ETH

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Biomechanik I

für D-HEST

Musterlösung

Prof. Jess Snedeker — Schnellübung 10 — FS19

Aufgabe 1

Gegeben:

$F_1 = 40kN, \quad F_2 = 30kN$

$\sigma_{AB,max} = 175MPa, \quad \sigma_{BC,max} = 150MPa$

Gesucht:

a) kleinste Werte für d_1 & d_2

a)
Stab AB

Zuerst Lagerkräfte bestimmen wir den minimalen Durchmesser d_1. Hierfür betrachten wir den Stab AB

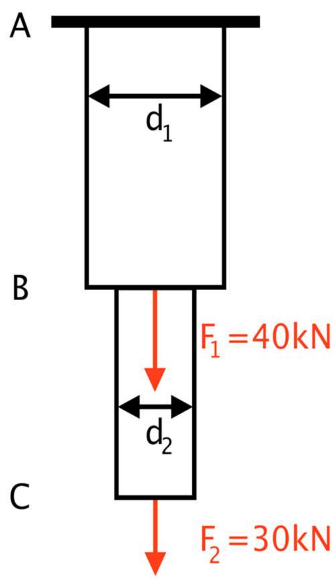
Normalkraft:

$$N_1 = 40kN + 30kN = 70kN$$

Normalspannung:

$$\sigma_{AB} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{N_1}{\pi(\frac{d_1}{2})^2} = \frac{4N_1}{\pi \cdot d_1^2}$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{4N_1}{\pi \cdot \sigma_{AB}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 70 \cdot 10^3 N}{\pi \cdot 175 \cdot 10^6 Pa}} = 22.6mm$$



Stab BC

Zuerst Lagerkräfte bestimmen wir den minimalen Durchmesser d_2. Hierfür betrachten wir den Stab BC

Normalkraft:

$$N_2 = 30kN$$

Normalspannung:

$$\sigma_{BC} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{N_2}{\pi(\frac{d_2}{2})^2} = \frac{4N_2}{\pi \cdot d_2^2}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4N_2}{\pi \cdot \sigma_{BC}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 30 \cdot 10^3 N}{\pi \cdot 150 \cdot 10^6 Pa}} = 16.0 \cdot 10^{-3} m = 16mm$$

Aufgabe 2

Gegeben:

Geometrie

$\sigma_N = 15MPa$

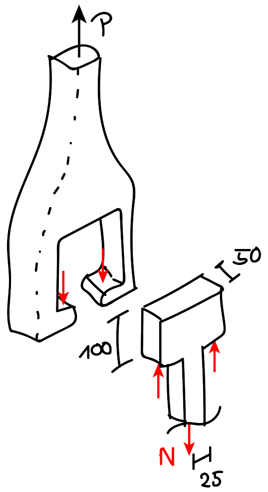
Gesucht:

a) axiale Kraft P

b) Scherspannung τ über den Querschnitt $a - a$

a)

Um die angreifende Kräfte am Holzstück zu berechnen, muss man zuerst das System trennen und eine Gleichgewichtsbedingung aufstellen (F_x & M_z sind trivial):



$$\sum F_y : P - S - S \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad S = \frac{P}{2}$$

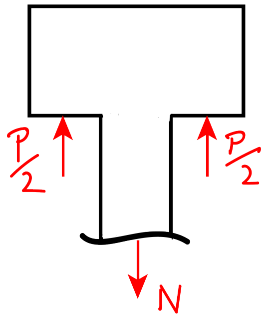
Für die Normalkraft im Querschnitt in der Mitte vom Holzstück stellen wir wieder ein Kräftegleichgewicht auf:

$$\sum F_y : \frac{P}{2} + \frac{P}{2} - N \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad N = P$$

Mithilfe der bekannten Normalspannung in diesem Querschnitt können wir nun die Kraft P berechnen:

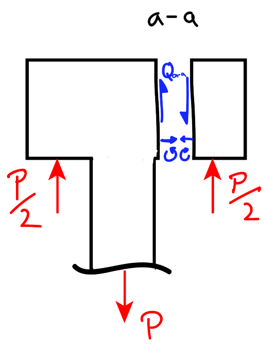
$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \rightarrow \quad N = \sigma \cdot A$$

$$P = 15\frac{N}{mm^2} \cdot 1250mm^2 = 18750N$$



b)

Zuerst finden wir die Querkraft welche in der Ebene $a - a$ entsteht. Diese bekommen wir durch freischneiden und Kräftegleichgewicht am rechten Element in y-Richtung (Normalkraft und Moment interessieren uns nicht):



$$\sum F_y : \frac{P}{2} - Q_{a-a} \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad Q_{a-a} = \frac{P}{2} = 9375N$$

Damit lässt sich nun die Scherspannung τ in diesem Querschnitt berechnen:

$$A_{a-a} = 50mm \cdot 100mm = 5000mm^2$$

$$\tau_{a-a} = \frac{Q_{a-a}}{A_{a-a}} = \frac{9375N}{5000mm^2} = 1.875\frac{N}{mm^2}$$

Aufgabe 3

Gegeben:

