Biomechanik I

für D-HEST

Musterlösung

Prof. Jess Snedeker | Schnellübung 8 | FS19

Aufgabe 1

Gegeben:

Geometrie

Gewicht

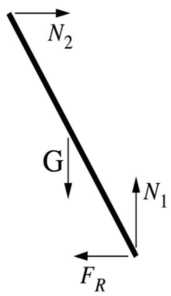
Reibungskoeffizient $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Gesucht:

a) Freischnitt

b) F_R

a) Stab Freischneiden und Kräfte einführen:



b) Reibungskraft F_R in B bestimmen:

$$\sum F_x : N_2 - F_R \stackrel{!}{=} 0$$
$$\sum F_y : N_1 - G \stackrel{!}{=} 0$$
$$\sum M_z^D : \frac{\sqrt{3}}{2} 2LF_R + \frac{1}{2}\frac{1}{2} 2LG - \frac{1}{2} 2LN_1 \stackrel{!}{=} 0$$

3 Unbekannte und 3 Gleichungen: Wir braucen keine zusätzliche Reibungsbedingung aufzustellen.

$$N_1 = G$$
$$F_R = N_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} G = \frac{\sqrt{3}G}{6}$$

Aufgabe 2

Gegeben:

Geometrie

Masse & Erdbeschleunigung

Reibungskoeffizient $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Kraft F

Gesucht:

a) Koordinatensystem

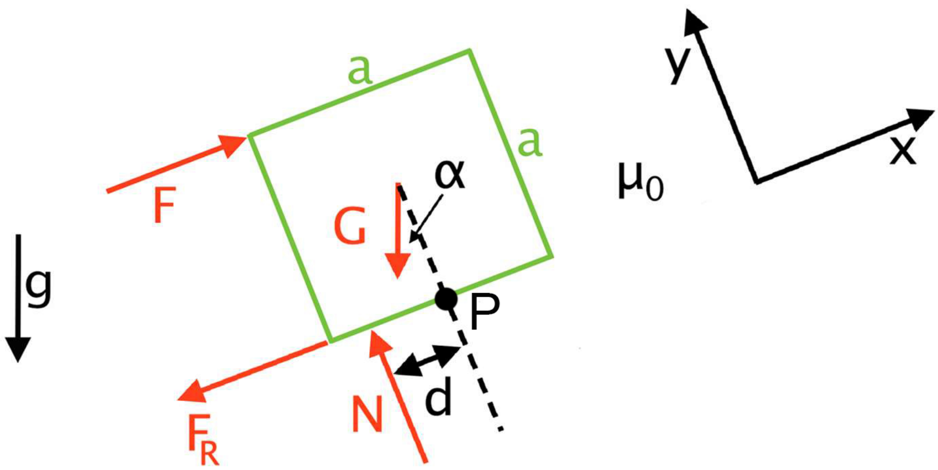
b) Freischneiden

c) F_R, sodass kein Rutschen

d) Standfestigkeit: F, sodass kein Kippen

a) Ein Grossteil der Kräfte in dieser Aufgabe ist um den Winkel α gedreht. Um Rechnungen zu vereinfachen, macht es deshalb Sinn das ganze Koordinatensystem ebenfalls um den Winkel α zu drehen. Im weiteren Verlauf der Aufgabe wird die Gewichtskraft $G = Mg$ benutzt.

b) Freischneiden! Wir führen die Normalkraft mit Abstand d von der Symmetrieachse des Vierecks ein.

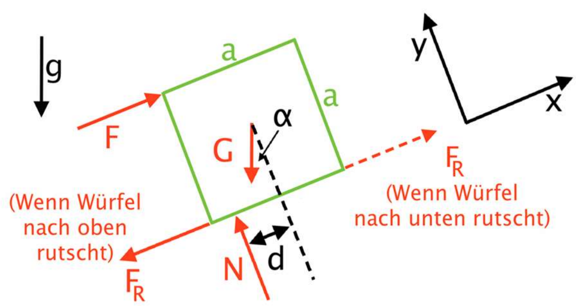


Gleichgewichtsbedingungen aufstellen:

$$\sum F_x : F - G \cdot \sin\alpha - F_R \overset{!}{=} 0 \qquad \rightarrow \qquad F_R = F - G \cdot \sin\alpha$$
$$\sum F_y : N - G \cdot \cos\alpha \overset{!}{=} 0 \qquad \rightarrow \qquad N = G \cdot \cos\alpha$$
$$\sum M_z^P : -F \cdot a - N \cdot d + G \sin\alpha \cdot \frac{a}{2} \overset{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow d = \frac{a}{N}\left(\frac{1}{2} G \sin\alpha - F\right) = a\left(\frac{1}{2}\tan\alpha - \frac{F}{G\cos\alpha}\right)$$

c) Haftbedingung für den Würfel:

$$|\vec{F}_R| \leq \mu_0 \cdot N$$
$$-\mu_0 \cdot N \leq F_R \leq \mu_0 \cdot N$$
$$-\mu_0 \cdot G \cdot \cos\alpha \leq F_R \leq \mu_0 \cdot G \cdot \cos\alpha$$



d) Damit kein Kippen auftreten kann, muss der Kraftsangriffspunkt der Normalkraft innerhalb der Auflagefläche des Würfels liegen:

$$|d| \leq \frac{a}{2}$$
$$-\frac{a}{2} \leq d \leq \frac{a}{2}$$
$$-\frac{a}{2} \leq a\left(\frac{1}{2}\tan\alpha - \frac{F}{G\cos\alpha}\right) \leq \frac{a}{2}$$

