Aufgabe 1

Gesucht: Komponenten in sphärischen Koordinaten
Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{e}}_r &= r(t)\underline{e}_r(\theta(t),\psi(t))\\
\underline{e}_r &= \sin(\theta)\cos(\psi)\,\underline{e}_x + \sin(\theta)\sin(\psi)\,\underline{e}_y + \cos(\theta)\,\underline{e}_z\\
\underline{e}_\theta &= \cos(\theta)\cos(\psi)\,\underline{e}_x + \cos(\theta)\sin(\psi)\,\underline{e}_y - \sin(\theta)\,\underline{e}_z\\
\underline{e}_\psi &= -\sin(\psi)\,\underline{e}_x + \cos(\psi)\,\underline{e}_y
\end{aligned}$$

Ableiten nach der Zeit ergibt

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{e}}_r = {} & \dot\theta\cos(\theta)\cos(\psi)\,\underline{e}_x - \dot\psi\sin(\theta)\sin(\psi)\,\underline{e}_x\\
& + \dot\theta\cos(\theta)\sin(\psi)\,\underline{e}_y + \dot\psi\sin(\theta)\cos(\psi)\,\underline{e}_y - \dot\theta\sin(\theta)\,\underline{e}_z
\end{aligned}$$

und nach Verwendung der Definitionen von $\underline{e}_\theta$ und $\underline{e}_\psi$ erhalten wir

$$\dot{\underline{e}}_r = \dot\theta\underline{e}_\theta + \dot\psi\sin(\theta)\,\underline{e}_\psi.$$

Damit finden wir die Ableitung des Orstvektors

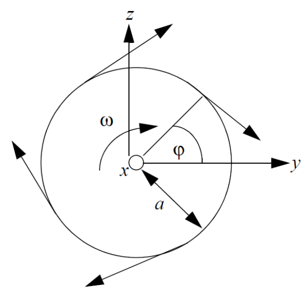
$$\begin{aligned}
\dot{\underline{r}} &= \dot r\underline{e}_r + r\dot{\underline{e}}_r\\
&= \dot r\underline{e}_r + r\dot\theta\underline{e}_\theta + r\sin(\theta)\,\dot\psi\underline{e}_\psi
\end{aligned}$$

Und die einzelnen Komponenten der Geschwindigkeit in sphärischen Koordinaten

$$\begin{aligned}
v_r &= \dot r\\
v_\theta &= r\dot\theta\\
v_\psi &= r\sin(\theta)\,\dot\psi
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gesucht: Geschwindigkeiten in Funktion von φ sowie Schnelligkeit
Lösung:



Die Rotationsgeschwindigkeit ist gegeben mit

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den Vektor von allen Punkten mit Abstand a von der Drehachse finden wir durch

$$\underline{OA} = \begin{pmatrix} x \\ a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \end{pmatrix}$$

wobei x ein beliebiger Wert ist, und somit berechnet sich die Geschwindigkeit

$$
\begin{aligned}
\underline{v}_A &= \underline{v}_0 + \omega \times \underline{OA} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \omega a \sin\varphi \\ -\omega a \cos\varphi \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Schlussendlich bestimmen wir die Schnelligkeit

$$
\dot{s}_A = |\underline{v}_A| = \sqrt{\omega^2 a^2 \left(\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2\right)} = \omega a
$$

Aufgabe 3

Gegeben: Rotationsachse $\underline{e}_w$, Rotationsschnelligkeit ω.
Gesucht: Geschwindigkeiten $\underline{v}_B$, $\underline{v}_F$ und $\underline{v}_C$.
Lösung:

Aus der Zeichnung wissen wir, dass

$$
\underline{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

ist.

Die Geschwindigkeiten der Punkte finden wir über

$$
\underline{v}_M = \underline{\omega} \times \underline{NM},
$$

wobei N ein Punkt auf der Rotationsachse ist und M in unserem Fall die Punkte O, C und F sind. Mit

$$
\underline{BO} = \underline{CF} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

und

$$
\underline{CC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

da auf der Rotationsachse, finden wir

$$
\underline{v}_O = \underline{v}_F = \frac{a\omega}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{v}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$