Biomechanik I
für D-HEST

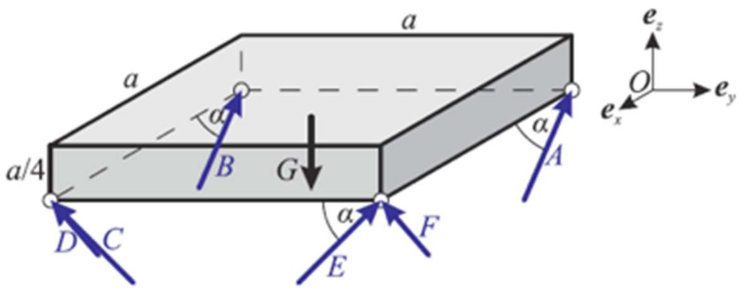
Prof. Jess Snedeker

Musterlösung
Hausübung
Serie 8

FS 2019

Aufgabe 1

a)



Kräfte:

$$\boldsymbol{A} = A\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix};\ \boldsymbol{B} = B\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix};\ \boldsymbol{C} = C\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix};\ \boldsymbol{D} = D\begin{bmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix};\ \boldsymbol{E} = E\begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{F} = F\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix};$$

Momente bezüglich dem Mittelpunkt M der unteren Quaderfläche:

$$\boldsymbol{M}_M(\boldsymbol{A}) = \frac{a}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\times A\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{aA}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix};\ \boldsymbol{M}_M(\boldsymbol{B}) = \frac{a}{2}\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}\times B\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{aB}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{M}_M(\boldsymbol{C}) = \frac{a}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\times C\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{aC}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix};\ \boldsymbol{M}_M(\boldsymbol{D}) = \frac{a}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\times D\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{aD}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{M}_M(\boldsymbol{E}) = \frac{a}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\times E\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{aE}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix};\ \boldsymbol{M}_M(\boldsymbol{F}) = \frac{a}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\times F\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{aF}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix};$$

Komponentenbedingung:

KB(x): $\frac{1}{\sqrt{2}}(-A-B+C+F) = 0$

KB(y): $\frac{1}{\sqrt{2}}(-D+E) = 0$

KB(z): $\frac{1}{\sqrt{2}}(A+B+C+D+E+F)-G = 0$

Momentenbedingung:

MB(M,x): $\frac{a}{2\sqrt{2}}(A-B-C-D+E+F) = 0$

MB(M,y): $\frac{a}{2\sqrt{2}}(A+B-C-D-E-F) = 0$

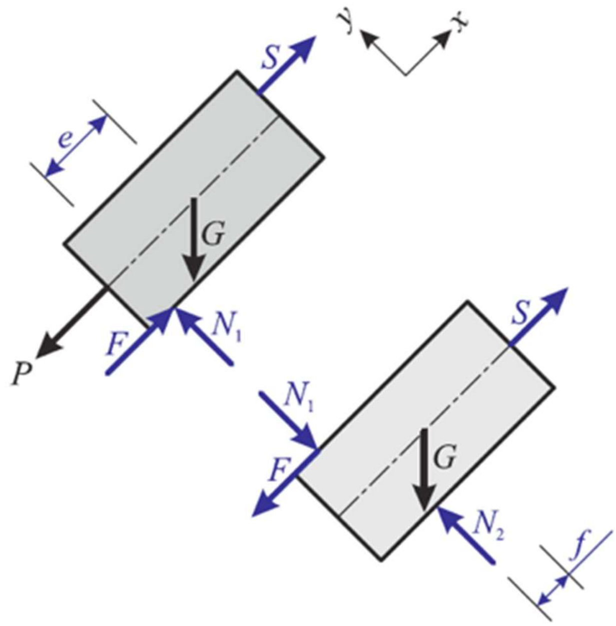
MB(M,z): $\frac{a}{2\sqrt{2}}(A-B+C-D+E-F) = 0$

Lineares Gleichungssystem mit 6 Gleichungen und 6 Unbekannten.
Aufgelöst ergibt das Gleichungssystem:

$$A = B = C = F = \frac{\sqrt{2}}{4}G\,;\, D = E = 0$$

Aufgabe 2

a) System in zwei Teilsysteme freigeschnitten!



Gleichgewichtsbedingungen aufstellen:

b) oberer Quader:

KB(x): $S - P - \dfrac{G}{\sqrt{2}} + F = 0$ (I)

KB(y): $N_1 - \dfrac{G}{\sqrt{2}} = 0$ (II)

MB(C_1): $-eN_1 - \dfrac{b}{4}S + \dfrac{b}{2}F = 0$ (III)

unterer Quader:

KB(x): $S - \dfrac{G}{\sqrt{2}} - F = 0$ (IV)

KB(y): $-\dfrac{G}{\sqrt{2}} - N_1 + N_2 = 0$ (V)

MB(C_2): $eN_1 - fN_2 + \dfrac{b}{2}F = 0$ (VI)

c) Normalkräfte:

aus (II): $N_1 = \frac{G}{\sqrt{2}}$ (VII)

aus (V) mit (VII): $N_2 = \sqrt{2}G$ (VIII)

Reibungskraft:

aus (I)-(IV): $F = \frac{P}{2}$ (IX)

Seilkraft:

aus (I) mit (IX): $S = \frac{G}{\sqrt{2}} + \frac{P}{2}$ (X)

Angriffspunkte:

aus (III) mit (VII), (IX) und (X): $e = -\frac{b}{4}\frac{S}{N_1} + \frac{b}{2}\frac{F}{N_1} = -\frac{b}{4} + \frac{b}{8}\frac{\sqrt{2}P}{G}$ (XI)

aus (VI) mit (VII), (VIII) und (XI): $f = \frac{eN_1}{N_2} + \frac{b}{2}\frac{F}{N_2} = -\frac{b}{8} + \frac{3 \cdot b}{16}\frac{\sqrt{2}P}{G}$ (XII)

d) Die Quader gleiten nicht für $|F| \leq \mu_0 N_1$:

$\Rightarrow \quad -\mu_0 N_1 \leq F \leq \mu_0 N_1$

mit (IV) und (IX): $-\mu_0 \frac{G}{\sqrt{2}} \leq \frac{P}{2} \leq \mu_0 \frac{G}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \quad -\sqrt{2}\mu_0 G \leq P \leq \sqrt{2}\mu_0 G$

e) Das Seil ist gespannt für $S > 0$:

mit (X): $\frac{G}{\sqrt{2}} + \frac{P}{2} > 0$

$\Rightarrow \quad P > -\sqrt{2}G$

f) Der oberer Quader kippt nicht für $|e| \leq \frac{a}{2}$:

$$\Rightarrow \quad -\frac{a}{2} \leq e \leq \frac{a}{2}$$

mit (XI): $-\frac{a}{2} \leq -\frac{b}{4} + \frac{b}{8}\frac{\sqrt{2}P}{G} \leq \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow \quad \left(-\frac{2a}{b} + 1\right)\sqrt{2}G \leq P \leq \left(\frac{2a}{b} + 1\right)\sqrt{2}G$$

Der untere Quader kippt nicht für $|f| \leq \frac{a}{2}$:

analog zum Kippen des oberen Quaders verläuft die Rechnung für den unteren Quader

$$\Rightarrow \quad \left(-\frac{4a}{b} + 1\right) \cdot \frac{\sqrt{2}G}{3} \leq P \leq \left(\frac{4a}{b} + 1\right) \cdot \frac{\sqrt{2}G}{3}$$

Der untere Klotz kippt eher, da für ihn ein kleinerer Wertebereich gegeben ist.