Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mechanik I: Kinematik und Statik - HS18
Lösung Hausübung 12

IMES

Aufgabe 1

Gegeben:
System gemäss Skizze

Gesucht:

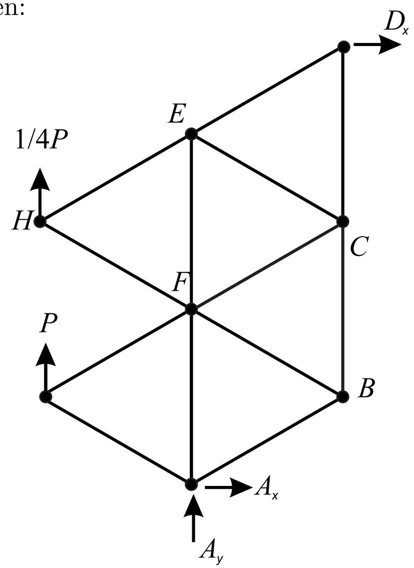
a) Seilkraft
b) Lagerreaktionen
c) Berechnung der Stabkraft CF mit PdvL
d) Minimaler Wert für μ damit der Klotz nicht rutscht.

Lösung:

a) Das Kräftegleichgewicht am oberen Rad in x-Richtung wurde aufgestellt um die Seilkraft zu ermitteln:

$$-2S_H + \frac{P}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_H = \frac{1}{4}P \tag{1}$$

b) Lagerreaktionen:



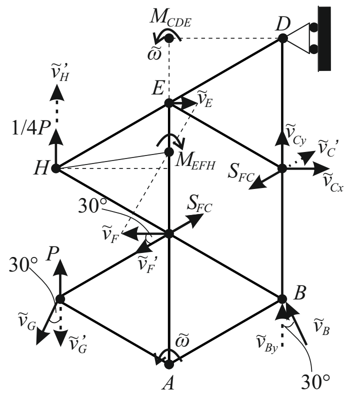
Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum M_z^A: \quad LP\frac{\sqrt{3}}{2} + LP\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} + LD_x\frac{5}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_x = -\frac{\sqrt{3}}{4}P$$

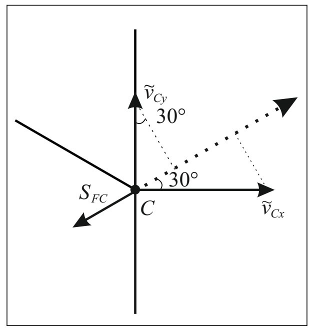
$$\sum F_x: \quad A_x + D_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = -D_x = \frac{\sqrt{3}}{4}P$$

$$\sum F_y: \quad P + \frac{1}{4}P + A_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = -\frac{5}{4}P$$

c) Die Skizze zeigt einen zulässigen Bewegungszustand für das PdvL (Rotation in A). Das Seil wird als äussere Kraft am Fachwerk eingeführt.



PdVL mit Rotation in A.



Projektionen Punkt C.

Anbei sind ein paar Zwischenschritte notiert die schlussendlich zur Lösung führen:

1) Starrkörper erkannt: $ABFG$, EFH, CDE.
2) Einführen einer zulässigen Rotationsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}_{ABFG} = \tilde{\omega}$ in A.
3) $\underline{\tilde{v}}_F$ hat nur eine Komponente in x-Richtung, daher muss auch $\underline{\tilde{v}}_E$ in x-Richtung zeigen (SdpG).

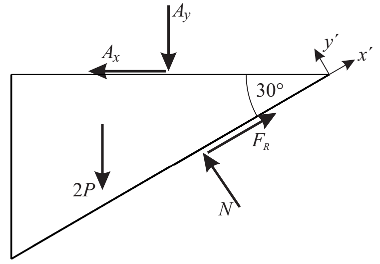
4) Momentanzentrum CDE steht senkrecht zur Geschwindigkeiten $\underline{\tilde{v}}_E$ und $\underline{\tilde{v}}_D$.
5) Parallelogrammregel angewendet $\rightarrow$ $\tilde{\omega}_{CDE}$ zeigt gegen den Uhrzeugersinn.
6) ω_{CDE} kann bestimmt werden, da $\tilde{v}_{By} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{\omega}L$ und $\tilde{v}_{Dy} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{\omega}L$ $\rightarrow$ $\tilde{\omega}_{CDE} = \tilde{\omega}$ (oder direkt aus Parallelogrammregel).
7) Momentanzentrum EFH liegt auf dem Stab EF bei $\frac{L}{3}$, da $\tilde{v}_E$ gerade halb so gross ist wie in F.
8) $\tilde{v}_F = \tilde{\omega}L$ ist und $\tilde{v}_E = \frac{1}{2}\tilde{\omega}L$ $\rightarrow$ $\tilde{\omega}_{EFH} = \frac{3}{2}\tilde{\omega}$.
9) Folgende Projektionen sind für den PdvL relevant:
   $\tilde{v}'_F = \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{\omega}L$, $\tilde{v}'_G = \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{\omega}L$, $\tilde{v}'_H = 3\frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{\omega}L$.
   Nun fehlt noch die Projektion der Geschwindkeit in C.
10) Die y-Komponente der Geschwindigkeit von C ($\tilde{v}_{Cy}$) entspricht $\tilde{v}_{By} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{\omega}L$. Die horizontale Komponente der Geschwindigkeit von C ist der rechtwinklige Abstand, also die Länge L multipliziert mit $\tilde{\omega}$. Das ergibt $\tilde{v}_{Cx} = \tilde{\omega}L$.
    Die Projektion von $\underline{\tilde{v}}_C$ in Stabrichtung ergibt $v'_C = \frac{3\sqrt{3}}{4}\tilde{\omega}L$.
11) Als nächster Schritt wird die virtuelle Leistung berechnet und diese dann gleich null gesetzt.

