ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Biomechanik I

für D-HEST

Musterlösung

Prof. Jess Snedeker — Schnellübung 9 — FS19

Aufgabe 1

Gegeben:

Lagerung

Belastung

Gesucht:

a) Beanspruchung: N, Q_y, M_z

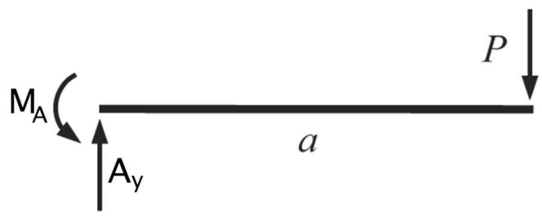
b) Verifiziere mit Differentialbeziehungen

c) Querkraft- und Biegemomentenverlauf

Stab 1

a) Zuerst Lagerkräfte bestimmen

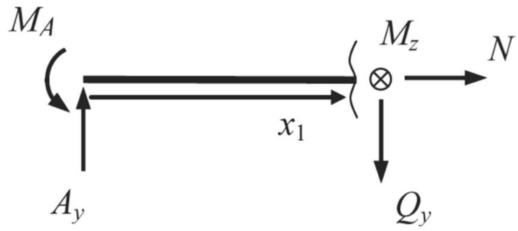
$$\sum F_x : A_x = 0$$
$$\sum F_y : -A_y + P \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow A_y = P$$
$$\sum M_z^A : M_A - aP \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow M_A = aP$$



Beanspruchung von links einführen

$(x = 0 : A)$

$$\sum F_x : N + A_x \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow N = 0$$
$$\sum F_y : Q_y - A_y \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow Q_y = P$$
$$\sum M_z^x : M_z - M_A + xP \stackrel{!}{=} 0$$
$$\rightarrow M_z = -Px + aP$$



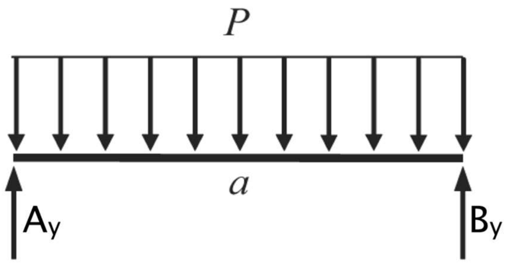
b) Differentialbeziehungen:

$$\frac{\partial Q_y}{\partial x} = -q_y = 0$$
$$\frac{\partial M_z}{\partial x} = -Q_y \qquad \rightarrow Q_y = P$$

c) Querkraft- und Biegemomentenverlauf: siehe Ende Aufgabe

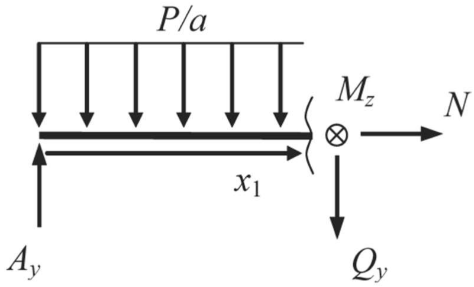
Stab 2

a) Zuerst Lagerkräfte bestimmen



$$\sum F_x : 0$$
$$\sum F_y : -A_y - B_y + P \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow A_y = \frac{P}{2}$$
$$\sum M_z^A : aB_y - \frac{a}{2}P \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow B_y = \frac{P}{2}$$

Beanspruchung von links einführen
$(x = 0 : A)$



$$\sum F_x : N \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow N = 0$$
$$\sum F_y : Q_y - A_y + x\frac{P}{a} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow Q_y = \frac{P}{2} - \frac{P}{a}x$$
$$\sum M_z^x : M_z + xA_y - (\frac{x}{2})x\frac{P}{a} \stackrel{!}{=} 0$$
$$\rightarrow M_z = \frac{P}{2a}x^2 - \frac{P}{2}x$$

