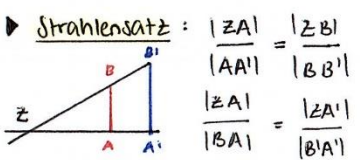


# MBMI

Ellie Galliker

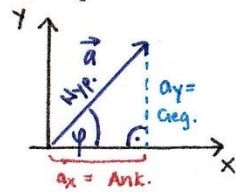
## Allg.

### Standardwinkel:



DEG	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°
RAD	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$\pi$
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	-1
tan	0	$1/3 = \sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm \infty$	$-\sqrt{3}$	0

### Pythagoras:



$\cos(\varphi) = \frac{ax}{a} = \frac{\text{Ank.}}{\text{Hyp.}}$   
 $\sin(\varphi) = \frac{ay}{a} = \frac{\text{Geg.}}{\text{Hyp.}}$   
 $\frac{\text{Geg.}}{\text{Ank.}} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi)$

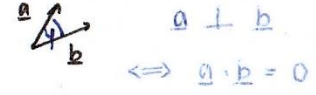
### Skalarprodukt: → Skalar

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos(\varphi)$

### ⇒ Projektion:

$\underline{a}' = \underline{a} \cdot \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}$



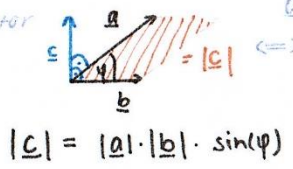
Größe der Komponente  $\underline{a}$  in Richtung  $\underline{b}$

### Vektor normieren:

$\underline{e}_a = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$   $\underline{e}_a = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

### Kreuzprodukt: → Vektor

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$



$|\underline{c}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin(\varphi)$

### Standard-Schwerpunkte:

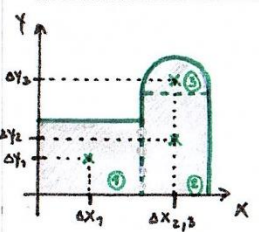
Rechteck:  $x_s = b/2$   $y_s = a/2$

Dreieck (rechtw.):  $x_s = 1/3 b$   $y_s = 1/3 a$

Dreieck (gleichseitig):  $x_s = 1/2 a$   $y_s = 1/3 h$

Halbkreis:  $x_s = r$   $y_s = 4r/3\pi$

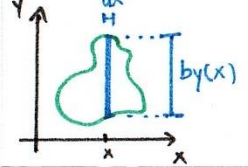
### Resultierender Schwerpunkt



$x_s = \frac{\sum \Delta x_i \cdot A_i}{\sum A_i}$   
 $y_s = \frac{\sum \Delta y_i \cdot A_i}{\sum A_i}$

- 1.) Standardformen erkennen (abtrennen)
- 2.) Formel anwenden

ansonsten:

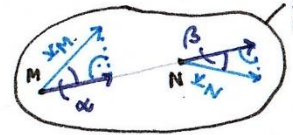


$x_s = \frac{\int x dF}{\int dF}$  mit  $dF = b(x) dx$   
 $y_s = \text{analog}$  (gilt bei konstanter Dichte)

### Kinematik

**Kinematik:** Allg. Bewegungszustand eines starren Körpers geg. an einem Punkt  $\{v_B; \omega\}$

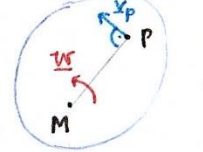
### Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdPG):



$\underline{v}_M' = \underline{v}_N'$   
 $\underline{v}_M \cdot \underline{MN} = \underline{v}_N \cdot \underline{MN}$

$|\underline{v}_M| \cdot \cos(\alpha) = |\underline{v}_N| \cdot \cos(\beta)$

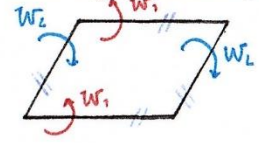
### Satz vom Momentanzentrum: (2D)



$\underline{v}_P = \underline{\omega} \times \underline{MP}$

$|\underline{v}_P| = |\underline{\omega}| \cdot |\underline{MP}|$  (wenn  $\underline{\omega} \perp \underline{MP}$ )

