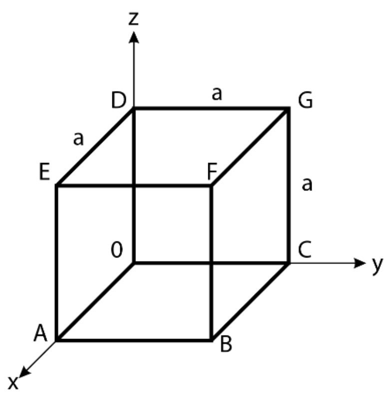
Mechanik in Biologie und Medizin (MBM)

Prof. J. Snedeker , Wiederholungsprüfung HS 2012

Musterlösung

Aufgabe 1 *(13 Punkte)*

Vom dreidimensionalen Bewegungszustand eines Starrkörper-Würfels mit Kantenlänge a sei folgendes bekannt:



$$v_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 4v \\ 2v \end{pmatrix}$$
$$v_B = \begin{pmatrix} -v \\ ? \\ 2v \end{pmatrix}$$
$$\omega = \begin{pmatrix} ? \\ v/a \\ ? \end{pmatrix}$$

a) Gesucht: $\vec{\omega} \rightarrow \ \vec{v}_A = \ \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \overline{AB}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4v \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ v_{By} \\ 2v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ v/a \\ w_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v + w_z a \\ ? \\ 2v - w_x a \end{pmatrix}$$

$$2v = 2v - w_x a \rightarrow w_x = 0$$
$$0 = -v + w_z a \rightarrow w_z = \frac{v}{a}$$
$$=> \ \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ v/a \\ v/a \end{pmatrix}$$

Für $\vec{v}_B$:

$$4v = b_y + 0 \rightarrow b_y = 4v; \rightarrow \vec{v}_B = \begin{pmatrix} -v \\ 4v \\ 2v \end{pmatrix}$$

b) Idee: Invariante $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A$ oder $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_B$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v/a \\ v/a \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4v \\ 2v \end{pmatrix} = \left(\frac{4v^2}{a} + \frac{2v^2}{a} \right) = \frac{6v^2}{a} \neq 0$$

i.e. keine Rotation

c) Gesucht: Dyname im Punkt 0:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F_i} = \overrightarrow{F_G} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 P \\ k_2 P \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_{AB}} = \overline{AB} \times F_B = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{2}P \\ -\sqrt{2}P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a\sqrt{2}P \end{pmatrix}$$

$$M_0 = M_{AB} + \overline{0G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}aP \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 P \\ k_2 P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}aP \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} aP(k_2 - k_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aP(k_2 - k_1) \\ 0 \\ \sqrt{2}aP \end{pmatrix}$$

d) Fallunterscheidung: $R \cdot M_0 = \cdots$ (invariante)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ k_1 P \\ k_2 P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} aP(k_2 - k_1) \\ 0 \\ \sqrt{2}aP \end{pmatrix} = \sqrt{2}k_2 aP^2 \neq 0$$

- Moment/ Kräftepaar: $R = 0, M_0 \neq 0 \rightarrow \ k_1 = k_2 = 0$
- Einzelkraft: $R \neq 0, R \cdot M_0 = 0 \rightarrow \ k_1 \neq 0, k_2 = 0$
- Schraube: $R \cdot M_0 \neq 0 \rightarrow \ k_1, k_2 \in \{\mathbb{R}\backslash 0\}$ (beliebig ausser 0)

e) Gesamtleistung des Systems:

$$P = R \cdot \ v_0 + M_0 \cdot \omega$$

$$R = \sum F_i = \begin{pmatrix} 0 \\ kP \\ kP \end{pmatrix}$$

$$v_0 = v_A + \omega \times \overline{A0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4v \\ 2v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v/a \\ v/a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4v \\ 2v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3v \\ 3v \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ kP \\ kP \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3v \\ 3v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}aP \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{a} \\ \frac{v}{a} \end{pmatrix}$$