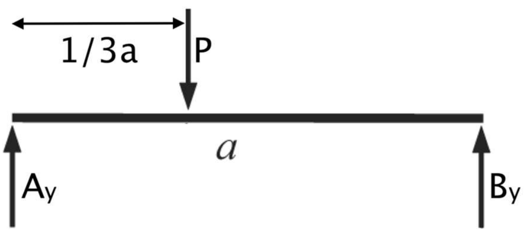
b) Differentialbeziehungen:

$$\frac{\partial Q_y}{\partial x} = -q_y = 0 \qquad \rightarrow \frac{P}{a}$$
$$\frac{\partial M_z}{\partial x} = -Q_y \qquad \rightarrow Q_y = -\frac{P}{a}x + \frac{P}{2}$$

c) Querkraft- und Biegemomentenverlauf: siehe Ende Aufgabe

Stab 3

a) Zuerst Lagerkräfte bestimmen

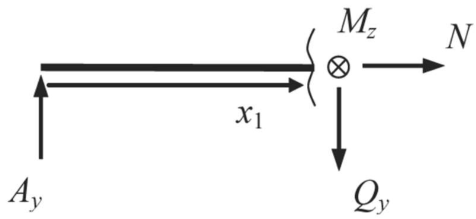


$$\sum F_x : 0$$
$$\sum F_y : -A_y - B_y + P \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow A_y = \frac{2}{3}P$$
$$\sum M_z^A : aB_y - \frac{a}{3}P \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow B_y = \frac{1}{3}P$$

Beanspruchung von links einführen. Beachte, dass es im Stab eine Unstetigkeit hat → zwei Abschnitte!

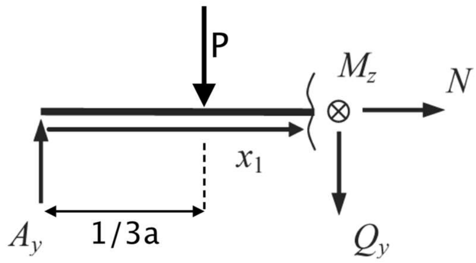
Abschnitt 1:

$$\sum F_x : N_1 \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow N_1 = 0$$
$$\sum F_y : Q_{y1} - A_y \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow Q_{y1} = \frac{2}{3}P$$
$$\sum M_z^x : M_{z1} + xA_y \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow M_{z1} = -\frac{2}{3}Px$$



Abschnitt 2:

$$\sum F_x : N_2 \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow N_2 = 0$$
$$\sum F_y : Q_{y2} - A_y + P \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow Q_{y2} = -\frac{1}{3}P$$
$$\sum M_z^x : M_{z2} + xA_y - (x - \frac{1}{3}a)P \stackrel{!}{=} 0$$
$$\rightarrow M_{z2} = -\frac{2}{3}Px$$

