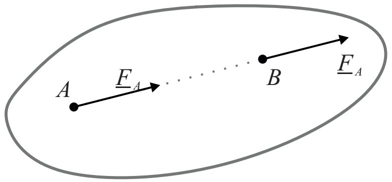
**Mechanik I: Kinematik und Statik - HS18**

# Lösung Hausübung 7

## Aufgabe 1




**Gegeben:**
Punkt $A$ mit Kinemate $\{\underline{v}_A, \underline{\omega}\}$
Kraft $F$ mit Angriffspunkt in $A$

**Gesucht:**
Beweise, dass sich die Leistung nicht ändert, wenn dieselbe Kraft in einem Punkt $B$, der entlang der Wirkungslinie dieser Kraft liegt, angreift.

**Vorgehen:**
Allgemeine Bewegungsgleichung $\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{AB}$

**Lösung:**
Es gilt $P_A = \underline{F}_A \cdot \underline{v}_A$ und $P_B = \underline{F}_A \cdot \underline{v}_B$ mit $\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{AB}$

$$\begin{aligned} P_B &= \underline{F}_B \cdot \underline{v}_B \\ &= \underline{F}_A \cdot (\underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{AB}) \\ &= \underline{F}_A \cdot \underline{v}_A + \underline{F}_A \cdot (\underline{\omega} \times \underline{AB}) \end{aligned}$$

$\underline{F}_A$ ist parallel zu $\underline{AB}$ und damit senkrecht zu $(\underline{\omega} \times \underline{AB})$.
Es gilt deswegen $\underline{F}_A \cdot (\underline{\omega} \times \underline{AB}) = 0$ .

$$P_B = \underline{F}_A \cdot \underline{v}_A + 0 = \underline{F}_A \cdot \underline{v}_A = P_A \qquad \text{q.e.d}$$

## Aufgabe 2

**Gegeben:**

Geschwindigkeiten: $\underline{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_C = \begin{pmatrix} -v \\ 2v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_D = \begin{pmatrix} -v \\ v \\ v \end{pmatrix}$

Kräfte: $\underline{F}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix} \quad \underline{F}_F = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ -F \end{pmatrix} \quad \underline{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix}$

**Gesucht:**
Finde eine Kraft $\underline{F}_A$ in $A$ mit Wirkungslinie durch $C$ und derselben Gesamtleistung wie die drei oberen Kräfte.

**Vorgehen:**
Verschieben der Kräfte entlang ihren Wirkungslinien durch die Punkte $B$, $C$, $D$ in Punkte wo die Geschwindigkeiten bekannt sind ($B$ und $D$).
Verschieben der Kraft $\underline{F}_A$ durch $C$.
Leistungen gleich setzen.

**Lösung:**

$$\begin{aligned} P_E &= \underline{F}_E \cdot \underline{v}_E = \underline{F}_E \cdot \underline{v}_B = 0 \\ P_G &= \underline{F}_G \cdot \underline{v}_G = \underline{F}_G \cdot \underline{v}_D = -Fv \\ P_F &= \underline{F}_F \cdot \underline{v}_F = \underline{F}_F \cdot \underline{v}_D = 0 \end{aligned}$$

Die Richtung von A ist bekannt:

$$\underline{F}_A = f_A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \underline{F}_A \cdot \underline{v}_A = \underline{F}_A \cdot \underline{v}_C = f_A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v \\ 2v \\ 0 \end{pmatrix} = 2vf_A - vf_A = vf_A$$

$$P = vf_A = P_E + P_G + P_F = -Fv \quad \Rightarrow \quad f_A = -F$$

$$\underline{F}_A = \begin{pmatrix} -F \\ -F \\ F \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 3

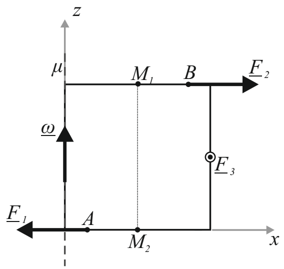
**Gegeben:**
Kräftegruppe $G$ ($\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$, $\underline{F}_3$) mit den Beträgen $F$, $F$, $\sqrt{2}F$.
Rotationsgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ um Mantellinie $\mu$.

**Gesucht:**
Leistung der Kräftegruppe. Berechnung auf mindestens zwei Arten.

**Vorgehen:**

a) Kräfte als Vektoren schreiben.
$\underline{F}_1$ und $\underline{F}_2$ entlang ihrer Wirkungslinie auf den respektiven Kreismittelpunkt auf der Zylinderachse ($M_1$, $M_2$) verschieben.
Leistung berechnen:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i \cdot \underline{v}_i$$




b) Resultierende Kraft $R_K$ und Moment $M_K$ bezüglich beliebigem Punkt $K$ berechnen. Leistung berechnen:

$$P = \underline{v}_K \cdot \underline{R}_K + \underline{\omega} \cdot \underline{M}_K$$

**Lösung:**

a)

$$\underline{F}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}F \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{F}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{F}_3 = \sqrt{2}F \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_{M_1} = \underline{v}_{M_2}$$

$$P = \underline{F}_1 \cdot \underline{v}_{M_1} + \underline{F}_2 \cdot \underline{v}_{M_2} + \underline{F}_3 \cdot \underline{v}_C$$
$$P = \frac{\sqrt{2}}{2}FR\omega + \frac{\sqrt{2}}{2}FR\omega + (-2)\sqrt{2}FR\omega$$
$$P = -\sqrt{2}FR\omega$$

b) Berechne Moment und Resultierende in $M$.

$$\underline{R}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{M}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}FR \\ -\sqrt{2}FR \end{pmatrix}$$

$$P = \underline{v}_M \cdot \underline{R}_M + \underline{\omega} \cdot \underline{M}_M = -\sqrt{2}FR\omega$$