### Parallelogramm-Regel:



- parallele Stäbe haben gleiche Rotationsgeschw.  $\omega$
- zwei anliegende Stäbe rot. immer entgegengesetzt
- kein starrer Körper → dh. mehrere Momentanzentren

### allg. Starrkörperformel:

$\underline{v}_P = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{AP}$

↳ wenn P und A auf demselben Starrkörper liegen (d.h. Distanz zwischen P und A:  $PA = \text{konstant}$ )

### Spezialfälle

- Translation:  $\omega = 0$  - Rotation:  $\omega \neq 0$  - Schraubung:  $\omega \neq 0$

$\underline{W} = 0$

$\underline{W} \neq 0$

$\underline{v}_P \cdot \underline{W} = 0$

$I_1 = \underline{W}$   $I_2 = \underline{v}_P \cdot \underline{W}$

aut ganzem Körper konstant

### Kreiselung:

$\underline{v}_P = \underline{W} \times \underline{r}_{OP}$

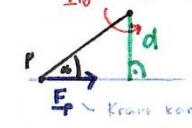
### Kräfte und Momente

#### Resultierende einer Kräftegruppe:

$\underline{R} = \sum \underline{F}_i$

#### Durch Kraft induziertes Moment:

$\underline{M}_O = \underline{OP} \times \underline{F}_P$   
 $\underline{M}_O = |\underline{OP}| \cdot |\underline{F}_P| \cdot \sin(\alpha)$   
 $= \text{Kraft} \cdot \text{Abstand} \perp = F \cdot d$



#### Resultierendes Moment:

$\underline{M}_O = \sum \underline{OP}_i \times \underline{F}_i + \sum \underline{M}_j$  frei

Δ Moment abhängig vom Bezugspunkt

#### Verschiebung eines Moments:

(wenn result. Moment 0 ist konstant)

$\underline{M}_P = \underline{M}_O + \underline{PO} \times \underline{R} \iff \underline{M}_P = \underline{M}_O + \underline{R} \times \underline{OP}$

#### Dynamik:

Kräftegruppe wird charakterisiert durch result. Moment und 'Resultierende'  $\{\underline{R}; \underline{M}_O\}$  bezüglich Punkt O

#### Äquivalent:

Eine Kräftegruppe ist statisch äquivalent zu:

- einem Nullsystem, falls:  $\underline{R} = 0$  u.  $\underline{M}_O = 0$
- einem Moment / Kräftepaar:  $\underline{R} = 0$  u.  $\underline{M}_O \neq 0$
- einer Einzelkraft, falls:  $\underline{R} \neq 0$  u.  $\underline{R} \cdot \underline{M}_O = 0$
- einer Schraube, falls:  $\underline{R} \cdot \underline{M}_O \neq 0$  u.  $\underline{R} \neq 0$
- einer anderen Kräftegruppe, falls ihre Resultierende  $\underline{R}$  und ihr Moment bez. eines beliebigen Punktes P gleich sind.

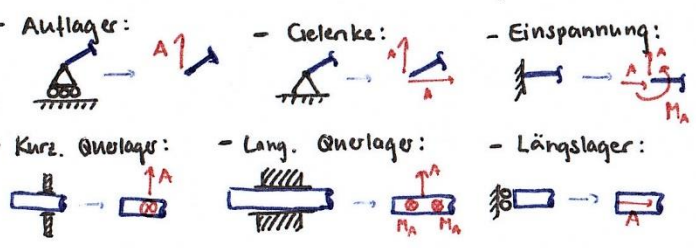
#### Invarianten der Dynamik:

$I_1 = \underline{R}$   $I_2 = \underline{R} \cdot \underline{M}_P = \underline{R} \cdot \underline{M}_A$

#### Reduktion auf Einzelkraft:

- Reduktion der Kräftegruppe auf Einzelkraft  $\underline{R}$  nur möglich, wenn  $I_2 = \underline{R} \cdot \underline{M}_P = 0$
- in 2D immer möglich, da  $\underline{M}_P \perp \underline{R}$
- in 3D nur bei (\*) möglich
- wenn  $\underline{R} = 0 \implies$  Reduktion auf Einheitsmoment