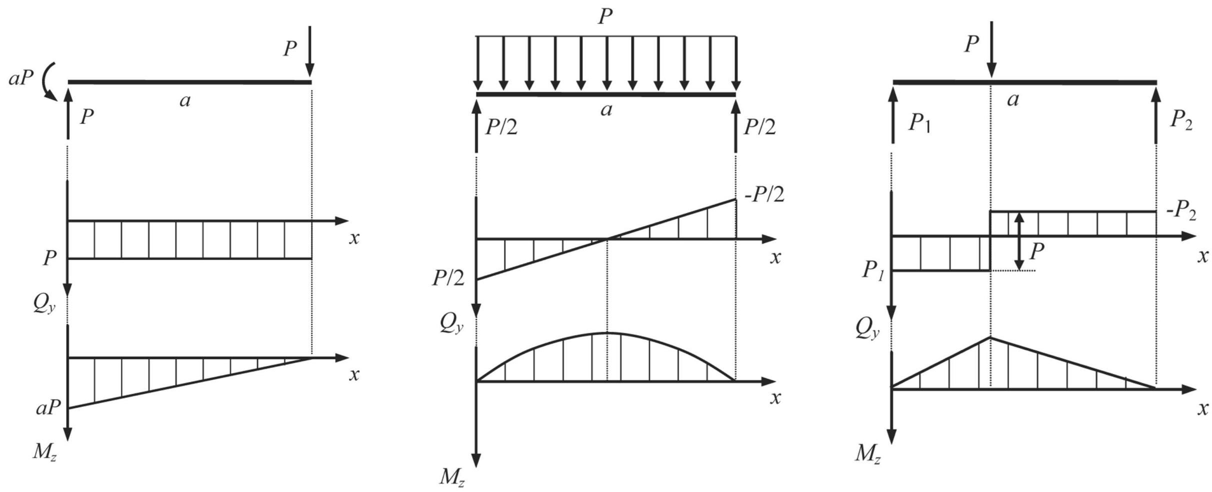


b) Differentialbeziehungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_{y1}}{\partial x} &= -q_{y1} = 0 \\
\frac{\partial M_{z1}}{\partial x} &= -Q_{y1} \qquad \rightarrow Q_{y1} = \frac{2}{3}P \\
\frac{\partial Q_{y2}}{\partial x} &= -q_{y2} = 0 \\
\frac{\partial M_{z2}}{\partial x} &= -Q_{y2} \qquad \rightarrow Q_{y2} = -\frac{1}{3}P
\end{aligned}$$

c) Querkraft- und Biegemomentenverlauf:

Wir plotten die Funktionen, welche wir aus der Beanspruchung erhalten haben. Beachte, dass die positive Richtung der Achsen nach unten zeigt - ist nur Konvention.



Aufgabe 2

Gegeben:

Geometrie

Lager

Belastungen

Gesucht:

a) Beanspruchung AB: N_1, Q_{y1}, M_{z1}

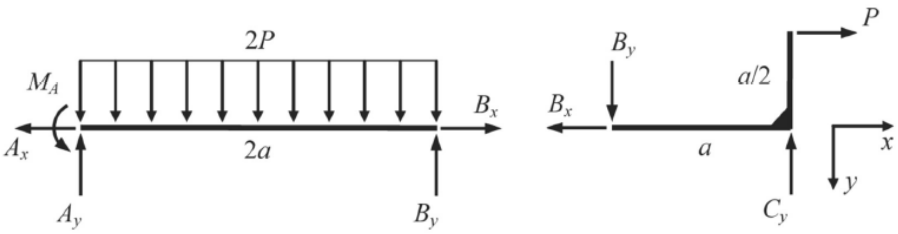
b) Beanspruchung BC: N_2, Q_{y2}, M_{z2}

c) $M_{z,max}$ und Verlauf Biegemomentes

d) Verifizierung der Differentialbez.

a) Lagerkräfte bestimmen und AB beanspruchen

- Systemtrennung, GGW $\Rightarrow$ Lagerkräfte



Stab AB

$$\sum F_x: \quad -A_x + B_x = 0$$
$$\sum F_y: \quad A_y + B_y - 2P = 0$$
$$\sum M_A: \quad M_A + 2aB_y - 2aP = 0$$

Stab BD

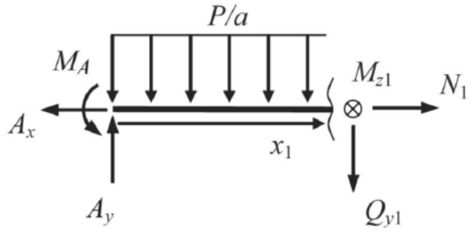
$$\sum F_x: \quad -B_x + P = 0$$
$$\sum F_y: \quad C_y - B_y = 0$$
$$\sum M_B: \quad aC_y - \frac{a}{2}P = 0$$

$$\Rightarrow \underline{A_x = P} \quad \underline{A_y = \frac{3}{2}P} \quad \underline{M_A = aP} \quad \underline{B_x = P} \quad \underline{B_y = \frac{P}{2}} \quad \underline{C_y = \frac{P}{2}}$$

