Biomechanik I
für D-HEST

Musterlösung
Hausübung
Serie 11

Prof. Jess Snedeker

FS 2019

Aufgabe 1 (Beanspruchung)

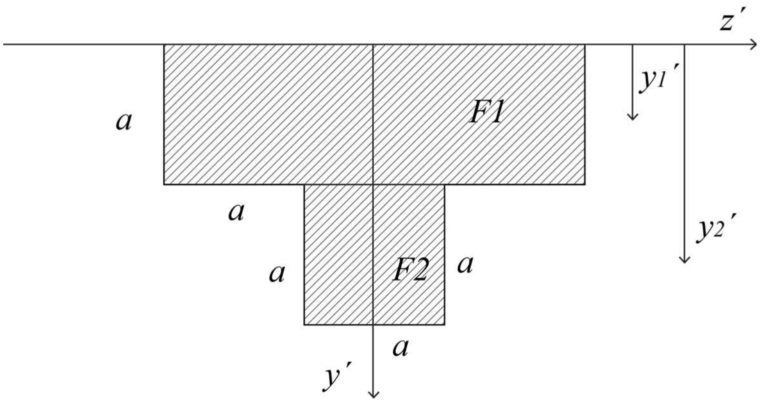
Gegeben:

- E, a, L, P, Geometrie

Gesucht:

a) Flächenträgheitsmoment I_z
b) Biegespannungsverlauf σ(x)
c) Ort und Betrag der maximalen Zug- und Druckspannung

a) Flächenträgheitsmoment I_z



I. Schwerpunkt bezüglich y‘, z‘

$$y's = \frac{F_1 \cdot y'_1 + F_2 \cdot y'_2}{F_T}$$

Mit:

$$F_1 = 3 \cdot a \cdot a = 3a^2$$
$$F_2 = a \cdot a = a^2$$
$$F_T = F_1 + F_2 = 4a^2$$
$$y'_1 = {}^1\!/_2\, a$$

$$y'_2 = a + {}^1\!/_2\, a = {}^3\!/_2\, a$$

Gibt:

$$y'_s = \frac{3a^2 \cdot \frac{1}{2}a + a^2 \cdot \frac{3}{2}a}{4a^2} = \frac{3}{4}a$$

Aus der Geometrie (Symmetrie!):

$$z'_s = 0$$

II. Trägheitsmomente um **z** an den einzelnen Flächen:

$$I_{z1} = \frac{3a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{4}$$

$$I_{z2} = \frac{a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{12}$$

III. Satz von Steiner:

$$I_z = I_{z1} + d_1^2 \cdot F_1 + I_{z2} + d_2^2 \cdot F_2$$

Mit d_i die Abstände vom Flächenschwerpunkt zum Querschnittsschwerpunkt

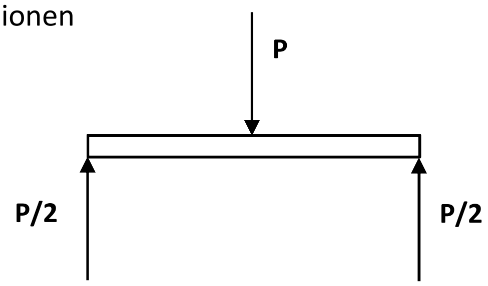
$$d_1 = \left|\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}a\right| = \frac{a}{4}$$
$$d_2 = \left|\frac{3}{2}a - \frac{3}{4}a\right| = \frac{3a}{4}$$

Trägheitsmoment um z:

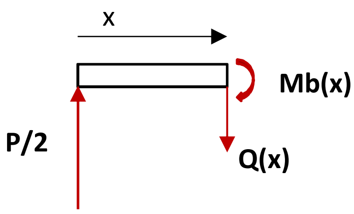
$$I_z = \frac{a^4}{4} + \frac{a^2}{16} \cdot 3a^2 + \frac{a^4}{12} + \frac{9a^2}{16} \cdot a^2 = \frac{13}{12}a^4$$

b) Spannungsverlauf

I. Auflagerreaktionen



II. Beanspruchung:



$$Q(x) = \frac{P}{2}$$

$$M_b(x) = -\frac{P}{2} \cdot x, x \leq \frac{L}{2}$$

III. Biegespannungsverlauf:

$$\sigma(x) = -\frac{M_b(x)}{I_z} \cdot y = \frac{P \cdot 12 \cdot x}{2 \cdot 13 \cdot a^4} \cdot y = \frac{6Px}{13a^4} \cdot y$$

c) Normalspannungen

I. Maximales Biegemoment bei $x = \frac{L}{2}$

$$M_{b_{max}} = -\frac{P \cdot L}{4}$$

Folglich:

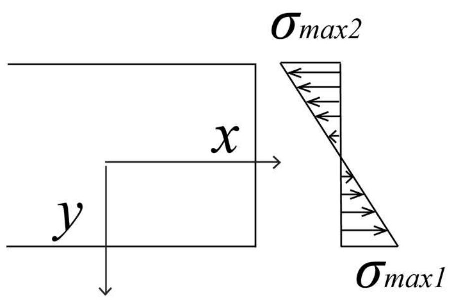
$$\sigma\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{3PL}{13a^4} \cdot y$$

Maximale Zugspannung bei $y = \frac{5}{4}a$:

$$\sigma_{max1} = \frac{15PL}{52a^3}$$

Maximale Zugspannung bei $y = -\frac{3}{4}a$:

$$\sigma_{max} = -\frac{9PL}{52a^3}$$

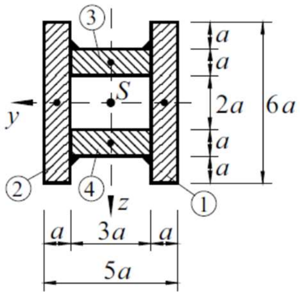


Aufgabe 2 (Trägheitsmomente)

a) Querschnitt I:

I. Trägheitsmoment I_y:

Da der Querschnitt zur y- und z- Achse Symmetrisch ist, sind y und z Schwerpunktachsen (siehe Bild).



Es gilt:

$$I_y = \sum_{i=1}^{4} I_{yi} + \sum_{i=1}^{4} A_i \cdot z_{si}^2$$

Mit:

I_{yi}: Flächenträgheitsmoment der Teilfläche i bezogen auf deren Schwerpunktachse yi

A_i: Flächeninhalt der Teilfläche i

z_{si}: Abstand zwischen den parallelen Schwerpunktachsen yi der Teilfläche i und y der Gesamtquerschnittsfläche

$A_i \cdot z_{si}^2$: Steiner- Anteil der Teilfläche i

Folgt:

$$I_y = 2\frac{a(6a)^3}{12} + 2\frac{3aa^3}{12} + 2 \cdot 3aa\left(\frac{3}{2}a\right)^2 = 36a^4 + \frac{a^4}{2} + \frac{27}{2}a^4 = \underline{50a^4}$$

Da die Scherpunkte der Teilflächen 1 und 2 auf der y-Achse des Gesamtschwerpunktes liegen, sind ihre Steiner-Anteile null.

II. Trägheitsmoment Iz:

Ähnlich wie im I:

$$I_z = \sum_{i=1}^{4} I_{zi} + \sum_{i=1}^{4} A_i \cdot y_{si}^2$$

Mit:

y_{si}: Abstand zwischen den parallelen Achsen zi und z

Folgt:

$$I_z = 2\frac{a(3a)^3}{12} + 2\frac{6aa^3}{12} + 2 \cdot 6aa(2a)^2 = \frac{9a^4}{2} + a^4 + 48a^4 = \underline{53.5a^4}$$

Da die Scherpunkte der Teilflächen 1 und 2 auf der y-Achse des Gesamtschwerpunktes liegen, sind ihre Steiner-Anteile null.

b) Querschnitt II:

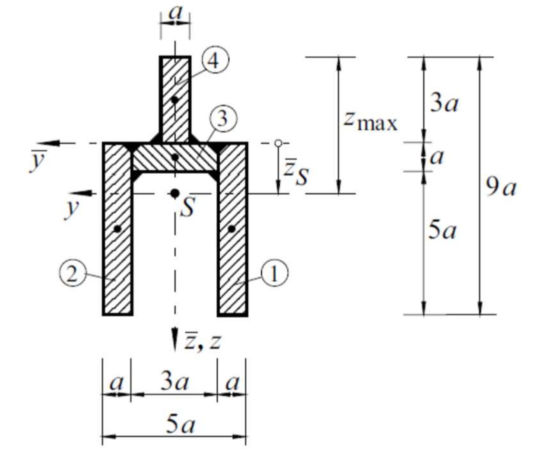
Lösungsweg analog zu Querschnitt I, aber mit anderem Abstand zi:

$$I_y = 2\frac{a(6a)^3}{12} + 2\frac{3aa^3}{12} + 2 \cdot 3aa\left(\frac{5}{2}a\right)^2 = 36a^4 + \frac{a^4}{2} + \frac{75}{2}a^4 = \underline{74a^4}$$

$$I_z = 2\frac{a(3a)^3}{12} + 2\frac{6aa^3}{12} + 2 \cdot 6aa(2a)^2 = \frac{9a^4}{2} + a^4 + 48a^4 = \underline{53.5a^4}$$

c) Querschnitt III:

Der Querschnitt ist nur zur z-Achse symmetrisch. Zur Berechnung wird der Querschnitt in Teilflächen zerlegt und ein Bezugskoordinatensystem $\overline{y}, \overline{z}$ eingeführt (siehe Bild):



Lage des Schwerpunkts:

$$\overline{z_s} \cdot A = \sum_{i=1}^{4} \overline{z_{si}} \cdot A_i$$

$$\overline{z_s} = \frac{2 \cdot 3a6a^2 + \frac{a}{2}3a^2 + \left(-\frac{3}{2}a\right)3a^2}{18a^2} = \frac{33}{18}a = \underline{1{,}8\overline{3}a}$$

Also:

$$I_y = \sum_{i=1}^{4} I_{yi} + \sum_{i=1}^{4} A_i \cdot z_{si}^2$$

Mit:

$\overline{z_{si}}$: Abstand der Schwerpunktachse yi der Teilfläche i zur Bezugsachse $\overline{y}$

$\overline{z_s}$: Abstand der Scherpunktachse y zur Bezugsachse $\overline{y}$

$(\overline{z_{si}} - \overline{z_s})$: Abstand zwischen Achsen yi und y

$$I_y = 2\left(\frac{a(6a)^3}{12} + 6aa(3a - 1{,}8\overline{3}a)^2\right)$$ Teilfläche 1 und 2

$$+ \frac{3aa^3}{12} + 3aa\left(\frac{a}{2} - 1{,}8\overline{3}a\right)^2$$ Teilfläche 3

$$+ \frac{a(3a)^3}{12} + 3aa\left(-\frac{3}{2}a - 1{,}8\overline{3}a\right)^2$$ Teilfläche 4

$$\underline{I_y = 93{,}5a^4}$$

$$I_z = 2\frac{6aa^3}{12} + 26aa(2a)^2 + \frac{a(3a)^3}{12} + \frac{3aa^3}{12} = \underline{51.5a^4}$$

Aufgabe 3 (Beanspruchung)

I. Trägheitsmoment I

Da der Träger quadratisch ist, gilt: $I_z = I_y = I$.

$$I = \frac{a \cdot a^3}{12} = 1.\overline{3} \cdot 10^{-4}\, m^2$$

Fläche:

$$A = a^2 = 0.04\, m$$

Oberfläche:

$$y_{max} = 0.1\, m$$

II. Zusammengesetzte Beanspruchung

Damit nur Zugkräfte auftreten, soll gelten:

$$\sigma(x) > 0 \;\; \vee x$$

Mit der Formel für die Beanspruchung:

$$\sigma(x) = -\frac{M_b \cdot y_{max}}{I} + \frac{N}{A} > 0$$

Folgt:

$$\frac{N}{A} > \frac{M_b \cdot y_{max}}{I}$$

$$N > \frac{M_b \cdot y_{max}}{I} \cdot A$$

$$N > M_b \frac{a^2 \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a^4}{12}} = M_b \cdot \frac{6}{a}$$

Numerisch:

$$N > \frac{60\, Nm}{0.2\, m} = 300\, N$$