**Lagerkräfte:**



**Verteilte Lasten:**

Verteilte Last darf auf Einzelkraft reduziert werden, solange der Starrkörper, an welchem sie angreift, als Ganzes betrachtet wird. Angriffspunkt ( $x_s$ )

$$x_s = \frac{\int_0^L x \cdot s(x) dx}{\int_0^L s(x) dx} = \frac{M_0}{R}$$

- Gleichförmige Kräfteverteilung:

$$s(x) = s_0 \quad x_s = L/2 \quad |R| = L \cdot s_0$$

- Dreiecksverteilung:

$$s(x) = \frac{x}{L} s_0 \quad x_s = \frac{2L}{3} \quad |R| = \frac{L \cdot s_0}{2}$$

**Leistung:**

- Leistung einer Kraft:

$$P_i = F_i \cdot v_i = |F_i| \cdot |v_i| \cdot \cos(\alpha)$$

- Leistung eines (freien) Momentes:

$$P_j = W_j \cdot \dot{M}_{j, frei}$$

- Gesamtleistung (einer Kräftegruppe):

$$P_{tot} = \sum_i F_i \cdot v_i + \sum_j W_j \cdot \dot{M}_{j, frei}$$

- Leistung über B u. beliebigem Punkt B:

$$P = v_B \cdot R + W \cdot \dot{M}_B$$

**Statik**

**Hauptsatz der Statik:**

- 2D:  $\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum M_p = 0$
- 3D:  $\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum F_z = 0$   
 $\sum M_x = 0; \sum M_y = 0; \sum M_z = 0$

**Fachwerke**

- Jeder Starrkörper hat ein eigenes Momentanzentrum
- Ein fixes Gelenk ist immer ein Momentanzentrum
- SdpG nicht Starrkörperübergreifend verwenden

**Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL):**

**Verwendung:** Bestimmung einer Stabkraft

**Vorgehen:**

- Stab entfernen, Stabkraft einführen (i.d.R. als Zugkraft)
- Alle Starrkörper identifizieren
- Zulässige virtuelle Bewegung einführen (dabei Lager betrachten!)
- Geschwindigkeiten an Knoten an welchen Kräfte wirken und Winkelgeschw. dort wo Momente wirken bestimmen
- Virtuelle Leistung berechnen und null setzen:

$$P_{virt.} = \sum F_i \cdot v_i + \sum W_j \cdot \dot{M}_{j, frei} \stackrel{!}{=} 0$$

- nach Stabkraft auflösen

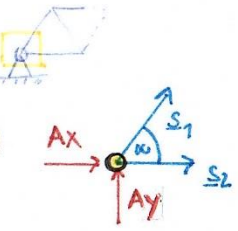
- **Bem.** Bei skalarer Berechnung muss nur der Anteil der Geschw. in Richtung der Kraft berücksichtigt werden.

- Vorgang für jeden Stab einzeln wiederholen!

**Knotengleichgewicht:**

- Lagerkräfte bestimmen
- Gleichgewichtsbedingung an Knoten aufstellen

x: ...  
y: ...



$$A_x + A_y + S_1 + S_2 = 0$$

- **Bem.** Symmetrie beachten!

**Pendelstütze** = Stab, der an beiden Enden gelenkig gelagert ist, wobei sonst (abgesehen von den Lagerkräften) keine Kräfte angreifen

→ Stab kann nur gezogen oder gedrückt werden



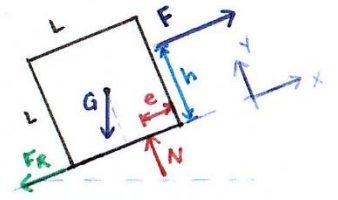
**Reibung**

- Reibungskräfte der Bewegung entgegen einführen
- Objekte freischnitten
- Normalkraft mit unbekanntem Abstand e einf.
- Gleichgewichtsbedingungen aufstellen
- (- Evtl. Reibungsbed. durch andere Kräfte ausdrücken)
- Kippbedingung: wenn Normalkraft ausschhalb des Körpers → Kippen (bezügl. e aufstellen)

Tipps: e so wählen dass es kein Reibungsbedingung voraussetzt! (Nützt: wenn bereits Verschiebung möglich → Körper inkl.)

