Aufgabe 1

Gegeben:
Zwei homogene Quadratplatten mit Gewicht G und $4G$ auf einer reibungslosen Oberfläche.
Kraft F und Linienkraft $q(y)$

Gesucht:

a) Parameter γ für Systemgleichgewicht

b) Welche Platte ist kritischer bezüglich Kippen? Was ist der kritische Wert für F?

Lösung:

a) Berechne resultierende Kraft und Angriffspunkt von der Linienlast q:

$$
\begin{aligned}
R &= \int_0^{2L} \gamma(1-(\frac{y}{2L}-1)^2)\,dy \\
&= \gamma \int_0^{2L} (\frac{y}{L}-\frac{y^2}{4L^2})\,dy \\
&= \gamma(\frac{4L^2}{2L}-\frac{8L^3}{12L^2}) \\
&= \gamma(2L-\frac{2L}{3}) = \frac{4}{3}\gamma L
\end{aligned}
$$

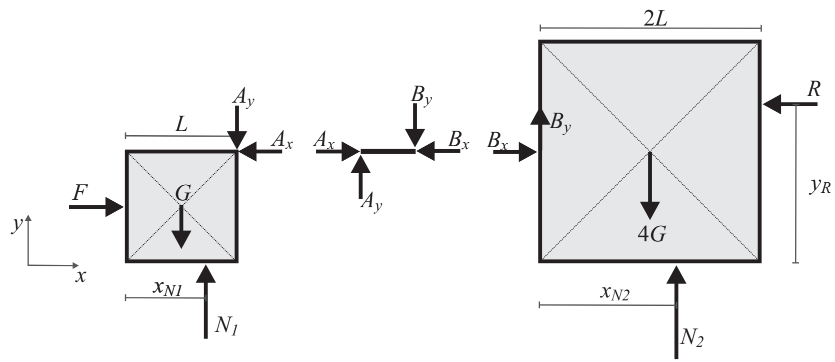
Angriffspunkt der resultierenden Kraft:

$$
\begin{aligned}
x_R &= \frac{1}{R}\int_0^{2L} \gamma(1-(\frac{y}{2L}-1)^2)y\,dy \\
&= \frac{3}{4L}\int_0^{2L} (\frac{y^2}{L}-\frac{y^3}{4L^2})\,dy \\
&= \frac{3}{4L}(\frac{8L^3}{3L}-\frac{16L^4}{16L^2}) \\
&= \frac{3}{4L}(\frac{8L^2}{3}-L^2) = \frac{3}{4L}\cdot\frac{5}{3}L^2 = \frac{5}{4}L
\end{aligned}
$$

Kräftegleichgewicht in x-Richtung am Gesamtsystem:

$$
\sum F_x: \quad F - R = 0 \quad \Rightarrow \quad F = R = \frac{4}{3}\gamma L
$$
$$
\Rightarrow \gamma = \frac{3F}{4L}
$$

b) Trenne das System in Subsysteme:



Durch das Momentengleichgewicht am Stab in A oder B kann gesehen werden, dass $A_y = B_y = 0$ gelten muss.

Die Kräftegleichgewichte in x-Richtung an allen Subsystemen ergeben dass $A_x = B_x = F$, während die Gleichgewichte in y-Richtung die Berechnung der Normalkräfte erlauben:

$$N_1 = G$$
$$N_2 = 4G$$

Berechnung des Angriffspunktes der Normalkraft am kleinen Würfel (Momentengleichgewicht):

$$\sum M_z: \quad x_{N1}N_1 + A_x L - \frac{L}{2}F - \frac{L}{2}G = 0$$
$$\Rightarrow \quad x_{N1} = \frac{1}{G}\left(\frac{L}{2}F + \frac{L}{2}G - FL\right)$$
$$\Rightarrow \quad x_{N1} = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{F}{G}\right)$$

Berechnung des Angriffspunktes der Normalkraft am grossen Würfel (Momentengleichgewicht):

$$\sum M_z: \quad x_{N2}N_2 - B_x L - L4G + Ry_R = 0$$
$$\Rightarrow \quad x_{N2} = \frac{1}{4G}\left(LF + L4G - F\frac{5}{4}L\right)$$
$$\Rightarrow \quad x_{N2} = L\left(1 - \frac{F}{16G}\right)$$

Bedingungen für Standfestigkeit:
Kleine Quadratplatte $0 \leq x_{N1} \leq L$.
Da $L, F, G > 0$ reduziert sich die Bedingung auf $x_{N1} \geq 0$:

$$\frac{L}{2}\left(1 - \frac{F}{G}\right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad F \leq G$$

Grosse Quadratplatte $0 \leq x_{N2} \leq 2L$.

Da $L, F, G > 0$ reduziert sich die Bedingung auf $x_{N2} \geq 0$:

$$L\left(1 - \frac{F}{16G}\right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad F \leq 16G$$

Die kleine Quadratplatte kippt zuerst (wenn $F \geq G$ ist).

Aufgabe 2

Gegeben:
Homogene Quadratplatte mit Gewicht G, in O und A nach Skizze gelagert. Linienkräfte q_1 und q_2

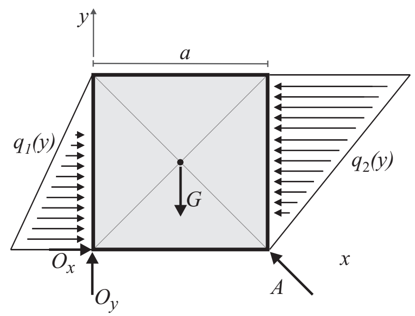
Gesucht:

a) Lagerreaktionen in O und A

b) Bedingung für Systemruhe

Lösung:

a) Bestimme die lineare Linienlast q_1: Allgemeine Form $q_1(y) = C_1 y + C_2$
Da $q_1(0) = \frac{F}{a} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{F}{a}$
Aus $q_1(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{F}{a^2}$ ergibt sich dann $q_1(y) = \frac{F}{a}(1 - \frac{y}{a})$



Kräftegleichgewichte:

$$\sum F_x: \quad O_x - \int_0^a 2F\frac{y}{a^2}\,dy + \int_0^a \frac{F}{a}(1-\frac{y}{a})\,dy - \frac{A}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad O_x - F + \frac{F}{2} - \frac{A}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad O_x - \frac{F}{2} - \frac{A}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sum F_y: \quad O_y + \frac{A}{\sqrt{2}} - G = 0$$

Momentengleichgewicht in O:

$$\sum M_z^O: \quad a\frac{A}{\sqrt{2}} + \int_0^a 2F\frac{y}{a^2}y\,dy + \int_0^a \frac{F}{a}(1-\frac{y}{a})y\,dy - \frac{aG}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a\frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{2aF}{3} - aF\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) - \frac{aG}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a\frac{A}{\sqrt{2}} + aF\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right) - \frac{aG}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{\sqrt{2}}{2}(G-F)$$

Berechne die Lagerreaktionen in O:

$$O_x = \frac{F}{2} + \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{F}{2} + \frac{1}{2}(G-F) = \frac{G}{2}$$

$$O_y = G - \frac{A}{\sqrt{2}} = G - \frac{1}{2}(G-F) = \frac{1}{2}(G+F)$$

b) Bedingung für Systemruhe: $A \geq 0$ (kein Abheben)

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(G-F) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad F \leq G$$