Daraus ergeben sich 2 Bedingungen für die Kraft F:

$$\frac{1}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha)\cdot G \leq F \leq \frac{1}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)\cdot G$$

c) (Teil 2) Fallunterscheidung für die Bewegung des Würfels

$$|\vec{F}_R| \leq \mu_0 \cdot N$$

1) $F_R > 0$ Entspricht eine Bewegung nach oben:

$$F_R = F - G\sin\alpha$$
$$F - G\sin\alpha \leq \mu_0 \cdot N$$
$$F \leq G\cdot(\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha)$$

2) $F_R < 0$ Entspricht eine Bewegung nach unten:

$$F_R = -F + G\sin\alpha$$
$$-F + G\sin\alpha \leq \mu_0 \cdot N$$
$$G\cdot(\sin\alpha - \mu_0\cos\alpha) \leq F$$

Somit ergeben sich folgende Randbedingungen für F damit kein Rutschen stattfinden kann:

$$G\cdot(\sin\alpha - \mu_0\cdot\cos\alpha) \leq F \leq G\cdot(\sin\alpha + \mu_0\cdot\cos\alpha)$$

Aufgabe 3

Gegeben:

Geometrie

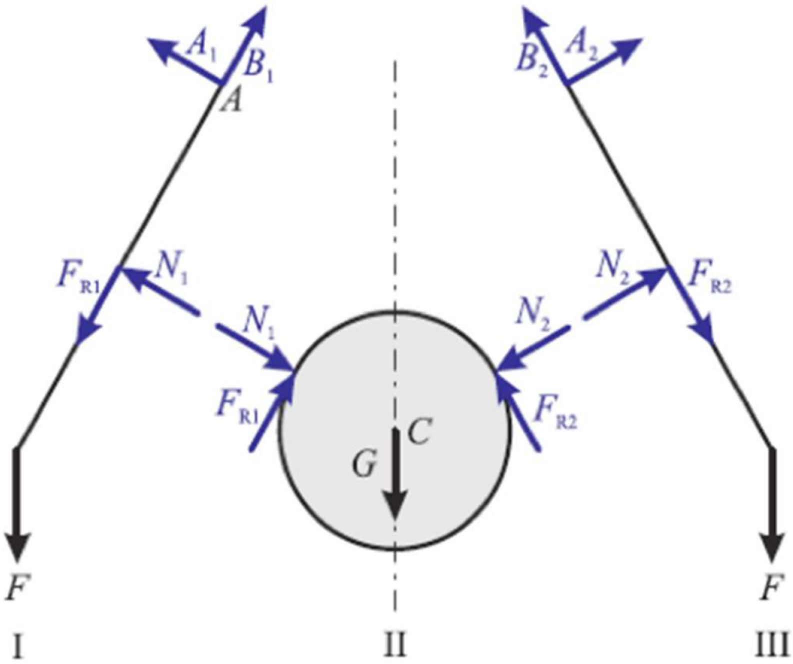
Gewicht G

Kraft $F = 5G$

Gesucht:

a) μ_0, sodass Ruhe

a) System freischneiden:



Teilsystem I:

$$\sum F_x : \frac{1}{2}B_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}A_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}N_1 - \frac{1}{2}F_{R1} \stackrel{!}{=} 0$$
$$\sum F_y : \frac{\sqrt{3}}{2}B_1 + \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}N_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}F_{R1} - F \stackrel{!}{=} 0$$
$$\sum M_z^A : lN_1 - 2l\frac{1}{2}F \stackrel{!}{=} 0$$

Teilsystem II:

$$\sum F_x : \frac{\sqrt{3}}{2}N_1 + \frac{1}{2}F_{R1} - \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 - \frac{1}{2}F_{R2} \stackrel{!}{=} 0$$
$$\sum F_y : -\frac{1}{2}N_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}F_{R1} - \frac{1}{2}N_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}F_{R2} - G \stackrel{!}{=} 0$$
$$\sum M_z^C : -rF_{R1} + rF_{R2} \stackrel{!}{=} 0$$

Gleichungssystem lösen:

aus M_z^A: $N_1 = F = 5G$

aus M_z^C: $F_{R1} = F_{R2} = F_R$

aus F_x^{II}: $N_1 = N_2 = N$

aus Symmetriegründen hätte man auch gleich sehen können, dass $F_{R1} = F_{R2}$ und $N_1 = N_2$ ist. Deshalb liefern die Komponentenbedingungen und die Momentenbedingung am Teilsystem III keine neuen Informationen.

$$\text{aus } F_y^{II}\colon\ -N + \sqrt{3}F_R - G = 0 \qquad \rightarrow \qquad F_R = \frac{1}{\sqrt{3}}(N+G) = \frac{6}{\sqrt{3}}G = 2\sqrt{3}G$$

Haftreibungsbedingung:

$$\begin{aligned} &F_R \leq \mu_0 |N| \\ &2\sqrt{3}G \leq \mu_0 5G \\ &\mu_0 \geq \frac{2}{5}\sqrt{3} \end{aligned}$$