Aufgabe 2

Lösung:

a) Ist der Betrag eines Vektors konstant gilt

$$\sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} = k \Rightarrow \underline{u} \cdot \underline{u} = k^2$$

wobei k eine Konstante ist. Leiten wir diese Gleichung unter Verwendung der Kettenregel ab erhalten wir

$$2\underline{u} \cdot \dot{\underline{u}} = 0 \Rightarrow \underline{u} \cdot \frac{d\underline{u}}{dt} = 0$$

b) Ist die Richtung eines Vektors konstant gilt

$$\underline{u}(t) = k(t) \cdot \underline{n}$$

und somit

$$\dot{\underline{u}}(t) = \dot{k} \cdot \underline{n} + k(t) \cdot \dot{\underline{n}},$$

wobei $\dot{n} = 0$, da Richtung konstant.
Daraus folgt, $\underline{u}(t) || \dot{\underline{u}}(t) \Rightarrow \underline{u}(t) \times \dot{\underline{u}}(t) = 0$.

c) Ist eine Vektor parallel zu einer festen Ebene E, die durch die beiden Vektoren $\underline{w}$ und $\underline{v}$ aufgespannt wird, kann dieser in der Form

$$\underline{u}(t) = a(t)\underline{w} + b(t)\underline{v}$$

geschrieben werden, wobei $\underline{w}$ und $\underline{v}$ wie bereits in b) als konstant angenommen werden. Die Ableitungen nach der Zeit finden wir als

$$\dot{\underline{u}}(t) = \dot{a}(t)\underline{w} + \dot{b}(t)\underline{v}$$
$$\ddot{\underline{u}}(t) = \ddot{a}(t)\underline{w} + \ddot{b}(t)\underline{v}.$$

Somit folgt aus $\underline{u}||E \Rightarrow \dot{\underline{u}}||E$ und $\ddot{\underline{u}}||E$, woraus wiederum folgt $\ddot{\underline{u}} \times \dot{\underline{u}} \perp E$ und daraus $(\ddot{\underline{u}} \times \dot{\underline{u}}) \cdot \underline{u} = 0$.

Aufgabe 2

Lösung:

a) Der Ortsvektor in zylindrischen Koordinaten ist gegeben durch

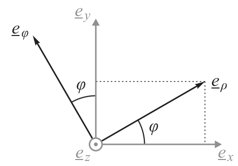
$$\underline{r} = \rho\underline{e}_\rho + z\underline{e}_z.$$

Leiten wir diesen nach der Zeit ab erhalten wir

$$\dot{\underline{r}} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\underline{e}}_\rho + \dot{z}\underline{e}_z + z\dot{\underline{e}}_z$$
$$\dot{\underline{e}}_z = 0, \text{ da } \underline{e}_z \text{ konstant ist}$$

Um die Ableitung $\dot{\underline{e}}_\rho$ zu berechnen, stellen wir den Richtungsvektor mithilfe von kartesischen Koordinaten dar.

$$\underline{e}_\rho = \cos(\varphi)\underline{e}_x + \sin(\varphi)\underline{e}_y$$
$$\underline{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\underline{e}_x + \cos(\varphi)\underline{e}_y$$



Damit erhalten wir

$$\dot{\underline{e}}_\rho = -\dot{\varphi}\sin(\varphi)\underline{e}_x + \dot{\varphi}\cos(\varphi)\underline{e}_y = \dot{\varphi}\underline{e}_\varphi$$

und schlussendlich

$$
\begin{aligned}
\underline{\dot{r}} &= \underline{v} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{z}\underline{e}_z \text{ oder} \\
v_\rho &= \dot{\rho} \\
v_\varphi &= \rho\dot{\varphi} \\
v_z &= \dot{z}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\underline{v} &= \frac{\pi}{2} R\omega \cos(\omega t)\underline{e}_\varphi + R\dot{\varphi}\tan(\alpha)\underline{e}_z \\
&= \frac{\pi}{2} R\omega \cos(\omega t) \cdot \left[\underline{e}_\varphi + \tan(\alpha)\underline{e}_z\right]
\end{aligned}
$$