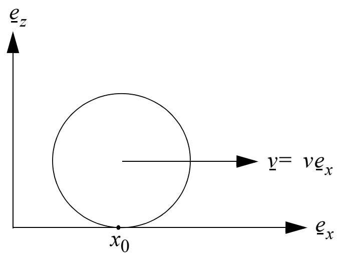
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

# Mechanik I: Kinematik und Statik - HS 2018
# Lösung Hausübung 5

## Aufgabe 1

Gegeben: Zylinder mit Radius R, $\underline{v} = v\,\underline{e}_x$
Gesucht: Punkte mit $\underline{v} = \underline{0}$, momentane Rotationsachse und $\underline{\omega}$
Lösung:




Im Berührungspunkt $x_0$ gilt $\underline{v} = \underline{0}$. Im diesem Punkt ist auch die momentane Rotationsachse. Rotationsgeschwindigkeit:

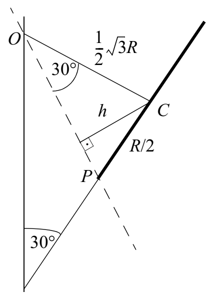
$$\underline{\omega} = \frac{v}{R}\,\underline{e}_y$$

Rotationsaschse:

$$\mu: \quad \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 2

Gegeben: Kreischeibe auf Welle (in $O$ gelagert), rollt auf Kugel mit Radius $R$, $v$
Gesucht: Rotationsachse, Fläche, $\omega$
Lösung: Die Rotationsachse geht durch $O$ und $P$ da beide Punkte in Ruhe sind. Die Fläche die durch die momentane Rotationsachse generiert wird beschreibt eine Kegelfläche.




$$|\underline{OC}| = |\underline{SC}|\tan(30°) = \frac{3}{2}R\tan(30°) = \frac{3}{2}R\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}R} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30°$$

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{3}R\sin(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}R\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}R$$

$$|\underline{\omega}| = \frac{v}{h} = \frac{v}{\frac{\sqrt{3}}{4}R} = \frac{4}{3}\sqrt{3}\frac{v}{R} = 0.4\frac{1}{\mathrm{s}}$$

## Aufgabe 3

Gegeben: Rollender Kegel, $\underline{v}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\underline{\omega}| = \omega$

Gesucht: Rotationsachse, $\underline{v}_P$, $\underline{v}_M$, Zeit für eine Umdrehung um $\underline{e}_z$
Lösung:

a) Die momentane Rotationsachse ist die Kontaktlinie zwischen Kegel und $xy$-Ebene und geht durch $O$.

$$\mu: \quad \underline{r}(p) = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\underline{v}_P = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{OP}$$

$$\underline{v}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \sqrt{3}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}a\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_M = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{OM}$$

$$\underline{v}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3a}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}a}{2}\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Zeit $T$ für eine Umkreisung um die $z$-Achse:
Um die Zeit auszurechnen benutzen wir den Punkt M, da dieser sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, welche wir bereits in b) ausgerechnet haben.

$$\underline{v}_M = -\frac{\sqrt{3}}{2}aw\underline{e}_y$$

Der Weg den der Punkt M bei einer Umdrehung zurücklegen muss beträgt

$$L = 2\pi \left( \underline{OM} \cdot \underline{e}_x \right) = 2\pi \cdot \frac{3a}{2} = 3a\pi$$

Damit berechnen wir die Dauer einer Umdrehung

$$T = \frac{L}{|\underline{v}_M \cdot \underline{e}_y|} = \frac{3a\pi}{\frac{\sqrt{3}a}{2}\omega} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{\omega}$$