**Haftreibung:**

$$|F_R| \leq \mu_0 \cdot |N|$$



**Gleitreibung:**

$$|F_R| = \mu_1 \cdot |N|$$

**Kippbed.** (hier):  $e \leq 0$

**Zusatz: Zug- und Druckstab:**

- Druckkraft: Kraft zeigt zum Körper:  $S < 0$
- Zugkraft: Kraft zeigt von Körper weg:  $S > 0$

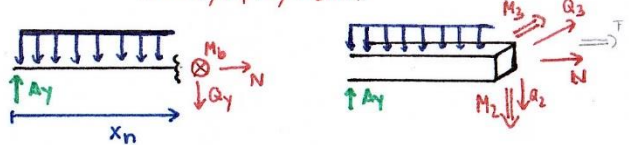
**Zusatz: Seile / Seilkraft:**

- Seile können keine Druckkräfte aufn.!
- Können umgelenkt werden über Rolle

# Beanspruchung

## Vorgehen:

- 1.) Frähscheiden
- 2.) Lagerkräfte bestimmen
- 3.) Stab in Bereiche aufteilen (Bei äusseren Kräften, Gelenken/Lagern, Querschnittsänderungen)
- 4.) Stab schneiden → Schnittkräfte einf. ( $N, Q_y, M_b$ )
- 5.) Laufvariable (meist  $x_n$ ) einführen
- 6.) Schnittkräfte als Funktionen der Laufvariable bestimmen ( $N(x_n), Q_y(x), M_b(x)$ )

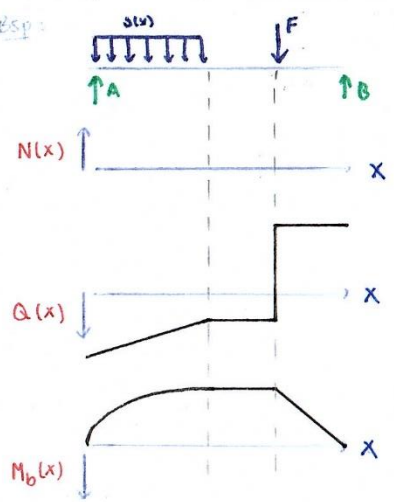


- $N$  = Normalkraft ( $N > 0$ : Zug,  $N < 0$ : Druck)
- $Q$  = Querkraft (3D: Kräfte) → Schub
- $M$  = Biegemoment
- $T$  = Torsion (nicht Prüfungsrelevant)

## Bemerkungen:

- Bei Bestimmung der Lagerkräfte können verteilte Lasten auf eine Kraft reduziert werden
- Beim Bestimmen der Schnittkräfte dürfen verteilte Lasten erst nach dem Schnitt reduziert werden
- Beachte Konsistenz der Laufvariablen

## Beanspruchungsdiagramme:



Funktionen der Schnittkräfte in Abhängigkeit von  $x$  in jeweils einzelnes Koordinatensystem aufzeichnen

hier:  $N=0 \rightarrow \text{const.}$

- $1 \text{ m}^4 = 1 \cdot 10^{12} \text{ mm}^4$
- $1 \text{ m}^2 = 1 \cdot 10^6 \text{ mm}^2$
- $1 \text{ m}^2 = 1 \cdot 10^4 \text{ cm}^2$

# Differentielle Beziehungen: (2D)

Anwendung: Überprüfung der berechneten Beanspruchung

$$\frac{dM_z}{dx} = -Q_y \quad \frac{dQ_y}{dx} = -q_y$$

$\leftarrow M_z$                        $\leftarrow Q_y$

$=$  verteilte Kraft in  $y$ -Richtung

⇒ gilt für geraden Stab

## Spannung

### Normalspannung:

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A}$$

$N(x)$  - Normalkraft (aus Beanspruchung)  
 $A$  - Querschnittsfläche

### Scherspannung:

$$\tau_x(x) = \frac{Q_z(x)}{A}$$

$Q_z(x)$  - Querkraft (aus Beanspruchung)