$$= 3vkP + 3vkP + \sqrt{2}vP = 6vkp + \sqrt{2}vP = vP(6k + \sqrt{2})$$

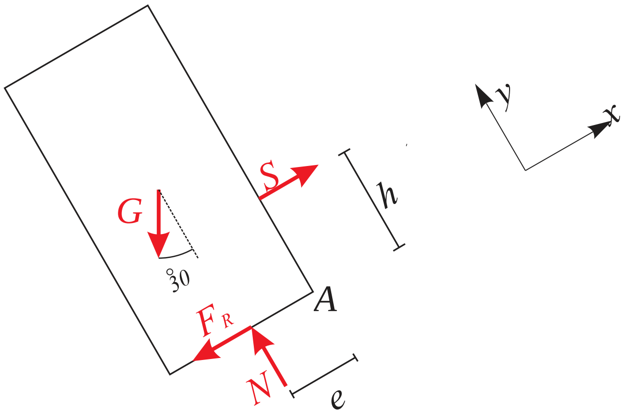
f) Gleichgewicht -> $R = 0, M_0 = 0$

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ kP \\ kP \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ kP + F_y \\ kP + F_z \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} 0 \rightarrow F_x = 0, F_y = F_z = -kP$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}aP \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_{Dx} \\ M_{Dy} \\ M_{Dz} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} 0 \rightarrow M_{Dx} = M_{Dy} = 0, M_{Dz} = -\sqrt{2}aP$$

Aufgabe 2

Freischnittskizze:



Gleichgewicht:

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= 0: \quad S - \frac{G}{2} - F_R = 0 \\
\sum F_y &= 0: \quad N - \frac{\sqrt{3}}{2}G = 0 \\
\sum M_{Az} &= 0: \quad \frac{G}{2}L + \frac{\sqrt{3}}{2}G\frac{L}{2} - eN - hS = 0
\end{aligned}$$

Wenn die Kiste hochgezogen wird, herrscht **Gleitreibung**: $F_R = \mu_1 N$

Aus $\sum F_x$ und $\sum F_y$ folgt:

$$S = \frac{G}{2} + F_R = \frac{G}{2} + \mu_1\frac{\sqrt{3}}{2}G = \frac{3}{2}G$$

Die Kiste beginnt zu **kippen** bei $e = 0$. Dann folgt aus $\sum M_{Az}$:

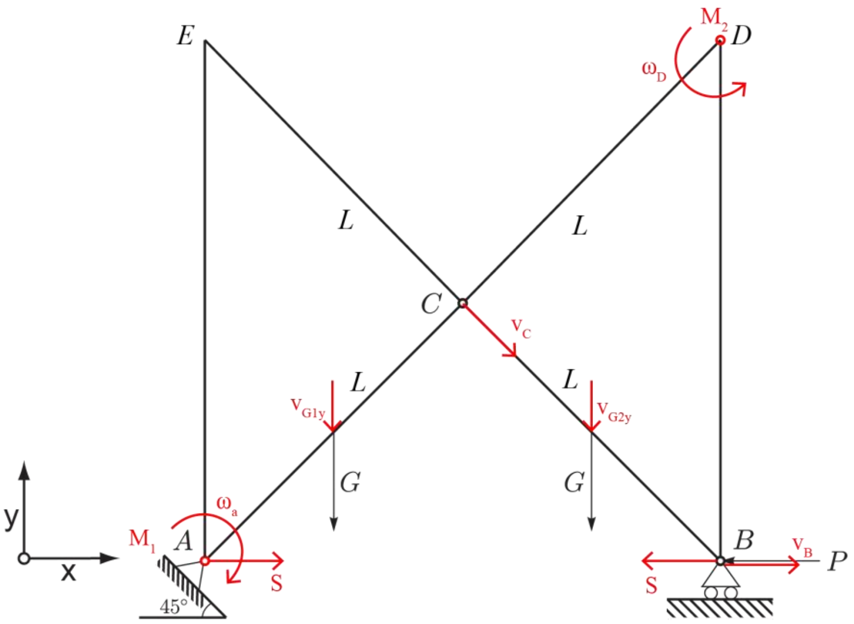
$$GL\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - h_{max}S = 0$$

Mit Einsetzen von S folgt:

$$\underline{\underline{h_{max} = L\frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{2}}}} \approx 0.6L$$

