Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

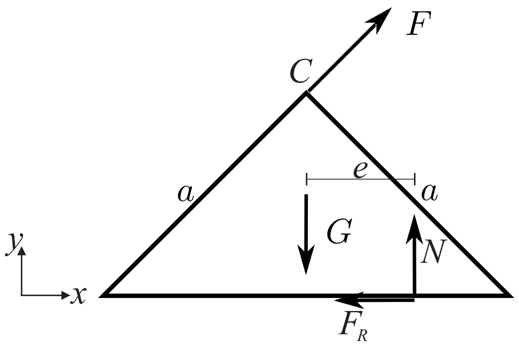
Mechanik I: Kinematik und Statik - HS18
Lösung Hausübung 11

Aufgabe 1

Gegeben:
Dreieckige Platte mit Gewicht G, aufgelegt auf einer rauen Oberfläche (Haftreibungskoeffizient μ_0) und belastet durch Kraft F

Gesucht:
a) Bedingung für F damit das System nicht rutscht.
b) Bedingung für F gegen damit das System nicht kippt.

Lösung:



a) Kräftegleichgewichte:

$$\sum F_x: \quad \frac{\sqrt{2}}{2}F - F_R = 0 \quad \Rightarrow \quad F_R = \frac{\sqrt{2}}{2}F$$
$$\sum F_y: \quad \frac{\sqrt{2}}{2}F - G + N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = G - \frac{\sqrt{2}}{2}F$$

Damit die Platte nicht abhebt muss gelten:

$$N > 0 \quad \Rightarrow \quad F < \sqrt{2}G$$

Bedingung damit das System nicht rutscht: $|F_R| < \mu_0|N|$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}F < \mu_0\left(G - \frac{\sqrt{2}}{2}F\right)$$
$$(1+\mu_0)F < \sqrt{2}\mu_0 G$$
$$F < \frac{\sqrt{2}\mu_0}{1+\mu_0}G$$

b) Momentgleichgewicht in C:

$$\sum M_z^C: \quad eN - \frac{\sqrt{2}}{2}aF_R = 0 \quad \Rightarrow \quad e = \frac{\sqrt{2}aF_R}{2N}$$

Bedingung damit das System nicht kippt: $|e| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}a$

$$\left|\frac{\sqrt{2}aF_R}{2N}\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}a$$
$$F_R \leq N$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}F \leq G - \frac{\sqrt{2}}{2}F$$
$$2F \leq \sqrt{2}G$$
$$F \leq \frac{\sqrt{2}}{2}G$$

Damit Kippen möglich ist muss die kritische Kraft für Kippen kleiner sein als die für Gleiten, es muss daher $\mu_0 > 1$ gelten.

Aufgabe 2

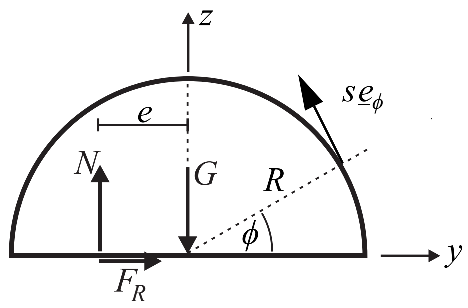
Gegeben:
Halbzylinder (Radius R, Länge $2R$, Gewicht G)
Flächenkraftdichte $\underline{s} = s\underline{e}_\phi$

Gesucht:

a) Reaktionskräfte am Halbzylinder.

b) Bedingung für p damit das System in Ruhe ist.

Lösung:



a) Berechne die Komponenten der Flächenkraft im kartesischen Koordinatensystem:

$$s = p\frac{y^2}{R^2}$$

$$s_y = s\sin(\phi) = p\frac{y^2}{R^2}\sin(\phi) = p\frac{(R\cos(\phi))^2}{R^2}\sin(\phi) = p\cos^2(\phi)\sin(\phi)$$

$$s_z = s\cos(\phi) = p\frac{y^2}{R^2}\cos(\phi) = p\frac{(R\cos(\phi))^2}{R^2}\cos(\phi) = p\cos^3(\phi)$$

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_y: \quad F_R - 2Rp\int_0^\pi \cos^2(\phi)\sin(\phi)Rd\phi = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_R = 2R^2p\left[-\frac{1}{3}\cos^3(\phi)\right]_0^\pi$$

$$= 2R^2p\left[-\frac{1}{3}\cos^3(\pi) + \frac{1}{3}\cos^3(0)\right] = \frac{4}{3}R^2p$$

$$\sum F_z: \quad N - G + 2Rp\int_0^\pi \cos^3(\phi)Rd\phi = 0$$

$$\Rightarrow \quad N = G + 2R^2p\cdot 0 = G$$

$$\sum M_x: \quad -eN + 2R\cdot R\int_0^\pi sRd\phi = 0$$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{1}{G}2R^3\frac{pR^2}{R^2}\int_0^\pi \cos^2(\phi)Rd\phi$$

$$= \frac{1}{G}2R^3p\left[\frac{\phi}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\phi)\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{G}2R^3p\frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^3 p}{G}$$

Bedingung gegen Kippen: $|e| \leq R$

$$\left|\frac{\pi R^3 p}{G}\right| \leq R$$

$$|p| \leq \frac{G}{\pi R^2}$$

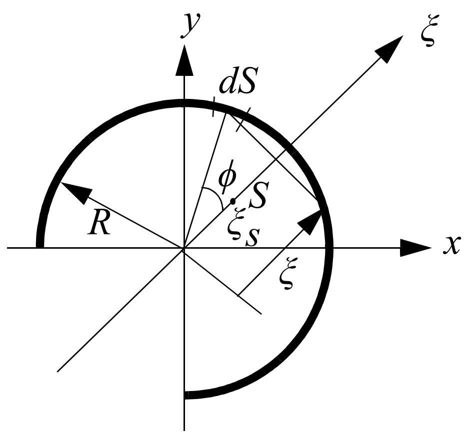
Bedingung gegen Gleiten: $|F_R| < \mu_0 N$

$$\begin{aligned}\left|\frac{4}{3}R^2 p\right| &< \mu_0 G\\ |p| &< \mu_0 \frac{3G}{4R^2}\\ |p| &< \frac{G}{4R^2} \quad \text{(Stärkere Einschränkung)}\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gegeben:
Homogener Dreiviertel-Kreisbogen
Gesucht:
Schwerpunkt ξ_S.

Lösung:



Masse pro Einheitslänge:

$$\lambda = \frac{m}{\frac{3R2\pi}{4}} = \frac{2m}{3R\pi}$$

Schwerpunkt:

$$\begin{aligned}\xi_S &= \frac{2\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \xi \cdot \lambda \cdot R d\phi}{2\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \lambda \cdot R d\phi}\\ &= \frac{\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \xi d\phi}{\int_0^{\frac{3\pi}{4}} d\phi}\\ &= \frac{\int_0^{\frac{3\pi}{4}} R\cos(\phi) d\phi}{\frac{3\pi}{4}}\\ &= \frac{4R}{3\pi}\big[\sin(\phi)\big]_0^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}R\end{aligned}$$