_c \cdot P + \cancel{v_c \cdot S} = \omega LP$$
$$P_D = 2P\sin(30°) \cdot \sqrt{3}L\cos(30°)\omega$$
$$- 2P\cos(30°) \cdot \sqrt{3}L\sin(30°)\omega = 0, (\perp)$$
$$P_E = -\sqrt{3}L\omega \cdot S$$
$$P_G = -\sqrt{3}L\omega \cdot P$$



Man sieht, dass Geschwindigkeiten und Kräfte, welche senkrecht zueinander stehen, leistungslos sind. Daraus korreliert, dass man nur jeweils die Geschwindigkeit in Richtung der Kraft zu berechnen hat.

$$P_{tot} = P_C + P_D + P_E + P_G = \omega LP - \sqrt{3}L\omega \cdot S - \sqrt{3}L\omega \cdot P = 0$$
$$\rightarrow \sqrt{3}L\omega \cdot S = \omega LP - \sqrt{3}L\omega \cdot P \quad \rightarrow \quad S = P(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1)$$

c)

$$S = P(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1) < 0$$

Es gilt $S < 0$ also ist der Stab entsprechen unter Druck belastet!

Aufgabe 2

Gegeben:

Geometrie

Kräfte

Gesucht:

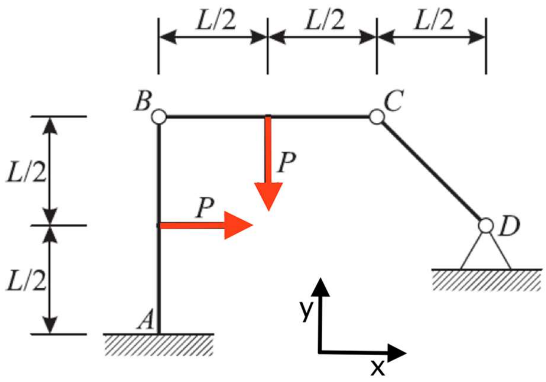
a) Lagerkräfte

b) BC Zug- oder Druckstab?

a) System Freischneiden!

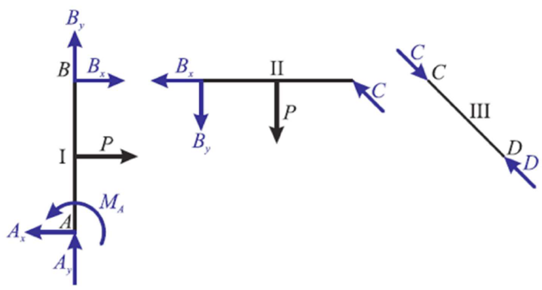
Beachte, dass Stab CD eine Pendelstütze ist - es wirken also nur Kräfte entlang des Stabes
Teilsystem I:

$$\sum F_x : -A_x + B_x + P \stackrel{!}{=} 0$$
$$\sum F_y : A_y + B_y \stackrel{!}{=} 0$$
$$\sum M_z^A : M_A - \frac{1}{2}lP - lB_x \stackrel{!}{=} 0$$



Teilsystem II:

$$\sum F_x : -B_x - \frac{\sqrt{2}}{2}C - P \stackrel{!}{=} 0$$
$$\sum F_y : -B_y + \frac{\sqrt{2}}{2}C - P \stackrel{!}{=} 0$$
$$\sum M_z^B : -\frac{1}{2}lP + l\frac{\sqrt{2}}{2}C \stackrel{!}{=} 0$$



Teilsystem III:

$$\sum F_{CD} : C - D \stackrel{!}{=} 0$$
$$\sum M_z^D : 0$$

Gleichungen auflösen:

$$\text{aus } M^{II}\text{: } C = \frac{\sqrt{2}}{2}P$$
$$\text{aus } F_{CD}^{II}\text{: } D = \frac{\sqrt{2}}{2}P$$
$$\text{aus } F_y^{II}\text{: } B_y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}P) - P = -\frac{1}{2}P$$
$$\text{aus } F_x^{II}\text{: } B_x = -\frac{1}{2}P$$
$$\text{aus } M^{I}\text{: } \frac{1}{2}lP + l(-\frac{1}{2}P) = 0$$
$$\text{aus } F_y^{I}\text{: } A_y = -\frac{1}{2}P$$
$$\text{aus } F_x^{I}\text{: } A_x = \frac{1}{2}P$$