Ausrechnen Kraft mit gegebenem Gewicht:  
 $x \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \gamma \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$

## Einheiten:

Name	Bez.	Einheit
Kraft	F	$\text{N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$
Moment	M	$1 \text{ Nm} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$
Linienvert. Kraft	q	$1 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$
Geschwindigkeit	v	$1 \frac{\text{m}}{\text{s}} =$
Rotationsgeschw.	W	$1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
Arbeit	W	$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$
Leistung	P	$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3}$
Spannung	$\sigma$	$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}$
Flächenträgheitsm.	I	$1 \text{ m}^4$

- $10^1 =$  (Deka-) da
- $10^2 =$  (Hekto-) H
- $10^3 =$  (Kilo-) k
- $10^6 =$  (Mega-) M
- $10^9 =$  (Giga-) G
- $10^{-1} =$  (deci-) d
- $10^{-2} =$  (centi-) c
- $10^{-3} =$  (milli-) m
- $10^{-6} =$  (mikro-)  $\mu$
- $10^{-9} =$  (nano-) n

# Flächenträgheitsmoment

Widerstand eines Balkens gegen Biegung  
 → von Geometrie des Querschnitts abhängig  
 → je grösser Flächenträgheitsmoment, desto kleiner die Biegung des Balkens und entstehende innere Spannungen  
 → Bezieht sich auf bestimmte Achse

$$I_z = \iint y^2 dA \quad I_y = \iint z^2 dA$$

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} = I_y + I_z$$

## Verschiebungssatz (Satz von Steiner):

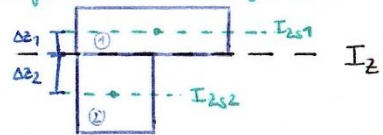
Für Berechnungen bezügl. beliebiger Achse ausgehend von Flächenträgheitsmoment bezüglich der Achse durch den Schwerpunkt

$$I_y' = I_{ys} + (\Delta z)^2 \cdot A$$

$$I_z' = I_{zs} + (\Delta y)^2 \cdot A$$

• Abstände der jeweiligen zwei Achsen  
• Querschnittsfläche

## Trägheitsmomente bezügl. Achse durch Schwerpunkt



## Standard-Flächenträgheitsmomente:

- **Rechteck**  
 $I_{ys} = \frac{a^3 \cdot b}{12}$   
 $I_{zs} = \frac{a \cdot b^3}{12}$
- **Dreieck**  
 $I_{ys} = \frac{a^3 \cdot b}{36}$   
 $I_{zs} = \frac{a \cdot b^3}{36}$

- **Kreis**  
 $I_{ys} = I_{zs} = \frac{\pi r^4}{4}$

- **Rohr**  
 $I_{ys} = I_{zs} = \frac{\pi (R^4 - r^4)}{4}$

**Halbkreis**

$$I_{y_s} = \left( \frac{\pi}{8} - \frac{\delta}{9\pi} \right) r^4$$

$$I_{z_s} = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$I_{y_s} = \frac{Bh^3 - bh^3}{12}$$

$$b = b_1 + b_2$$

$$I_{y_s} = \frac{Bh^3 + bh^3}{12}$$

$$B = B_1 + B_2$$

$$b = b_1 + b_2$$

**Biegspannung:**

$$\sigma_x = - \frac{M_b(x)}{I_z} \cdot y_{01n}$$

**Biegemoment:**

$$M_{y_{zul.}} = \frac{\sigma_{zul.} \cdot I_y}{z_{max.}}$$

$$M_{z_{zul.}} = \frac{\sigma_{zul.} \cdot I_z}{y_{max.}}$$

! Um welche Achse?

