Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Biomechanik I

für D-HEST

Musterlösung

Prof. Jess Snedeker Schnellübung 11 FS19

Aufgabe 1

Gegeben:

Geometrie

Bruchlast $\sigma_{max} = 450MPa$

Sicherheitsfaktor $SF = 3$

Gesucht:

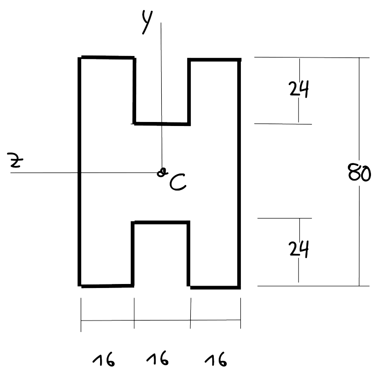
1.1) $M_{z,max}$

1.2) $M_{y,max}$

1.1

Maximale, zulässige Normalspannung infolge Biegung:

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{max}}{SF} = \frac{450MPa}{3} = 150MPa$$



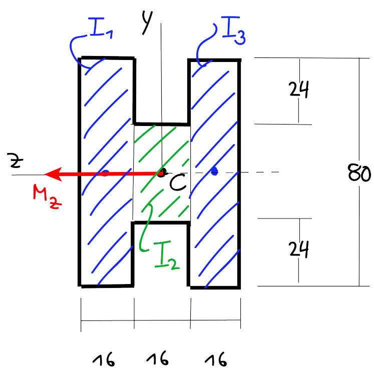
Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse:

$$I_1 = \frac{1}{12}(16mm)(80mm)^3 = 682.67 \cdot 10^3 mm^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12}(16mm)(32mm)^3 = 43.69 \cdot 10^3 mm^4$$

$$I_3 = I_1 = 682.67 \cdot 10^3 mm^4$$

$$\rightarrow I_z = I_1 + I_2 + I_3 = 1.409 \cdot 10^6 mm^4 = 1.409 \cdot 10^{-6} m^4$$



Berechnung der Normalspannung infolge Biegung:

$$\sigma_{zul} = \frac{M_z \cdot (\Delta y)}{I_z}$$

Mit dem maximalen Abstand zur Neutralachse (spannungsfreie Achse) - hier y-Achse:

$$\Delta y_{max} = \frac{1}{2} 80mm = 40mm = 0.04m$$

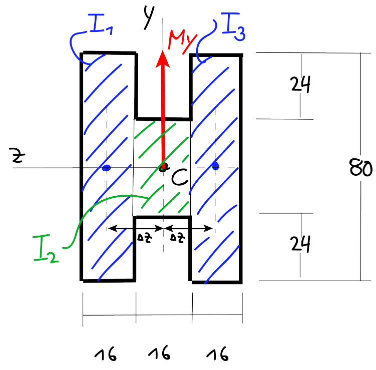
Damit können wir das maximale Biegemoment berechnen:

$$M_{z,max} = \frac{I_z \cdot \sigma_{zul}}{\Delta y_{max}} = \frac{(1.409 \cdot 10^{-6} m^4)(150 \cdot 10^6 Pa)}{0.040m} = 5.28 \cdot 10^3 Nm$$

1.2

Trägheitsmoment bezüglich der y-Achse:

$$I_1 = \frac{1}{12}(80mm)(16mm)^3 + (80mm)(16mm)(16mm)^2 = 354.987 \cdot 10^3 mm^4$$
$$I_2 = \frac{1}{12}(32mm)(16mm)^3 = 10.923 \cdot 10^3 mm^4$$
$$I_3 = I_1 = 354.987 \cdot 10^3 mm^4$$
$$\rightarrow I_y = I_1 + I_2 + I_3 = 720.9 \cdot 10^3 mm^4 = 720.9 \cdot 10^{-9} m^4$$