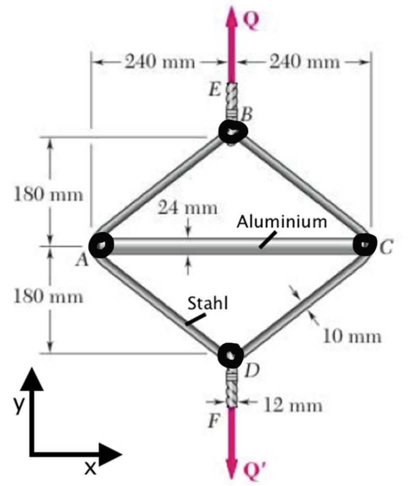
Geometrie und Material

$\sigma_{Stahl,max} = 480MPa$ & $\sigma_{Alu,max} = 260MPa$

Sicherheitsfaktor $SF = 3$

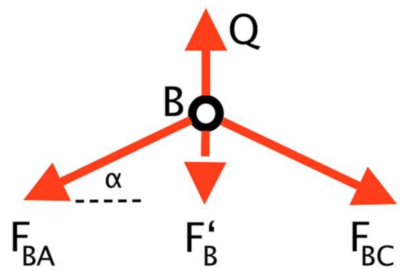
Gesucht:

a) maximal zulässige Last Q_{zul} (SF berücksichtigen)



a) Die Normalkraft in den einzelnen Elemente (Schlaufe, Draht und Stab) können am einfachsten über Knotengleichgewichte bestimmt werden. Hierzu werden die einzelnen 'Gelenke' freigeschnitten und alle an ihnen angreifenden Kräfte eingeführt.

Gelenk B



$$\sin\alpha = \frac{180}{\sqrt{180^2+240^2}} = \frac{3}{5}$$

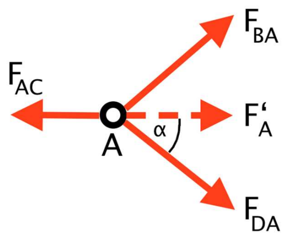
$$\sum F_x : \cos\alpha \cdot F_{BA} - \cos\alpha \cdot F_{BC} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow F_{BA} = F_{BC}$$

$$\sum F_y : Q - 2F'_B \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow Q = 2F'_B$$

$$\sum M_z^B : 0$$

$$\Rightarrow Q = 2F'_B = 2\sin\alpha \cdot F_{BA} = \frac{6}{5}F_{BA}$$

Gelenk A



$$\cos\alpha = \frac{240}{\sqrt{180^2+240^2}} = \frac{4}{5}$$

$$\sum F_x : \sin\alpha \cdot F_{BA} - \sin\alpha \cdot F_{DA} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow F_{BA} = F_{DA}$$

$$\sum F_y : 2F'_A - F_{AC} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \rightarrow F_{AC} = 2F'_A$$

$$\sum M_z^A : 0$$

$$\Rightarrow F_{AC} = 2F'_A = 2\cos\alpha \cdot F_{BA} = \frac{8}{5}F_{BA} = \frac{4}{3}Q$$

Maximal mögliche Kraft Q in jedem Element bestimmen

Schlaufe ABCD:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{6}{5} \cdot F_{BA} = \frac{6}{5}\sigma_{Stahl,max} \cdot A_{BA} = \frac{6}{5}\sigma_{Stahl,max} \cdot \frac{\pi}{4}d_{BA}^2 \\ &= \frac{6}{5}480 \cdot 10^6 Pa \cdot \frac{\pi}{4}(10 \cdot 10^{-3} m)^2 = 45.2kN \end{aligned}$$

Kabel BE:

$$\begin{aligned} Q &= \sigma_{Stahl,max} \cdot A_{BE} = \sigma_{Stahl,max}\frac{\pi}{4}d_{BE}^2 \\ &= 480 \cdot 10^6 Pa \cdot \frac{\pi}{4}(12 \cdot 10^{-3} m)^2 = 54.2kN \end{aligned}$$

Stab AC:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{3}{4} \cdot F_{AC} = \frac{3}{4}\sigma_{Alu,max} \cdot A_{AC} = \frac{3}{4}\sigma_{Alu,max}\frac{\pi}{4}d_{AC}^2 \\ &= \frac{3}{4}260 \cdot 10^6 Pa \cdot \frac{\pi}{4}(24 \cdot 10^{-3} m)^2 = 88.2kN \end{aligned}$$

Vergleicht man nun die einzelnen Stäbe (Fallunterscheidung) erkennt man, dass Schlaufe $ABCD$ am wenigsten Kraft standhalten kann. Daraus lässt sich die maximale zulässige Last Q_{zul} berechnen, inklusive Sicherheitsfaktor:

$$Q_{zul} = \frac{Q_{min}}{SF} = \frac{45.2kN}{3} = 15.1kN$$

Der Sicherheitsfaktor gibt an, um welchen Faktor die Versagensgrenze eines Bauteils höher ausgelegt werden soll, als es durch theoretische Ermittlung (hier: Statische Berechnung) sein müsste. In dieser Aufgabe limitieren wir die maximale Last, in der Industrie und Realität ist es entsprechend umgekehrt - man kennt die auftretende Lasten und versucht das Bauteil optimal zu dimensionieren.