- Verteilte Last Stab AB

$$q_1 = \frac{2P}{2a} = \frac{P}{a}$$

- Beanspruchungen Stab AB

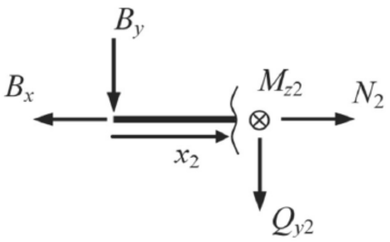


$$\sum F_x : \quad \underline{N_1(x_1) = A_x = P}$$
$$\sum F_y : \quad \underline{Q_{y1}(x_1) = A_y - \tfrac{P}{a}x_1 = \tfrac{3P}{2} - \tfrac{P}{a}x_1}$$
$$\sum M_{z1} : \quad M_{z1} - M_A + A_y x_1 - \tfrac{P}{a}x_1\tfrac{x_1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{M_{z1}(x_1) = aP - \frac{3P}{2}x_1 + \frac{P}{2a}x_1^2}$$

b) BC beanspruchen

- Beanspruchungen Stab BC



$$\sum F_x : \quad \underline{N_2(x_2) = B_x = P}$$
$$\sum F_y : \quad \underline{Q_{y2}(x_2) = -B_y = -\tfrac{P}{2}}$$
$$\sum M_{z1} : \quad M_{z2} - B_y x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{M_{z2}(x_2) = \frac{P}{2}x_2}$$

c) $M_{z,max}$ und Verlauf Biegemomentes

- Stab AB ⇒ Extrema

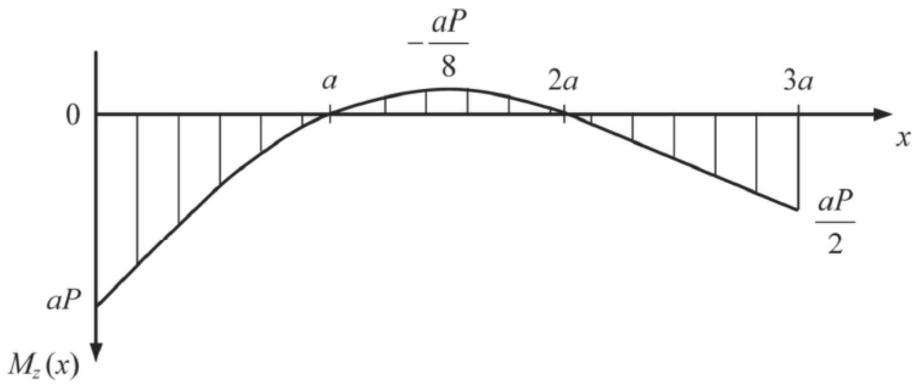
$$\frac{dM_{z1}}{dx_1} = -\frac{3P}{2} + \frac{P}{a}x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x1 = \frac{3a}{2}$$

$$M_{z1}(\tfrac{3a}{2}) = -\frac{aP}{8}$$

- Randwerte
  $x_1 = 0$: $M_{z1}(0) = aP$
  $x_1 = 2a$: $M_{z1}(2a) = 0$ (reibungsfreies Gelenk → OK)
  $x_2 = 0$: $M_{z2}(0) = M_{z1}(2a) = 0$
  $x_2 = a$: $M_{z2}(a) = \frac{aP}{2}$

  ⇒ $\underline{M_{Z_{max}} = aP}$ bei $x_1 = 0$ (Einspannung)

- Verlauf des Biegemomentes



c) Verifizierung der Differentialbeziehungen

$$\frac{\partial Q_{y1}}{\partial x} = -q_{y1} = -\frac{P}{a}$$
$$\frac{\partial M_{z1}}{\partial x} = -Q_{y1} = -\frac{3}{2}P + \frac{P}{a}x_1$$
$$\frac{\partial Q_{y2}}{\partial x} = -q_{y2} = 0$$
$$\frac{\partial M_{z2}}{\partial x} = -Q_{y2} = \frac{P}{2}$$