Berechnung der Normalspannung infolge Biegung:

$$\sigma_{zul} = \frac{M_y \cdot (\Delta z)}{I_y}$$

Mit dem maximalen Abstand zur Neutralachse (spannungsfreie Achse) - hier y-Achse:

$$\Delta z_{max} = \frac{1}{2} 48mm = 24mm = 0.024m$$

Damit können wir das maximale Biegemoment berechnen:

$$M_{y,max} = \frac{I_y \cdot \sigma_{zul}}{\Delta z_{max}} = \frac{(720.9 \cdot 10^{-9} m^4)(150 \cdot 10^6 Pa)}{0.024m} = 4.51 \cdot 10^3 Nm$$

Aufgabe 2

Gegeben:

Geometrie

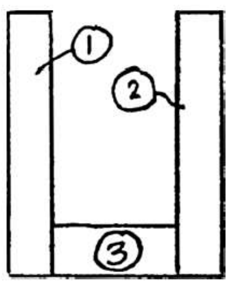
Kräfte

Gesucht:

$\sigma_{max,zug}$ in Abschnitt $B-C$

$\sigma_{max,druck}$ in Abschnitt $B-C$

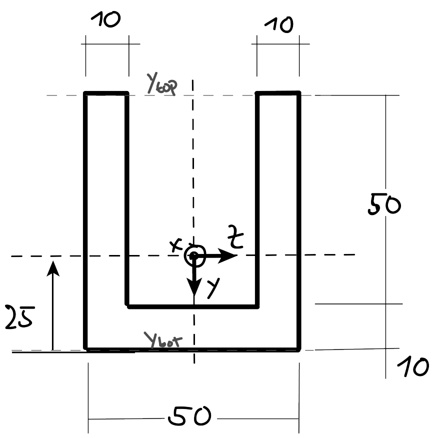
Zuerst die Neutralachsen bestimmen:



	A, mm^2	$\overline{y}_0$, mm	$A\overline{y}_0$, mm^3
①	600	30	18×10^3
②	600	30	18×10^3
③	300	5	1.5×10^3
	1500		37.5×10^3

$$\bar{y}_0 = \frac{37.5 \cdot 10^3}{1500} = 25mm$$

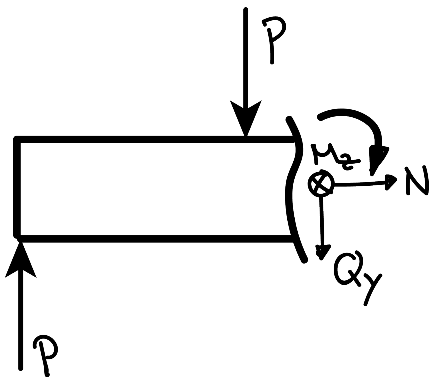
Die Neutralachsen liegen $25mm$ oberhalb der unteren Kante. Wir können dann das Trägheitsmoment und daraus resultierend die Spannungen berechnen:



$$I_1 = \frac{1}{12}(10)(60)^3 + (600)(5)^2 = 195 \cdot 10^3 mm^4$$
$$I_2 = I_1 = 195 \cdot 10^3 mm^4$$
$$I_3 = \frac{1}{12}(30)(10)^3 + (300)(20)^2 = 122.5 \cdot 10^3 mm^4$$
$$\rightarrow I_z = I_1 + I_2 + I_3 = 512.5 \cdot 10^3 mm^4 = 512.5 \cdot 10^{-9} m^4$$

Maximale Abstände von der Biege-/Neutralachse:

$$\Delta y_{top,max} = -35mm = -0.035m,$$
$$\Delta y_{bot,max} = 25mm = 0.025m$$



M_z finden mit Beanspruchung zwischen Punkt B und C:

$$M_z = -P(x + 150mm) + Px = -P(150mm)$$
$$\Rightarrow M_{z,max} = -10kN \cdot 150mm = -1.5 \cdot 10^3 Nm$$

$$\sigma_{top,max} = -\frac{M_{z,max} \cdot (\Delta y_{top,max})}{I_z} = -\frac{(-1.5 \cdot 10^3)(-0.035)}{512.5 \cdot 10^{-9}} = -102.4MPa \Rightarrow \sigma_{max,druck}$$
$$\sigma_{bot,max} = -\frac{M_{z,max} \cdot (\Delta y_{bot,max})}{I_z} = -\frac{(-1.5 \cdot 10^3)(0.025)}{512.5 \cdot 10^{-9}} = 73.2MPa \Rightarrow \sigma_{max,zug}$$