Aufgabe 3

Eingezeichnete Kräfte:



a)

$$v_c = \omega_A \cdot L = \omega_D \cdot L \rightarrow \ \omega_A = \omega_D = \omega$$

$$v_{G1y} = \omega \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot l$$

$$v_{G2y} = \omega \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot l$$

$$v_B = \omega \cdot \sqrt{2} \cdot l$$

PDVL:

$$P = v_{G1y}G + v_{G2y}G - v_B S = \frac{\sqrt{2}}{4} lG + \frac{\sqrt{2}}{4} lG - \omega\sqrt{2}lP - \omega\sqrt{2}lS \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

$$\frac{G}{2} - P - S = 0 \rightarrow S = \frac{G}{2} - P$$

b) Fallunterscheidung:

- Druck: $S < 0$
- Zug: $S > 0$
- Nicht belastet: $S = 0$

Aufgabe 4

Formel für Flächenmoment 2. Grades: $I_z = \frac{h^3 b}{12}$

a)

Gesucht: I_y, I_z, C_{yz}

$$I_y = \frac{(4a)^3 4a}{12} - \frac{(3a)^3 2a}{12} = \frac{101}{6} a^4$$

$$I_z = \frac{(4a)^3 4a}{12} - \frac{(2a)^3 3a}{12} = \frac{58}{3} a^4$$

$$C_{yz} = 0$$

Da x,y Achsen -> Hauptachsen des Querschnitts (Symmetrie)

Lösung auch möglich durch aufteilen der Flächen und zusammenzählen

b)

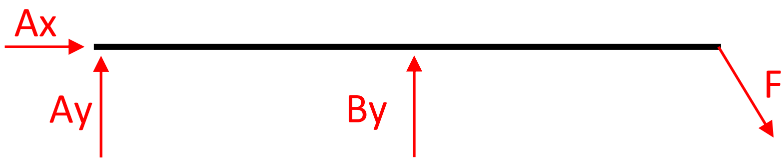
Gesucht: I_y, I_z, C_{yz}

$$I_y = 2\frac{a^3 a}{12} = \frac{a^4}{6}$$

$$I_z = 2\left(\frac{a^3 a}{12} + a^2 a^2\right) = \frac{13a^4}{6}$$

$$C_{yz} = 0$$

Aufgabe 5



a)

$$A_x + \sin(\alpha) \cdot F = 0 \rightarrow A_x = -\sin(\alpha) \cdot F$$

$$A_y + B_y - \cos(\alpha) \cdot F = 0 \rightarrow A_y = \cos(\alpha) \cdot F - B_y$$

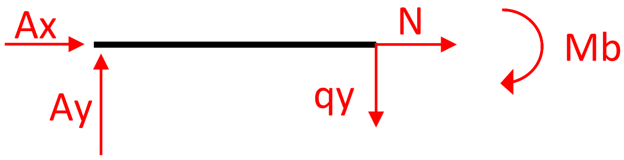
$$-B_y \frac{L}{2} + \cos(\alpha) F L = 0 \rightarrow \; B_y = 2\cos(\alpha)\, F$$

$$A_y = \; \cos(\alpha)\, F - 2\cos(\alpha)\, F = -\cos(\alpha)\, F$$

b)

Beanspruchung

- Teil1:



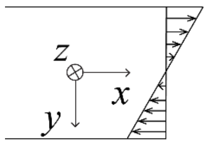
$$A_x = -N \rightarrow N = -A_x = \sin(\alpha) \cdot F$$
$$q_y = A_y$$
$$M_b = -A_y x = \cos(\alpha)\, Fx \rightarrow \max f\ddot{u}r\ x = \frac{l}{2}$$

- Teil2:

$$A_x = \sin(\alpha) \cdot F$$
$$q_y = A_y + B_y = \cos(\alpha)\, F$$
$$M_b = -A_y x - B_y \left(x - \frac{l}{2}\right) = \cos(\alpha)\, Fx - 2\cos(\alpha) \left(x - \frac{l}{2}\right) F \rightarrow \max f\ddot{u}r\ x = l/2$$

c) siehe oben

d) Biegespannung:



e)

$$\sigma\left(x = \frac{l}{2}, y\right) = \frac{\cos(\alpha)\, F}{2I_z} \cdot y$$

f)

$$M_b = 0 \; if \; \alpha = {}^{\pi}/_{2}$$