$$0 = L\tilde{\omega}\left(-S_{CF}\frac{\sqrt{3}}{2} - S_{CF}\frac{3\sqrt{3}}{4}\right) - L\tilde{\omega}P\frac{\sqrt{3}}{2} + L\tilde{\omega}\frac{3P}{4}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

12) Im letzten Schritt wird nach S_{CF} aufgelöst.

$$\Rightarrow \quad S_{CF} = -\frac{1}{4}P$$

d) Gleichgewichtsbedingungen im Klotz:



$$\sum F'_x: \quad F_R - P - \frac{1}{2}A_y - \frac{\sqrt{3}}{2}A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_R = \frac{3}{4}P$$

$$\sum F'_y: \quad N - \sqrt{3}P - \frac{\sqrt{3}}{2}A_y + \frac{1}{2}A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{\sqrt{3}}{4}P$$

N und F_R einsetzen in $|F_R| \leq \mu|N|$ ergibt $\mu \geq \sqrt{3}$.

Aufgabe 2

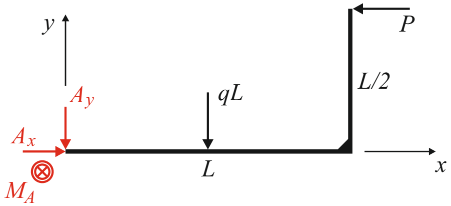
Gegeben:
Starrer Körper, welcher aus gewichtslosen Stäben besteht.
Linienkraft q und Kraft P

Gesucht:

a) Statische Bestimmtheit
b) Beanspruchung in allen Stäben.

Lösung:

a) Das System ist statisch bestimmt, da 3 unbekannte Lagerreaktionen angreifen und 3 Gleichungen aufgestellt werden können (2D)



b) Gleichgewichtsbedingungen:

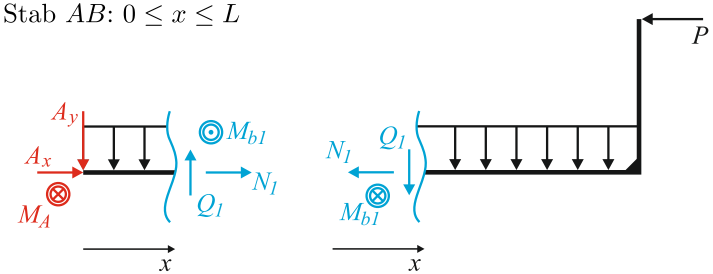
$$\sum F_x: \quad A_x - P = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = P$$

$$\sum F_y: \quad A_y + qL = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = -qL$$

$$\sum M_z^A: \quad M_A + qL\frac{L}{2} - P\frac{L}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = P\frac{L}{2} - q\frac{L^2}{2}$$

Merke: Bestimmung der Bindungskräfte nicht notwendig!
Freischnitte

Stab AB: $0 \leq x \leq L$

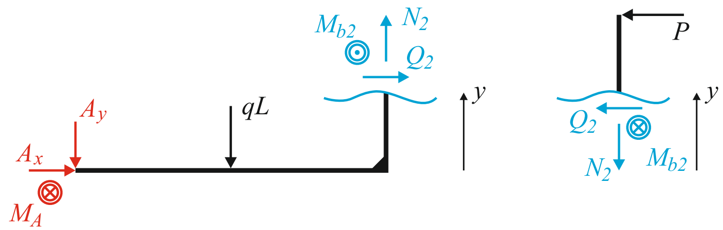


$$N_1 = -P$$

$$Q_1 = -q(L - x_1)$$

$$M_{b1} = -\frac{q}{2}(L - x_1)^2 + \frac{PL}{2}$$

Stab BC: $0 \leq y \leq {}^{L}\!/_{2}$



$$N_2 = 0$$

$$Q_2 = -P$$

$$M_{b2} = P\left(\frac{L}{2} - y\right)$$