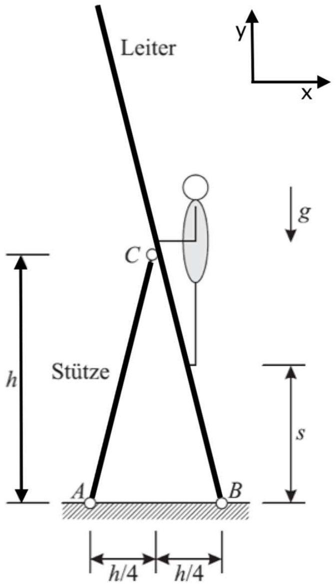
b) Da die Kraft B_x negativ ist, wirkt sie eigentlich in die andere Richtung (mit der x-Achse). Der Stab BC wird also auf Druck belastet.

Aufgabe 3

Gegeben:
Geometrie
Kräfte

Gesucht:
a) Lagerkräfte in A,B & C

a) System Freischneiden! Wir ersetzen die Person mit einer Gewichtskraft, die mit einem Abstand s vom Boden angreift.

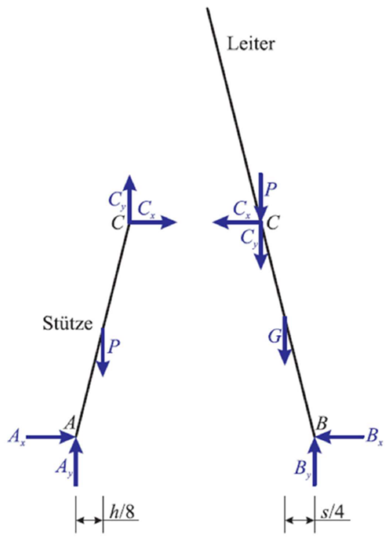


Teilsystem Stütze (I):

$$\sum F_x : A_x + C_x \stackrel{!}{=} 0$$
$$\sum F_y : A_y + C_y - P \stackrel{!}{=} 0$$
$$\sum M_z^A : -hC_x + \frac{h}{4}C_y - \frac{h}{8}P \stackrel{!}{=} 0$$

Teilsystem Leiter (II):

$$\sum F_x : -B_x - C_x \stackrel{!}{=} 0$$
$$\sum F_y : -B_y - C_y - P - G \stackrel{!}{=} 0$$
$$\sum M_z^B : hC_x + \frac{h}{4}C_y + \frac{h}{4}P + \frac{s}{4}G \stackrel{!}{=} 0$$



Gleichungen auflösen:

aus $M^I + M^{II}$: $\frac{h}{8}P + \frac{h}{2}C_y + \frac{s}{4}G = 0 \quad \rightarrow \quad C_y = -\frac{1}{4}P - \frac{s}{2h}G$

aus F_y^{II}: $B_y = -\frac{1}{4}P - \frac{s}{2h}G + P + G = -\frac{3}{4}P + (1 - \frac{s}{2h})G$

aus M^I: $-hC_x = \frac{h}{8}P - \frac{h}{4}(-\frac{1}{4}P - \frac{s}{2h}G) \quad \rightarrow \quad C_x = -\frac{3}{16}P - \frac{s}{8h}G$

aus F_x^{II}: $B_x = \frac{3}{16}P + \frac{s}{8h}G$

aus F_y^I: $A_y = P + \frac{1}{4}P + \frac{s}{2h}G = \frac{5}{4}P + \frac{s}{2h}G$

aus F_x^I: $A_x = \frac{3}{16}P + \frac{s}{8h}G$