Bei der oberen Kante befinden sich die maximalen Druckkräfte, da $\sigma_{top} < 0$. Die maximale Zugspannungen treten an der unteren Kante auf, da $\sigma_{bot} > 0$. Das ist bei dieser Aufgabe der Fall, da die x-Achse aus dem Blatt herauskommt (Rechtssystem beachten!). Negative Spannungen heissen nur immer Druckspannungen, wenn man die Konvention befolgt (Zug äquivalent).

Aufgabe 3

Gegeben:

Geometrie

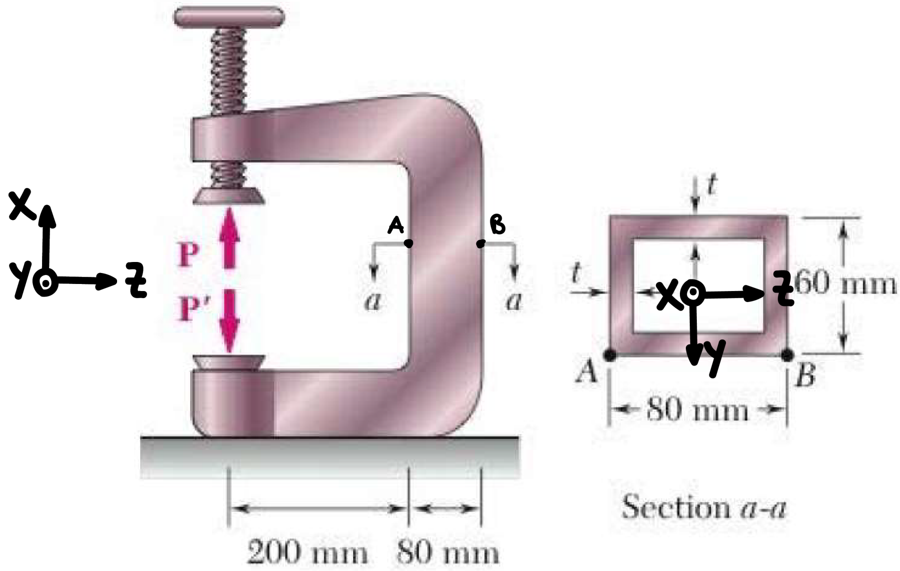
$P = 20kN$

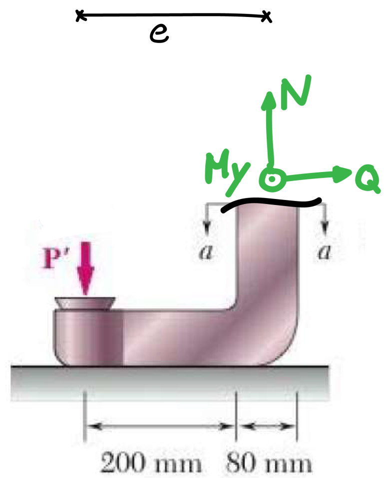
Gesucht:

a) σ_A in Punkt A

b) σ_B in Punkt B

Zuerst die Koordinaten nach Konvention einführen:





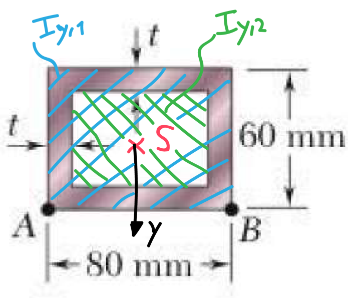
Wir führen eine Beanspruchung im gesuchten Querschnitt $a-a$ ein. Wichtig: Die Normalkraft N zeigt hier in die gleiche Richtung wie x, also ist das ein positives Schnittufer und deshalb zeigen die Reaktionskräfte (Q, M_y) in die positive Richtung:

$$\sum F_x : N - P' \overset{!}{=} 0 \qquad \rightarrow N = P' = P = 20kN$$

$$\sum F_y : Q = 0$$

$$\sum M_z^{a-a} : M_y + P' \cdot e \overset{!}{=} 0 \qquad \rightarrow M_y = -Pe = -4.8 \cdot 10^3 Nm$$

Um nachher die Biegespannungen zu berechenen, müssen wir zuerst das FTM in y-Richtung bestimmen, weil ein Moment in y-Richtung auftritt:



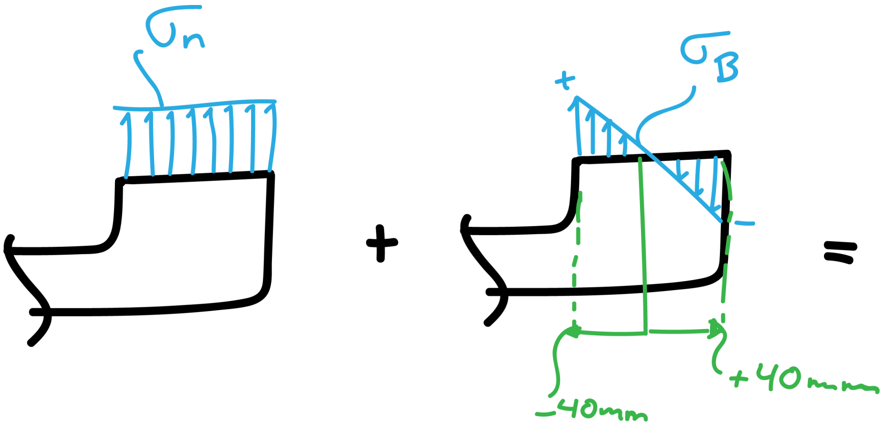
$$I_{y,1} = \frac{1}{12}(60)(80)^3 = 2560 \cdot 10^3 mm^4$$

$$I_{y,2} = \frac{1}{12}(44)(64)^3 = 961 \cdot 10^3 mm^4$$

$$\rightarrow I_y = I_{y,1} - I_{y,2} = 1.598 \cdot 10^6 mm^4$$

$$A = A_1 - A_2 = 1.984 \cdot 10^3 mm^2$$

Dabei hat man hier das kleinere Rechteck vom grösseren subtrahiert und bekommt so das FTM und Fläche vom Profil.



Bevor wir die Biegespannung mit $\sigma_B = \frac{M_y \cdot (z)}{I_y}$ berechnen müssen wir in diesem Bauteil noch die Normalspannung $\sigma_N = \frac{N}{A}$ berücksichtigen. Bei Spannungen gilt auch wieder das Superpositionsprinzip:

$$\sigma_A = \frac{P}{A} + \frac{M_y \cdot (z)}{I_y} = \frac{20 \cdot 10^3 N}{1.984 \cdot 10^3 mm^2} + \frac{-4.8 \cdot 10^6 Nmm \cdot (-40mm)}{1.598 \cdot 10^6 mm^4}$$
$$= \frac{20}{1.984} MPa + \frac{-4.8 \cdot 10^3 N \cdot (-40)}{1.598} MPa = \mathbf{130.2MPa}$$

$$\sigma_B = \frac{P}{A} + \frac{M_y \cdot (z)}{I_y} = \frac{20 \cdot 10^3 N}{1.984 \cdot 10^3 mm^2} + \frac{-4.8 \cdot 10^6 Nmm \cdot (40mm)}{1.598 \cdot 10^6 mm^4}$$
$$= \frac{20}{1.984} MPa + \frac{-4.8 \cdot 10^3 N \cdot (-40)}{1.598} MPa = -\mathbf{110MPa}$$