**Normalspannung:**

$$\sigma_x = \frac{N'}{A} - M \frac{y}{I}$$

**Zulässige Spannung:**

$$\sigma_{zul.} = \frac{\sigma_{max.}}{SF}$$

**Sicherheitsfaktor:**

$$SF = \frac{\sigma_{max.}}{\sigma_{zul.}}$$

**Wie gross soll Zugkraft sein, damit im Querschnitt keine Druckkräfte vorhanden sind?**

1. Trägheitsmoment berechnen,  $y_{max}$  bzw.  $z_{max}$
2. Nur Zugspannung:  
 $\Rightarrow \sigma(x) > 0!$
3. Zusammengesetzte Beanspruchung:  
$$\sigma(x) = - \frac{M_b \cdot y_{max}}{I} + \frac{N}{A} > 0 \Rightarrow \frac{N}{A} > \frac{M_b \cdot y_{max}}{I} \Rightarrow N > \dots$$

**Deformation**

**Dehnung (tot. Deformation):**

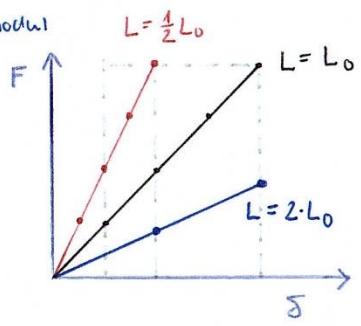
$$\delta = \frac{N \cdot L}{A \cdot E}$$

$E$  - Elastizitätsmodul

**Elastizitätsmodul:**

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

**rel. Verformung:**

$$\epsilon = \frac{\delta}{L_0}$$


**Bemerkungen:**

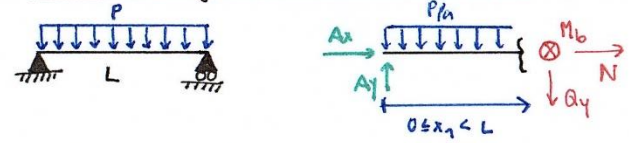
- Wenn System aus mehreren Teilen besteht: jeden Abschnitt  $\delta$  einzeln bestimmen (mit Beanspruchung)
- Wenn System aus zwei <sup>versch.</sup> Materialien besteht, welche fest verbunden sind  $\Rightarrow$  Dehnung ( $\delta$ ) gleich!

**Vorgehen**

**Bestimmung v. Bewegungszuständen:**

- Identifikation / Markierung starrer Körper
- Momentanzentren der Systemteile mit äusseren Lagern (Gelenke) oder Anlagern bestimmen
- Mit SolpG bzw. SVM alle Bewegungszustände des Systems bestimmen
- evtl. Unbek. Geschwindigkeit annehmen und mittels zweier Projektionen berechnen

**Beanspruchung mit konst. vert. Kraft:**



$$KB(x): Ax + N = 0$$

$$KB(y): Ay - x_1 \cdot \frac{P}{L} = 0$$

$$MB(z, \cdot): Ay - \frac{x_1}{2} \cdot x_1 \cdot \frac{P}{L} = 0$$

(\*) "variable Strecke mal Kraft pro Strecke"

(\*\*) "Der Angriffspunkt ist die Hälfte der variablen Strecke ( $\rightarrow$  quadratisch!)"

**Neutralachse bestimmen: (Bsp. y-Achse)**

$$y_{NA} = \frac{\sum A_i \cdot y_{si}}{\sum A_i}$$

$y_{si}$  - Körperigele Schwerpunkte  
 $y$  - Achsenabstände

Hier: 
$$\frac{2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 1 \cdot 1.5}{(2 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + (3 \cdot 1)} = \dots$$

$\rightarrow$  auch: Gesamtschwerpunkt bestimmen

$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$5^3 = 125$	$6^3 = 216$
$2^4 = 16 = 4^2$	$3^4 = 81$	$5^4 = 625$	$6^4 = 1296$
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$		
$2^6 = 64 = 4^3$	$3^6 = 729$		
$2^7 = 128$			
$2^8 = 256 = 4^4$			
$2^9 = 512$			

Diagonale Quadrat:  $\sqrt{2}a \rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Raumdiagonale Würfel:  $\sqrt{3}a \rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

Scheibe berührt Oberfläche, an der sie abrollt  $\rightarrow$  Momentanzentrum